

44. Измерение действующих значений несинусоидальных токов и напряжений

Для измерения действующих значений токов и напряжений в цепях переменного синусоидального тока применяются различные приборы, отличающиеся по принципу их действия или системой. Независимо от устройства шкалы всех приборов для измерения действующих значений токов и напряжений проградуированы в действующих значениях измеряемых величин.

Приборы непосредственного измерения (к таким относятся приборы электромагнитной и электродинамической систем) реагирует на действующее значение измеряемой величины (I , U) и, следовательно, для их шкал коэффициент пересчета равен единице ($k_n=1$).

Приборы косвенного измерения могут реагировать на среднее (I_{cp} , U_{cp}) или на максимальное (I_{max} , U_{max}) значение измеряемой величины, но их показания пересчитываются к действующим значениям синусоидальных функций.

Для приборов, реагирующих на среднее значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_{cp}} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m \cdot 2/\pi} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1,11$$

Для приборов, реагирующих на максимальное значение, коэффициент пересчета равен:

$$k_n = \frac{U}{U_m} = \frac{U_m / \sqrt{2}}{U_m} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707.$$

Действующее значение несинусоидальной функции зависит только от амплитуд отдельных гармоник, в то же время ее максимальное и среднее значения зависят как от амплитуд гармоник, так и от их фазовых сдвигов. Из этого следует вывод, что показания приборов косвенного измерения, реагирующих на максимальное или среднее значение, в цепях несинусоидального тока не будут соответствовать действующим значениям измеряемых величин.

Рассмотрим два примера. Пусть измеряемое напряжение содержит 1-ю и 3-ю гармоники, но с разными фазовыми сдвигами между ними:

а) $u_1(t) = 100\sin(\omega t) + 10\sin(3\omega t)$, (рис. 124а),

б) $u_2(t) = 100\sin(\omega t) - 10\sin(3\omega t)$, (рис. 124б).

Действующие (U), максимальные (U_{max}) и средние (U_{cp}) значения этих напряжений, рассчитанные математически по соответствующим формулам, а также показания приборов различных систем (V_1 – непосредственного измерения, V_2 – косвенного измерения с реакцией на максимальное значение U_{max} и V_3 – косвенного измерения с реакцией на среднее значение U_{cp}) приведены ниже в таблице.

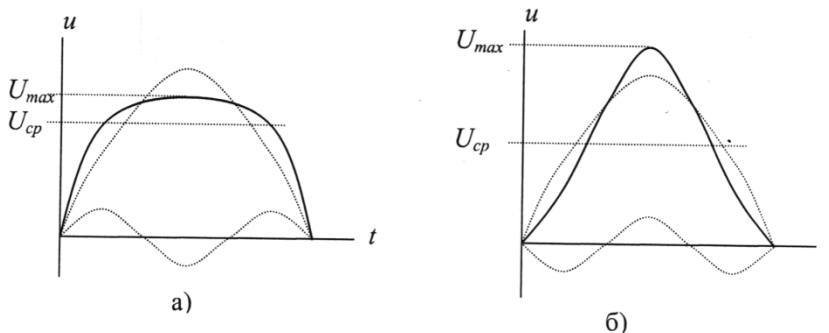


Рис. 124

Схема	U , В	U_{max} , В	U_{cp} , В	V_1	V_2	V_3
а)	71,1	90	65,8	71,1	63,6	73,0
б)	71,1	110	61,6	71,1	77,8	68,4

Как видно из приведенных в таблице цифр, показания приборов косвенного измерения существенно зависят от фазового сдвига между гармониками, при этом методическая погрешность измерения может составлять значительную величину (в рассматриваемом примере около 10 %).

45. Определение переходных процессов

Установившимся режимом называется такое состояние электрической цепи (схемы), при котором наблюдается равновесие между действием на цепь источников энергии и реакцией элементов цепи на это действие. Различают следующие 4 вида установившихся режимов в цепи:

- 1) режим отсутствия тока и напряжения;
- 2) режим постоянного тока;
- 3) режим переменного синусоидального тока;
- 4) режим периодического несинусоидального тока.

