

1. Tam ehtimal düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin:

Məsələ. Satışa üç zavoddan televizorlar gətirildi. Birinci zavodun məhsulunun 10% - i defektdir, ikincinin 5% -i və üçüncünün isə 3% - i defektdir. Əgər mağazinə gətirilmiş televizorların 25% - i birinci, 55% - i ikinci, 20% - i isə üçüncü zavoddan gətirilmişdirsə, onda defektli televizor almaq ehtimalını tapın.

Həlli. A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verirsə, A hadisəsinin ehtimalına tam ehtimal deyilir və aşağıdakı kimi tapılır.

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \cdot P\left(\frac{A}{A_k}\right)$$

Nəzərdən keçirilən $A = \{ \text{alınmış televizor defektlidir} \}$ hadisəsi üç hipotezlə bağlıdır:

$H_1 = \{ \text{televizor birinci zavodun istehsalıdır} \},$

$H_2 = \{ \text{ikinci zavodun istehsalıdır} \}, H_3 = \{ \text{üçüncü zavodun istehsalıdır} \}.$

Bu hadisələrin ehtimalları məsələnin şərtindən təyin olunur:

$$p(H_1) = 0,25; p(H_2) = 0,55; p(H_3) = 0,2.$$

A hadisəsinin şərti ehtimalları da məsələnin şərtlərindən təyin olunur:

$$p(A/H_1) = 0,1; p(A/H_2) = 0,05; p(A/H_3) = 0,03.$$

Buradan tam ehtimal düsturuna əsasən alınır:

$$p(A) = 0,25 \cdot 0,1 + 0,55 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,0585$$

2. Bayes düsturlarını yazın və verilən məsələni həll edin:

Məsələ. Radiyoqəbuledici qurğuya 0,9 ehtimalla sərfəli signal yığımı daxil olur və 0,1 ehtimalla yalnız küylü signal daxil olur. Əgər sərfəli, küylü signal qəbulediciyə daxil olursa 0,8 ehtimalla signalı verə bilər. Əgər küylü signal daxil olursa o signalı 0,3 ehtimalla verə bilər. Məlumdur ki, qəbuledici signalı vermişdir. Hansı ehtimalla signal qəbulrdiciyə gəlmişdir.

Həlli. A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verir. A hadisəsi artıq baş vermirsə onun baş verməsinə səbəb olan A_k hadisəsinin ehtimalı

$$P\left(\frac{A_k}{A}\right) = \frac{P(A_k) \cdot P\left(\frac{A}{A_k}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{A}{A_i}\right)} \quad (1)$$

$A = \{ \text{ilə qəbuledicinin signalı alması} \}$ hadisəsinə qəbul edək.

İki fərziyə var: $H_1 = \{ \text{signal küylü gəlməlidir} \},$

$H_2 = \{ \text{ancaq küylü gəlməlidir} \}.$ Bu hadisənin ehtimalları uyğun olaraq

$$p(H_1) = 0,9; p(H_2) = 0,1. A \text{ hadisəsinin } H_1 \text{ və } H_2 \text{ -dən olan şərti ehtimalları}$$

məsələnin şərtindən $p(A/H_1) = 0,8; p(A/H_2) = 0,3$ olur. H_1 hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalını tapmaq tələb edilir və Bayes düsturu ilə aşağıdakı

$$\text{kimi hesablanır. } p(H_1/A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A/H_1)}{p(H_1) \cdot p(A/H_1) + p(H_2) \cdot p(A/H_2)} = \frac{0,9 \cdot 0,8}{0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,3} = 0,96$$

3. Bayes düsturlarını yazın və verilən məsələni həll edin:

Məsələ. Fabrikdə məmulatın 25%-i birinci, 35%-i ikinci və 40%-i üçüncü məşində hazırlanır. Birinci, ikinci, üçüncü məşinlərin buraxdığı məmulatların uyğun olaraq 5%, 4% və 2%-i yararsız olur. Təsədüfi götürülən hər hansı bir məmulatın yararsız olması

hadisəsinin ehtimalını tapın Bu şərtləri saxlayaraq yararsız məmulatın 1-ci, 2-ci və 3-cü maşının hazırladığı məmulat olması ehtimalını tapın.

Həlli. A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, \dots, A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verir. A hadisəsi artıq baş vermirsə onun baş verməsinə səbəb olan A_k hadisəsinin ehtimalı

$$P\left(\frac{A_k}{A}\right) = \frac{P(A_k) \cdot P\left(\frac{A}{A_k}\right)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P\left(\frac{A}{A_i}\right)} \quad (1)$$

Götürülən məmulatın yararsız olması hadisəsinə A ilə işarə edək. Burada üç fərziyyə ola bilər: Götürülən yararsız məhsul 1-ci maşında (B_1 hadisəsi), 2-ci maşında (B_2 hadisəsi), 3-cü maşında (B_3 hadisəsi) hazırlana bilər. Onda verilənlərə əsasən

$P(B_1) =$; $P(B_2) =$; $P(B_3) =$ olar.

Götürülən yararsız məmulat 1-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_1}(A) =$;

2-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_2}(A) =$; 3-cü maşında buraxılıbsa

$P_{B_3}(A) =$ olar.

