



## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>стр 3</b>
<b>Глава I. Постановка задачи оптимального управления экономическим ростом.....</b>	<b>стр6</b>
§ 1.1 Системный анализ экономического роста Азербайджанской Республики на современном этапе.....	стр6
§ 1.2 Типы и факторы экономического роста.....	стр14
§ 1.3 Экономический рост – как сложная экономико-кибернетическая система.....	стр26
<b>Глава II. Модели экономического роста и их использование в прогнозировании макроэкономических показателей.....</b>	<b>стр 39</b>
§ 2.1. Классические модели стационарного роста экономики.....	стр 39
§ 2.2. Магистральные модели экономического роста фон Неймана.....	стр 48
§ 2.3 Применение магистральных моделей в прогнозирования основных макроэкономических показателей Азербайджанской Республики.....	стр 54
<b>III ГЛАВА. Эконометрическое моделирование и прогнозирование экономического роста.....</b>	<b>стр60</b>
§ 3.1. Построение однофакторных и многофакторных корреляционно-регрессионных моделей.....	стр60
§ 3.2. Прогнозирование временных рядов экономических показателей.....	стр73
§ 3.3. Постановка и решение задачи прогнозирования экономического роста в Азербайджанской Республике.....	стр87
<b>Заключение.....</b>	<b>стр92</b>
<b>Литература.....</b>	<b>стр95</b>
<b>Приложения.....</b>	<b>стр96</b>

## Введение

**Актуальность темы.** Актуальной проблемой системы хозяйствования в нынешних условиях глобализации и экономического кризиса является стремление национальных экономик к макроэкономическому равновесию. Эта ключевая категория экономической теории и экономической политики, характеризующая сбалансированности и пропорциональности экономических процессов производства и потребления, предложения и спроса, производственных затрат и результатов, материально-вещественных и финансовых потоков. Равновесие отражает тот выбор, который устраивает всех в обществе.

Путь к равновесию проходит через экономический рост. Поэтому одной из приоритетных задач экономической политики Азербайджанской Республики в нынешних условиях глобализации экономики и финансовых кризисов является стимулирование экономического роста, поддержание его темпов в стабильном и оптимальном уровне.

Ключевыми вопросами исследования экономико-кибернетической системы экономического роста является анализ экономических объектов и процессов, а также отыскание траекторий стационарного роста, экономическое прогнозирование, предвидение развития экономического роста, выработка оптимальных управленческих стратегий на всех уровнях экономики.

Актуальность темы магистерской диссертации определяются этими соображениями - необходимостью разработки оптимальных стратегий экономического роста в Азербайджанской Республике на базе эконометрического моделирования.

**Состояние изученности проблемы.** В нынешних условиях глобализации экономики экономический рост национальных экономик представляет собой переход её к новому, более высокому уровню, то есть он может быть рассмотрен как составляющая циклического экономического развития.

В последние годы как общетеоретические, так и прикладные вопросы экономического роста стали предметом специальных исследований в научных трудах учёных Азербайджанской Республики.

Вместе с тем, современные условия хозяйствования и диверсификации экономики требует проведение системных исследований по оптимальному управлению и прогнозированию экономического роста в республике.

**Цель и задачи исследования.** Целью данной диссертации является вопрос оптимального экономического роста и её прогнозирования на примере зависимости роста ВВП страны от влияния определённых факторов.

Для достижения поставленной цели в магистерской диссертации поставлены и решены следующие системные задачи:

- Осуществлён системный анализ экономического роста Азербайджанской Республики за последние 20 лет;
- Выявлены основные кибернетические характеристики экономического роста и сформулирована задача его оптимального управления;
- Составлены классические модели стационарного экономического роста;
- Приведены магистральные модели экономического роста Фон-Неймана и сделана попытка их адаптации к реалиям прогнозирования экономического роста в Азербайджанской экономике;
- Рассмотрены вопросы построения эконометрических моделей роста и выбора инструментариев оценки их адекватности;
- Поставлена и решена задача прогнозирования экономического роста Азербайджанской республики,

**Объектом исследования** является экономический рост Азербайджанской Республики.

**Предметом исследований** является количественные зависимости, объективно существующие между факторами и показателями экономического роста.

**Методология и методика исследования.** Теоретической и методологической основой магистерской диссертации послужила теория экономического роста в условиях рыночной экономики. В процессе исследований были использованы методы системного анализа, оптимального управления и эконометрического прогнозирования на базе экономико-математического и математико-статистического моделирования.

Магистерская диссертация состоит из введения, 3-х глав и заключения.

Во **введении** обоснованы актуальность исследований, проведённых в диссертации.

В **I-ой главе**, названной «Постановка задачи оптимального управления экономическим ростом» рассмотрены основные показатели экономического роста в Азербайджанской республике, анализированы типы и факторы экономического роста, выявлены кибернетические характеристики системы экономического роста.

Во **II-ой главе**, названной «Модели экономического роста и их использование в прогнозировании макроэкономических показателей» составлены классические модели стационарного роста экономики, магистральные модели экономического роста Фон-Неймана, выявлены возможности их применения в прогнозировании основных макроэкономических показателей Азербайджанской республики.

В **III-й главе**, названной «Эконометрическое моделирование и прогнозирование экономического роста» рассмотрены вопросы построения регрессионных и трендовых моделей для прогнозирования развития экономических систем, поставлена и решена задачи прогнозирования экономического роста в Азербайджанской Республике.

В **заключении** магистерской диссертации обобщены результаты, проведённых в работе научно-теоретических и прикладных исследований.

## **Глава I. Постановка задачи оптимального управления экономическим ростом**

### **§ 1.1 Системный анализ экономического роста Азербайджанской Республики на современном этапе**

За 20 лет своей независимости современный Азербайджан прошёл сложный и в то же время славный путь.

В конце XX столетия глубокий крах социалистического общественно-политического устройства и распад СССР привёл к политическому хаосу, экономическому параличу, состоянию социального коллапса и в Азербайджане. Положение в крайней степени усугубили начавшаяся накануне этого военная агрессия против нашей страны, оккупация 20 процентов территории Республики, изгнание одного миллиона азербайджанцев из родных очагов в результате проводимой армянскими агрессорами захватнической политики и политики геноцида.

С середины 90-х годов прошлого столетия под руководством великого лидера Гейдара Алиева наша страна стала постепенно возрождаться и предпринимать уверенные шаги, направленные на решение судьбоносных проблем. В первую очередь, была обеспечена устойчивость обрётённой государственной независимости и установлена политическая стабильность внутри страны.

Были также приняты действенные меры, направленные на утверждение макроэкономического баланса и обуздание существовавшей в то время гиперинфляции, с большой настойчивостью начато решение тяжёлых социальных вопросов.

Дальнейшее углубление в 2000-х годах, проводимых в Азербайджанской Республике широкомасштабных реформ, открыв благоприятные возможности для ускоренного развития, создало условия для подъёма общества на более высокую ступень социально-экономического прогресса. Были пред-

приняты важные шаги по улучшению инвестиционной среды в стране, государственное управление перестроено в соответствии с современными критериями.

Динамика экономического роста, получившая новый импульс с увеличением добычи и экспорта природных ресурсов, отмеченный в 2009 году, даже в условиях глобального экономического кризиса рост азербайджанской экономики являются свидетельством успешного осуществления избранного стратегического курса.

Последние десять с лишним лет (2003-2014 годы) запомнились для экономики Азербайджана как период бурного экономического развития. В истории Азербайджана достигнутый за данный период экономический рост не был зафиксирован за предыдущие годы. За период с 2003-го по 2013-й год ВВП Азербайджана возрос в 16 раз. Сейчас ВВП республики составляет 80% ВВП всего Южного Кавказа. За исследуемый период ВВП на душу населения вырос почти в 10 раз и общий годовой доход на душу населения вырос до 900 долларов. Наблюдается рост и других макроэкономических показателей. Если оценивать последние 10 лет с аспекта макроэкономического роста, то можно заметить различную тенденцию последних пяти лет. За последние 5 лет наблюдается как усиливающиеся темпы экономического роста, так и диверсификации экономики. Несмотря на то, что с 2010 года наблюдается резкий рост в не нефтяном секторе, эти снижения не предотвратили темпов роста ВВП. Это было связано с тем, что начиная с 2010 года, наблюдается резкий рост в не нефтяном секторе, что именно сохранило общие темпы роста ВВП.

Если учесть, что за последние годы темпы роста в не нефтяном секторе составили примерно 10 раз, то это значительно больше по росту в не нефтяном секторе по сравнению с другими странами СНГ. Это в свою очередь чрезвычайно важно с точки зрения устойчивости экономики. В то же время это привело к повышению доли ВВП в не нефтяном секторе на 56 %.

В таблице 1 отображена информация о динамике роста ВВП Азербайджана в нефтяном и в не нефтяном секторе экономики (млн. манат).

Таблица 1.

	2001	2005	2008	2009	2010	2011	2012
ВВП-всего	5315, 6	12522, 5	40137	35601, 5	42465, 0	52082, 0	53995, 0
Нефтегазо- вый сектор	1668, 2	5520,9	22251, 3	16065, 5	20409, 5	25829, 9	24509, 6
Ненефтяной сектор	3229, 0	6055,1	15197, 3	16726, 0	19197, 0	23196, 1	26165, 4

Как видно из таблицы, в 2012 году рост ВВП был обеспечен исключительно за счёт не нефтяного сектора.

Это очень важно с точки зрения устранения «синдрома нефтяной иглы», то есть устранения зависимости от нефтяного сектора. В целом же, последние 10 лет можно оценить как первое и второе пятилетие.

Характерной особенностью первого пятилетнего временного разреза (2003-2008 гг.) является развитие в нефтяном секторе и обеспечение экономического роста за счёт средств, полученных от нефтяных доходов. А второе пятилетие (2009-2013 гг.) может быть расщеплена больше с аспекта поддержки не нефтяного сектора для проведения разветвления в экономике. Впервые за последние десятилетие в 2012 году доля не нефтяного сектора в экспорте достигло двухзначного числа, а это в свою очередь является показателем того, что снизилась зависимость от нефтяного сектора в экспорте страны.

Конечно же, успехи достигнутого до сегодняшнего дня – это успехи последних 10 лет. Естественно, достижения, достигнутые за 1993-2013-е гг. сформировали крепкую опору для развития Азербайджана, мобилизовали интеллектуальную и креативную энергию общества для развития страны, в

социуме окончательное мнение по отношению к власти, начатая политика социально-культурной в то же время социально-экономической модернизации, сформированная на основе этих успехов начало реализоваться после избрания Президента страны Ильхама Алиева. Именно благодаря этой политике, сегодня Азербайджан находится в числе лидирующих стран в отчётах международных рейтингов и обладает конкурентно способной экономикой. Всё это было достигнуто в течении последних десяти с лишним лет. Поэтому последние десятилетие называют очередное «золотое десятилетие» современной истории Азербайджана.

Как отмечает газета «The Washington Times» Азербайджан стал одной из стран, которые оказались в центре внимания во всемирном экономическом форуме 2015 года в Швейцарском Давосе, где высокопоставленные участники форума высоко оценили экономический рост Азербайджана. «Экономически прогрессивной и имеющий большой потенциал для дальнейшего развития» считает Азербайджан и авторитетное американское издание «Foreign Affairs», особо отмечая его благоприятных перспектив для развития. Как отмечает данный влиятельный журнал, который во многом формирует общественное мнение не только в самих США, но и в мире, за последние десять лет Азербайджан был одной из наиболее быстро растущих экономик мира. Богатые запасы углеводородов и тщательное планирование позволили Азербайджану построить здоровую и перспективную экономику. Авторы статьи делают выводы, что в настоящее время Азербайджан готовится предпринимать новый скачок. Программа диверсификации экономики и ясное видение развития формируют будущее Азербайджана в качестве глобально конкурентоспособного игрока, создавая по пути многочисленные возможности для инвестиций.

Уникальность азербайджанского опыта экономического развития заключается в том, что двадцать лет назад Республика находился в глубоком политическом и экономическом кризисе. В постсоветской неопределённости

экономика Азербайджана находилась в свободном падении, наблюдалось резкое снижение объёмов производства и безудержная инфляция.

Возрождение экономики страны последовало за принятием новой нефтяной стратегии, определённой общенациональным лидером Гейдаром Алиевым, которая охватывала ряд соглашений о разделе продукции и историческое открытие нефтяного сектора Азербайджана, международным инвестициям «Контракт века» стал судьбоносным моментом в развитии Азербайджана. Крупномасштабное производство и строительство нескольких трубопроводов способствовали тому, что Азербайджан стал одним из крупнейших экспортёров нефти и газа. С тех пор Азербайджан пережил огромный экономический рост, который в среднем составлял 13,5% в течение последнего десятилетия. Страна обладает крупными валютными резервами, а около половины доходов от экспорта нефти собирается в государственном нефтяном Фонде (ГНФАР), который финансирует долгосрочные стратегические инвестиции в инфраструктуру и социально-экономическое развитие.

Для Азербайджанской Республики одной из приоритетных проблем является диверсификация экономики, в которой углеводороды составляет 90% от общего объёма экспорта страны. «За последние десять лет часть доходов, полученных от добычи нефти и газа, была направлена в развитие не нефтяного сектора, создание новых высокотехнологичных промышленных объектов и диверсификацию национальной экономики – недавно заявил президент Ильхам Алиев, – в результате в не нефтяном секторе наблюдается ежегодные темпы роста 10%».

Именно поэтому экономическая диверсификация стала краеугольным камнем основной концепции развития страны «Азербайджан 2020: взгляд в будущее». Концепция предусматривает превращение Азербайджана к 2020 году в политически развитую и экономически конкурентоспособную страну, применяемую своё региональное лидерство в глобальном масштабе. Особое внимание уделяется укреплению не нефтяной промышленности, переходу страны к экономике знаний и использованию стратегического положения

Азербайджана на пересечении международных торговых путей. Для инвесторов открываются новые возможности, особенно в целях дальнейшей региональной интеграции и быстрого прогресса в развитии инфраструктур и услуг Азербайджана.

По мнению авторитетных западных аналитиков, сильное экономическое развитие Азербайджана, политическая стабильность и приверженность к диалогу и сотрудничеству кардинально меняют международный авторитет страны, и он занимает достойное место на мировой арене.

Географическое положение Азербайджана и экономический потенциал страны требует от нас быть активным игроком в процессе региональной интеграции. Занимая перекрёсток между Востоком и Западом, у Азербайджанской Республики есть давняя традиция строить мосты между людьми и обществами.

В результате динамического развития Азербайджан установил тесные контакты и экономические связи с соседними государствами и другими странами региона, участвует в многочисленных региональных организациях, призывая к более тесному сотрудничеству.

Многие влиятельные аналитические центры мира связывают экономический успех Азербайджанской Республики политики открытых дверей, проводимой правительством страны по отношению к международным инвесторам, что превратило Азербайджан в страну, привлекательную для прямых иностранных инвестиций. В таблице 2 отражены данные, характеризующие динамики инвестиций в экономику страны.

Таблица 2.

Годы	В том числе	
	Нефтяной сектор, удельный вес в %	Не нефтяной сектор, удельный вес в %
2001	58,9	41,3
2005	65,2	34,8

2008	29,4	70,6
2009	26,6	73,4
2010	29,9	70,1
2011	24,3	76,0
2012	25,0	75,0

Проведённый системный анализ показывает, что между 1996 и 2013 годами страна привлекла более 100 млрд. долларов иностранных инвестиций. Только в 2013 году объём инвестиций составил 10,5 млрд. долларов. Традиционно инвестиции были направлены в нефтяной и газовый сектор. Но экономика Азербайджана дифференцируется и поэтому существенно увеличиваются потоки инвестиций в не нефтяные сектора, в частности в сельское хозяйство, в альтернативную энергетику, пищевую промышленность, информационные технологии и телекоммуникации, логистику и транспорт, а также туризм.

Повышению привлекательности Азербайджана для зарубежных инвесторов способствовала целая серия реформ. Чётко определены социальные, экономические и правовые условия инвестирования, была значительно упрощена система бизнес-реестра и налоговый механизм, направленный на защиту прав инвесторов.

Что же касается государственной инвестиционной программы на 2015 год, то, как отметит Президент страны И. Алиев на заседание кабинета Министров, посвящённые итогам социально-экономического развития в 2014 году, она будет отличаться от программы предыдущих лет, ибо, вкладываемые государством средства сократятся.

И это естественно, так как приоритеты были определены верно и осуществление в предыдущие годы многих грандиозных проектов создаёт возможности сократить инвестиционную программу. Но приоритеты есть и правительство намерено направить государственные инвестиции на устойчивое развитие. Поскольку, прежде всего должно быть обеспечено устойчивое раз-

витие страны, в то же время создание рабочих мест является постоянным процессом.

С начала государственной программы – с 2004 года по настоящее время были созданы один миллион 300 тысяч рабочих мест, что дало возможность сократить безработицу. Но этот процесс должен быть постоянным.

Итак, в течении последних 11 лет (2003-2014 гг.) Азербайджан с экономической и социальной точек зрения был наиболее развивающейся страной в мировом масштабе. Это подтверждается показателем реального экономического роста по стране. С 2004 года по сегодняшний день ВВП страны увеличился в 3,4 раза. Это рекордный показатель экономического роста в мировом масштабе. Промышленное производство выросло в 2,7 раза. Согласно информационной базе всемирного Банка за минувшие 10 лет реализации государственной программы рост в сфере сельского хозяйства в мировом масштабе составил 31,8%, в Азербайджане – 48,9%, то есть 17,1 процентных пунктов выше средних мировых показателей. Если за этот период рост продовольственной продукции составил 18%, то в нашей стране этот показатель – 39 процентов.

В течение 11 лет в экономику страны было вложено 180 миллиардов долларов инвестиций. Если в 2004 году валютные резервы страны составляли 1,8 миллиардов долларов, то сегодня они превышают 50 млрд. долларов. Сегодня наши валютные резервы реально работают. Благодаря этому курс маната остаётся стабильным. Несмотря на то, что мировые цены на нефть сильно упали, наши большие валютные резервы, продуманная макроэкономическая политика надёжно защищает нашу страну от влияния этого кризиса. В результате проведения мер, связанная с безработицей, она снизилась до 5 процентов, бедность тоже находится на уровне 5 процентов.

Ведущие кредитные рейтинговые агентства мира повысили суверенные рейтинги Азербайджана. Давосский Всемирный экономический форум дал нашей стране 38-место по конкурентоспособности в экономической сфере.

Таковы итоги экономического роста и экономического развития Азербайджанской Республики. Что же касается перспектив экономического роста, то Всемирный Банк улучшил прогноз экономического роста Азербайджана на 2015 год.

По данным обновлённого отчёта (январь 2015) рост ВВП Азербайджана в 2015 году ожидается на уровне 4,4%, а не 4,1%, как было прогнозировано ранее (5,9 млрд. манат). На 2016 год экономический рост прогнозируется на уровне 4,1%, а на 2017 год – на уровне 3,8%. Что же касается положительного сальдо платёжного баланса, то в 2014 году оно составило 12,6% от ВВП, а в 2015 году, этот показатель прогнозируется на уровне 9,8%, в 2016 году – 8,1%, в 2017 году – 5,3% ВВП.

Таким образом устойчивый и динамичный экономический рост создаёт благоприятные условия для фундаментального, социально-экономического развития Азербайджана и достойного уровня жизни населения.