В установившемся режиме токи и напряжения в элементах цепи могут существовать неограниченно долго, не изменяя своих величин и характеристик. При этом энергетическое состояние каждого элемента цепи может быть однозначно определено для любого момента времени.

Переходным называется процесс, возникающий в электрической цепи при переходе ее от одного установившегося режима (старого) к другому установившемуся режиму (новому). Переходные процессы в цепи возникают в результате коммутаций. Под коммутацией понимают скачкообразные (мгновенные) изменения структуры (схемы) цепи или параметров ее отдельных элементов, вызванные включением, отключением или переключением отдельных ее участков. На электрических схемах коммутация обозначается в виде ключей в разомкнутом (рис. 128а) или замкнутом (рис. 128б) положении, при этом разомкнутый ключ в момент $t = 0$ замыкается, а замкнутый в момент $t = 0$ размыкается.

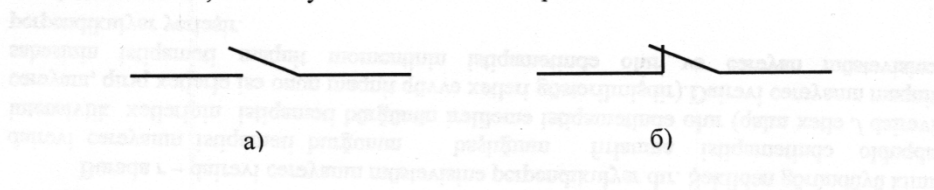


Рис. 128

Запасы энергии в магнитном поле катушки $W_M = \frac{L \cdot i^2}{2}$ и в электрическом поле конденсатора $W_C = \frac{C \cdot u^2}{2}$ в момент коммутации соответствуют старому (докоммутационному) установившемуся режиму и не могут измениться скачкообразно. Требуется некоторое время, чтобы эти запасы энергии пришли в соответствие с новым (послекоммутационным) установившимся режимом цепи. Таким образом, физически переходный процесс есть переход цепи из одного энергетического состояния в другое.

46. Законы (правила) коммутации

Первый закон коммутации гласит, что ток i_L в цепи с катушкой индуктивности L в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$i_L(-0) = i_L(+0) = i_L(0) = \text{const}$$

Предположим обратное, что ток i_L изменяется скачком, что означает $\frac{di}{dt} = \infty$. Из этого следует, что напряжение на катушке

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \infty,$$

и мощность, потребляемая магнитным полем катушки

$$P = \frac{dW_M}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} Li_L^2)}{dt} = Li_L \frac{di_L}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить напряжение $u = \infty$ и в природе не существует источников энергии, способных развивать бесконечную мощность. Следовательно, наше первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что $\frac{di_L}{dt} \neq 0$, или ток i_L в цепи с катушкой L в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Второй закон коммутации гласит, что напряжение u_C на выводах конденсатора C в момент коммутации не может измениться скачкообразно, т.е.

$$u_C(-0) = u_C(+0) = u_C(0) = \text{const}.$$

Предположим обратное, что напряжение u_C изменяется скачком, что означает $\frac{du_C}{dt} = \infty$. Из этого следует, что ток в конденсаторе

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \infty,$$

и мощность, потребляемая электрическим полем конденсатора

$$P = \frac{dW_E}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2} Cu_C^2)}{dt} = Cu_C \frac{du_C}{dt} = \infty.$$

Полученные выводы противоречат физическим законам, так как нельзя получить ток $i = \infty$ и не существует источников энергии бесконечной мощности. Следовательно, наше первоначальное предположение является некорректным, и мы вправе утверждать, что $\frac{du_C}{dt} \neq \infty$, или напряжение u_C на выводах конденсатора C в момент коммутации не может измениться скачкообразно.

Законы коммутации используются на практике для определения начальных условий при расчете переходных процессов.