Onda tam ehtimal düsturuna əsasən məmulatın yararsız olması hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = 0,0345$$

$P_A(B_1)$ tapmaq lazımdır.

$P(B_1) = \frac{25}{100} = 0,25$; $P_{B_1}(A) = 0,05$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$ olduğundan, Bayes düsturunu tətbiq etməklə

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = \frac{0,0125}{0,0345} = \frac{25}{69}$$

$P_A(B_2)$ -tapmaq lazımdır.

$P(B_2) = 0,35$; $P_{B_2}(A) = 0,04$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$ olduğundan , Bayes düsturunu tətbiq etsək,

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^3 [P(B_k)] \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,0345} = \frac{28}{69} \quad \text{şərtə əsasən}$$

$P(B_3)=0,4$; $P_{B_3}(A)=0,02$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$ olduğundan Bayes

$$\text{düsturuna əsasən} \quad P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,0345} = \frac{80}{345} = \frac{16}{69}$$

4. Asılı olmayan sınaqlar. Bernulli düsturunun çıxarılışı(bəzi hallar).

Həlli. Fərz edək ki, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ kimi k sayda müxtəlif element verilmişdir. a_1 elementi n_1 dəfə , a_2 elementi n_2 dəfə və s. a_k elementinin n_k dəfə təkrar olunması şərti ilə düzəldilən $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ şəkilli qruplara təkrarlı permutasionlar deyilir və onların sayı $P_n(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)$ ilə işarə edilir. Burada $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$ bərabərliyi doğrudur.

Teorem 1. $P_n(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$

bərabərliyi doğrudur.

Teprem 2. n asılı olmayan sınağın hər birində hadisənin baş verməsi ehtimalı p -yə $0 < p < 1$ bərabərdirsə, hadisənin m dəfə baş verməsi (hansı ardıcılıqla fərqi yoxdur) ehtimalı $P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m}$ (1) ədədinə bərabərdir.

İsbatı: Fərz edək ki, ardıcıl olaraq birinci, ikinci və s. m -ci sınaqda A hadisəsi baş vermiş, sonrakı $n-m$ sınaqda baş verməmişdir, yəni

$\underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_m \cdot \underbrace{\bar{A} \cdot \bar{A} \dots \bar{A}}_{n-m}$ baş vermişdir. Sınaqlar asılı olmadığından bu kombinasiyanın

ehtimalı $P(A \cdot A \cdot A \dots A \cdot \bar{A} \cdot \bar{A} \dots \bar{A}) = P^m(A) \cdot P^{n-m}(\bar{A}) = p^m \cdot q^{n-m}$

olar. Bütün digər kombinasiyalarında ehtimalları $p^m \cdot q^{n-m}$ bərabər olması aydındır. Bu kombinasiyalardan heç olmasa biri baş verərsə, A hadisəsi düz m dəfə baş verər. Onda uyuşmayan hadisələr üçün toplama teoreminə görə

$P_n(m) = P(AA \dots AAA \dots \bar{A}) + P(A \bar{A} A \bar{A} \dots A) + \dots + P(\bar{A} \bar{A} \dots AAA \dots A)$ olar. Baxılan kombinasiyaların sayını tapaq. Hər qrupda n element var, birinci element m dəfə, ikinci element $n-m$ dəfə təkrar olunur. Deməli kombinasiyaların sayı təkrarlı permutasiyonların sayıdır.

$$P_n(m; n-m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m \text{ olur.}$$

Beləliklə aldığımız ki, $P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$ olması alınır. Sonuncu düstura Bernulli düsturu deyilir.

n sayda asılı olmayan Bernulli sınaqlarında A hadisəsinin: a) m -dən az, b) m -dən çox, v) ən azı m dəfə, y) ən çoxu m dəfə baş verməsi ehtimalları uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(m-1), \quad P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n),$$

$$P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n), \quad P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m).$$

5. Ən böyük ehtimallı ədədin tapılma düsturunu yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. İstehsal dəzgahını standart məhsul buraxması ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. 5 məhsulun istehsalı zamanı standart olmayan məhsulların mümkün ehtimalların tapın.

Həlli. n sayda asılı olmayan sınaqlar seriyasında $P_n(m_0)$ ehtimalı digər hadisələrin ehtimallarından kiçik deyilsə, onda m_0 -a **ən böyük ehtimallı ədəd** deyilir. m_0 tapmaq üçün

$$\begin{cases} P_m(m_0) \geq P_n(m_0 + 1) \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1) \end{cases} \quad (1)$$

düsturundan istifadə olunur.

Sistemin birinci və ikinci bərabərsizliyini açıq yazaraq həll etsək və bu bərabərsizliklərin hər ikisini birləşdirsək $np - q \leq m_0 \leq np + p$ (2)

alırıq. Bu bərabərlik vasitəsilə ən böyük ehtimallı ədəd tapılır.

Standart olmayan məhsul istehsal ehtimalı $p=1-0,8=0,2$ olar. Bernulli düsturuna görə bütün variantları hesablayaq ($n=5, q=0,8, k=0,1,2,3,4,5$).

$$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,32768 \quad P_5(1) = C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096$$

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048 \quad P_5(3) = C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = 0,0064 \quad P_5(5) = C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00032$$

Aldığımız ehtimalları qrafik üzərində qeyd etsək ən böyük ehtimalla malik ədədin $m_0 = 1$ olduğunu görürük.