## **§ 1.2 Типы и факторы экономического роста**

Одной из приоритетных задач экономической политики Азербайджанской республики в нынешних условиях глобализации экономики и финансовых кризисов является стимулирование экономического роста, поддержание его темпов в стабильном и оптимальном уровне. Поэтому необходим системный анализ тех факторов, влияние которых оказывает на рост экономики как стимулирующее, так и сдерживающее воздействие.

Согласно системному анализу, экономический рост представляет собой выход экономики за пределы ранее существовавших производственных возможностей, переход к её новому, более высокому уровню. Следовательно, он может быть рассмотрен как составляющая циклического экономического развития.

В целом экономический рост может быть представлен как развитие, при котором долгосрочные темпы роста производства устойчиво превышают темпы роста населения.

Экономический рост проявляется в увеличении реального ВВП, (ВВП) за определённый период времени (как правило за год). Отметим, что характеристикой экономического роста может выступить и увеличение реального ВВП на душу населения. Исходя из любого из этих проявлений, экономический рост измеряется годовыми темпами роста, то есть отношением разницы между реальным ВВП текущего года и реальным ВВП базисного года к реальному ВВП базисного года, выраженное в процентах.

Экономический рост измеряется двумя способами:

1. Как увеличение реального производства валового национального продукта (ВВП) или национального дохода;
2. Как прирост и того, и другого на душу населения.

Отметим, что выбор способа измерения экономического роста зависит от того, какая проблема и с какой целью анализируется. Существуют различные классификации факторов экономического роста. Наиболее распространённая и широкая из них включает две группы факторов:

- Факторы, определяющие источники экономического роста, то есть факторы, которые физически способствуют экономическому росту;
- Факторы, определяющие степень реализации источников экономического роста, то есть факторы-ограничители.

К факторам первой группы относятся такие факторы, как наличие природных ресурсов в количественном и качественном аспектах; количество трудовых ресурсов и их качественное состояние; объём основных производственных фондов (капитала) и их техническое состояние (изношенность, производительность, надёжность); технология (её новизна, внедряемость, быстрота её смены, результативность окупаемость).

К факторам же второй группы относятся такие факторы, как степень полноты и эффективности использования природных, производственных и

трудовых ресурсов, то есть обеспечение их оптимального распределения между сферами и отраслями экономики с целью их эффективного использования; эффективное и справедливое распределение растущего объёма ресурсов и растущего объёма реальной продукции (поскольку совокупный спрос определяется совокупными расходами то их необходимо увеличить с целью обеспечения полного использования возросшего объёма ресурсов); институциональные факторы, сдерживающее или стимулирующее экономический рост (факторы правового вектора: охрана труда, защита окружающей среды, мораль и традиции, трудовые конфликты и т.д.)

В целом экономический рост можно представить как результат воздействия следующих двух обобщённых факторов вместе и каждого в отдельности:

- Вовлечение большого количества ресурсов;
- Более эффективное использование этих ресурсов.

При таком подходе экономический рост выступает как мультипликативная функция, представляющая собой умножение затрат труда на его производительность.

Рассмотрим некоторые факторы экономического роста более подробно.

Природные ресурсы в качестве условий производства ограничены запасами в природе, их количество и доступность постепенно снижаются. Следовательно, общество должно учитывать это обстоятельство. Растущие масштабы вовлечения природных ресурсов в производство и несовершенство их переработки и использования порождают проблемы, приобретающие глобальное значение. Эти проблемы также можно разделить на две группы:

- Проблема, связанная с истощаемостью природных ресурсов;
- Проблема, связанная с последствиями использования ресурсов.

Суть первой проблемы сводится к тому, что пока общественное производство не столь активно развивалось, человек брал всё. Со временем проблема истощаемости ресурсов приобрела местный характер, затем региональный, а далее - национальный. Сегодня она выходит на мировой уровень.

Что же касается второй проблемы, то необходимо отметить, что последние полтора века прогресс в производительных силах привёл к настоящему экологическому кризису. Экологи оценивают сложившуюся ситуацию как критическую, сравнивая её порогом апокалипсиса. С экономической точки зрения сохранение окружающей среды ведёт к дополнительным затратам на устранение отрицательных последствий использования ресурсов или их предупреждения. Необходимость этих мер вступает в противоречие со стремлением получить максимальную прибыль, достижение которой осуществляется путём снижения издержек производства. Природные ресурсы являются источником роста с количественной стороны, обеспечивая растущие объёмы производства, а с качественной стороны источником роста выступает весь комплекс прилагаемых мер по оптимизации их использования. Само по себе природные ресурсы нейтральны по отношению к экономическому росту.

Рост населения и трудовых ресурсов традиционно рассматриваются как фактор, стимулирующий экономическое развитие. Для развивающихся стран с их избытком рабочей силы быстрый рост населения не всегда является позитивным явлением. Эффект от роста населения зависит от способности экономической системы создать рабочие места для новых работников. Это способность часто увязана с темпами накопления капитала и развитием таких факторов производства, как предпринимательская инициатива.

Накопление капитала имеет место, когда часть текущего дохода сберегается и инвестируется с целью увеличения будущих доходов. Новые производственные мощности, оборудования и материалы – всё это увеличивает запас физического капитала, которым располагает страна. Помимо этих прямых инвестиций в производство существуют также вложения в социальную и экономическую инфраструктуру – дороги, энергетику, коммунальное хозяйство и транспорт. Такие инвестиции сопутствуют производственным, обеспечивая общие условия для хозяйственной деятельности.

Инвестиции в человеческий капитал повышают качество рабочей силы и часто способны дать больший производственный эффект, чем рост числа занятых. Эффективность всех форм образования, в свою очередь, возрастает при соответствующих инвестициях в их материальную базу – оборудования, здания, учебные материалы. Качественная подготовка преподавателей и наличие хороших учебников по экономике могут внести существенный вклад в повышении квалификации и производительности работающих. Поэтому вложения в человеческий капитал аналогичны по своим результатам повышению качества земельных ресурсов посредством осуществления инвестиций.

Технический прогресс – третий базовый компонент роста – многие экономисты считают самым важным элементом вектора экономического роста. В своей простейшей форме он означает появление новых, более эффективных способов производства товаров. Существует три основных разновидности технического прогресса:

- нейтральный;
- трудосберегающий;
- капиталосберегающий.

Нейтральный технический прогресс имеет место, когда рост производства достигается при тех же объёме и структуре затрат факторов. Примером этого может служить такая простейшая инновация в производстве, как разделение труда (оно увеличивает производительность и возможности потребления, почти не требуя каких-то дополнительных затрат). В отличие от нейтрального капитала и трудосберегающий технический прогресс позволит увеличить производство при неизменных затратах какого-то одного фактора – капитала, либо труда. Компьютеры, автоматические агрегаты, тракторы – всё это и многие другие виды современных машин можно назвать трудосберегающими формами технического прогресса.

Капиталосберегающий технический прогресс – менее распространённое явление. Но это лишь потому, что почти все научные исследования ведутся в развитых странах, где задачи экономии труда стоит на первом месте.

Вышеперечисленные факторы относятся к внутренним факторам, способствующие экономический рост. Следовательно, можно выделить и внешние факторы роста. Внешние факторы экономического роста включают:

- Международное разделение труда, процессы глобализации, которые с одной стороны подавляют рост национальной экономики путём ввоза дешёвой продукции, а с другой – стимулирует экономический рост благодаря применению современных технологий, зарубежных инвестиций и кредитов;
- Политические факторы – организация политико-экономических союзов различных стран, введение эмбарго на поставку определённых видов продукции, предоставление или не предоставление режима благоприятствования, принятие или не принятие страны в тот или иной торгово-политический союз.

Факторы экономического роста можно классифицировать и с позиции взаимодействия спроса, предложения и распределения:

- Факторы предпочтения (природные ресурсы, трудовые ресурсы, объём основного капитала, технологии);
- Факторы спроса (уровень совокупных расходов);
- Факторы распределения (эффективное использование ресурсов).

Несмотря на важность факторов спроса и распределения, всё же основное внимание уделяется факторам предложения, так как именно они смещают кривую совокупного предложения вправо. К ним относятся такие факторы, как изменение цен на экономические ресурсы, изменения в производительности, изменения правовых норм.

Инвестиции выступают в качестве основного регулятора темпов экономического роста.

Факторы экономического роста можно группировать по-разному. В экономической литературе широкое распространение получила теория трёх факторов производства, родоначальником которого был Ж.Б. Сей. Суть её заключается в том, что в создании стоимости продукта принимает участие труд, земля и капитал. Поздняя трактовка производственных факторов получила более глубокое и расширенное трактование. К ним относят:

- Труд (количество и качество трудовых ресурсов);
- Землю (количество и качество естественных ресурсов и полученных на их основе оборотных фондов);
- Капитал (капитальные вложения (инвестиции) и основные фонды с учётом их технологического уровня, который обеспечивается научно-техническим прогрессом);
- Предпринимательские способности (понимаются не только как хозяйственная деятельность, но и как хозяйственный механизм, способствующий (или мешающий) этой деятельности).

Экономический рост можно обеспечить двумя путями: или увеличением затрат факторов производства, или улучшением применяемых технологий. С этими двумя путями экономического роста тесно связаны стратегические направления экономического развития: экстенсификация и интенсификация производства. Следовательно, можно различать двух типов экономического роста:

- Экстенсивный экономический рост, представляющий собой увеличение масштабов производства за счёт простого количественного расширения самих факторов производства;
- Интенсивный экономический рост, представляющий собой рост производства за счёт более эффективного (интенсивного) использования наличных факторов производства и технологий.

Проведём системный анализ выделенных типов экономического роста.

При экстенсивном экономическом росте увеличение общественного продукта происходит за счёт количественного увеличения факторов произ-

водства: вовлечение в производство дополнительных ресурсов труда, капитала (средств производства), земли. При этом технологическая база производства остаётся неизменной. Так, мелиорация земельных угодий и их распашка с целью получения большого количества зерновых культур, вовлечение всё большего и большего количества работников для строительства электростанций, производства всё большего количества нефтедобывающей техники – всё это примеры экстенсивного пути увеличения общественного продукта. При этом типе экономического роста прирост продукции достигается за счёт количественного роста численности и квалифицированного состава работников и за счёт увеличения мощности предприятия, то есть увеличение установленного оборудования. В результате выпуск продукции в расчёте на одного работника остаётся прежним или снижается. Поэтому он имеет ряд отрицательных характеристик, которые являются следствием несовершенства данного типа экономического роста.

Интенсивный путь экономического роста характеризуется увеличением масштабов выпуска продукции, который основывается на широком использовании более эффективных и качественно совершенных факторов производства. Рост масштабов производства, как правило, обеспечивается за счет применения более совершенной техники, передовых технологий, достижения науки, более экономичных ресурсов, повышения квалификации работников. За счёт этих факторов достигается повышение количества продукции, рост производительности труда, ресурсосбережения и т.д.

В условиях научно-технической революции, развернувшейся в середине прошлого столетия, в развитых странах мира преимущество получает интенсивный экономический рост.

В реальной жизни экстенсивный и интенсивный типы экономического роста не существуют отдельно в чистом виде, а сочетаются друг с другом в определённой комбинации. Поэтому различаются преимущественно экстенсивный или преимущественно интенсивный типы экономического роста в зависимости от степени преобладания одного над другим.

Возрастание роли НТП в осуществлении экономического роста привело к увеличению требований к размерам авансированного капитала, что бизнесом расценивается как возрастание предпринимательских рисков, так как возросла та часть капитала, которая имела больший срок окупаемости. В то же время экономический рост на базе НТП обещал столь высокие доходы, что крупный бизнес пошёл на такой риск. В результате экономический рост значительно повысил уровень благосостояния населения развитых индустриальных стран.

Кроме количественной характеристики экономического роста, в виде темпов роста ВВП необходимо её качественная оценка. В последние годы возникли серьёзные сомнения насчёт желательности экономического роста для стран, уже достигших высокого уровня благосостояния.

Основными аргументами сторонников данной идеи являются следующие:

- Загрязнение окружающей среды;
- Экономический рост не решает все проблемы;
- Отсутствие гарантий;
- Пренебрежение человеческими ценностями.

Суть первого аргумента сводится к тому, что практически все, что вовлекается в производство, со временем возвращается в окружающую среду в виде отходов, так как производственный процесс лишь преобразует ресурсы, но не утилизирует их полностью. Поэтому для стран с высоким уровнем развития производства (США, Англия, Германия, Япония и т.д.) реально существует угроза экологического кризиса.

Суть второго аргумента сводится к тому, что, например, уровень бедности в стране зависит не от объёма производства, а от сложившегося механизмов распределения национального дохода.

Что же касается отсутствия гарантий, то предполагается, что быстрый экономический рост несёт угрозу занятости, так как машины могут вытеснить людей, лишит их работы и доходов.

И последнее. Считается, что экономический рост означает индустриализации массового производства, которое не носит творческого характера и не приносит морального удовлетворения человеку.

С другой стороны, существуют серьёзные аргументы в защиту экономического роста:

- Повышение уровня жизни: в условиях экономического роста выбор приоритетных социальных целей становится менее острым. Можно решать несколько задач одновременно – модернизировать армию, оказать социальную поддержку бедным, улучшить систему образования и здравоохранения и т.д.
- Проблемы экономического роста и загрязнения окружающей среды можно разделить. Загрязнение является следствием не экономического роста, а нерационального использования ресурсов.

Значительная часть естественных ресурсов (реки, озёра, океаны и воздух) рассматривается как общая собственность и не имеет цены. Поэтому эти ресурсы используются чрезмерно интенсивно, что ухудшает их состояние. Прекращение экономического роста не решит проблему. В данном случае необходимо вмешательство государства, которое законодательно устанавливает экономические нормативы.

- Возможность достижения социального равновесия. В каждом обществе существуют свои представления о качестве жизни, однако везде признаётся, что люди должны быть обеспечены минимальными средствами к существованию. В случае экономического роста государству легче найти средства для решения проблемы бедности; рост национального дохода повышает благосостояния всего общества.
- Внешнеэкономические доводы. Замедление или прекращение роста не обеспечит автоматически «хорошую жизнь». Наоборот, консервация сложившихся экономических отношений приведёт к

упаду и деградации общества. Страны прогрессивного типа развития не могут просто взять и остановиться на одном месте. С другой стороны, следует помнить, что экономический рост приносит улучшение условий труда и позволяет людям тратить больше времени на образование, размышление и самореализацию.

Приведённые выше аргументы за и против экономического роста показывают, что в развитых странах произошёл переход от экстенсивного к интенсивному типу экономического роста. Вследствие обострения экологических проблем возникла идея так называемого «нулевого» роста. Её смысл как раз состоит в том, что нужно стремиться к расширению не количественному, а к качественному – не наращивать объёмы производства, а минимально полно удовлетворять разнообразные потребности отдельных индивидов и общества в целом.

В отличие от развитых государств развивающимся странам – в том числе и Азербайджану важны и количественные показатели экономического роста. Преимущество этих стран состоит в том, что они имеют возможность обходить «подводных рифов», то есть учесть ошибки и опыт развитых стран.

Американский учёный У. Ростоу в начале 60-х годов прошлого столетия разработал концепцию «пяти стадий роста», который остаётся актуальным и по сей день для мировой экономики.

Согласно концепции У. Ростоу, этими стадиями являются:

- Первая стадия – традиционное общество (сельское хозяйство, рутинная техника, землевладение, земельная рента);
- Вторая стадия – переходное общество, период создания предпосылок сдвига: увеличение капиталовложений в расчёте на душу населения, рост производительности сельского хозяйства, появление «предпринимателей»;
- Третья стадия - «сдвиг» промышленная революция, накопление капитала, быстрый рост промышленности, радикальная сцена ме-

тодов производства (по У. Росту, на этой стадии Англия находилась в конце XVIII столетия, Франция и США – в середине XIX века, Германия – во второй половине XIX века, Россия – в 1890-1914 годах, Индия и Китай – в начале 50-х годов XX столетия);

- Четвёртая стадия – «зрелость» индустриального общества: бурное развитие промышленности, возникновение новых отраслей производства, увеличение доли квалифицированного труда;
- Пятая стадия – эра «массового потребления», основными проблемами общества становятся проблемы потребления, а не производства, основными отраслями промышленности – сферу услуг и производство товаров массового потребления, а не традиционные отрасли.

Характеризуя сегодня развитие рыночного хозяйства, можно наблюдать его переход к новому качеству экономического роста. Это означает, что экономический рост осуществляется главным образом за счёт внедрения НТП, применение компьютерных, ресурсосберегающих технологий, в большей мере, чем прежде направлен на повышение качества выпускаемых товаров и услуг, на что толкает конкуренция; имеет ограничители, установленные правительством в целях сохранения здоровой экологической среды для жизнедеятельности человека. Выход экономического роста за эти пределы считается опасным для экономической системы.

Современные модели экономического роста сформировались на основе двух направлений неоклассического и кейнсианского направлений.

В центре неоклассического направления стоит идея оптимальности рыночной системы, рассматриваемой как совершенный саморегулирующийся механизм, позволяющий наилучшим образом использовать все производственные факторы и не только отдельному экономическому субъекту, но и экономике в целом.

Центральная проблема макроэкономики для кейнсианской теории – факторы, определяющие уровень и динамику национального дохода, его распределение.

Кейнс сосредоточил усилия на изучение составных частей спроса, то есть потребление и накопление, а также факторов, от которых зависит движение этих составных частей и спроса в целом.

В экономической литературе, посвящённой моделям и теориям экономического роста, как правило, в основном представлены факторная модель Кобба-Дугласа, модель Харрода-Домара, линейные стадии экономического роста У. Ростоу, структурные преобразования А. Льюнса, модель Солоу, модель внешней зависимости, неоклассическая и неокенсианская теория экономического роста, модель развития новых индустриальных стран.

Отметим, что среди моделей экономического роста особое внимание привлекает факторная модель Кобба-Дугласа, показывающая взаимодействие и взаимозаменяемость труда и капитала, насколько продукт обязан своим созданием тому или иному фактору, при какой их комбинации может быть достигнут максимум продукции при номинальных затратах.

### **§ 1.3 Экономический рост – как сложная экономико-кибернетическая система**

Постановка проблемы оптимального экономического роста Азербайджанской Республики, в том числе и такого важнейшего агрегата, как валовой внутренний продукт требует основательного и точного знания хозяйственного механизма и присущих ему законов функционирования и развития. Следовательно, нужен системный, кибернетический подход к выявлению сложных прямых и обратных связей в развитии экономики и формирования экономического роста.

Необходимость обеспечения сбалансированности или равновесия, а также необходимость обеспечения разнообразных связей по линиям трудо-

вых и материальных ресурсов, энергетического хозяйства, информации и финансов придают макроэкономической системе в целом, а также подсистеме экономического роста чрезвычайно динамичный и сложный характер. Именно поэтому решение проблемы оптимального экономического роста требует использования инструментарий эконометрики и методов кибернетики.

Важный результат, полученный теорией оптимального управления в связи с исследованием условий оптимального, сбалансированного экономического роста основных агрегатов (в том числе и валового внутреннего продукта) заключается в обосновании процесса экономического роста как сложной, динамической экономико-кибернетической системы. Отметим, что экономико-кибернетические системы отличаются от систем других классов тем, что в них в качестве важнейшего атрибута присутствует лицо, принимающее решение. Сознательно действующий этот человек выполняет функции управления, принятия решений и контроля. При выполнении этих функций задача состоит в обеспечении оптимального экономического роста исходя из общей цели (приоритета), причем должны учитываться как внутренние, так внешние воздействия.