47. Начальные условия переходного процесса

Начальными условиями называются мгновенные значения отдельных токов и напряжений, а также их первых, вторых и т.д. производных в начале переходного процесса, т.е. в момент коммутации при $t=0$. Начальные условия делятся на 2 вида: независимые и зависимые.

К независимым начальным условиям относятся токи в катушках $i_L(0)$ и напряжения на конденсаторах $u_C(0)$. Независимые начальные условия определяются законами коммутации, они не могут измениться скачкообразно и не зависят от вида коммутации. Их значения определяются из расчета схемы цепи в установившемся докоммутационном режиме на момент коммутации $t=0$.

Пример. Определить независимые начальные условия $i_L(0)$, $u_C(0)$ в схеме рис. 129 при заданных значениях параметров элементов: $R_1=50$ Ом, $L=100$ мГн, $R_2=100$ Ом, $C=50$ мкФ, а) для постоянной ЭДС $e(t)=E=150$ В = const; б) для синусоидальной ЭДС $e(t)=150\sin\omega t$, $f=50$ Гц.

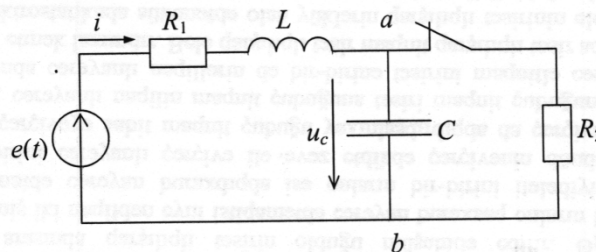


Рис. 129

а) При постоянной ЭДС источника $e(t) = E$ расчет схемы производится как для цепи постоянного тока: катушка L закорачивается, ветвь с конденсатором C размыкается, учитываются только резистивные элементы R .

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{150}{50 + 100} = 1 \text{ А};$$

$$U_C = U_{ab} = I \cdot R_2 = 1 \cdot 100 = 100 \text{ В}$$

Независимые начальные условия: $i_L(0)=1$ А, $U_C(0)=100$ В.

б) При синусоидальной ЭДС источника $e(t)=E_m\sin\omega t$ расчет схемы производится как для цепи переменного тока в комплексной форме для комплексных амплитуд функций.

$$X_L = \omega L = 314 \cdot 0,1 = 31,4 \text{ Ом}; \quad X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 63,7 \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = \frac{100(-j63,7)}{100 - j63,7} = 53,7e^{j57,5} \text{ Ом}$$

$$\underline{Z}_\Sigma = R_1 + jX_L + \underline{Z}_{ab} = 50 + j31,4 + 53,7e^{j57,5} = 80,1e^{-j10,1} \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_\Sigma} = \frac{150e^{j0}}{80,1e^{-j10,1}} = 1,87e^{j10,1} \text{ А}$$

$$\underline{U}_{abm} = \underline{I}_m \cdot \underline{Z}_{ab} = 1,87e^{j10,1} \cdot 53,7e^{j57,5} = 100,4e^{j67,6} \text{ В}$$

$$i(t) = 1,87\sin(\omega t + 10,1^\circ) \text{ А}$$

$$u_C(t) = 100,4\sin(\omega t + 67,6^\circ) \text{ В}$$

К зависимым начальным условиям относятся значения всех остальных токов и напряжений, а так же значения производных от всех переменных в момент коммутации при $t=0$. Зависимые начальные условия могут изменяться скачкообразно, их значения зависят от вида и места коммутации.

Зависимые начальные условия определяются на момент коммутации $t=0$ из системы дифференциальных уравнений (уравнений Кирхгофа), составленных для схемы в состоянии после коммутации, путем подстановки в них найденных ранее независимых начальных условий.