Yuxarıda həll etdiyimiz məsələyə uyğun olaraq

$$5 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0,2 + 0,2 \Rightarrow 0,2 \leq m_0 \leq 1,2 \Rightarrow m_0 = 1$$

olmalıdır. Yəni, 1 məhsulun standart olmaması ehtimalı daha çoxdur və $P_5(1) = C_5^1 p q^4 = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,4096$ -dır.

6. Muavr-Laplasın lokal düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

Məsələ. Hər sınaqda A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı 0,6 bərabərdirsə, 2400 sınaqda A hadisəsinin 1400 dəfə baş verməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Teorem. n asılı olmayan sınağın hər birində A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p – yə ($0 < p < 1$) bərabərdirsə, hadisənin m dəfə baş verməsi ehtimalı (n -nin lazımı böyük qiymətində) təqribən

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (2)$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

$$\text{Burada } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \text{ işarə olunmuşdur.}$$

(2) düsturuna Muavr-Laplasın lokal düsturu və ya binomial paylanmanın normal yaxınlaşması deyilir. (2) düsturunda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3)$$

işarə etsək $P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ alırıq.

n böyük olduğundan, Laplas lokal teoremindən istifadə edək:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67$$

$\varphi(x)$ funksiyası cüt olduğuna görə $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67)$ 1-ci əlavədəki cədvələ görə $\varphi(1,67) = 0,0989$ tapırıq.

Axtarılan ehtimal $P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} 0,0989 = 0,0041$ olar.

7. Verilən məsələni həll edin.

Məsələ 5. 1. Eyni bir xətdən rəqiblər hər birinin hədəfə dəyməsi ehtimalı 0,6 olan 5 atəş açılırlar. X hədəfin vurulması təsadüfi kəmiyyəti üçün paylanma qanununu və paylanma funksiyasını təyin edin.

Həlli: X təsadüfi kəmiyyəti 0,1,2,3,4,5 qiymətləri alır.

$$P\{X = 0\} = (1 - p)^5 = 0,4^5 = 0,01024,$$

$$P\{X = 1\} = C_5^1 p(1 - p)^4 = 5 \cdot 0,6 \cdot 0,4^4 = 0,0768,$$

$$P\{X = 2\} = C_5^2 p^2(1 - p)^3 = 10 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,2304,$$

$$P\{X = 3\} = C_5^3 p^3(1 - p)^2 = 10 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,3456,$$

$$P\{X = 4\} = C_5^4 p^4(1 - p) = 5 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 = 0,2592,$$

$$P\{X = 5\} = p^5 = 0,6^5 = 0,07776.$$

Paylanma qanunu aşağıdakı kimi olar:

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

1. Paylanma funksiyasını (5) düsturu ilə təyin edək. Dəyişənlər üçün :

$$x \leq 0 \quad F(x) = 0,$$

$$0 < x \leq 1 \quad F(x) = p_0 = 0,01024,$$

$$1 < x \leq 2 \quad F(x) = p_0 + p_1 = 0,08704,$$

$$2 < x \leq 3 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0,31744,$$

$$3 < x \leq 4 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,66304,$$

$$4 < x \leq 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,92224,$$

$$x > 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

x	≤ 0		[1;2]	[2;3]	[3;4]	[4;5]	>5
		[0;1]					
F(x)	0	0,01024	0,08704	0,31744	0,66304	0,92224	1

8. Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları (Binomial, Həndəsi və Puasson)

Həlli. Aşağıdakı diskret paylanmalara baxaq:

1. BİNOMİNAL PAYLANMA. Bu paylanma

$$P_n(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n$) düsturundan alınır

X	0	1	2	...	k	...	n
P _i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

(2)

(2) diskret təsadüfi X kəmiyyətinin binomial paylanma qanunu adlanır. Bu paylanma üçün

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1 \text{ olur.}$$

2. HƏNDƏSİ PAYLANMA. Bu paylanma

$$P(X = k) = p \cdot q^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

($0 < p < 1$, $0 < q < 1$, $q = 1 - p$) düsturundan alınır

X	0	1	2	...	k	...
P _i	p	pq	pq ²	...	pq ^k	...

(4) diskret təsadüfi kəmiyyətinin həndəsi paylanma qanunudur.

Burada

$$p + pq + pq^2 + \dots + pq^k + \dots = p \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots)}_{\frac{1}{1-q} \text{ (} 0 < q < 1 \text{ olduğundan)}} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1 \text{ olur.}$$

3. PUASSON PAYLANMASI.

Bu paylanma

$$P_n(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad \lambda > 0 \quad (5)$$

Puassonun asimptotik düsturundan alınır:

X	0	1	2	...	n	...
p	e ^{-λ}	λe ^{-λ}	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	...

(6) diskret X təsadüfi kəmiyyətin Puasson paylanması adlanır. Burada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \text{ olur.}$$

9. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının xassələrini yazın və verilən məsələni həll edin.

Məsələ Təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

verilmişdir. C sabitini tapın və $p\{|x| < \pi/4\}$ ehtimalını hesablayın.