Происходящие в экономико-кибернетической системе экономического роста процессы обусловлены разнообразными потоками рабочей силы, сырья, материалов, энергии, основных фондов и финансовых средств. Совокупность этих потоков образуют вектор входа системы экономического роста. Результаты протекающих в экономико-кибернетической системе процессов воплощаются в потоках, совокупность которых образует вектор выхода.

Если вектор входа системы экономического роста обозначить  $x$ , а вектор выхода  $y$ , то упорядоченная пара показателей  $(x, y) \in X \cdot Y$  будет характеризовать функционирование системы, то есть обеспечения экономического роста основных агрегатов, в том числе и валового внутреннего продукта страны. Здесь через  $X$  обозначено множество всех векторов входа системы, а через  $Y$  множество всех векторов выхода.

Если зависимость между входами и выходами системы экономического роста аналитически сводится к формулировке  $T: x \rightarrow y$ , то  $T$  будет оператором функционирования системы.

В случае, если множества векторов входа и выхода отвечают характеристикам евклидовых векторных пространств, то отношение норм векторов  $y$  и  $x$ , то есть показатель  $F(x, y) = \|y\| : \|x\|$  будет характеризовать эффективность экономического роста основных агрегатов макроэкономики.

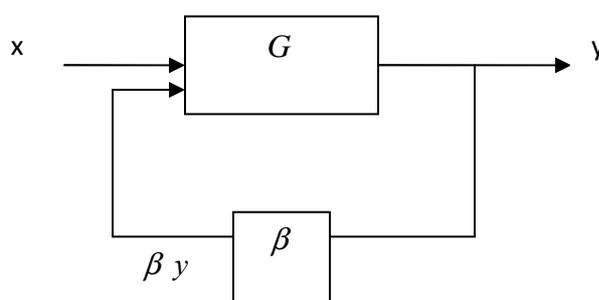
Отметим, что с позиции требований математической экономики особое значение имеет определение норм в векторных пространствах входов и выходов системы экономического роста. Так норма в векторном пространстве входных величин системы экономического роста должна отражать стратегию эффективного использования насыщенных запасов рынка. Одновременно норма в векторном пространстве выходных величин должна быть выражением общей стратегии экономического и социального развития республики.

Понятие связи и понятие обратной связи являются по существу ключевыми понятиями кибернетического подхода, составляют основу для осмысления поведения системы экономического роста. При этом важное место отводится анализу связи между элементами данной системы. Она выражает отношения структурных элементов, то есть то, что придает системе целостный, единый характер. Если бы комплекс взаимосвязей составных частей системы экономического роста вдруг исчез, то она тотчас превратилась бы в массу хаотичных элементов.

Для описания важнейших элементов системы экономического роста важную роль приобретает обратная связь. Отметим, что явления обратной связи носит весьма общий характер. Она имеет место не только в системе экономического роста, а во всех экономико-кибернетических системах как в их элементах, так и между элементами. Различие между прямой и обратной связями в экономико-кибернетических системах заключается в том, что прямая связь обеспечивает передачу воздействия информации с выхода одного элемента на вход другого элемента, а обратная связь с выхода некоторого

элемента на вход того же элемента. При этом необходимо различать положительную и отрицательную обратную связь.

Положительной обратной связью называют такую связь, при которой возбуждение, поступающее на вход системы по цепи обратной связи, действует на систему в том же направлении, что и основное возбуждение. Положительная обратная связь может эффективно применяться в поведении системы экономического роста. Допустим, что поведение экономико-кибернетической системы экономического роста характеризуется следующей блок-схемой (рисунок 1):



**Рис. 1. Блок-схема системы экономического роста.**

Итак, согласно блок-схеме, часть  $\beta$  валового внутреннего продукта  $y$  подается на вход системы и используется для ее расширения. В результате усиливается интенсивность входа системы и приводит к увеличению интенсивности выхода, то есть формированию экономического роста. Однако, безграничное нарастание входных величин, то есть неконтролируемая положительная обратная связь может привести к нежелательным результатам в виде нарушения равновесия спроса и предложения на рынке.

Противоположную, стабилизирующую роль в экономико-кибернетических системах может играть отрицательная обратная связь, при которой дополнительное возбуждение  $\beta y$ , поступающее на вход системы по цепи обратной связи, действует на систему в направлении, противоположном основному входу  $x$ .

Дадим математическую формулировку обратной связи. Допустим, что лицо принимающее решение анализирует вектор выхода  $y$  экономико-кибернетической системы (в частности системы экономического роста) и сравнивает его с намеченной стратегией развития, то есть с вектором  $\tilde{y}$ . Если между этими векторами имеются нежелательные расхождения, то орган управления подготавливает решение  $T_{st} \cdot y$ , где  $T_{st}$  - оператор управления. Если

$$|y - \tilde{y}| > \xi$$

то решение принимается и вектор входа системы принимает вид  $x + T_{st} \cdot y$ , а вектор выхода:

$$y = T_p (x + T_{st} \cdot y)$$

Допустим, что существует оператор  $T_p^{-1}$ , обратной оператору процесса  $T_p$ . Тогда имеем:

$$T_p \cdot y = x + T_{st} \cdot y$$

$$x = T_p^{-1} \cdot y - T_{st} \cdot y$$

$$x = (T_p^{-1} - T_{st})y$$

Далее предположим, что имеется оператор, обратной оператору  $(T_p^{-1} - T_{st})$ . Тогда вектор выхода экономико-кибернетической системы будет определяться следующим уравнением:

$$y = (T_p^{-1} - T_{st})^{-1} \cdot x$$

Из этого уравнения получим:

$$y = (E - T_p \cdot T_{st})^{-1} \cdot T_p \cdot x$$

где  $E$  - единичный оператор.

В результате получим следующий оператор обратной связи:

$$\hat{R} = (E - T_p T_{st})^{-1}$$

Уравнение для управления на основе оператора обратной связи имеет форму  $y = \hat{R} T_p x$ . Если же входные и выходные величины системы являются скалярными, а  $T_p$  и  $T_{st}$  - множителями  $\lambda$  и  $\gamma$ , то оператор обратной связи  $\hat{R}$

умножится на величину  $\hat{r} = 1/(1 - \lambda\gamma)$ , называемую множителем обратной связи. В этом случае для оператора обратной связи получим:

$$y = \frac{\lambda}{1 - \lambda\gamma} x = \hat{r}x$$

Отметим, что в системе экономического роста роль элемента отрицательной обратной связи играет рынок. При повышении спроса над предложением цены на продукции повышаются. В результате чего появляются дополнительные стимулы к экономическому росту- возрастают возможности вложения средств на вход системы. Наоборот, повышение предложения над спросом приводит к снижению цен и следовательно к уменьшению средств, поступающих на вход системы материального производство.

При исследовании системы экономического роста с целью обеспечения оптимального экономического роста важна исследование функций, присущей этой системе в рамках макроэкономической системы. Отметим, что функция здесь рассматривается как существенный признак экономических систем.

Для анализа функций системы экономического роста важное значение имеет внешняя среда данной экономической системы.

Если обозначить систему экономического роста через  $S_v$ , то внешнюю по отношению к данной экономико-кибернетической системе  $S$  среду  $\bar{S}$  можно выразить следующим образом:

$$\bar{S} = S_v / S$$

Входящие в систему экономического роста потоки рабочей силы, материалов, энергии, информации и финансовых средств воплощают воздействие на эту систему внешней среды. И наоборот, любая система посредством исходящих из нее потоков влияют на окружающую среду.

Под поведением системы экономического роста понимается вид и способ преобразования входных потоков в потоки выхода, которая в свою очередь находится в тесной связи с ее структурой. Можно выделить две стороны поведения системы экономического роста – внутренне и внешнее поведение, между которыми существует единство.

Под внутренним поведением системы понимается конкретный вид изменения векторов состояния экономического роста под влиянием потоков на входе.

Состояние  $Z_t$ , в котором система экономического роста находится в момент времени  $t$ , зависит от ее более раннего состояния и от потоков на входе, которые оказывали воздействие в предыдущем периоде времени. Отметим, что внутреннее поведение системы экономического роста рассматривается как специфический способ перехода от одного дискретного состояния системы к другому.

Таким образом, системе экономического роста характеризуется взаимодействием между структурой поведением и режимом функционирования в системе рыночной экономики.

Постановка задачи оптимального управления экономическим ростом в условиях рыночной экономики требует системного подхода к данной актуальной проблеме. Известно, что постановка задачи оптимального управления экономическим ростом, как и всякая иная задача оптимизации требует выбора и формулировки целей управления и в соответствии с ним формирования критерия оптимальности, а также учета ограничений, определяемых конкретными условиями управления: по ограниченным ресурсам, сбалансированности рынка, качеству, надежности, времени и т.д.

Управление системой экономического роста всегда направленно на ограничение числа ее степеней свободы или диапазонов изменения ее переменных, а чаще всего и того, и другого. Так достигается уменьшение разнообразия в поведении системы экономического роста именно к этому сводится задача управления.

Система экономического роста рассматривается нами как сложная динамическая система со многочисленными прямыми и обратными связями. Данная система как сложная система характеризуется взаимодействием различных структур. Со стороны преобразования природных ресурсов выделя-

ется производственно-технологическая, то есть ресурсная структура системы экономического роста.

При постановке задачи оптимального управления экономическим ростом, рассматриваемой нами как задача моделирования сложных систем, удобно пользоваться понятием «черного ящика», введенным У. Р. Эшби. Согласно Эшби, «черным ящиком» называют систему, внутреннее содержание которой наблюдателю неизвестно, а доступными ему являются только входы и выходы системы.

Предположим, что на входы системы экономического роста подаются множества воздействий

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$$

где

$$x_1 = \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1m}\}$$

$$x_R = \{x_{R1}, x_{R2}, \dots, x_{Rm}\}$$

$$x_p = \{x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pm}\}$$

Тогда на выходе системы экономического роста будет наблюдаться соответствующие реакции на  $p$  выходах системы:

$$y = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$$

где

$$y_1 = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}\}$$

$$y_R = \{y_{R1}, y_{R2}, \dots, y_{Rn}\}$$

$$y_p = \{y_{p1}, y_{p2}, \dots, y_{pn}\}$$

При экспериментировании с входом системы  $x$ , который будет заключаться в реализации воздействий внешней среды  $x_1, x_2, \dots, x_R$  и наблюдений имеющих место при этом реакций системы  $y_1, y_2, \dots, y_n$  и далее сопоставлении результаты этого эксперимента, то несмотря на незнание внутренней структуры наблюдаемой системы, можно составить более или менее правильное представление о ее поведении в различных условиях. Следовательно, полу-

чаем возможность путем экстраполяции осуществлять и относительно достоверно предсказать поведение системы в непроверенных условиях рынка.

Что же касается «математического проигрывания» различных вариантов экономического роста, то необходимо отметить, что в течении двух последних столетий данная проблема была центральной проблемой экономического анализа. Первый шаг в этом направлении был предпринят Л. Вальрасом, предложивший свою модель общего экономического равновесия. Согласно Вальрасу взаимозаменяемость ресурсов в процессе производства отсутствует и эндогенными параметрами являются спрос на определенный конечный продукт, предложение определенного фактора производства и их рыночные цены. Разработав данную модель, Вальрас впервые выразил идею взаимозависимости экономических показателей в виде системы алгебраических показателей.

Следующим важным этапом как в математической формализации экономических процессов, так и в развитии экономической теории является факторная модель экономического роста Р. Солоу, где с позиции системного анализа исследуются и определяются основные источники экономического роста. Отметим, что «остаток Солоу», вычисляемый в данной модели экономического роста как разница между наблюдаемым темпом роста выпуска на одного рабочего и изменением капиталовооруженности одного работника, умноженном на долю капитала в выпуске, в последние годы был «центром тяжести» при анализе роста и производительности. Несмотря на то, что многие ученые интерпретируют остаток Солоу как долю экономического роста за счет технического прогресса, на практике он рассматривается шире – как часть экономического роста, которая вызвана факторами, неподдающимся непосредственным измерениям. В дальнейшем Р. Солоу предложил другую базовую модель для оценки экономического роста и его взаимосвязи с такими экономическими характеристиками, как сбережение и накопление капитала, в дальнейшем ставшей классической моделью.

Отметим, что данный подход к проблеме исследования оптимального экономического роста до сегодняшнего дня остается главной теоретической базой для анализа связей между сбережениями, накоплением капитала и экономическим ростом. В рамках данной модели Р. Солоу доказал, что устойчивое равновесие в экономике или положение долгосрочного равновесия достигается в том случае, когда темпы роста валового внутреннего продукта и капитала равны темпам роста населения.

Отметим также, что модели роста Солоу, давая теоретическую и методологическую базу для создания математических моделей экономического роста, способствуют классифицировать их на две группы, то есть без учета технического прогресса и с учетом технического прогресса.

Классическим примером моделей первой группы можно считать модели Харрода-Домара и Бретона, в которых технический прогресс не учитывается в явном виде, а второй группы – «неоклассическая модель Солоу-Свена» учитывающая технический прогресс и позволяющий определить равновесный темп роста экономики, при котором обеспечивается полная занятость населения трудоспособного возраста. Отметим, что данная модель оптимального экономического роста весьма типична для современной рыночной экономики, ибо определяемые ею траектории роста характеризуют такую экономическую ситуацию, при которой рыночная экономика находится в положении устойчивого равновесия, исключающего появление элементов экономических кризисов и безработицы.

Перейдем теперь к исследованию вопроса оптимального экономического роста, в которой будет фигурировать лишь основные показатели развития экономики: национальный доход, суммарные основные фонды и общее количество занятых в производстве. Для простоты изложения мы будем рассматривать так называемую односекторную модель, то есть будем предполагать, что продукция экономической системы является однородной, иными словами, состоящей как бы из одного продукта.

Приняв за исходную точку такой подход, можно уже конструировать основное соотношение равновесия (балансовое соотношение) модели. Если обозначить национальный доход в дискретный момент времени  $t$ , через  $Y_t$  - инвестиции на расширение производства в году  $t$ , а через  $C_t$  - общегосударственное непроизводственное потребление в году  $t$ , то считая сбалансированным импорта и экспорта можно написать:

$$Y_t = I_t + C_t \quad (1.1)$$

В математической интерпретации (1.1) будем считать, что инвестиции приводят к росту основных фондов ( $K_t$ ). Тогда для динамики основных производственных фондов макроэкономической системы получим:

$$K_{t+1} = K_t + I_t \quad (1.2)$$

Перейдем теперь к анализу формирования национального дохода и выявим инструментарию, влияющие на его величину.

В простейшем случае национальный доход в году  $t$  можно описать как функцию количества основных фондов и числа рабочих, занятых в производственном цикле в году  $t$  ( $L_t$ ). Тогда получим:

$$Y_t = F(K_t, L_t, t) \quad (1.3)$$

Итак, нами получена производственная функция относительно двух обособленных ресурсов – затраты труда  $L_t$  и основные фонды  $K_t$ .

Общепринято, что число работников составляет постоянную долю в населении страны, которая растет с постоянным темпом  $\beta$ , то есть:

$$L_t = L_0 e^{\beta t} \quad (1.4)$$

Наконец, нужно описать механизм распределения дохода экономической системы между потреблением и инвестициями, то есть определить норму накопления  $S_t = I_t / Y_t$ .

$$I_t = S_t \cdot Y_t \quad (1.5)$$

$$C_t = (1 - S_t) Y_t \quad (1.6)$$

Нетрудно увидеть, что норма накопления  $S_t$  изменяется в интервале от нуля до единицы, то есть:

$$0 \leq S_t \leq 1 \quad (1.7)$$

Отметим, что эти доверительные границы не являются «абсолютными» и могут сужаться в зависимости от реальных приоритетов экономического развития.

Предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  заданы значения параметров  $L_0$  и  $K_0$ , то есть число работников и количество основных фондов фиксированы. Пусть задан и параметр  $\beta$ .

Агрегируя все соотношения, получим следующую прогнозную модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_t = F(K_t, L_t, t) \\ I_t = S_t Y_t \\ C_t = (1 - S_t) Y_t \\ K_{t+1} = K_t + I_t \\ L_t = L_0 e^{\beta t} \\ K_0 - \text{фиксирован} \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Отметим, что модель (1.8) содержит лишь одну свободную переменную – норму накопления  $S_t$ . Следовательно, оно является инструментарием управления и можно проанализировать последствие ее изменения.

Рассмотренный нами многошаговый вариант односекторной модели экономического роста можно привести к дифференциальному виду, считая переменных непрерывно меняющимся. Тогда разностное уравнение (1.2), определяющее динамику фондов заменяется дифференциальным:

$$\dot{K} = I(t) \quad (1.9)$$

С учетом дифференциального уравнения (1.9) модель экономического роста (1.8) примет следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(t) = F(K(t), L(t), t) \\ I(t) = S(t)Y(t) \\ C(t) = (1 - S(t))Y(t) \\ \dot{K} = I(t) \\ L(t) = L_0 e^{\beta t} \\ K(0) = K_0 \\ K_0 - \text{фиксирован} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Отметим, что исследование модели экономического роста (1.10) практически сводится к исследованию ее различных траекторий. При  $s(t) = s = const$ , то есть при постоянной доле инвестиций в национальном доходе все траектории роста этой модели сходятся к сбалансированному росту, который зависит от величины  $S$ . Однако в этом случае возникает вопрос о предпочтительности того или иного режима роста. Решение этого вопроса непосредственно зависит от выбора критерия, по которому будет сравниваться различные траектории экономического роста. На наш взгляд эти критерии должны быть выбраны с учетом приоритетов развития страны в рамках пространственно-временного горизонта.

## Глава II. Модели экономического роста и их использование в прогнозировании макроэкономических показателей

### § 2.1. Классические модели стационарного роста экономики

Современная экономическая теория всё более принимает вид «математической экономики». Сейчас в области экономики нет ни одной крупной теории, в том числе и теории экономического роста, которая даже если она при своём появлении и не была изложена математически, в дальнейшем не подвергалось бы математической интерпретации. Начиная с элементарных теорий спроса и предложения и кончая современными теориями роста, экономическая наука оперирует математическими моделями.

В течение двух последних столетий проблема роста была центральной проблемой экономического анализа, так как развитие экономики призвано обеспечить повышение уровня жизни при постоянном росте населения. Известно, что первой моделью общего экономического равновесия является модель, разработанная Л.Вальресом. Излагая свою теорию в концентрированном виде, он записал систему уравнений, которая должна была отражать группу условий, отвечающих состоянию общего равновесия. Разработав свою модель, Вальрес впервые выразил идею взаимозависимости экономических показателей в виде системы алгебраических уравнений. Тем самым он дал огромный толчок развитию методов количественного и качественного анализа экономических систем.

Следующим значительным этапом, как в математической формализации экономических процессов, так и в развитии экономической теории является факторная модель роста Роберта Солоу. В рамках этой модели исследуются и определяются основные источники экономического роста. Отправной точкой является производственная функция

$$Y = Y(K, L, T) \quad (2.1)$$

где  $K$  - основной капитал,  $L$  - вложение труда,  $T$  - уровень развития технологии.