Для рассматриваемой схемы рис. 129 система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$iR_1 + L \frac{di}{dt} + u_C = e(t) \quad (1)$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (2)$$

а) При постоянной ЭДС источника $e(t) = E = \text{const}$ зависимые начальные условия будут равны:

$$u_{R1}(0) = i(0) \cdot R_1 = 1 \cdot 50 = 50 \text{ В}$$

$$u_L(0) = e(0) - u_{R1}(0) - u_C(0) = 150 - 50 - 100 = 0 \text{ В}$$

$$\frac{di}{dt}(0) = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{0}{100 \cdot 10^{-3}} = 0 \text{ А/с}$$

$$\frac{du_C}{dt}(0) = \frac{i(0)}{C} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 \text{ В/с}$$

Для определения начальных условий для вторых производных исходные дифференциальные уравнения дифференцируют почленно по переменной t и подставляют в них найденные на предыдущем этапе значения зависимых начальных условий, и т.д.

б) При синусоидальной ЭДС источника $e(t) = E_m \sin \omega t$ зависимые начальные условия определяются точно также, как и для цепи с источником постоянной ЭДС.

Начальные условия используются при расчете переходных процессов любым методом.

48. Классический метод расчета переходных процессов

Переходные процессы в любой электрической цепи можно описать системой дифференциальных уравнений, составленных для схемы цепи по законам Кирхгофа. В математике известно несколько методов решения систем дифференциальных уравнений: классический, операционный, численный и др. Название метода расчета переходных процессов адекватно названию математического метода решения системы дифференциальных уравнений, которыми описываются переходные процессы.

Исключая из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа лишние переменные, получим в результате для искомой функции $x(t)$ неоднородное дифференциальное уравнение n -го порядка:

$$a_n \cdot \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \cdot \frac{dx}{dt} + a_0 \cdot x = F(t),$$

где x – искомая величина, например i или u ; a_k – постоянные коэффициенты; $F(t)$ – некоторая функция времени, определяемая источником энергии.

Из курса математики известно, что решение (общий интеграл) линейного неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы двух решений: а) $x'(t)$ – полного решения однородного (без правой части) дифференциального уравнения и б) $x''(t)$ – частного решения неоднородного дифференциального уравнения для $t = \infty$:

$$x(t) = x'(t) + x''(t).$$

Вид частного решения $x''(t)$ для $t = \infty$ определяется источниками энергии и соответствует значению искомой функции в установившемся послекоммутационном режиме: $x''(t) = x_y(t)$. В электротехнике эта составляющая решения получила название установившейся.

Полное решение однородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$x'(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n t},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ – постоянные интегрирования; $p_1, p_2, \dots, p_n$ – корни характеристического уравнения, которое получают из однородного дифференциального, заменив в нем $x \rightarrow 1, dx/dt \rightarrow p$ и т.д.:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_1 \cdot p + a_0 = 0.$$

Эта составляющая решения не зависит от источников энергии, в электротехнике она получила название свободной: $x'(t) = x_{св}(t)$.

Таким образом, решение для искомой функции (тока, напряжения) может быть представлено в принятой в электротехнике форме:

$$x(t) = x_y(t) + x_{св}(t) = x_y(t) + A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots$$

Физический смысл имеет только полное решение для искомой функции $x(t)$, а ее отдельные составляющие $x_y(t)$ и $x_{св}(t)$ являются расчетными величинами.

Метод расчета переходного процесса, заключающийся в решении неоднородного дифференциального уравнения классическим методом математики, получил название классического.

Расчет переходного процесса классическим методом состоит из следующих составных частей или этапов:

- а) расчет установившейся составляющей $x_y(t)$;
- б) составление характеристического уравнения и определение его корней $p_1, \dots, p_n$;
- в) определение постоянных интегрирования $A_1, A_2, \dots$.

Следует отметить, что расчет переходного процесса классическим методом выполняется не в строгом соответствии с математическим методом решения неоднородного дифференциального уравнения. Физические законы электротехники позволяют существенно упростить это решение.

49. Определение установившейся составляющей $X_y(t)$

Как известно, установившаяся составляющая искомой функции $x_y(t)$, являясь частным решением неоднородного дифференциального уравнения при $t = \infty$, соответствует значению искомой функции в установившемся после коммутации режиме. Определение этой составляющей математическим методом из решения дифференциального уравнения довольно сложно и трудоемко. Гораздо проще найти эту функцию инженерным методом путем расчета схемы цепи в установившемся режиме после коммутации, что и делают на практике.