Həlli. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsinə onun sıxlıq funksiyası deyilir və $f(x)$ - ilə işarə olunur:

$$f(x) = F'(x) \quad (1)$$

Sıxlıq funksiyası məlum olduqda paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (2)$$

düsturu ilə tapılır.

$$(2) \text{--dən } F'(x) = \left(\int_{-\infty}^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ olur.}$$

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1 xassə. Sıxlıq funksiyası mənfi deyildir, yəni $f(x) \geq 0$.

□ $f(x) = F'(x) \geq 0$ ($F(x)$ paylanma funksiyası azalmayan funksiya olduğundan $F'(x) \geq 0$) olur. □

2 xassə. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. □(8)–dən $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$. □
 $\underbrace{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)}_{F(+\infty)=1}$

$$c \text{ sabitini xassəyə əsasən } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c \cos x dx = c \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1, \quad c = 0,5.$$

Belə ki, sıxlıq funksiyası iki intervalda verildiyindən ,Paylanma funksiyasını da hər bir intervalda ayrılıqda təyin edək. $x < -\pi/2$ $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy = \int_{-\infty}^x 0dy = 0$

$$-\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^x \frac{\cos y}{2} dy = \frac{\sin y}{2} \Big|_{-\pi/2}^x = \frac{1 + \sin x}{2}$$

$$x > \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2} dy + \int_{\pi/2}^x 0dy = 1$$

Beləliklə ,alarıq:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1 + \sin x)/2 & |x| \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

$$P\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

10. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının xassələrini yazın və verilən məsələni həll edin.

Məsələ . Təsadüfi X kəsilməz kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 2 \\ ax & x \in [0;2] \end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətinin $[1;2]$ parçasında qiymət alması ehtimalını tapın.

Həlli. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsinə onun sıxlıq funksiyası deyilir və $f(x)$ - ilə işarə olunur:

$$f(x) = F'(x) \quad (1)$$

Sıxlıq funksiyası məlum olduqda paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad (2)$$

düsturu ilə tapılır. $F'(x) = \left(\int_{-\infty}^x f(t)dt \right)' = f(x)$ olur.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1 xassə. Sıxlıq funksiyası mənfi deyildir, yəni $f(x) \geq 0$.

□ $f(x) = F'(x) \geq 0$ ($F(x)$ paylanma funksiyası azalmayan funksiya olduğundan $F'(x) \geq 0$) olur. □

2 xassə. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$: $f(x) = ax$ $x \in [0,2]$ olduqda a parametrini tapmaq üçün

$$\int_a^b f(x)dx = 1 \text{ düsturundan istifadə etmək lazımdır. } \int_a^b axdx = 1 \Rightarrow \frac{ax^2}{2} \Big|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{a \cdot 4}{2} = 0,5$$

$f(x) = F'(x)$ düsturundan istifadə edərək $F(x)$ paylanma funksiyasını tapaq.

$$f(x) = 0,5x \text{ olduğundan } F(x) = 0,25x^2 \text{ olur. } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,25x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$[1,2]$ parçasında $F(x)$ funksiyasının qiymət alması ehtimalını tapaq.

$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ düsturundan istifadə edək.

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0,25x^2 \Big|_{x=2} - 0,25x^2 \Big|_{x=1} = 0,25 \cdot 4 - 0,25 = 0,25(4 - 1) = 0,75$$

11. Verilən məsələni həll edin.

Məsələ . Aralarında ikisi xarab olan 10 qəbuledicidən parametrlərini yoxlamaq üçün təsadüfi olaraq iki qəbuledici götürülür. Tapın:

- a) Seçmədə iki xarab qəbuledicinin olmasının paylanması ;
- b) $F(x)$ paylanma funksiyasını
- v) $p\{X \geq 0,5\}$, $p\{X < 1,5\}$ ehtimallarını hesablayın.

Həlli. : a) Verilənlərə görə yaza bilərik.

1) $k=0$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 0 + 2 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^0 \cdot C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{1 \cdot 28}{45} = \frac{28}{45}$$

x_i	0	1	2
p_i	28/45	16/45	1/45

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$P_{10} 2 = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{2 \cdot 8}{45} = \frac{16}{45}$$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 2 + 0 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$$

b)

x	≤ 0	$[0;1]$	$[1; 2]$	> 2
$F(x)$	0	28/45	44/45	1

v) $p\{x \geq 0,5\} = 17/45$, $p\{X < 1,5\} = 44/45$

12. Riyazi gözləmə və xassələri ($M(XY)=M(X) M(Y)$ xəssəsi isbatı ilə)

Həlli. Tutaq ki, diskret X təsadüfi kəmiyyəti aşağıdakı paylanma qanunu ilə verilmişdir:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(1)

Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarına hasillərinin cəminə onun riyazi gözləməsi deyilir və $M(X)$ və ya MX – ilə işarə olunur. Tərifə əsasən (1) cədvəlindən

mümkün qiymətlərinin uyğun

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k \quad (2)$$

Riyazi gözləmənin xassələri

Burada diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmənin bir sıra xassələri isbat olunur.