Солоу показал, как рост выпуска  $Y$  происходит при росте отдельных факторов, т.е. за счёт роста  $K$ ,  $L$ ,  $T$ . Далее, Солоу предположил, что производственная функция имеет особый вид, а именно: изменение  $T$  приводит к одинаковому увеличению предельного продукта  $K$  и  $L$ . Тогда производственная функция примет следующий вид:

$$Y = T F(K, L) \quad (2.2)$$

где  $F(K, L)$  – обычная неоклассическая производственная функция, зависящая от капитала и труда.

На основе уравнения (2.2) можно записать изменения в выпуске  $\Sigma Y$  следующим образом:

$$\Sigma Y = \Sigma T F(K, L) + TF_K \Sigma K + TF_L \Sigma L \quad (2.3)$$

По уравнению (2.3)  $TF_K$  – предельный продукт капитала,  $TF_L$  – предельный продукт труда. Такая запись означает, что изменение выпуска  $\Sigma Y$  пропорционально распределяется между  $\Sigma T$ ,  $\Sigma K$ ,  $\Sigma L$ .

Это выражение может быть приведено к более понятной форме путём несложных алгебраических преобразований. Если использовать производственную функцию постоянным эффектом масштаба и предположить, что экономика находится в условиях совершенной конкуренции, то  $TF_L$  будет равно  $w/p$ , т.е. зарплата в единице выпуска ( $w$ -реальная заработанная плата,  $p$  - уровень цен). Отсюда  $TF_L L / Y$  равно доле издержек на рабочую силу в суммарном выпуске, которую мы обозначим  $S_L$ .

Аналогично  $TF_K K / Y$  равно доле капитальных издержек в суммарном выпуске, которую мы обозначим как  $S_K$ . Сумма долей труда и капитала равна единице  $S_L + S_K = 1$ .

Теперь уравнение (2.3) примет следующий вид:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta T}{T} + \frac{S_L}{T} \frac{\Delta L}{L} + \frac{S_K}{K} \frac{\Delta K}{K} \quad (2.4)$$

Это означает, что темп роста выпуска  $\frac{\Delta Y}{Y}$  равен сумме трёх слагаемых:

1. темпа технического прогресса  $\frac{\Delta T}{T}$ ;
2. темпа роста объёма вложенного труда  $\frac{\Delta L}{L}$ , умноженного на зарплату в единицах выпуска  $S_L$ ;
3. темпы прироста капитала  $\frac{\Delta K}{K}$ , умноженного на коэффициент, равный доле капитала в выпуске  $S_K$ .

Используя уравнение (2.4), мы можем рассчитать величину роста выпуска на единицу вложенного труда, т.е. рост  $\frac{Y}{L}$ . Так как относительное изменение величины дроби равно относительному изменению числителя минус относительное изменение знаменателя, получим, что увеличение  $\frac{Y}{L}$  в процентах равно  $\frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L}$ . Затем, вычитая  $\frac{\Delta L}{L}$  из обеих частей уравнения (2.4), получаем:

$$\frac{\Delta \left( \frac{Y}{L} \right)}{\frac{Y}{L}} = \frac{\Delta Y}{Y} - \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta T}{T} + S_K \left( \frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (2.5)$$

Если принять для простоты темп роста населения равным темпу роста рабочей силы, то выражение (2.5) покажет вклад в увеличение выпуска на душу населения двух факторов: темпа технического прогресса  $\frac{\Delta T}{T}$  и темпа роста капитала на одного работающего  $\left( \frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} \right)$ , умноженного на коэффициент, равной доле капитала  $S_K$  (причём  $\frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta(K/L)}{K/L}$ ).

Как правило, технический прогресс не может быть измерен непосредственно. Это уравнение используется для подсчёта  $\frac{\Delta T}{T}$ , как остаточного элемента после того, как вклад поддающихся измерений факторов экономиче-

ского роста определён и вычленен из  $\frac{\Delta(Y/L)}{Y/L}$ . В частности, выражение (2.5)

может быть переписано в следующий вид:

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta(Y/L)}{Y/L} - S_K \left( \frac{\Delta K}{K} - \frac{\Delta L}{L} \right) \quad (2.6)$$

Далее  $\frac{\Delta T}{T}$  можно рассчитать как разницу между наблюдаемым темпом роста выпуска на одного рабочего и изменением капиталовооруженности одного рабочего, умножением на долю капитала в выпуске. Это так называемый остаток Солоу, который в последние три десятилетия был в центре внимания при анализе роста и производительности.

Экономисты интерпретируют остаток Солоу как долю экономического роста за счёт технического прогресса. Но на практике остаток Солоу рассматривается шире, как часть экономического роста, которая обусловлена факторами, не поддающимся непосредственным измерениям.

Следующей базовой классической моделью оценки экономического роста и его взаимосвязи с такими экономическими категориями как сбережения и накопление капитала является модель, разработанная 1956 году тем же Солоу. До сегодняшнего дня она остается главной теоретической базой для анализа связей между сбережениями, накоплением капитала и экономическим ростом. Данная модель имеет следующее аналитическое выражение:

$$\Sigma K = sq - (n+d) K \quad (2.7)$$

Данное ключевое уравнение модели роста Солоу показывает, что рост капитала на одного работающего ( $\Sigma K$ ) равен сбережениям на душу населения  $sq$  минус  $(n+d) K$ . В рамках данной модели Солоу показал, что устойчивое равновесие или положение долгосрочного равновесия достигается в том случае, когда темпы роста национального продукта и капитала равны темпам роста населения, т.е.

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta L}{L} = n$$

Оригинальному анализу также подвержены влияние сбережений, темпы роста населения и технологические изменения на экономический рост. Анализ модели роста Солоу показывает, что эффективный труд растёт по 2-ум причинам: за счёт роста населения и за счёт повышения производительности труда одного работающего.

Динамика эффективности труда равна сумме темпов роста этих двух факторов, следовательно, технологические увеличивают темп экономического роста в устойчивом состоянии, потому что они повышают темпы роста рабочей силы, измеряемой с учётом её эффективности. Основной вывод из вышеизложенного следующий: когда темп трудосберегающих технологических изменений положителен, то выпуск в устойчивом равновесии растёт с темпом  $n+\theta$ , равным в сумме темпа роста рабочей силы и темпа технологических изменений. Следовательно, приведенные модели Солоу, давая теоретическую и методологическую основу для разработки математических моделей экономического роста, наглядно выделяют особое место, присущее только научно-техническому прогрессу, как фактору этого роста. Исходя из логики Солоу, экономико-математические модели роста можно классифицировать на две группы:

1. без учёта технического прогресса;
2. с учётом технического прогресса.

Наряду с вышеизложенным, становится очевидным, что при разработке динамических моделей экономического роста главным объектом исследования является устойчивый темп равновесного роста. Под равновесием имеется в виду, что в процессе развития экономической системы соблюдаются все пропорции, необходимые для обеспечения устойчивых темпов роста при внутренней сбалансированности экономики.

В современной западной научной литературе по классу моделей экономического роста, в которых технический прогресс не учитывается в явном виде, выделяются модели Харрода-Домара и Бретона, наиболее полно отра-

жающие характерные особенности проблем развития экономической системы.

Модель роста Харрода-Домара имеет следующие основные предпосылки:

1. экономика рассматривается как производящая однородный и бесконечно делимый продукт;
2. для производства продукции, необходимы два вида ресурсов: труд и капитал. Труд является не воспроизводимым фактором производства, а темпы роста населения определяются внеэкономическими факторами;
3. количество труда и капитала, необходимое для производства единицы продукции, постоянно и определяется технологическими параметрами;
4. доля валового национального дохода, предназначенная для сбережений, являющихся источником финансирования прироста новых мощностей, постоянна;
5. при увеличении затрат производственных факторов в  $m$  раз во столько же увеличивается выпуск.

Введём обозначения:

$Y$  – валовой национальный продукт ;

$K$  – чистые капиталовложения ;

$F$  – капитал (количество продукта, постоянно используемое в производстве)

$N$  – численность населения

$S$  – сбережения ( $S=K$ )

$Q$  – объем конечного продукта

$s$  – норма сбережения ВНД ( $s = \frac{S}{Y} + \frac{K}{Y}$ )

$b$  – удельная фондоёмкость конечного продукта ( $b = \frac{F}{Q}$ )

$T_b$  – темп роста населения

$T_y$  – темп роста ВНД

$T_k$  – темп роста капитала

Для определения устойчивого темпа роста конечного продукта Харрод и Домар используют три основных вида темпа роста: естественный, гарантированный, фактический.

Как уже известно, из модели Солоу, темпы роста населения представляют собой естественный верхний предел темпов роста конечного продукта. Естественный темп роста конечного продукта  $(\tilde{T})_q$  численно равен темпу роста населения (при отсутствии технического прогресса), т.е.

$$\tilde{T}_q = T_n \quad (2.8)$$

Гарантированный темп роста представляет собой темп роста конечного продукта, ограниченный наличным объёмом воспроизводимого фактора производства, а именно, капиталом. Темп роста капитала определяется как  $K/F$ , где  $K$ - предполагаемые вложения. Тогда

$$\frac{K}{F} = \frac{K - S}{Q} * \frac{Q}{F} = \frac{s}{b} \quad (2.9)$$

Из (2.9) следует, что постоянный темп роста конечного продукта при постоянных параметрах  $S$  и  $b$  должен быть равен темпу роста основных производственных фондов:

$$T_F = \frac{s}{b} = T_Q \quad (2.10)$$

Основной вывод из простейшей модели Харрода-Домора состоит в том, что условием существования постоянного равновесия темпа роста экономической системы является соблюдение равенства темпов роста населения и темпов роста основных производственных фондов:

$$T_{N=} S/b \quad \text{и} \quad T_{N=} T_{F=} T_Q^0 \quad (2.11)$$

$T_Q^0$  - обозначает равновесный, устойчивый темп роста конечной продукции. Переменные  $T_N$ ,  $S$  и  $b$  являются независимыми, поэтому условие (3.11) может выполняться только в частном случае.

Фактический темп роста, таким образом, определяется так:

$$T_Q^0 = \min\{T_P, T_F\} = \min\{T_Q, \tilde{T}_Q\} \quad (2.12)$$

Сбалансированный темп роста определяется по Харроду-Домору как функция темпов роста численности населения и основных фондов.

В отличие от модели Харрода-Домара модель Бретона строится по основе несколько иной интерпретации равновесия между спросом и предложением: темп роста производственных мощностей должен быть равен темпу роста денежных доходов, имеющихся в распоряжении предпринимателей и домашних хозяйств.

Модель Бретона представляется следующей системой уравнений:

$$\frac{Q_T - Q_{T-1}}{Q_T} = \frac{n}{b}, \quad \text{где} \quad n = \frac{K_{T-1}}{Q_{T-1}} \quad (2.13)$$

$$Q_T = \frac{F_T}{b_T} \quad (2.14)$$

причём

$$Q_T = \frac{F_{T-1}}{b}; Q_T - Q_{T-1} = \frac{F_T - F_{T-1}}{b} = \frac{K_{T-1}}{b} \quad (2.15)$$

$$\frac{Q_T - Q_{T-1}}{Q_{T-1}} = \frac{K_{T-1}}{Q_{T-1}} * \frac{1}{b} \quad (2.16)$$

Условия (2.13)-(2.16) означают, что если объем производства конечного продукта пропорционален величине основных производственных фондов, то (при условии  $b_T = const$ ) темп роста производственных мощностей может быть определён как функция от двух величин, а именно доли мощности, которая используется для прироста чистых капиталовложений и коэффициента фондоёмкости конечного продукта.

Финансирование производства и его прироста происходит за счёт доходов предпринимателей и сбережений потребителей. Доход может быть представлен как сумма сбережений и потребления, причём стоимость потребления формируется так:

$$\Pi_t = (1-S)Y_t \quad (2.17)$$

где  $S$ -склонность к сбережениям ( $S = \frac{S_T}{Y_T}$ ), а сбережения определяются как

функция от годового прироста национального дохода

$$K_T = S_T = b^*(Y_T - Y_{T-1}) \quad (2.18)$$

где  $b^*$  -коэффициент пропорциональности.

Темп роста ВНД может быть представлен как функция структурных параметров модели:

$$Y_T = (1-S)Y_T + b^*(Y_T - Y_{T-1}) \quad (2.19)$$

Отсюда :

$$\frac{Y_T - Y_{T-1}}{Y_T} = \frac{S}{b^*}$$

На основании (2.19)  $Y_T$  может быть выражен так:

$$Y_T = \frac{b^*}{b^* - S} * Y_{T-1}$$

Значит :

$$\frac{Y_T - Y_{T-1}}{\frac{b^*}{b^* - S} * Y_{T-1}} = \frac{S}{b^*} \text{ откуда: } \frac{Y_T - Y_{T-1}}{Y_{T-1}} = \frac{S}{b^* - S} \quad (2.20)$$

Условие равновесия Бретон формулирует как требование равенства темпа роста ВНД и объёма производства конечного продукта, выраженного через структурные параметры на основании уравнений:

$$\frac{S}{b^* - S} = \frac{S}{b}$$

Поскольку в модели предполагается соблюдение автоматического равенства между параметрами  $K$  и  $S$ , постольку условие равновесия записывается как уравнение

$$v = b^* - S \quad (2.21)$$

В уравнении  $v$  интерпретируется как параметр предложения,  $b^*$  – как параметр спроса. Так как  $v$  и  $b^*$  в конечном счёте определяют темпы роста основных производственных фондов, а  $S$  темпы роста рабочей силы, основной вывод, к которому ведёт анализ модели Бретона, совпадает с аналогичным заключением Харрода-Домора: равновесный, устойчивый темп роста может иметь место только в том случае, если темпы роста рабочей силы, занятой в производстве, и темпы роста основных производственных фондов равны между собой.

## § 2.2. Магистральные модели экономического роста фон Неймана

Теоретической основой магистральных моделей как динамических моделей экономического роста служит знаменитая модель Д.ф.Неймана. Содержание модели Неймана составляют две группы неравенств. Одна из них описывает собственно производственную (технологическую) сферу модели, а другая – финансовую сферу.

Для описания производственной сферы Нейман представил экономику в виде конечной совокупности производственных процессов  $q_i (i=1, 2, \dots, n)$  единичной продолжительности, которые затрагивают и производят конечное число продуктов  $y_j (j=1, \dots, m)$  и могут применяться с различными интенсивностями  $z_i (z_i \geq 0, i=1, \dots, n)$ .

Каждый процесс  $q_i$  характеризуется парой векторов: вектором затрат  $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im})$  и вектором выпуска  $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{im})$ . Все числа  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  неотрицательны. Матрица  $A$ , строками которой являются векторы  $a_i$ , называется матрицей затрат, а матрица  $B$ , строками которой являются векторы  $b_i$  – матри-

цей выпуска . Очевидно, матрицы  $A$  и  $B$  имеют размеры  $p \times m$  и состоят из неотрицательных элементов.

Если процессы  $Q_1, \dots, Q_n$  применяются соответственно с интенсивностями  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , то мы получим допустимый процесс  $Q$ , который характеризуется вектором затрат  $z_1 a_1 + \dots + z_n a_n = ZA$  и вектором выпуска  $z_1 b_1 + \dots + z_n b_n = ZB$ , то есть рассматриваемая модель Неймана является линейной.

Совокупность всех допустимых процессов модели называется - технологическим множеством этой модели, которая представляет собой многогранный конус, расположенный в неотрицательной ортанте пространства  $E_{2m}$ . Если в период  $(t-1, t)$  процессы  $Q_1, \dots, Q_N$  применялись соответственно с интенсивностями  $z_1(t), \dots, z_n(t)$ , а в период  $(t, t+1)$  - с интенсивностями  $z_1(t+1), \dots, z_n(t+1)$ , то обязательно каждая компонента вектора затрат  $z(t+1)A$  не больше соответствующей компоненты вектора выпуска  $z(t)B$ , т.е.  $Z(t+1)A - Z(t)B \leq 0$ ,  $t=0, 1, \dots, T-1$ . Иными словами, в период  $(t, t+1)$  невозможно затратить продуктов больше, чем их было выпущено в предыдущий период  $(t-1, t)$ . Поскольку всегда интенсивность есть число неотрицательное, получаем первую группу ограничений модели Неймана:

$$Z(t+1)A - Z(t)B \leq 0 \quad t=0, 1, \dots, T-1. \quad (2.22)$$

$$Z(x) \geq 0 \quad t=0, 1, \dots, T \quad (2.23)$$

Здесь искомыми величинами являются интенсивность  $Z_i(t)$ , а заданными величинами - все элементы  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  матриц  $A$  и  $B$ . Система неравенств (2.22), (2.23) описывает производственную сферу Модели Неймана, которую обозначим через  $Mn^*$

Упорядоченный набор  $Z(0), Z(1), \dots, Z(T)$  векторов интенсивностей называется траекторией интенсивностей модели  $Mn^*$ . Если добавить начальное условие

$$Z(0) = Z^0 \quad (2.24)$$

где  $Z^0$  - заданный вектор интенсивностей  $Z^0_1, \dots, Z^0_n$ , с которыми применяются процессы  $Q_1, \dots, Q_N$  в базовый период  $(-1; 0)$ , то получим модель  $(Mn^*, 0, T)$ .

Если выполняется условие (3.24), то траектория интенсивностей называется траекторией модели  $Mn^*$ , удовлетворяющей начальному условию (24).

Такие траектории обозначаются символом  $Z(Z^0, T)$  или  $\{Z(t)\}_{t=0}^T$

### Экстремальная (оптимизационная) задача:

Максимизировать (или минимизировать) функцию  $f(Z(1), \dots, Z(T))$  при ограничениях (22)-(24) - представляет собой модель  $(Mn^*; 0, T; f)$ , построенную на основе модели  $Mn^*$ . Экстремальные траектории, соответствующие решению задачи, обозначаются символом  $Z(Z^0, T)$ , или  $\{Z(t)\}_{t=0}^T$

Помимо понятия траектории интенсивностей используется понятие траектории процессов. Упорядоченный набор процессов  $(V(1), W(1), \dots, (V(T), W(T)))$  называется допустимой траекторией процессов, если существует допустимая траектория интенсивностей  $\{Z(t)\}_{t=0}^T$  такая, что  $V(t) = Z(t)A$ ,

$W(t) = Z(t)B(t)$ , где  $t=1, \dots, T$ .

Если выполняется условие  $Z(1)A \leq x^1$  (т.е. все компоненты вектора  $Z(1)A$  не больше соответствующих компонентов вектора  $x^1$ ), где  $x^1$  - заданный  $m$ -мерный вектор, то траектория процессов называется траекторией модели  $Mn^*$ , удовлетворяющей начальному условию  $Z(1)A \leq x^1$ . Такие траектории обозначаются символом  $R(x^1, T)$  или  $\{(V(t), W(t))\}_{t=1}^T$ . Таким образом, траектории  $Z$  соответствует траектория  $R$ , и наоборот.

Экстремальные задачи также можно рассматривать на траекториях процессов и находить оптимальные траектории  $\widehat{R}$ .

Рассмотрим описание финансовой сферы модели  $Mn^*$ .