Пример. Определить установившуюся составляющую для тока i_y в схеме рис. 130 при заданных значениях параметров элементов: $R_1 = 50$ Ом,

$L=100$ мГн, $R_2=100$ Ом, $C=50$ мкФ, а) для постоянной ЭДС $e(t)=E=150$ В = const; б) для синусоидальной ЭДС $e(t)=150\sin\omega t$, $f=50$ Гц.

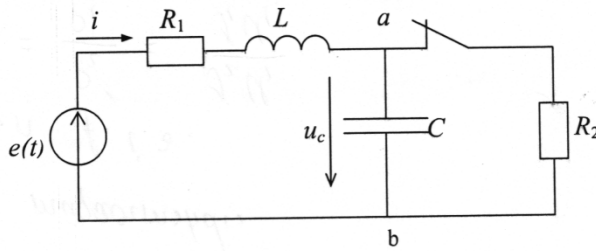


Рис. 130

После коммутации ветвь с резистором R_2 отключается и не оказывает влияния на режим остальной схемы.

а) При постоянной ЭДС источника $e(t)=E=const$ ток в схеме протекать не может (сопротивление конденсатора постоянному току равно ∞), следовательно $i_y(t)=0$.

б) При переменной ЭДС источника $e(t)=E_m\sin\omega t$ расчет установившегося режима выполняется в комплексной форме для комплексных амплитуд функций. По закону Ома:

$$I_{ym} = \frac{E_m}{R_1 + jX_L - jX_C} = \frac{150e^{j0}}{50 + j31,4 - j63,7} = 2,52e^{j32,9} \text{ А}$$

$$i_y(t) = 2,52\sin(\omega t + 32,9^\circ) \text{ А}$$

Вид установившейся составляющей соответствует виду источников энергии, которые действуют в схеме цепи.

50. Методы составления характеристического уравнения

Свободный режим схемы не зависит от источников энергии, определяется только структурой схемы и параметрами ее элементов. Из этого следует, что корни характеристического уравнения $p_1, p_2, \dots, p_n$ будут одинаковыми для всех переменных функций (токов и напряжений).

Характеристическое уравнение можно составить различными методами. Первый метод – классический, когда характеристическое уравнение составляется строго в соответствии с дифференциальным по классической схеме. При расчете переходных процессов в сложной схеме составляется система из “ m ” дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа для схемы цепи после коммутации. Так как корни характеристического уравнения являются общими для всех переменных, то решение системы дифференциальных уравнений выполняется относительно любой переменной (по выбору). В результате решения получают неоднородное дифференциальное уравнение с одной переменной. Составляют характеристическое уравнение в соответствии с полученным дифференциальным и определяют его корни.

Пример. Составить характеристическое уравнение и определить его корни для переменных в схеме рис. 131. Параметры элементов заданы в общем виде.

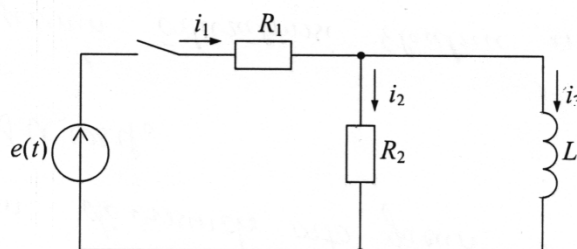


Рис. 131

Система дифференциальных уравнений по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1 R_1 + L \frac{di_3}{dt} = e(t) & (1) \Rightarrow i_1 = \frac{e}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ -i_2 R_2 + L \frac{di_3}{dt} = 0 & (2) \Rightarrow i_2 = \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Решим систему уравнений относительно переменной i_3 , в результате получим неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{E}{R_1} - \frac{L}{R_1} \cdot \frac{di_3}{dt} - \frac{L}{R_2} \cdot \frac{di_3}{dt} - i_3 = 0 \Rightarrow \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) \cdot \frac{di_3}{dt} + i_3 = \frac{1}{R_1} e(t)$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$p \left(\frac{L}{R_1} + \frac{L}{R_2} \right) + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)} \text{ [с}^{-1}\text{]}$$

Второй способ составления характеристического уравнения заключается в приравнении нулю главного определителя системы уравнений Кирхгофа для свободных составляющих переменных.