1 xəssə. Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$$M(C) = C \quad (3)$$

2 xassə. Sabit vurğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:

$$M(CX) = CM(X) \quad (4)$$

3 xassə. İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y). \quad (5)$$

Tərif. İki X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin birinin paylanma qanunu digərinin alabiləcəyi mümkün qiymətlərdən asılı deyilsə, onda X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər deyilir.

4 xassə. Asılı olmayan iki X və Y təsadüfi kəmiyyətinin hasilinin riyazi gözləməsi, riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

$$M(X \cdot Y) = MX \cdot MY. \quad (6)$$

□ Sadəlik üçün X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma qanunlarını uyğun olaraq

X	x_1	x_2
P	P_1	P_2

və

Y	y_1	y_2
$\bar{P}$	$\bar{P}_1$	$\bar{P}_2$

(7)

kimi götürək.

X və Y diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin (7) şəklində verilmiş paylanma qanunundan $X \cdot Y$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

$X \cdot Y$	$x_1 \cdot y_1$	$x_1 y_2$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$
P	$P_1 \bar{P}_1$	$P_1 \bar{P}_2$	$P_2 \bar{P}_1$	$P_2 \bar{P}_2$

(8)

kimi olar. Burada X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan $\{X = x_1\}$ və $\{Y = y_1\}$ hadisələri asılı olmayandır. Yəni $P(X \cdot Y = x_1 \cdot y_1) = P[(X = x_1) \cdot (Y = y_1)] = P(X = x_1) \cdot P(Y = y_1) = P_1 \cdot \bar{P}_1$

(9)

olur. Eyni qayda ilə $P_1 \bar{P}_2$, $P_2 \bar{P}_1$, $P_2 \bar{P}_2$ üçün uyğun bərabərlikləri yazmaq olar.

Riyazi gözləmənin tərifinə əsasən (13) –dən

$$M(X \cdot Y) = x_1 y_1 P_1 \bar{P}_1 + x_1 y_2 P_1 \bar{P}_2 + x_2 y_1 P_2 \bar{P}_1 + x_2 y_2 P_2 \bar{P}_2 = (y_1 \bar{P}_1 + y_2 \bar{P}_2) x_1 P_1 + (y_1 \bar{P}_1 + y_2 \bar{P}_2) x_2 P_2 = (x_1 P_1 + x_2 P_2) (y_1 \bar{P}_1 + y_2 \bar{P}_2) = MXMY \quad \square$$

13. Dispersiya və onun xassələri ($D(X+Y) = D(X) + D(Y)$ isbatı ilə)

Həlli. Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin sonlu $M(X)$ riyazi gözləməsi varsa, onda $M[X - M(X)]^2$ ifadəsinə X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və $D(X)$ kimi işarə olunur:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (1)$$

Dispersiyanı hesablamaq üçün daha əlverişli düstur çıxaraq:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + M^2 X) = MX^2 - M\left(2X \cdot \underbrace{MX}_{\text{sabitdir}}\right) + M\left(\underbrace{M^2 X}_{\text{sabitdir}}\right) =$$

$$= MX^2 - 2MX \cdot MX + M^2 X = MX^2 - M^2 X$$

Deməli dispersiyanı

$$DX = MX^2 - M^2 X \quad (2)$$

düsturu ilə hesablamaq bəzən əlverişli olur. Burada MX^2 və $M^2 X$ sabit ədədlər olduğundan dispersiyada, yəni DX -də sabit ədədir.

Dispersiyanın xassələri

1 xassə. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir.

$$\square (1) \text{ düsturunda } X=C \text{ yazsaq } D(C) = M\left(C - \underbrace{M(C)}_C\right)^2 = M(C - C)^2 = \underbrace{M0}_{=0} = 0 \quad \square$$

2 xassə. Sabit vurğu kvadratı ilə dispersiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar

$$\square D(CX) = M\left(CX - \underbrace{M(CX)}_{CMX}\right)^2 = C^2 M(X - MX)^2 = C^2 DX \quad \square$$

3 xassə. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası, onların dispersiyalarının cəminə bərabərdir: $D(X+Y) = DX + D(Y)$ (3)

□ (3)-da X yerinə $X+Y$ yazsaq

$$D(X+Y) = M(X+Y)^2 - \left[\underbrace{M(X+Y)}_{MX+MY} \right]^2 = M(X^2 + 2X \cdot Y + Y^2) - (M^2X + 2MX \cdot MY + M^2Y) =$$

$$= Mx^2 - 2 \underbrace{M(X \cdot Y)}_{MX \cdot MY} + MY^2 - M^2X - 2MX \cdot MY - M^2Y = (MX^2 - M^2X) + (MY^2 - M^2Y) = DX + DY \quad \square$$

□ Burada $X \wedge Y$ asılı olmadığından $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$ olur.