Пусть  $P_i(t)$  - цена одной единицы продукта  $C_i$  в период  $(t-1, t)$ . Предполагается, что ни один процесс  $Q_i (i=1, \dots, n)$  не приносит положительной прибыли, т.е.

$$P(t+1)b_j - P(t)a_i = (P_i(t+1)b_{i1} + \dots + P_m(t+1)b_{i1} - P_1(t)a_{i1} + \dots + P_m(t)a_{im}) \leq 0 \quad \text{или}$$

$$A p(t) - B p(t+1) \geq 0 \quad (2.25)$$

Поскольку цена  $P_j(t) (j=1, \dots, m; t=1, \dots, T+1)$  предполагается не отрицательной, то

$$P(t) \geq 0, t=1, \dots, T+1 \quad (2.26)$$

Системы (3.25), (3.26) описывают финансовую сферу модели  $Mn^*$ , которую обозначим через  $Mn^1$ .

Упорядоченный набор  $P(t+1), \dots, P(t), \dots, P(1)$  векторов цен называется траекторией цен модели фон Неймана.

Если выполняется условие

$$P(t+1) = P^0, \quad (2.27)$$

то траектория цен называется траекторией модели  $Mn^1$ , удовлетворяющей начальному условию (3.27). Такие траектории обозначим символом  $P(P^0, t)$  или  $\{P(t)\}_{t=T+1}^1$ .

При анализе модели экономического роста Неймана траектория интенсивности называется стационарной, если  $Z(t) = \alpha^t Z(t=0, 1, \dots, T)$ , где вектор  $Z$  и число  $\alpha > 0$  фиксированы. Аналогично траектория цен называется стационарной, если  $P(t) = \beta^{T+1-t} P, (t=T+1, T, \dots, 1)$ , где вектор  $P$  и число  $\beta > 0$  фиксированы.

На стационарной траектории интенсивностей неравенство (2.22) приобретает следующий вид:

$$\alpha ZA \leq ZB \quad (2.28)$$

Аналогично на стационарной траектории цен неравенство (2.25) приобретает вид

$$\beta A p \geq B p \quad (2.29)$$

Фон Нейман показал, что как доказательство существования, такими исследование положения равновесия модели Неймана, упирается в матема-

тический анализ системы (2.28), (2.29)  $m+n$  неравенств с  $m+n+2$  неотрицательными неизвестными  $z_1, \dots, z_n, p_1, \dots, p_m, \alpha, \beta$ .

Систему (2.28), (2.29) называют моделью экономического равновесия фон Неймана или моделью максимального роста Неймана. Более естественным представляется рассмотреть её как модели сбалансированной экономики. В этом случае цены равновесия можно интерпретировать как ожидаемые цены, назначаемые для обеспечения и финансовых отношений в будущих годах растущей экономики. Для некоторых классов экстремальных задач качественное исследование их оптимальных траекторий позволяет провести теоремы о магистрали, суть которых заключается в следующем: при достаточно большом  $T$  оптимальная траектория  $Z(z^0, T)$ , выходя из точки  $z^0$ , сначала начинает приближаться к лучу интенсивностей Неймана, затем почти весь промежуток планирования оптимальная траектория проходит вблизи этого луча и только в конце промежутка планирования оптимальная траектория может отойти от луча, чтобы попасть в предписанную целевой функцией точку.

Если траектория ведет себя описанным образом, то говорят, что траектория сходится к лучу интенсивности Неймана, получившего название магистрали.

Вектор интенсивности Неймана был назван магистральным вектором интенсивности, а утверждение о близости оптимальных траекторий  $K$  магистрали в течении почти всего промежутка прогнозирования - теоремой о магистрали.

Теоремой о магистрали и их аналоги является формальными математическими построениями, однако они играют большую роль в экономической теории и представляют большой экономический интерес.

Во-первых, если справедлива теорема о магистрали, то можно утверждать, что в течение продолжительного времени макроэкономический оптимум реализуется при максимальном, пропорциональном росте.

Во-вторых, коэффициент  $x^*$  максимального роста, который реализуется только по магистрали, полезен как ориентир при сопоставлении с реально

меньшим относительного него существующим коэффициентом роста экономики.

В-третьих, теоремы о магистрали позволяет упростить и решить задачу о выборе целевой функции, которая явно зависит только от  $T$ , а также задачу о выборе конечных условий.

В-четвёртых, теоремы о магистрали позволяют существенно облегчить анализ и расчёт оптимальных траекторий, поскольку почти весь промежуток прогнозирования оптимальная траектория близка к траектории максимального, пропорционального роста, а рассчитать эту траекторию значительно проще, чем искать оптимальную траекторию.

В-пятых, поскольку динамические модели включают в себя как частный случай достаточно узкий класс задач линейного программирования, то можно получить теоремы типа магистральных для оптимальных решений задач линейного программирования большой размерности. Существуют теоремы о магистрали слабой, сильной и сильнейшей формах.

В теоремах о магистрали слабой формы утверждается, что оптимальная траектория в каждый период прогнозирования близка к магистрали, за исключением числа периодов, которое не превосходит некоторого числа  $T^*$  не зависящего от  $T$ .

В теоремах о магистрали сильной формы утверждается, что число “исключительных” периодов также не превосходят некоторого числа  $T^*$ , не зависящего от  $T$ , и эти периоды расположены только в начале и в конце промежутка прогнозирования.

В теоремах о магистрали сильнейшей формы утверждается, что оптимальная траектория в каждый период промежутка прогнозирования принадлежит магистрали, за исключением числа периодов, которое не превосходит номера  $T^*$ , не зависящего от  $T$ , и эти “исключительные” периоды расположены только в начале и в конце промежутка прогнозирования.

Обычно в теоремах, имеющих сильнейшую форму, утверждается, что оптимальная траектория процессов принадлежит в течение почти всего про-

межутка прогнозирования грани Неймана, и в то же время расположена вблизи луча процессов Неймана, принадлежащего этой грани.

В заключение отметим наличие теоремы о магистрали для оптимальных решений экстремальных задач с целевыми функциями, зависящими от не известных в последний период промежутка планирования (так называемые центральные целевые функции).

### **§ 2.3 Применение магистральных моделей в прогнозирования основных макроэкономических показателей Азербайджанской Республики**

Магистральные теоремы доказаны для многих теоретических моделей, а также для моделей, которые могут быть использованы для экспериментальных расчетов на базе реальных нормативных показателей и объемах величин.

Целесообразность и необходимость указанных расчётов диктуются, прежде всего, тем, что в магистральных теоремах фактически только в принципе утверждается, что в течение ряда начальных периодов промежутка прогнозирования оптимальная траекторий может находиться далеко от магистрали, потом в течение почти всего промежутка прогнозирования оптимальная траектория проходит вблизи магистрали и наконец, в течение ряда последних периодов она опять может находиться вдали от магистрали.

Необходимость получения картины движения оптимальных траекторий к магистрали и от магистрали достаточно очевидна, поскольку хорошая в математическом смысле оптимальная траектория может оказаться плохой в экономическом смысле, например, из-за отсутствия монотонного движения к магистрали, больших неувязок в ограничениях модели в начальные и конечные периоды промежутка прогнозирования и т.д. Но вызывает сомнения также необходимость получения оценок числа периодов, для которых оптимальные траектории достаточно далеки от магистрали. При этом вполне допустима следующая картина: при рассмотрении, какой-нибудь реальной мо-

дели может оказаться, что число таких периодов должно значительно превосходить предписанный промежуток прогнозирования.

Впервые экспериментальный расчёт на основе магистральных теорем был проведен Дж. Цуком для описания экономики Японии. Однако важным моментом этих исследований необходимо считать процедуру преобразования открытой модели, построенной на базе фактических данных, в расчетную замкнутую модель, для которой справедлива теорема о магистрали в сильной форме.

Магистральная модель накопления выражается в виде закрытой системы стоимостных значений, целью которой является максимизация накопленной суммы капитала в конце периода прогнозирования, представляется в следующей форме:

$$P \quad \max_{X(t)} \quad (2.30)$$

при ограничения

$$X(t) \geq \tilde{A}x(t) + B(x(t+1) - x(t)) \quad t = 0, 1, T$$

$$X(t) \geq 0 \quad t = 0, 1, \dots, t$$

где  $X(t)$ - вектор выпуска продукции за период времени  $t$  размера  $(n \times 1)$ ;  $\tilde{A}$  и  $B$ - соответственно неотрицательная матрица коэффициентов увеличения затрат и матрица коэффициентов капитала, оба размера  $(n \times n)$ ;  $P$ - заданный вектор размера  $(1 \times n)$  оценки запасов в конечный (последний) период.

При этом вектор  $X(0)$  является заданным, причём

$$(J - \tilde{A} + B)X(0) > 0, \quad PB \geq 0$$

$J$ - единичная матрица, а матрицы  $\tilde{A}$  и  $B$  определяются следующим образом:

$$\tilde{A} = A + hv; \quad A = A^1 + A^2; \quad B = B^1 + B^2$$

здесь  $A$ ,  $A^1, A^2$  есть неотрицательные матрицы размера  $(n \times n)$  коэффициентов потока ресурсов, а именно затрат всех видов ресурсов ( $A$ ), текущих затрат ( $A^1$ ), амортизации текущего капитала ( $A^2$ ). Матрицы  $B, B^1$  и  $B^2$  – это неотрицательные матрицы размера  $(n \times n)$  коэффициентов состояния активов, а

именно – всех видов активов в целом ( $B$ ), активов в виде основных фондов ( $B^1$ ) и в виде товарных запасов  $B^2$ . Вектор  $h$ - вектор столбец коэффициентов потребления потока размера  $(n \times 1)$ ,  $v$ - положительный вектор нормы добавленной стоимости. Уравнение магистрали объёма выпуска, являющееся одной из возможных траекторий в рамках задачи, может быть записано в форме:

$$X=(A+g B)X; ex=1 \quad (2.31)$$

где  $e$  -единичный вектор, т.е.  $e=(1,\dots,1)$ ;  $x$ -вектор равновесного объёма выпуска ;  $g$ -положительное значение темпа роста равновесного выпуска. Вышеприведённое уравнение можно переписать в виде

$$g^{-1}X=(J-\tilde{A})^{-1}BX \quad (2.32)$$

Сделав допущение, что  $(J-\tilde{A})^{-1} > 0$ , а  $B$ -в каждой строке имеет хотя бы один положительный элемент, получаем  $(J-\tilde{A})^{-1} B > 0$ . Соответственно, имеющая ясный экономический смысл магистральная модель представляет собой полупрямую  $\left\{ \alpha x^* : \alpha \geq 0 \right\}$ , а темп прироста  $g^*$  для равновесного роста определя-

ется как величина обратная  $x^*$ , т.е.  $x^* = x^* = \frac{1}{x^*}$ .

Магистральная модель накопления характеризуется тем, что целью плана является максимизация накопления капитала к концу планового периода, а само накопление рассматривается в качестве единственного ограничителя роста. Однако, целью развития экономики всё же должно быть повышение уровня потребления, поэтому в зависимости от выбранной экономической политики в тактическом плане может быть выбран критерий максимизации накопления, а во всех иных условиях целесообразно рассмотреть магистральную модель потребления.

На базе вышеприведённых рассуждений попытаемся построить динамическую магистральную модель прогнозирования экономики Азербайджана

для определения оптимальной сбалансированной траектории развития с максимальным темпом роста основных макроэкономических показателей.

Для описания динамической межотраслевой модели примет, следующие обозначения:

$t$ -время,  $t=1, T$ -период прогнозирования;

$(t-1, t)$ - интервал прогнозирования;

$n$ -число отраслей,  $i, j$ - индексы отраслей  $i, j= 1, n$ ;

$a_{ij}(t)$  – коэффициенты прямых затрат отрасли  $i$  в году  $t$ , показывающий необходимое количество продукта  $i$  для производства единицы продукта  $j$ .

$v_{ij}(t)$  – коэффициент приростной фондоёмкости отрасли  $i$  в году  $t$ , показывающий необходимое количество фондов отрасли  $i$  для производства единицы продукции отрасли  $j$ ;

$x_j(t)$ - валовой выпуск отрасли  $j$  в году  $t$ .

$\Delta x_j(t)$ - прирост производства отрасли  $j$  в году (принимается как разность  $x_j(t) - x_j(t-1)$ )

$x_i^t(t)$ -экспорт отрасли  $i$  в году  $t$ ;

$x_i^n(t)$ - импорт отрасли  $i$  в году  $t$ ;

$Y_i(t)$ - конечное потребление отрасли  $i$  в году  $t$

$\beta_i$  – коэффициент выбытия фондов в отрасли  $i$

$\tau_i$ - длительность капитальных вложений в отрасли  $i$

При таких обозначениях базовая модель оптимизации и развития экономики республики будет иметь следующий вид:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n J_i(t) \rightarrow \max \quad (2.33)$$

$$x_i(t) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^n \sum_{\tau=0}^{\tau_i} b_{ij}(t+\tau)\Delta x_j(t+\tau) + x_j^{\exists}(t) - x_j^n(t) + y_i(t) \quad (i=1, n) \quad (2.34)$$

$$x_i(t) \geq \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + x_i^{\exists}(t) - x_j^n(t) + y_i(t) \quad (i=1, n) \quad (2.35)$$

$$x_j(t) \geq 0, \Delta x_j(t) \geq 0, x_i^{\exists}(t) \geq 0; x_i^n(t) \geq 0, y_i(t) \geq 0 \quad (2.36)$$

Ограничение (2.31) описывает баланс валовых выпусков. Оно означает, что валовой выпуск каждой отрасли в каждом году должен быть не меньше суммы следующих слагаемых: производственное потребление, затраты на прирост фондов для расширения производства, экспорта и конечного потребления за вычетом импорта.

Второе слагаемое (2.31) имеет смысл только для фондообразующих отраслей, а именно строительства и машиностроения.

В таком виде модель нереализуема, так как неограниченность ввоза продукции в республику позволяет неограниченно расти конечному потреблению. Поэтому в качестве первой модификации модели в критерий оптимальности введём так называемый «штраф» за каждую единицу ввозимой продукции. Тогда критерий оптимальности (2.31) примет следующий вид:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n Y_i(t) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i x_i^n(t) \rightarrow \max \quad (2.37)$$

где  $h_i$  - «штраф» за ввоз единицы  $i$ -го продукта.

Параллельно можно рассматривать вариант с искусственным ограничением ввоза с помощью задания верхних границ объёмов ввоза продукции каждой отрасли, в каждом году периода с учётом ранее годовых темпов роста ввоза. Это означает введение ограничений типа

$$x_i^u \leq I_i(t) \quad (2.38)$$

где  $I_i(t)$  - предельно возможный объём ввоза  $i$ -го продукта в году  $t$ . В этом варианте в модели действует целевая функция (2.30).

Следующей модификацией в направлении совершенствования и адекватности модели явилось введение в модель с ограничениями (2.31) и критерием (2.34) дополнительного ограничения по фондам, которое выглядит следующим образом:

$$x_i(t) \leq \xi_i(t) \left[ 1 - \beta_i(t) \right] F_i(t-1) + \Delta x_i(t-1) + \frac{1}{2} \Delta x_i(t) \quad (2.37)$$

Ограничение (2.36) описывает необходимое условие производства, в соответствии с которым объем производства не может превышать возможностей, имеющихся в данном году основных производственных фондов данной отрасли. Правая часть этого ограничения состоит из 3-х слагаемых. Первое слагаемое означает остаток с учётом коэффициента выбытия фондов прошлого года, введенных в предыдущие до (t-1) года. Естественно, что для сопоставимости этой величины с объемом производства оно умножается на коэффициент фонда отдачи  $\xi$ .

Третье слагаемое – половина прироста производства года t. (половина берётся для учёта равномерного ввода мощностей).

Далее, в систему ограничения моделей последовательно вводились дополнительные ограничения, выражающие условия не убывания показателей конечного потребления и валовых выпусков из года в год, которые соответственно выглядели следующим образом:

$$Y_i(t+1) \geq Y_i(t) \quad (2.38)$$

$$X_i(t+1) > X_i(t) \quad (2.39)$$

В этих условиях задача решалась в двух вариантах (с учётом введенных ранее условий) как с критерием вида (3.34), так и с терминальным критерием.

$$\sum_{i=1}^n Y_i(t) - \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n h_i x_i^n(t) \rightarrow \max \quad (2.40)$$

Результаты проведенных расчетов на персональном компьютере показывают, что базовая модель путём последовательных модификации приближается к реальной экономической ситуации и адекватно отражает экономики региона.

### **III ГЛАВА. Эконометрическое моделирование и прогнозирование экономического роста.**

#### **§ 3.1. Построение однофакторных и многофакторных корреляционно-регрессионных моделей.**

Большинство явлений и процессов в экономике находятся в постоянной взаимной и всеохватывающей объективной связи. Исследование зависимостей и взаимосвязей между объективно существующими явлениями и процессами играет большую роль в экономике. Оно дает возможность глубже понять сложный механизм причинно-следственных отношений между явлениями. Для исследования интенсивности, вида и формы зависимостей широко применяется корреляционно-регрессионный анализ, который является методическим инструментарием при решении задач прогнозирования, на макроуровне, в частности для системы экономического роста. В системе экономического роста между факторами в основном наблюдается стохастические (статистические) зависимости.

Статистической называется зависимость между случайными величинами, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение закона распределения другой величины.

В частном случае статистическая зависимость проявляется в том, при изменении одной из величин изменяется математическое ожидание другой. В этом случае говорят о корреляции или корреляционной зависимости.

Статистическая зависимость проявляется только в массовом процессе, при большом числе единиц совокупности.

При стохастической закономерности для заданных значений зависимой переменной можно указать ряд значений объясняющей переменной, случайно рассеянных в интервале. Каждому фиксированному значению аргумента соответствует определенное статистическое распределение значений функции. Это обуславливается тем, что зависимая переменная, кроме выделенной

переменной, подвержена влиянию ряда неконтролируемых или неучтенных факторов. Поскольку значения зависимой переменной подвержены случайному разбросу, они не могут быть предсказаны с достаточной точностью, а только указаны с определенной вероятностью.

Надо отметить, что в экономике приходится иметь дело со многими явлениями, имеющими вероятностный характер. Например, к числу случайных величин можно отнести: стоимость продукции, доходы предприятия, межремонтный пробег автомобилей, время ремонта оборудования и т.д.

Односторонняя вероятностная зависимость между случайными величинами есть регрессия. Она устанавливает соответствие между этими величинами.

Односторонняя стохастическая зависимость выражается с помощью функции, которая называется *регрессией*.

Регрессия тесно связана с корреляцией. *Корреляция* в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями. Связи между явлениями могут быть различны по силе. При измерении тесноты связи говорят о корреляции в узком смысле слова. Если случайные переменные причинно обусловлены и можно в вероятностном смысле высказаться об их связи, то имеется корреляция.

Понятия «корреляция» и «регрессия» тесно связаны между собой. В корреляционном анализе оценивается сила связи, а в регрессионном анализе исследуется ее форма. Корреляция в широком смысле объединяет корреляцию в узком смысле и регрессию.

Разработка модели и исследование экономических процессов должны выполняться по следующим этапам.

1. Априорное исследование экономической проблемы.
2. Формирование перечня факторов и их логический анализ.
3. Сбор исходных данных и их первичная обработка.
4. Спецификация функции регрессии.
5. Оценка функции регрессии.

6. Отбор главных факторов.
7. Проверка адекватности модели.
8. Экономическая интерпретация.
9. Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.

Рассмотрим подробнее содержание этапов.

### ***1. Априорное исследование экономической проблемы.***

В соответствии с целью работы на основе знаний макро-и микроэкономики конкретизируются явления, процессы, зависимость между которыми подлежит оценке. При этом подразумевается прежде всего четкое определение экономических явлений, установление объектов и периода исследования.