Пусть свободная составляющая произвольного тока имеет вид $i_{\text{св}} = A_k e^{p' t}$, тогда

$$\frac{di_{\text{св}}}{dt} = p \cdot A_k e^{p' t} = p \cdot i_{\text{св}} ; \quad \int i_{\text{св}} dt = \int A_k e^{p' t} dt = \frac{1}{p} A_k e^{p' t} = \frac{1}{p} i_{\text{св}}.$$

Система уравнений для свободных составляющих получается из системы дифференциальных уравнений Кирхгофа путем замены производных от переменных на множитель p , а интегралов – на $1/p$.

Для рассматриваемого примера система уравнений для свободных составляющих имеет вид:

$$\begin{cases} i_{1\text{св}} R_1 + 0 + pL \cdot i_{3\text{св}} = 0 \\ 0 + i_{2\text{св}} R_2 + pL \cdot i_{3\text{св}} = 0 \\ i_{1\text{св}} - i_{2\text{св}} - i_{3\text{св}} = 0 \end{cases}$$

Характеристическое уравнение и его корень:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & 0 & pL \\ 0 & -R_2 & pL \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = R_1 \cdot R_2 - R_1 \cdot pL - R_2 \cdot pL = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ составления характеристического уравнения (инженерный) заключается в приравнении нулю входного операторного сопротивления схемы относительно любой ее ветви.

Операторное сопротивление элемента получается из его комплексного сопротивления путем простой замены множителя $j\omega$ на p , следовательно

$$Z_R(p) = R; \quad Z_L(p) = pL; \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}.$$

Для рассматриваемого примера:

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{R_2 \cdot pL}{R_2 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_2(p) = R_2 + \frac{R_1 \cdot pL}{R_1 + pL} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)};$$

$$Z_3(p) = pL + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = 0 \Rightarrow p = -\frac{R_1 \cdot R_2}{L(R_1 + R_2)}.$$

Третий способ является наиболее простым и экономичным, поэтому он чаще других применяется при расчете переходных процессов в электрических цепях.

Корни характеристического уравнения характеризуют свободный переходной процесс в схеме без источников энергии. Такой процесс протекает с потерями энергии и поэтому затухает во времени. Из этого следует, что корни характеристического уравнения должны быть отрицательными или иметь отрицательную вещественную часть.

В общем случае порядок дифференциального уравнения, которым описывается переходный процесс в схеме, и, следовательно, степень характеристического уравнения и число его корней равны числу независимых начальных условий, или числу независимых накопителей энергии (катушек L и конденсаторов C). Если в схеме цепи содержатся параллельно включенные конденсаторы $C_1, C_2, \dots$ или последовательно включенные катушки $L_1, L_2, \dots$, то при расчете переходных процессов они должны быть заменены одним эквивалентным элементом $C_3 = C_1 + C_2 + \dots$ или $L_3 = L_1 + L_2 + \dots$.

Таким образом, общий вид решения для любой переменной при расчете переходного процесса может быть составлен только из анализа схемы цепи, без составления и решения системы дифференциальных уравнений.

Для рассматриваемого выше примера:

а) $i_1(t) = i_{1y}(t) + i_{1cv}(t) = I_{1y} + A_1 e^{p_1 t}$ — при $e(t) = E = \text{const}$;

б) $i(t) = i_{1y}(t) + i_{1cv}(t) = I_{1m} \sin(\omega t + \psi) + A_1 e^{p_1 t}$ — при $e(t) = E_m \sin(\omega t + \alpha)$.