4 xassə. X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqlinin dispersiyası, onların dispersiyaları cəminə bərabərdir: $D(X - Y) = DX + DY$ (4)

□ $D(X - Y) = D(X + (-1)Y) = DX + D((-1)Y) = DX + (-1)^2 DY = DX + DY$

14. Diskret təsadüfi kəmiyyətin momentləri . Verilən paylanmanın 2-ci tərtib mərkəzi momenti tapın.

x	1	2	4
p	0,1	0,3	p_3

Həlli. Diskret təsadüfi X kəmiyyətinin K tərtibli momenti $(X - a)^k$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə deyilir

$$\nu_k(a) = M(X - a)^k \quad (1)$$

kimi işarə olunur. $a = 0$ olduqda (1) –dən alınan

$$\alpha_k = \nu_k(0) = MX^k \quad (2)$$

- ya k tərtibli başlanğıc moment deyilir. (2) –dən $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ qiymətlərinə uyğun

$$\alpha_0 = MX^0 = M1 = 1$$

$$\alpha_1 = MX, \text{ (bir tərtibli başlanğıc moment riyazi gözləməyə bərabərdir)}$$

$$\alpha_2 = MX^2, \alpha_3 = MX^3, \alpha_4 = MX^4 \dots \text{ alırıq.}$$

$$(1) - \text{də } a = MX \text{ yazsaq, alınan } \beta_k = \nu_k(MX) = M[X - M(X)]^k \quad (3)$$

ifadəsinə k tərtibli mərkəzi moment deyilir. (3) –dən $k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ qiymətlərinə uyğun

$$\beta_0 = M(X - MX)^0 = M1 = 1,$$

$$\beta_1 = M(X - MX) = MX - \underbrace{M(MX)}_{MX} = MX - MX = 0,$$

$$\beta_2 = M(X - MX)^2 = DX, \text{ (iki tərtibli mərkəzi moment dispersiyaya bərabərdir)}$$

$$\beta_3 = M(X - MX)^3 = MX^3 - 3MX^2 \cdot MX + 2M^3X$$

$\beta_4 = MX^4 - 4MX^3 \cdot MX + 6MX^2 \cdot M^2X - 3M^4X$, və s. alırıq. Onda mərkəzi momentlərlə, başlanğıc momentlər arasında aşağıdakı münasibətləri arırıq

$$\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \beta_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4, \beta_5 = \dots$$

.....

Paylanmasının 2-ci tərtib mərkəzi momentini tapmaq.

2-ci tərtib mərkəzi momentini tapmaq üçün

$$\beta_2 = M[X - M(x)]^2 = D(x)$$

Mərkəzi momentləri, başlanğıc və mərkəzi momentlərin əlaqə düsturundan istifadə etməklə hesablamaq məqsəduyğundur.

$$\beta_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\nu_1 = M(x)$$

$$\nu_2 = M(x^2)$$

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 \text{ olduğundan } p_3 = 0,6$$

$$\nu_1 = M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1$$

$$v_2 = M(x^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$M(x^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1^2 = 10,9 - (3,1)^2 = 1,29$$

15. Məsələ. İşçi 4 dəzgaha nəzarət edir. Eyni zaman ərzində dəzgahların nəzarət tələb etməməsi hadisələrinin ehtimalları uyğun olaraq 0,9, 0,8, 0,75 və 0,7-ə bərabərdir. Dəzgahların X -sayı üçün diqqət tələb etməməsinin paylanma qanununu tərtib edin.

Həlli. Bu məsələni bir neçə üsulla həll etmək olar.

1-ci üsul. A_k -ilə k -cı dəzgahın cari müddəti diqqət tələb etməməsi hadisəsini (uyğun olaraq tələb etməsi hadisəsini) işarə edək. Onda aydındır ki,

$$P(x=0) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} \overline{A_4}) = (1-0,9)(1-0,8)(1-0,75)(1-0,7) = 0,0015;$$

$$P(x=1) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3} A_4) + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) =$$

$$= 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,7 = 0,0275$$

analoji

olaraq:

$$P(x=2) = P(\overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \overline{A_4}) + \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4) = 0,1685$$

$$P(x=3) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4) = 0,4245;$$

$$P(x=4) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 0,378$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu:

$X:$	x_k	0	1	2	3	4
	P_k	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

16 . Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

Məsələ. X təsadüfi kəmiyyəti (2,4) intervalında $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir; bu interval xaricində $f(x) = 0$. X kəmiyyətinin modasını, riyazi gözləməsini, dispersiyasını və medianını tapın.

Həlli. $\int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$ inteqralı mütləq yığılarsa bu inteqrala kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin

dispersiyası deyilir və DX kimi işarə olunur: $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx$ (1)

$$(1) \text{ -dən } DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2M(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx}_{MX} + M^2 X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2 X.$$

$$\text{Yəni } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \right)^2 \quad (2)$$

alırıq.

Əgər X kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti $[a, b]$ parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left(\int_a^b xf(x) dx \right)^2 \quad (3) \text{ olur.}$$

$M(x) = \int_a^b xf(x) dx$ düsturundan istifadə edək.

$$M(x) = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right) dx = \left(-\frac{3}{4} \frac{x^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4} \frac{4^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{4^3}{3} - \frac{6 \cdot 4^2}{2} \right) - \left(-\frac{3}{4} \frac{2^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{2^3}{3} - \frac{6 \cdot 2^2}{2} \right) = 3$$

$D(x) = \int_a^b x^2 f(x) dx - (M(x))^2$ düsturundan istifadə edərək dispersiyanı tapaq.