На этом этапе исследования должны быть сформулированы экономически осмысленные и приемлемые гипотезы о зависимости экономических явлений.

### ***2. Формирование перечня факторов и их логический анализ.***

Для определения наиболее разумного числа переменных в регрессионной модели прежде всего ориентируются на соображения профессионально-теоретического характера. Исходя из физического смысла явления, производят классификацию переменных на зависимую и объясняющую.

### ***3. Сбор исходных данных и их первичная обработка.***

При построении модели исходная информация может быть собрана в трех видах:

- Динамические (временные) ряды;
- Пространственная информация – информация о работе нескольких объектов в одном разрезе времени;
- Сменная – табличная форма. Информация о работе нескольких объектов за разные периоды.

Объем выборки зависит от числа факторов, включаемых в модель с учетом свободного члена. Для получения статистически значимой модели тре-

буется на один фактор объем выборки, равный  $1 = 5 \div 8$  наблюдений. Например, если в модель включаются три фактора, то минимальный объем выборки

$$n_{\min} = 5 \cdot (m + n) = 5 \cdot (3 + 1) = 20$$

где  $m$  – число факторов, включаемых в модель;

$n$  – число свободных членов в уравнении.

Если в квартальном разрезе собирать данные, то надо их собирать за 5 лет (20/4).

#### ***4. Спецификация функции регрессии.***

На данном этапе исследования дается конкретная формулировка гипотезы о форме связи (линейная или нелинейная, простая или множественная и т.д.). для этого используются различные критерии для проверки состоятельности гипотетического вида зависимости. На этом этапе проверяются предпосылки корреляционно-регрессионного анализа.

#### ***5. Оценка функции регрессии.***

Здесь определяются числовые значения параметров регрессии и вычисления ряда показателей, характеризующих точность регрессионного анализа.

#### ***6. Отбор главных факторов.***

Выбор факторов – основа для построения многофакторной корреляционно-регрессионной модели.

На этапе «Формирование перечня факторов и их логический анализ» собираются все возможные факторы, обычно более 20-30 факторов. Но это неудобно для анализа, и модель, включающая 20-30 факторов, будет неустойчива. Неустойчивость модели находит выражение в том, что в ней изменение некоторых факторов ведет к увеличению  $y$  вместо снижения  $y$ .

Мало факторов – тоже плохо. Это может привести к ошибкам при принятии решений в ходе анализа модели. Поэтому необходимо выбирать более рациональный перечень факторов. При этом проводят анализ факторов на мультиколлинеарность.

***Анализ и способы снижения влияния мультиколлинеарности на значимость модели.***

Мультиколлинеарность – попарная корреляционная зависимость между факторами.

Мультиколлинеарная зависимость присутствует, если коэффициент парной корреляции  $r_{ij} \geq 0,70 \div 0,80$ .

Отрицательное воздействие мультиколлинеарности состоит в следующем:

1. Усложняется процедура выбора главных факторов.
2. Искажается смысл коэффициента множественной корреляции (он предполагает независимость факторов).
3. Усложняются вычисления при построении самой модели.
4. Снижается точность оценки параметров регрессии, искажается оценка дисперсии.

Следствием снижения точности является ненадежность коэффициентов регрессии и отчасти неприемлемость их использования для интерпретации как меры воздействия соответствующей объясняющей переменной на зависимую переменную.

Оценки коэффициента становятся очень чувствительными к выборочным наблюдениям. Небольшое увеличение объема выборки может привести к очень сильным сдвигам в значениях оценок. Кроме того, стандартные ошибки оценок входят в формулы критерия значимости, поэтому применение самих критериев становится также ненадежным. Из сказанного ясно, что исследователь должен пытаться установить стохастическую мультиколлинеарность и по возможности устранить ее.

Для измерения мультиколлинеарности можно использовать коэффициент множественной детерминации

$$D = R^2, \quad (3.1)$$

где  $R$  – коэффициент множественной корреляции.

При отсутствии мультиколлинеарности факторов

$$D = \sum_{j=1}^m d_{yj} \quad (3.2)$$

где  $d_{yj}$  - коэффициент парной детерминации, вычисляемый по формуле

$$d_{yj} = r_{yj}^2, \quad (3.3)$$

где  $r_{yj}$  - коэффициент парной корреляции между  $j$ -м фактором и зависимой переменной  $y$ .

При наличии мультиколлинеарности соотношение (3.2) не соблюдается. Поэтому в качестве меры мультиколлинеарности используется следующая разность:

$$M = D - \sum_{j=1}^m d_{yj} \quad (3.4)$$

Чем меньше эта разность, тем меньше мультиколлинеарность. Для устранения мультиколлинеарности используется метод исключения переменных. Этот метод заключается в том, что высоко коррелированные объясняющие переменные устраняются из регрессии и она заново оценивается. Отбор переменных, подлежащих исключению, производится с помощью коэффициентов парной корреляции. Опыт показывает, что если  $|r_{yj}| \geq 0,70$ , то одну из переменных можно исключить, но какую переменную исключить из анализа, решают исходя из управляемости факторов на уровне предприятия.

Обычно в модели оставляют тот фактор, на который можно разработать мероприятие, обеспечивающее улучшение значения этого фактора в планируемом году. Возможна ситуация, когда оба мультиколлинеарных фактора управляемы на уровне предприятия. Решить вопрос об исключении того или иного фактора можно только в соответствии с процедурой отбора главных факторов.

Отбор факторов не самостоятельный процесс, он сопровождается построением модели. Принятие решения об исключении факторов производится на основе анализа значений специальных статистических характеристик и с учетом управляемости факторов на уровне предприятия.

Процедура отбора главных факторов обязательно включает следующие этапы:

1. *Анализ факторов на мультиколлинеарность и ее исключение.*

Здесь производится анализ значений коэффициентов парной корреляции  $r_{ij}$  между факторами  $x_i$  и  $x_j$ .

2. *Анализ тесноты взаимосвязи факторов (x) с зависимой переменной (y).*

Для анализа тесноты взаимосвязи  $x$  и  $y$  используются значения коэффициента парной корреляции между фактором и функцией ( $r_{x,y}$ ). Величина  $r_{x,y}$  определяется на компьютере и представлена в корреляционной матрице вида:

№ переменной	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	...	X <sub>m</sub>	у
x <sub>1</sub>	1	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>2</sub></sub>	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>3</sub></sub>	...	r <sub>x<sub>1</sub>x<sub>m</sub></sub>	r <sub>x<sub>1</sub>y</sub>
x <sub>2</sub>	r <sub>x<sub>2</sub>x<sub>1</sub></sub>	1	r <sub>x<sub>2</sub>x<sub>3</sub></sub>	...	r <sub>x<sub>2</sub>x<sub>m</sub></sub>	r <sub>x<sub>2</sub>y</sub>
x <sub>3</sub>	r <sub>x<sub>3</sub>x<sub>1</sub></sub>	r <sub>x<sub>3</sub>x<sub>2</sub></sub>	1	...	r <sub>x<sub>3</sub>x<sub>m</sub></sub>	r <sub>x<sub>3</sub>y</sub>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x <sub>m</sub>	r <sub>x<sub>m</sub>x<sub>1</sub></sub>	r <sub>x<sub>m</sub>x<sub>2</sub></sub>	r <sub>x<sub>m</sub>x<sub>3</sub></sub>	...	1	r <sub>x<sub>m</sub>y</sub>
у	r <sub>yx<sub>1</sub></sub>	r <sub>yx<sub>2</sub></sub>	r <sub>yx<sub>3</sub></sub>	...	r <sub>yx<sub>m</sub></sub>	1

Факторы для которых  $r_{x_i y} = 0$ , т.е. не связанные с  $y$ , подлежат исключению в первую очередь. Факторы, имеющие наименьшее значение  $r_{x_i y}$ , могут быть потенциально исключены из модели. Вопрос об их окончательном исключении решается в ходе анализа других статистических характеристик.

*3. Анализ коэффициентов  $\beta$  факторов, которые потенциально могут быть исключены.*

Коэффициент  $\beta$  учитывает влияние анализируемых факторов на  $y$  с учетом различий в уровне их колеблемости. Коэффициент  $\beta$  показывает, насколько сигм (средних квадратических отклонений) изменяется функция с изменением соответствующего аргумента на одну сигму при фиксированном значении остальных аргументов:

$$\beta_k = a_k \frac{\sigma_{x_k}}{\sigma_y} \quad (3.5)$$

где  $\beta_k$  - коэффициент  $\beta$   $k$ -го фактора;

$\sigma_{x_k}$  - среднее квадратическое отклонение  $k$ -го фактора;

$\sigma_y$  - среднее квадратическое отклонение функции;

$a_k$  - коэффициент регрессии при  $k$ -м факторе.

Из двух факторов  $x_i$  и  $x_j$  может быть исключен тот фактор, который имеет меньшее значение  $\beta$ .

Допустим, исключению подлежит один из мультиколлинеарных факторов  $x_i$  или  $x_j$ . Оба фактора управляемы на уровне предприятия, коэффициенты регрессии  $a_i$  и  $a_j$  статистически значимы. Фактор  $x_i$  более тесно связан с  $y$ , т.е.  $r_{x_i y} > r_{x_j y}$ , но при этом  $\beta_{x_i} < \beta_{x_j}$ . В этом случае обычно исключению подлежит фактор  $x_j$ .

#### 4. Проверка коэффициентов регрессии на статистическую значимость.

Проверка может быть произведена двумя способами:

- Проверка статистической значимости  $a_k$  по критерию Стьюдента проводится по следующей формуле:

$$t_k = \frac{a_k}{S_{a_k}} \quad (3.6)$$

где  $a_k$  - коэффициент регрессии при  $k$ -м факторе;

$S_{a_k}$  - стандартные отклонение оценки параметра  $a_k^1$ .

Число степеней свободы статистики  $t_k$  равно  $f = n - m - 1$ , где  $m$  - количество факторов, включенных в модель. Значение  $t$ , вычисляемое по (3.1.6), сравнивают с критическим значением  $t_{f,a}$ .

Если  $t_k \geq t_{f,a}$ , то  $a_k$  существенно больше 0, а фактор  $x_k$  оказывает существенное влияние на  $y$ . При этом фактор  $x_k$  оставляем в модели. Если  $t_k < t_{f,a}$ , то фактор исключаем из модели;

- Проверка статистической значимости  $a_k$  по критерию Фишера –

$$F_k = \left( \frac{a_k}{S_{a_k}} \right)^2 = t^2 \quad (3.7)$$

где  $t^2$  - многомерный аналог критерия Стьюдента.

Число степеней свободы статистики  $F_k$  следующее:  $f_1 = 1, f_2 = n - m - 1$ . Значение  $F_k$ , вычисляемое по формуле (3.7), сравнивают с критическим значением  $F_{f_1 f_2 \alpha}$ .

Если  $F_k \geq F_{f_1 f_2 \alpha}$ , то  $\alpha_k$  - существенно больше 0, а фактор  $x_k$  оказывает существенное влияние на  $y$ . При этом фактор  $x_k$  оставляем в модели. Если  $F_k < F_{f_1 f_2 \alpha}$ , то фактор исключаем из модели.

#### 5. Анализ факторов на управляемость.

В ходе логического анализа на основе экономических знаний исследователь должен сделать вывод: можно ли разработать организационно-технические мероприятия, направленные на улучшение выбранных факторов на уровне предприятия. Если это возможно, то данные факторы управляемы. Неуправляемые факторы на уровне предприятия могут быть исключены из модели. Например, из двух факторов  $x_1$  – средняя техническая скорость автомобилей и  $x_2$  – время погрузки-разгрузки на одну езду при равенстве или близких по значению таких характеристик, как  $r_{x_1 y}$  и  $r_{x_2 y}, \beta_{x_1}$  и  $\beta_{x_2}$ , исключению подлежит  $x_1$ . на уровне АТП практически невозможно повлиять на значение технической скорости, которая зависит в основном от климатических условий и величины транспортного потока.

#### 6. Строится новая регрессионная модель без исключенных факторов.

Для этой модели определяется коэффициент множественной детерминации  $D$ .

7. Исследование целесообразности исключения факторов из модели с помощью коэффициента детерминации.

Прежде чем вынести решение об исключении переменных из анализа в силу их незначимого влияния на зависимую переменную, производят исследования с помощью коэффициента детерминации.

В первой регрессии содержится  $m$  объясняющих переменных, во второй – только часть из них, а именно  $m_1$  объясняющих переменных. При этом  $m = m_1 + m_2$ , т.е. во вторую регрессию мы не включили  $m_2$  объясняющих переменных. Теперь следует проверить, вносят ли совместно эти  $m_2$  переменных существенную долю в объяснение вариации переменной  $y$ . Для этого используется статистика

$$F = \frac{(D_m - D_{m_1}) \cdot (n - m - 1)}{(m - m_1) \cdot (1 - D_m)}, \quad (3.8)$$

которая имеет  $F$  распределение с  $f_1 = m - m_1 = m_2$  и  $f_2 = n - m - 1$  степенями свободы. Здесь  $D_m$  означает коэффициент детерминации регрессии с  $m$  объясняющими переменными, а  $D_{m_1}$  - коэффициент детерминации регрессии с  $m_1$  факторами.

Разность  $(D_m - D_{m_1})$  в числителе формулы является мерой дополнительного объяснения вариации переменной  $y$  за счет включения  $m_2$  переменных.

#### 8. Проверка адекватности модели.

Данный этап анализа включает:

- *Оценку значимости коэффициента детерминации.* Данная оценка необходима для решения вопроса: оказывают ли выбранные факторы влияние на зависимую переменную? Оценку значимости  $D$  следует проводить, так как может сложиться такая ситуация, когда величина коэффициента детерминации будет целиком обусловлена случайными колебаниями в выборке, на основании которой он вычислен. Это объясняется тем, что величина  $D$  существенно зависит от объема выборки.

Для оценки значимости коэффициента множественной детерминации используется следующая статистика:

$$F = \frac{D(n-m-1)}{m(1-D)} \quad (3.9)$$

которая имеет F распределение с  $f_1 = m$  и  $f_2 = n - m - 1$  степенями свободы. Здесь  $D = R^2$ , а  $m$  – количество учитываемых объясняющих переменных.

- Проверку качества подбора теоретического уравнения. Она проводится с использованием средней ошибки аппроксимации. Средняя ошибка аппроксимации регрессии определяется по формуле:

$$E = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{y_i - y_{iT}}{y_{iT}} \right) \cdot 100 \% \quad (3.10)$$

- Вычисление специальных показателей, которые применяются для характеристики воздействия отдельных факторов на результирующий показатель. Это коэффициент эластичности, который показывает, на сколько процентов в среднем изменяется функция с изменением аргумента на 1% при фиксированных значениях других аргументов:

$$\mathcal{E}_k = a_k \cdot \frac{\bar{x}_k}{y} \quad (3.11)$$

доля влияния каждого фактора  $x_j$  в отдельности на вариацию  $y^1$ :

$$g_i = \beta_j^2 \quad (3.12)$$

где  $\beta_j$  - коэффициент бетта фактора  $x_j$ .

Показатель  $g_j$  является мерой вариации результативного признака за счет изолированного влияния фактора  $x_j$ . Следует отметить, что система факторов, входящая в модель регрессии, - это не простая их сумма, так как система предполагает внутренние связи, взаимодействия составляющих ее элементов. Действие системы не равно арифметической сумме воздействий составляющих ее элементов. Поэтому необходимо определить показатель системного эффекта факторов  $\eta_s$  :

$$\eta_s = R^2 - \sum_{j=1}^m \beta_j^2$$

На основе анализа специальных показателей и значений парной корреляции  $x$  с  $y$  делают вывод, какие из главных факторов оказывают наибольшее влияние на  $y$ . После этого переходят к разработке организационно-технических мероприятий, направленных на улучшение результативного показателя  $y$ .

#### *9. Экономическая интерпретация.*

Результаты регрессионного анализа сравниваются с гипотезами, сформулированными на первом этапе исследования, и оценивается их правдоподобие с экономической точки зрения.

#### *10. Прогнозирование неизвестных значений зависимой переменной.*

Полученное уравнение регрессии находит практическое применение в прогностическом анализе. Прогноз получают путем постановки в регрессию с численно оцененными параметрами значений факторов. Следует подчеркнуть, что прогнозирование результатов по регрессии лучше поддается содержательной интерпретации, чем простая экстраполяция тенденций, так как полнее учитывается природа исследуемого явления.

### § 3.2. Прогнозирование временных рядов экономических показателей.

Среди большого разнообразия экономико-математических методов, используемых для решения задач управления особое место занимают методы и модели прогнозирования.

Следует различать два понятия, связанных с прогнозированием – предсказание и собственно прогнозирование.

Под *предсказанием* понимают суждение о будущем состоянии процесса, основанное на субъективном «взвешивании» большого числа факторов качественного и количественного характера. *Прогнозирование* – это исследовательский процесс, в результате которого получают прогноз о состоянии объекта. Прогноз является вероятностным суждением о возможном состоянии объекта или об альтернативных путях его достижения. Известно большое количество методов, методик и способов прогнозирования. Все они основаны на двух крайних подходах: эвристическом и математическом.

Эвристические методы базируются на использовании явлений или процессов, не поддающихся формализации.

Для математических методов прогнозирования характерен подбор и обоснование математической модели исследуемого процесса, а также способов определения ее неизвестных параметров. Задача прогнозирования при этом сводится к решению уравнений, описывающих данную модель для заданного момента времени.

Среди математических методов прогнозирования в особую группу выделяются методы экстраполяции, которые отличаются простотой, наглядностью. Методологическая предпосылка экстраполяции состоит в признании преимущественной связи между настоящим и будущим. При этом развитие экономических явлений наиболее полно находит свое отражение во временных рядах, которые представляют собой упорядоченные во времени наборы измерений каких-либо характеристик исследуемого объекта, процесса. Поэтому независимая переменная временного ряда, это, как правило, календар-

ные равные отрезки времени. Основной чертой, выделяющей временные ряды среди других видов статистических данных, является существенность порядка, в котором производятся наблюдения.

В ходе решения задачи прогнозирования пользуются ограниченным количеством информации об одномерном временном ряде конечной длины. При этом в экономике исследуются дискретные временные ряды, наблюдаемые в дискретные моменты времени.

Дискретный временной ряд можно рассматривать как последовательность значений  $y_1, y_2, \dots, y_n$  в моменты времени  $t$ , или сокращенно  $y_t (t = 1, 2, \dots, n)$ .

Временной ряд может быть представлен в следующем виде:

$$y_t = x_t + \varepsilon_t \quad (3.9)$$

где  $x_t$  - детерминированная неслучайная компонента процесса;

$\varepsilon_t$  - стохастическая случайная компонента процесса.

Детерминированная компонента  $x_t$  характеризует существующую динамику процесса в целом, основную, длительную тенденцию изменения изучаемого показателя. Стохастическая компонента  $\varepsilon_t$  отражает случайные колебания или шумы процесса. Задача прогнозирования, в частности, состоит в определении вида экстраполирующих функций  $x_t$  и  $\varepsilon_t$  на основе исходных эмпирических данных.