$$D(x) = \int_2^4 x^2 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right) dx - (M(x))^2 = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^3 - 6x^2 \right) dx - (M(x))^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} \right) \Big|_2^4 - 3^2 = \left(-\frac{3}{4} \frac{4^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{4^4}{4} - \frac{6 \cdot 4^3}{3} \right) - \left(-\frac{3}{4} \frac{2^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{2^4}{4} - \frac{6 \cdot 2^3}{3} \right) - 9 = 141$$

17. Müntəzəm paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları(riyazi gözləmə və dispersiyası).

Həlli. Bütün mümkün qiymətləri (a, b) intervalına daxil olan kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası həmin intervalda sabit

$f(x) = \frac{1}{b-a}$ qiymətini, bu intervalın xaricində isə $f(x) = 0$ qiymətini alırsa, onda x kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinə (a, b) intervalında müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir. Tərifdən aydındır ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)} \cdot (b-a) = 1$ olur. Yəni müntəzəm paylanmadakı $f(x)$ funksiyası

doğrudan da sıxlıq funksiyasıdır. X -in paylanma funksiyasını yəni $F(x)$ funksiyasını tapaq.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^a f(t) dt}_0 + \int_a^x f(t) dt = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \text{ olar.}$$

Yəni

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \text{ olarsa,} \quad \text{olur.}$$

Müntəzəm paylanmanın riyazi gözləməsi $MX = \int_a^b x \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$ olar.

Müntəzəm paylanmanın dispersiyası

$$DX = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \int_a^b \left[x^2 - (a+b)x + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{dx}{b-a} = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} - \frac{x^2(a+b)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{1}{b-a} x \right] \Big|_a^b =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{b-a}{b-a} = \frac{a^2 - ab + b^2}{3} - \frac{a^3 + 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(a, b) intervalında müntəzəm paylanmış X kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətinin bu intervalın ixtiyarı (α, β)

hissəsinə düşməsi ehtimalı $P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{x}{b-a} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$ olar.

18. Üstlü paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları(riyazi gözləmə və dispersiyası).

Həlli. Kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyəti

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ olduqda,} \quad (1)$$

sıxlıq funksiyasına malikdirsə, onda onun paylanması $\lambda (\lambda > 0)$ parametrlı üstlü paylanma deyilir. Üstlü paylanmanın paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t) dt}_0 + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x} \text{ olur. Yəni}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \text{ olduqda,} \\ 0, & x \leq 0 \text{ olduqda.} \end{cases} \quad (2)$$

Üstlü paylanmada X təsadüfi kəmiyyətinin (α, β) intervalındakı qiymətləri alması ehtimalı

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\beta} - (1 - e^{-\lambda\alpha}) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} \quad (3)$$

düsturu ilə tapılır.

$$\text{Üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi } MX = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \underbrace{-xe^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty}}_{\text{"0"}} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \text{ olur.}$$

Yəni üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi λ parametrlinin tərs qiymətinə bərabərdir:

$$MX = \frac{1}{\lambda} \quad (4)$$

Üstlü paylanmanın dispersiyası

$$DX = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty}}_{\text{"0"}} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{olur. Yəni, } DX = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5)$$

Onda $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}$ olur. Deməli üstlü paylanmada

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ - dir.} \quad (6)$$

X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin orta kvadratik meylinin onun riyazi gözləməsinə olan nisbətində təsadüfi X kəmiyyətinin variasiya əmsalı deyilir və V -ilə işarə olunur:

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \quad (7)$$

$$\text{Üstlü paylanma üçün } V = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1 \text{ olar.}$$

19. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x + x^2}{12}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətin $(1;2)$ -dən qiymət alması ehtimalını tapın.

Həlli. $\int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx$ inteqralı mütləq yığılarsa bu inteqrala kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və DX kimi işarə olunur:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx \quad (1)$$

$$(1) - \text{dən} \quad DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - 2MX \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx}_{MX} + M^2 X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx}_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2 X.$$

Yəni

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \right)^2 \quad (2)$$

alırıq.

Əgər X kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti $[a, b]$ parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - \left(\int_a^b xf(x) dx \right)^2 \quad (3) \quad \text{olur.}$$

X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x + x^2}{12}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətin $(1; 2)$ -dən qiymət alması ehtimalını tapın.

$$\begin{aligned} P(a < x < b) &= F(b) - F(a) = F(2) - F(1) = \frac{x + x^2}{12} \Big|_{x=2} - \frac{x + x^2}{12} \Big|_{x=1} = \\ &= \frac{2+4}{12} - \frac{1+1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \quad \text{alırıq.} \end{aligned}$$

20. Normal paylanma. Normal paylanmada a və σ parametrləri. Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin $(\alpha; \beta)$ intervalından qiymət alması ehtimalı.

$$\text{Kəsilməyən təsadüfi } X \text{ kəmiyyəti} \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

sıxlıq funksiyasına malikdirsə, onda X kəmiyyətinin paylanmasına $(a; \sigma)$ parametrlili normal paylanma deyilir.

Normal paylanmış kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot dt \quad (2)$$

$$\text{kimidir. Əgər (1)-də } a = 0, \quad \sigma = 1 \text{ olarsa onda} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad (3)$$

alırıq. Onda kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasına standart normal paylanma deyilir.