Отрезок времени  $l$  от момента времени  $t$ , для которого имеются последние статистические данные об изучаемом процессе, до момента, к которому относится прогноз, называется периодом упреждения (периодом прогноза). В зависимости от длительности периода упреждения применительно к экономике различают три вида прогноза:

- Краткосрочные – с периодом упреждения от нескольких дней до трех лет;

- Среднесрочные – от трех до 5 лет;
- Долгосрочные – от 5 лет и выше.

При прогнозировании, как правило, в точке прогноза оценивают математическое ожидание процесса и величину интервала, в который с заданной вероятностью попадет прогнозируемое значение процесса (интервальный прогноз). Результаты экстраполяции наиболее надежны при кратко и среднесрочном прогнозировании. При этом предполагается, что совокупность факторов, определявших тенденцию временного ряда в прошлом, в среднем сохранит свою силу и направление действия в течении прогнозируемого периода.

Мы отметили выше, что среди математических методов прогнозирования в особую группу выделяются методы экстраполяции. Следует отметить, что прогнозирование с помощью методов экстраполяции включает следующие этапы работ:

***1. Установление цели и задачи исследования, анализ объекта прогнозирования.***

Прогнозирование развития любой системы предъявляет специфические требования к параметрам, характеризующим и определяющим ее развитие. Поэтому необходимо на первом этапе работ провести детальное логическое изучение системы: зависимость рассматриваемого объекта от других систем одного уровня и подсистемы; взаимосвязь между данным объектом и другими объектами системы; установление характера предоставления статистических данных об объекте.

***2. Подготовка исходных данных.***

Работы по этому этапу начинаются с проверки временного ряда, в результате которой устанавливаются полнота ряда, сопоставимость данных и, в случае необходимости, проверка методики приведения данных к сопоставимому виду. Если временной ряд представлен не полностью, то необходимо недостающие данные определить с помощью тех или иных методов интерполяции в зависимости от характера протекания процесса.

Наряду с этим осуществляется также формирование массива функций, который в последующем будет использован для выбора вида математической модели.

### ***3. Фильтрация исходного временного ряда.***

В результате этой процедуры устраняются случайные возмущения, возникающие под воздействием неучтенных факторов или ошибок измерения относительно наиболее вероятного протекания процесса, и тем самым исключается искажающее влияние случайных колебаний на выбор вида регрессии. Фильтрация исходного динамического ряда включает его сглаживание и выравнивание.

Сглаживание применяется для устранения случайных отклонений из экспериментальных значений исходного ряда. Сглаживание производится с помощью многочленов, приближающих группы опытных точек. Наилучшее сглаживание получается для средних точек группы, поэтому желательно выбирать нечетное количество точек в сглаживаемой группе. Обычно их выбирают три или пять. Например, по первым трем точкам  $(y_1, y_2, y_3)$  сглаживают среднюю  $y_2$ , затем по следующей тройке  $(y_2, y_3, y_4)$  сглаживают  $y_3$  и т.д. крайние точки сглаживают по специальным формулам.

Чаще всего для сглаживания применяют линейную зависимость. Тогда формулы сглаживания для групп из трех точек имеют вид:

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{3}(y_{-1} + y_0 + y_{+1}); \quad (3.10)$$

$$\hat{y}_{-1} = \frac{1}{6}(5y_{-1} + 2y_0 - y_{+1}); \quad (3.11)$$

$$\hat{y}_{+1} = \frac{1}{6}(-y_{-1} + 2y_0 + y_{+1}), \quad (3.12)$$

где  $y_0, \hat{y}_0$  - значения исходной и сглаженной функций в средней точке груп-

пы;

$y_{-1}, \hat{y}_{-1}$  - значения исходной и сглаженной функций в левой точке группы;

$y_{+1}, \hat{y}_{+1}$  - значения исходной и сглаженной функций в правой точке группы.

Формулы (3.11), (3.12) применяются для сглаживания крайних точек ряда. Для сглаживания по пяти точкам формулы имеют вид:

$$\hat{y}_0 = \frac{1}{5}(y_{-2} + y_{-1} + y_0 + y_{+1} + y_{+2}); \quad (3.13)$$

$$\hat{y}_{-1} = \frac{1}{10}(4y_{-2} + 3y_{-1} + 2y_0 + y_{+1}); \quad (3.14)$$

$$\hat{y}_{+1} = \frac{1}{10}(y_{-1} + 2y_0 + 3y_{+1} + 4y_{+2}); \quad (3.15)$$

$$\hat{y}_{-2} = \frac{1}{5}(3y_{-2} + 2y_0 + y_{+1} - y_{+2}); \quad (3.16)$$

$$\hat{y}_{+2} = \frac{1}{5}(-y_{-2} + y_0 + 2y_{+1} + 3y_{+2}). \quad (3.17)$$

Сглаживание является во многих случаях эффективным средством выявления тренда при наличии в экспериментальных точках случайных помех и ошибок измерения.

Выравнивание применяется для более удобного представления исходного ряда без изменения его числовых значений. Выравниванием называется приведение исходной эмпирической формулы:

$$y = f(t, a, b) \quad (3.22)$$

где  $t$  – время,

$a, b$  - параметры

к виду

$$y = a_1 T + b_0. \quad (3.23)$$

Использование двухпараметрической зависимости (3.22) объясняется ее большим распространением в практике прогнозирования и сравнительно простыми способами получения выравниваемых формул. Функции с большим (чем 2) числом параметров выравниваются не всегда, и формулы имеют громоздкий вид.

#### ***4. Логический отбор видов аппроксимирующей функции.***

На основании изучения статистических данных и логического анализа протекания изучаемого процесса из заданного массива функций отбираются наиболее приемлемые виды уравнений связи. Этот этап необходим, так как позволяет при отборе функцией учесть основные условия протекания рассматриваемого процесса и требования, предъявляемые к математической модели. На этом этапе должны быть решены следующие вопросы:

- Является ли исследуемый показатель величиной монотонно возрастающей (убывающей), стабильной, периодической, имеющей один или несколько экстремумов;
- Ограничен ли показатель сверху или снизу каким-либо пределом;
- Имеет ли функция, определяющая процесс, точку перегиба;
- Обладает ли анализируемая функция свойством симметричности;
- Имеет ли процесс четкое ограничение развития во времени.

Рассмотрим те функции, которые предпочтительно использовать в прогнозной экстраполяции.

В качестве аппроксимирующих функций чаще всего используются различные полиномы с ограничением числа членов (степени полинома). Это *степенной полином*

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i t^i; \quad (3.24)$$

*экспоненциальный полином*

$$y(t) = \exp(a + \sum_{i=1}^n a_i t^i); \quad (3.25)$$

*гиперболический полином*

$$y(t) = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i t^i}; \quad (3.26)$$

где  $y$  - прогнозируемый показатель;

$t$  - время;

$a_0, a_1, \dots, a_n$  - параметры (коэффициенты), подлежащие определению.

Окончательное решение о виде аппроксимирующей функции может быть принято после определения ее параметров и верификации прогноза по ретроспективному ряду. Поэтому для прогнозирования используют несколько подходящих аппроксимирующих функций, с тем чтобы после оценки точности выбрать наиболее подходящую.

### ***5. Оценка математической модели прогнозирования.***

На этом этапе исследования определяются параметры различных видов аппроксимирующих функций. Наиболее распространенными методами оценки параметров аппроксимирующих зависимостей являются метод наименьших квадратов (МНК) и его модификации, метод экспоненциального моделирования, метод адаптивного сглаживания.

Рассмотрим для примера МНК и метод экспоненциального сглаживания.

*Метод наименьших квадратов* состоит в определении параметров модели тренда, минимизирующих ее отклонение от точек исходного временного ряда:

$$S = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min \quad (3.27)$$

где  $\hat{y}_i$  - расчетные (теоретические) значения исходного ряда;

$y_i$  - фактические значения исходного ряда;

$n$  - число наблюдений.

Классический метод наименьших квадратов предполагает равноценность исходной информации в модели. В реальной же практике будущее поведение процесса в большей степени определяется поздними наблюдениями, чем ранними. Речь идет о дисконтировании, т.е. уменьшении ценности более ранней информации.

Дисконтирование учитывают путем введения в модель (3.27) некоторых весов  $\beta_i < 1$ . Тогда

$$S = \sum_{i=1}^n \beta_i (\hat{y}_i - y_i)^2 \rightarrow \min$$

Коэффициенты  $\beta_i$  могут быть заданы в числовой форме или в виде функциональной зависимости таким образом, чтобы по мере продвижения в прошлое веса убывали. К недостаткам МНК можно отнести следующее.

Во первых, модель тренда жестко фиксируется, и с помощью МНК можно получить прогноз на небольшой период упреждения. Поэтому МНК относят к методам краткосрочного прогнозирования.

Во-вторых, значительную трудность представляет правильный выбор вида модели, а также обоснование и выбор весов во взвешенном методе наименьших квадратов.

Наконец, МНК очень просто реализуется только для линейных и линеаризуемых зависимостей, когда для получения оценок коэффициентов моделей решается система линейных уравнений. Задача значительно усложняется, если для прогноза используется функциональная зависимость, не сводимая к линейной.

Метод экспоненциального сглаживания является эффективным и надежным методом среднесрочного прогнозирования.

Здесь следует остановиться более подробно на учете важности ретроспективной информации.

Практически большее значение для построения прогноза имеет информация, описывающая процесс в моменты времени, стоящие ближе к настоящему (нулевому) моменту времени. Чем дальше мы углубляемся в ретроспекцию, тем менее ценной для прогноза становится информация. Это можно учесть, придавая членам исходного динамического ряда некоторые веса, тем большие, чем ближе находится к началу периода прогноза.

Это положение лежит в основе метода экспоненциального сглаживания. Сущность метода заключается в сглаживании исходного динамического ряда взвешенной скользящей средней, веса которой ( $w_i$ ) подчиняются экспоненциальному закону (рис. 3.1).

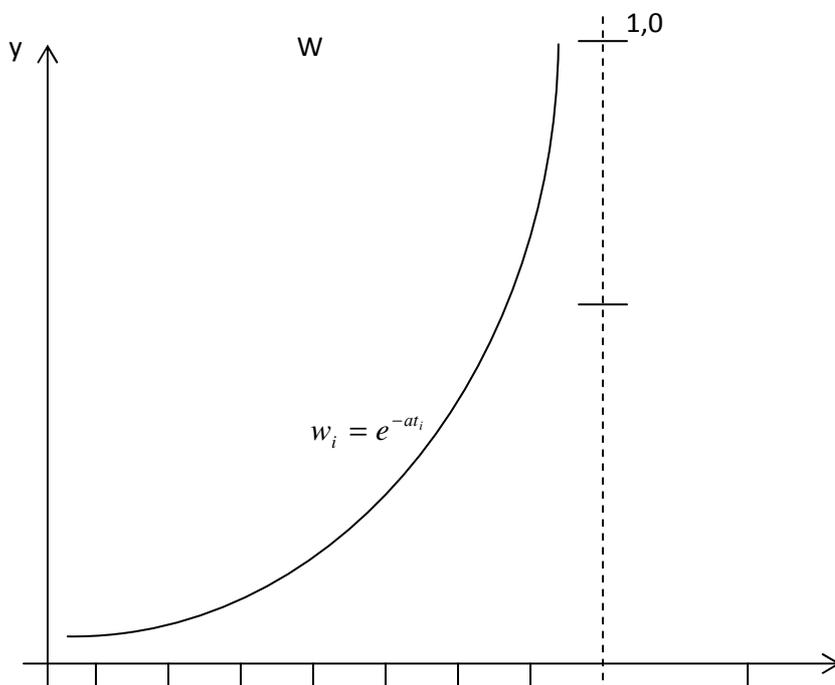


Рис. 3.1. Коэффициент экспоненциального сглаживания.

Пусть исходный динамический ряд описывается полиномом следующего вида:

$$y_t = b_0 + b_1 t + \frac{b_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{b_p}{p!} t^p + \varepsilon_t = \sum_{j=0}^p \frac{b_j}{j!} t^j + \varepsilon_t, \quad (3.28)$$

где  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_p$  - коэффициенты;

$p$  - порядок полинома;

$\varepsilon_t$  - случайная ошибка.

Метод экспоненциального сглаживания позволяет построить такое описание процесса (3.28), при котором более поздним наблюдениям придаются большие веса по сравнению с ранними наблюдениями, причем веса наблюдений убывают по экспоненте.

### ***5. Выбор математической модели прогнозирования.***

Выбор моделей прогнозирования базируется на оценке их качества. Независимо от метода оценки параметров моделей экстраполяции (прогнозирования) их качество определяется на основе исследования свойств остаточной компоненты:  $(y_i - y_{Ti}), i = \overline{1, n}$ , т.е. величины расхождений на участке аппроксимации (построения модели) между фактическими уровнями и их расчетными значениями.

Качество модели определяется ее адекватностью исследуемому процессу и точностью. Адекватность характеризуется наличием и учетом определенных статистических свойств, а точность – степенью близости к фактическим данным. Модель прогнозирования будет считаться лучшей со статистической точки зрения, если она является адекватной и более точно описывает исходный динамический ряд.

Модель прогнозирования будет считаться адекватной, если она учитывает существенную закономерность исследуемого процесса. В ином случае ее нельзя применять для анализа и прогнозирования.

Закономерность исследуемого процесса находит отражение в наличии определенных статистических свойств остаточной компоненты, а именно: независимости уровней, их случайности, соответствия нормальному закону распределения и равенства нулю средней ошибки.

Независимость остаточной компоненты означает отсутствие автокорреляции между остатками  $(y_i - y_{Ti})$ .

Перечислим последствия, вызываемые автокорреляцией остатков:

1. Недооценка дисперсии остатков функции регрессии.
2. Наличие ошибки при оценке выборочной дисперсии параметров регрессии. Ошибки в вычислении дисперсий – препятствие к корректному применению метода наименьших квадратов при построении модели исходного динамического ряда.

Очевидно, важно иметь критерий, позволяющий устанавливать наличие автокорреляции. Таким критерием является *критерий Дарбина-Уотсона*, в соответствии с которым вычисляется статистика  $d$ :

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n [(y_i - y_{Ti}) - (y_{i-1} - y_{T_{i-1}})]^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - y_{Ti})^2} \quad (3.30)$$

где  $y_i; y_{i-1}$  - уровни фактического динамического ряда;

$y_{Ti}; y_{T_{i-1}}$  - теоретические (прогнозные) уровни динамического ряда;

$n$  - объем выборки.

Возможные значения статистики лежат в интервале  $0 \leq d \leq 4$ . согласно методу Дарбина и Уотсона существует верхний  $d_B$  и нижний  $d_H$  пределы значений статистики  $d$ . Эти критические значения зависят от уровня значимости  $\alpha$ , объема выборки  $n$  и числа объясняющих переменных  $m$ .

Критерий Дарбина-Уотсона обладает двумя недостатками. Первый из них – наличие области неопределенности, в которой с помощью данного

критерия нельзя прийти ни к какому решению. Вторым недостатком заключается в том, что при объеме выборки меньше 15 для  $d$  не существует критических значений  $d_H$  и  $d_B$ . В этом случае для оценки независимости уровней ряда можно использовать коэффициент автокорреляции  $r_a$ . Данный показатель приближенно можно вычислить по формуле

$$r_a = 1 - \frac{d}{2} \quad (3.31)$$

где  $d$  – статистика Дарбина-Уотсона.

Для проверки случайности уровней ряда можно использовать критерий поворотных точек, который называется также критерием «пиков» и «впадин». В соответствии с этим критерием каждый уровень ряда сравнивается с двумя соединенными с ними. Если он больше или меньше их, то эта точка считается поворотной. Далее подсчитывается сумма поворотных точек  $K$ .

После проверки всех моделей прогнозирования из выбранного массива на адекватность необходимо выполнить оценку их точности.

В статистическом анализе известно большое число характеристик точности.

Наиболее часто в практической работе встречаются следующие характеристики.

1. Оценка стандартной ошибки:

$$S_{1,f(x)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2}{n - p}} \quad (3.32)$$

где  $n$  – число наблюдений;

$p$  – число определяемых коэффициентов модели.

2. Средняя относительная ошибка оценки

$$\bar{m}_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{y_i - f(x_i)}{f(x_i)} \cdot 100 \% \quad (3.33)$$

### 3. Среднее линейное отклонение

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n |y_i - f(x_i)|}{\sqrt{n(n-1)}} \quad (3.34)$$

### 4. Ширина доверительного интервала в точке прогноза

Для получения данной статистической оценки определим доверительный интервал в прогнозируемом периоде, т.е. возможные отклонения прогноза от основной тенденции протекания рассматриваемого процесса. Для решения этой задачи построим интервальные оценки параметров регрессии  $a_0$  и  $a_1$  в формах:

$$a_0 = \hat{a}_0 \pm t_p \cdot \sigma_{\hat{a}_0}, a_1 = \hat{a}_1 \pm t_p \cdot \sigma_{\hat{a}_1}. \quad (3.35)$$

Здесь серединами интервалов являются точечные оценки  $\hat{a}_0$  и  $\hat{a}_1$ , рассчитанные с помощью метода наименьших квадратов. Величина  $t_p$  - теоретическое значение критерия Стьюдента при уровне значимости, равном 5%, и числе степеней свободы, равном  $V_1 = n - m - 1$ .

Стандартные ошибки коэффициентов регрессии  $\sigma_{\hat{a}_0}$  и  $\sigma_{\hat{a}_1}$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{a}_0} &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}; \\ \sigma_{\hat{a}_1} &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Несмещенная оценка дисперсии случайной составляющей

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (y_i - y_{Ti})^2, \quad (3.37)$$

где  $x_i, y_i$  - фактические значения динамических рядов  $x$  и  $y$ ;

$y_{Ti}$  - теоретическое значение, рассчитанное по уравнению регрессии;

$\bar{x}$  - среднее значение фактора  $x$ .

Верхняя  $Y_B$  и нижняя  $Y_H$  границы доверительного интервала в точке прогноза будут равны:

$$\begin{aligned} Y^B &= f(a_0^B; a_1^B; x_n); \\ Y^H &= f(a_0^H; a_1^H; x_n), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где  $a_0^B; a_0^H$  - верхнее и нижнее значение параметра  $a_0$  модели прогноза;

$a_1^B; a_1^H$  - верхнее и нижнее значения параметра  $a_1$  модели прогноза;

$x_n$  - значение фактора времени в точке прогноза.

Ширина доверительного интервала в точке прогноза

$$\Delta = Y^B - Y^H \quad (3.39)$$

Надо отметить, что ширина доверительного интервала зависит:

- От числа степеней свободы и тем самым от объема выборки, т.е. чем больше объем выборки, тем меньше (при прочих равных условиях) значение критерия  $t$  и, следовательно уже доверительный интервал;
- От величины стандартной ошибки оценки параметра регрессии ( $\sigma_{\hat{a}_0}$  и  $\sigma_{\hat{a}_1}$ ). Чем меньше  $\sigma_{\hat{a}_0}$  и  $\sigma_{\hat{a}_1}$ , тем меньше при равных условиях ширина доверительного интервала.

Лучшей по точности считается та модель, у которой все перечисленные характеристики имеют меньшую величину. Однако эти показатели по-разному отражают степень точности модели и поэтому нередко дают противоречивые выводы. Для однозначного выбора лучшей модели исследователь должен воспользоваться либо одним основным показателем, либо обобщенным критерием.

Итогом работ по выбору вида математической модели прогноза является формирование ее обобщенных характеристик. В обобщенную характеристику должны быть включены вид уравнения регрессии, значения его параметров, оценки точности и адекватности модели и сами прогнозные оценки, точечные и интервальные.

### **§ 3.3. Постановка и решение задачи прогнозирования экономического роста в Азербайджанской Республике**

В § 3.1 нами были рассмотрены теоретические основы прогнозирования экономических систем на базе эконометрических моделей. Руководствуясь данным механизмом, проведём системные исследование проблемы анализа взаимосвязей в системе производства ВВП страны и её прогнозирования на перспективу.

В нижеприведённой таблице отображены данные, характеризующие изменения динамики ВВП, основных производственных фондов и числа занятого населения за 2000-2013 гг.

Годы	Основные производст. фонды промышл. (млн.ман)	Число занятого населения (тыс.чел)	ВВП (млн.ман)
2000	7261.9	3855.5	4718.1
2001	8159.0	3891.4	5315.6
2002	9398.2	3931.1	6062.5

2003	11944.0	3972.6	7146.5
2004	15146.7	4016.9	8530.2
2005	18225.0	4062.3	12522.5
2006	21029.0	4110.8	18746.2
2007	28467.0	4162.2	28360.5
2008	30660.0	4215.5	40137.2
2009	34789.0	4271.7	35601.5
2010	37165.0	4329.1	42465.0
2011	41952.0	4375.2	52082.0
2012	46769.0	4445.3	53.995.0
2013	50289.8	4480.6	57.708.2

Нами исследована задача зависимости ВВП страны от влияющих факторов в отдельности, а также исследована совместное влияние временного фактора, объёма основных производственных фондов и числа работающего населения на объём ВВП Азербайджанской Республики. Цель исследования заключалась в разработке эффективной эконометрической модели, пригодной для прогнозирования роста ВВП на период 2014-2019 гг.

Эконометрический анализ нами приведён на 2 этапа:

1 этап: На первом этапе исследована корреляционная зависимость ВВП страны, объёма основных производственных фондов и число работающего населения от временного фактора

Анализ соответствующих динамических рядов таблицы 3.1 показывает, что между изучаемыми факторами существует линейная корреляционная зависимость, которая может быть отображена линейной моделью парной корреляции  $y = a_0 + a_1x$ .

Коэффициенты уравнений регрессии парной корреляции  $a_0$  и  $a_1$  вычислены методом наименьших квадратов на персональном компьютере (пакет прикладных программ на EXCEL).

На основе проведённого эконометрического анализа найдены следующие уравнения регрессии:

1. Для зависимости ВВП от временного фактора

$$Y_{\text{ВВП}} = -9293916,840 + 4645,171t \quad r = 0.938$$

2. Для зависимости основных производственных фондов промышленности от временного фактора:

$$Y_{\text{ОПФП}} = -7014843,127 + 3508,920t \quad r = 0.981$$

3. Для зависимости числа работающего населения от временного фактора

$$Y_{\text{ЧРН}} = -95056,091 + 49,443t \quad r = 0.996$$

На первом этапе также получены следующие прогнозные данные для изучаемых экономических показателей.

Годы	Прогнозные данные на базе эконометрической модели парной корреляции		
	ВВП (млн.ман)	ОПФП(млн.ман)	ЧРН (тыс.чел)
2014	61509,8	52120,9	4522,3
2015	66155,0	55629,8	4571,7
2016	70800,2	59138,7	4621,2
2017	75445,4	62647,6	4670,6
2018	80090,6	66156,5	47420,0

2 этап. Н данном этапе проведён эконометрический анализ совместной зависимости ВВП страны от таких факторов, как временный фактор ( $x_1$ ), объёма основных производственных фондов ( $x_2$ ) и числа работающего населения ( $x_3$ ) на основе модели множественной корреляции. Формы уравнения множественной регрессии выбрана линейная модель множественной корреляции:

$$Y_{\text{ВВП}} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$$

В результате модельных экспериментов на персональном компьютере получена следующая числовая модель множественной корреляции:

$$Y_{\text{ВВП}} = 534478,6550 - 2718,272x_1 + 1,788x_2 + 21660x_3$$

$$R = 0.9888; \quad R^2 = 0.9777$$

Значения коэффициента множественной корреляции показывает, что данная модель адекватно отображает зависимость в изучаемой экономической системе и вполне пригодна для прогнозирования. Используя прогнозные данные таблицы 3.2 вычислим ожидаемых прогнозных данных для ВВП страны, при условии, что прогнозные данные, полученные для влияющих факторов на основе моделей парной корреляции весьма устойчивы:

$$У \text{ ВВП}_{(2014\text{прогноз})} = 61331,9 \text{ млн. ман}$$

$$У \text{ ВВП}_{(2015\text{прогноз})} = 65957,6 \text{ млн. ман}$$

$$У \text{ ВВП}_{(2016\text{прогноз})} = 70585,4 \text{ млн. ман}$$

$$У \text{ ВВП}_{(2017\text{прогноз})} = 75211,0 \text{ млн. ман}$$

$$У \text{ ВВП}_{2018(\text{прогноз})} = 79836,7 \text{ млн. ман}$$

В нижеприведённой таблице приведена сравнения точечного прогноза ВВП по трендовой модели с прогнозными значениями ВВП по модели множественной корреляции.

Годы	2014	2015	2016	2017	2018
Прогноз ВВП по трендовой модели (млн.ман)	61509,8	66155,0	705800,2	75445,4	80080,6
Прогноз ВВП по модели множественной корреляции (млн.ман)	61331,9	65957,6	70585,4	75211,0	79836,7
Отклонения (млн.ман)	+177,9	+197,4	+215,8	+234,4	+253,9

Анализ данных таблицы 3.3 показывает, что отклонения точечных прогнозов, полученных на базе моделей парной корреляции и множественной корреляции не существенны (в пределах 0,2-0,3%)

Итак, с вероятностью, равной 0,8 можно предположить, что в 2014 году ВВП Азербайджанской республики прогнозируется в объёме 61331,9 млн.ман, в 2015 году- в объёме 65957,6 млн.ман, в 2016 году – в объёме

70585,4 млн.ман., в 2017 году- в объёме 75211,0 млн.ман, а в 2018 году- в объёме 79836,7 млн. манатов.

## Заключение

На основе проведённых теоретических и практических исследований получены следующие результаты:

1. На основе проведённого системного анализа макроэкономической ситуации в Азербайджане выявлено, что в стране наблюдается устойчивый экономический рост. За последние 10 лет ВВП Азербайджана возрос в 16 раз, а ВВП на душу населения – 10 раз. В последние годы наблюдается резкий рост в нефтяном секторе;
2. В целом экономический рост может быть представлен как развитие, при котором долгосрочные темпы производства устойчиво превышают темпы роста населения. Факторами экономического роста служат факторы, которые физически способствуют экономическому росту и факторы-ограничители. В целом же, экономический рост можно представить как результат совместного и отдельного влияния двух обобщённых факторов – вовлечение большого количества ресурсов и более эффективного использования этих ресурсов. Следовательно, экономический рост выступает как мультипликативная функция, представляющая собой умножения затрат труда на его производительность.
3. Система экономического роста обладает всеми характеристиками экономико-кибернетических (управляемых) систем, то есть является сложной, большой, динамической и вероятностной системой.
4. Среди классических моделей экономического роста наиболее привлекательными являются модель общего экономического равновесия на основе производственных функций, базовая модель оценки экономического роста Солоу, а также модели Харрода-Домара и Бретона, где экономический рост изучается изолированно от технического прогресса.
5. Теоретической основой магистральных моделей как динамических моделей экономического роста служит знаменитая модель Дж.Фон

Неймана, где рассматриваются производственные (технологические) и финансовые аспекты развития экономической системы. Нейман ограничивался рассмотрением только стационарных траекторий. Однако качественное исследование проблемы экономического роста требует выбора траекторий, которыми являются теоремы о магистрали.

6. Составлена динамическая магистральная модель прогнозирования роста экономики Азербайджана, которая может служить базой определения оптимальной сбалансированной траектории развития с максимальным темпом роста основных макроэкономических показателей.

7. Прогнозирование экономического роста может быть осуществлено на основе методов экстраполяции на базе трендовых моделей. Математической же теории анализа стохастических зависимостей в макроэкономической системе является теория корреляционного и регрессионного анализа, на основе которых и строятся эконометрические модели, пригодные для прогнозирования.

8. В ходе решения задачи прогнозирования экономических систем, в том числе и системы экономического роста пользуются ограниченным количеством информации об одновременном временном ряде конечной длины. Нами использованы дискретные временные ряды макроэкономических показателей, наблюдаемые в дискретные моменты времени.

9. В работе поставлена и решена задача прогнозирования экономического роста Азербайджанской Республики за 2014-2018 годы. Влияющими факторами выбран временной фактор  $t$ , основные производственные фонды промышленности и числа работающего населения.

9.1 На основе проведённого эконометрического анализа найдено следующее уравнение регрессии, отображающая зависимости экономического роста ( $y$ ) от временного фактора ( $x_1$ ), объёма основных производственных фондов промышленности ( $x_2$ ) и числа работающего населения ( $x_3$ ).

$$Y_{\text{ВВП}} = 5344786,550 - 2718,272x_1 + 1,788x_2 + 21,660x_3$$

$$R=0,9888; R^2=0,977$$

9.2 На базе данного механизма прогнозирования с вероятностью, равной 0,8 можно предположить, что в 2014 году ВВП страны прогнозируется в объёме 61331,9 млн.манат, в 2015 году -в объёме 65957,6 млн.манат, в 2016 году – в объёме 70585,4 млн. манат, в 2017 году – в объёме 75211,0 млн.манат, а в 2018 году – в объёме 79836,7 млн.манат.

## Литература

1. *Hacızalov Y. İ., Kərimova Y. R., Hüseynova L. N.* Ekonometrika. – Bakı, 2011
2. *Hacızalov Y. İ., Zeynalov M. Y.* İqtisadi kibernetika. – Bakı, 2012
3. *Hacızalov Y. İ., Zeynalov M. Y.* İdarəetmə sistemlərinin qurulması. – Bakı, 1995
4. *Əliyev A. H.* Riyazi proqramlaşdırma. – Bakı, 2010
5. *Musayev B. S., Hacızalov Y. İ.* Ticarət-iqtisadi proseslərin modelləşdirilməsi. – Bakı, 1984.
6. *Musayev B. S., Səmədzadə Ş. Ə.* İqtisadi-riyazi üsullar. – Bakı, 1974.
7. *Zeynalov M. Y. və başqaları.* Planlaşdırmada riyazi üsullar və modellər. – Bakı, 1983
8. *Əbdürrəhmanov S. M., Mirzəyev Ə. M.* Riyazi proqramlaşdırma. – Bakı, 1983
9. *Mirzəyev Ə. M., Əbdürrəhmanov S. M.* Optimallaşdırma üsulları. – Bakı, 1984
10. *Şabanov S. Ə.* Excel paketində iqtisadi-riyazi modellərin həlli. – Bakı, 2007
11. *Şixəliyev N. Ş.* İqtisadi-riyazi proqnozlaşdırma metodları. – Bakı, 2014.
12. *Kundişeva Y. S.* İqtisadiyyatda riyazi modelləşdirmə (*rus dilindən tərcümə*). – Bakı, 2009
13. *Черняк Ю.* Системный анализ в управлении экономикой. – М., 1975
14. *Терехов Л. Л.* Экономико-математические методы. – М., 1972
15. *Лопатников Л. Н.* Экономико-математический словарь. – М., 1987
16. *Акулич Н. Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М., 1986
17. *Колемаев В.* Математическая экономика. – М., 2002
18. *Шукин Е. В.* Математические методы и модели в управлении. – М., 2002
19. *Гранберг А.* Моделирование экономики. – М., 1988
20. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М., 2002
21. *Зайцев М. Г.* Методы оптимизации управления и принятия решений. – М., 2007
22. *Бережная Е. В.* Математические методы моделирования экономический систем. М., 2001
23. *Эддоус М., Стенсфилд Р.* Методы принятия решений. – М., 1997
24. *Малыхин В. И.* Математика в экономике. – Москва, 2001
25. *Малыхин В. И.* Математическое моделирование в экономике. – М, 1998.

	<b>Sənayenin əsas istehsal fondları</b>		<b>ÜDM</b>
<b>İllər</b>	<b>(mln manat)</b>	<b>Məşğul əhəlinin sayı (min nəfər)</b>	<b>(mln. manat)</b>
2000	7,261.9	3,855.5	4,718.1
2001	8,159.0	3,891.4	5,315.6
2002	9,398.2	3,931.1	6,062.5
2003	11,944.0	3,972.6	7,146.5
2004	15,146.7	4,016.9	8,530.2
2005	18,225.0	4,062.3	12,522.5
2006	21,029.0	4,110.8	18,746.2
2007	28,467.0	4,162.2	28,360.5
2008	30,660.0	4,215.5	40,137.2
2009	34,789.0	4,271.7	35,601.5
2010	37,165.0	4,329.1	42,465.0
2011	41,952.0	4,375.2	52,082.0
2012	46,769.0	4,445.3	53,995.0
2013	50,289.8	4,480.6	57,708.2

	<b>Sənayenin əsas istehsal fondları</b>
	<b>(mln manat)</b>
<b>İllər</b>	
2000	7,261.9
2001	8,159.0
2002	9,398.2
2003	11,944.0
2004	15,146.7
2005	18,225.0
2006	21,029.0
2007	28,467.0
2008	30,660.0
2009	34,789.0
2010	37,165.0
2011	41,952.0
2012	46,769.0
2013	50,289.8

**proqnoz**

2014	52,120.9
2015	55,629.8
2016	59,138.7
2017	62,647.6
2018	66,156.5

**ВЫВОД ИТОГОВ***Регрессионная статистика*

Множественный R	0.991
R-квадрат	0.983
Нормированный R-квадрат	0.981
Стандартная ошибка	2,029.905
Наблюдения	14

*Дисперсионный анализ*

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	1	2801097500	2801097500
Остаток	12	49446162.4	4120513.533
Итого	13	2850543662	

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
У-пересечение	-7,014,843.127	270,038.081	-25.977
Переменная X 1	3,508.920	134.581	26.073

SƏİF=-7014843,127+3508,920il

İllər	Məşğul əhəlinin sayı (min nəfər)
2000	3,855.5
2001	3,891.4
2002	3,931.1
2003	3,972.6
2004	4,016.9
2005	4,062.3
2006	4,110.8
2007	4,162.2
2008	4,215.5
2009	4,271.7
2010	4,329.1
2011	4,375.2
2012	4,445.3
2013	4,480.6

**proqnoz**

2014	4,522.3
2015	4,571.7
2016	4,621.2
2017	4,670.6
2018	4,720.0

**ВЫВОД ИТОГОВ**

*Регрессионная статистика*

Множественный R	0.998
R-квадрат	0.996
Нормированный R-квадрат	0.996
Стандартная ошибка	13.833
Наблюдения	14

*Дисперсионный анализ*

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	1	556150.5622	556150.5622
Остаток	12	2296.292132	191.3576777
Итого	13	558446.8543	

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
Y-пересечение	-95,056.091	1,840.231	-51.654
Переменная X 1	49.443	0.917	53.910

**МЭС=-95056,091+49,443i**

	ÜDM (mln. manat)
<b>İllər</b>	
<b>2000</b>	4,718.1
<b>2001</b>	5,315.6
<b>2002</b>	6,062.5
<b>2003</b>	7,146.5
<b>2004</b>	8,530.2
<b>2005</b>	12,522.5
<b>2006</b>	18,746.2
<b>2007</b>	28,360.5
<b>2008</b>	40,137.2
<b>2009</b>	35,601.5
<b>2010</b>	42,465.0
<b>2011</b>	52,082.0
<b>2012</b>	53,995.0
<b>2013</b>	57,708.2
	proqnoz
<b>2014</b>	61,509.8
<b>2015</b>	66,155.0
<b>2016</b>	70,800.2
<b>2017</b>	75,445.4
<b>2018</b>	80,090.6

### ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0.971
R-квадрат	0.943
Нормированный R-квадрат	0.938
Стандартная ошибка	4,966.835
Наблюдения	14

### Дисперсионный анализ

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	1	4908961888	4908961888
Остаток	12	296033442.8	24669453.57
Итого	13	5204995331	

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
Y-пересечение	-9,293,916.840	660,737.727	-14.066
Переменная X 1	4,645.197	329.298	14.106

ÜDM=

**9293916,840+4645,197i**

İllər (X1)	Sənayenin əsas istehsal fondları	Məşğul əhəlinin sayı (min nəfər) X3	ÜDM
	(mln manat) (X2)		(mln. manat) Y
2000	7,261.9	3,855.5	4,718.1
2001	8,159.0	3,891.4	5,315.6
2002	9,398.2	3,931.1	6,062.5
2003	11,944.0	3,972.6	7,146.5
2004	15,146.7	4,016.9	8,530.2
2005	18,225.0	4,062.3	12,522.5
2006	21,029.0	4,110.8	18,746.2
2007	28,467.0	4,162.2	28,360.5
2008	30,660.0	4,215.5	40,137.2
2009	34,789.0	4,271.7	35,601.5
2010	37,165.0	4,329.1	42,465.0
2011	41,952.0	4,375.2	52,082.0
2012	46,769.0	4,445.3	53,995.0
2013	50,289.8	4,480.6	57,008.2

	Столбец 1	Столбец 2	Столбец 3
Столбец 1	1		
Столбец 2	0.991288948	1	
Столбец 3	0.997941919	0.996163632	1
Столбец 4	0.970983868	0.987125884	0.979097448

#### ВЫВОД ИТОГОВ

<i>Регрессионная статистика</i>	
Множественный R	0.98882075
R-квадрат	0.977766476
Нормированный R-квадрат	0.971096419
Стандартная ошибка	3387.763363
Наблюдения	14

#### Дисперсионный анализ

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	3	5,047,228,545.1	1682409515
Остаток	10	114,769,406.1	11476940.61
Итого	13	5,161,997,951.1	

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
Y-пересечение	5,344,786.550	7,683,212.290	0.696
Переменная X 1	-2,718.272	4,053.603	-0.671
Переменная X 2	1.788	0.839	2.130
Переменная X 3	21.660	123.136	0.176

Сəнайенин əsas istehsal fondları (mln manat) (X2)	ÜDM (mln. manat) Y
7,261.9	4,718.1
8,159.0	5,315.6
9,398.2	6,062.5
11,944.0	7,146.5
15,146.7	8,530.2
18,225.0	12,522.5
21,029.0	18,746.2
28,467.0	28,360.5
30,660.0	40,137.2
34,789.0	35,601.5
37,165.0	42,465.0
41,952.0	52,082.0
46,769.0	53,995.0
50,289.8	57,008.2

---

**ВЫВОД ИТОГОВ**


---



---

*Регрессионная статистика*


---

Множественный R	0.987
R-квадрат	0.974
Нормированный R-квадрат	0.972
Стандартная ошибка	3,317.338
Наблюдения	14

---



---

*Дисперсионный анализ*


---

	<i>df</i>	<i>SS</i>	<i>MS</i>
Регрессия	1	5029941200	5029941200
Остаток	12	132056751.6	11004729.3
Итого	13	5161997951	

---

	<i>Коэффициенты</i>	<i>Стандартная ошибка</i>	<i>t-статистика</i>
Y-пересечение	-7,656.321	1,832.101	-4.179
(X2)	1.328	0.062	21.379

---

$$UDM = -7656,321 + 1,328S_{iF}$$