İsbat edək ki, (1) -dəki a parametri təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, σ parametri isə orta kvadratik meylidir.

$$\square MX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (4)$$

$t = \frac{x-a}{\sigma}$ işarə etsək, buradan $x = a + \sigma t$, $dx = \sigma dt$ alırıq. $x = -\infty$ olduqda $t = -\infty$ və $x = +\infty$ olduqda

$t = +\infty$ olur. Onda (4) -dən

$$MX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a + \sigma t) \cdot e^{-t^2/2} \cdot \sigma dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \cdot dt + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2/2} \cdot dt \quad (5)$$

alırıq. (5) –də $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$ (Puaşson inteqralı) və $\int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot e^{-t^2/2} dt = 0$ (inteqral altı funksiya tək funksiya, inteqrallama sərhədləri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir) olduğunu (5)-də nəzərə alsaq $MX = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = a$ alırıq.

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - a)^2 \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot \sigma dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \left(te^{-\frac{t^2}{2}} \right) \cdot dt. \quad (6)$$

Burada $\int_{-\infty}^{+\infty} t \left(te^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt = \underbrace{-t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}}_{"0"} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$ olduğundan (6)- dan $DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2$

alırıq. Yəni $\sigma = \sqrt{DX}$ -dir və $\sigma > 0$ -dır. $\square$

İndi normal paylanmış kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş (α, β) intervalında qiymət alması ehtimalını tapaq.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \text{ olur.}$$

Burada $\frac{x-a}{\sigma} = t$ -dən, $x = \alpha$ olduqda $t = \frac{\alpha-a}{\sigma}$ və $x = \beta$ olduqda $t = \frac{\beta-a}{\sigma}$ olduğundan və Laplas funksiyaından istifadə etdik. Deməli,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

21. Normal əyri a və σ parametrlərinin normal əyriyə təsiri.

Həlli. Normal paylanmış kəsilməyən təsadüfi X kəmiyyətinin

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (1)$$

sıxlıq funksiyaının qrafikinə normal yəri deyilir. (1) –dən $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot 0 = 0$

olduğundan absis oxu normal əyrinin asimptotik düz xəttidir. $f(x)$ sıxlıq funksiyası olduğundan $f(x) > 0$ olur. Yəni normal əyri absis oxundan yuxarıda yerləşir. $x = a$ düz xətti normal əyrinin simmetriya xəttidir. $x = a$ nöqtəsi normal əyrinin maksimum nöqtəsidir. Bunu göstərək (1) – dən

$$f'(x) = \frac{-(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a \text{ olur. } x < a \text{ olduqda } f'(x) > 0 \text{ və } x > a \text{ olduqda}$$

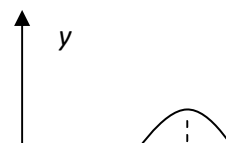
$f'(x) < 0$ olduğundan $\max f(x) \Big|_{x=a} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ olar. $x = a + \sigma$ və $x = a - \sigma$ nöqtələri əyilmə nöqtəsinin absisləridir. Doğrudanda $f''(x) = \frac{(x-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$ -dan $(x-a)^2 - \sigma^2 = 0 \Rightarrow$

$x = a - \sigma$ və $x = a + \sigma$ olur. Onda əyilmə nöqtəsinin ordinatı $f(a \pm \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}$ olduğundan normal əyrinin əyilmə nöqtələri $\left(a - \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}\right)$ və $\left(a + \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}e}\right)$ olar.

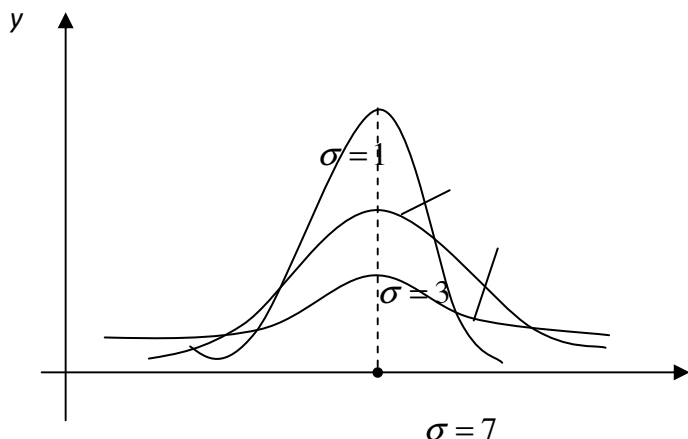
$x < a \pm \sigma$ olduqda $f''(x) > 0$ və $x > a \pm \sigma$ olduqda $f''(x) < 0$ olduğundan doğrudan da $x = a \pm \sigma$ normal

əyrinin əyilmə nöqtəsinin absisidir, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyası üçün yuxarıda əldə etdiyimiz nəticələrə əsasən normal əyri (şəkl.1)

kimidir. Qeyd edək ki, normal paylanmış a və σ



parametrləri normal əyriyə müxtəlif cür təsir edir, σ parametri qeyd edildikdə a parametrinin dəyişməsi ilə normal əyri formasını dəyişmir, absis oxu boyunca sola və ya sağa sürüşdürülür, σ parametrinin dəyişməsi normal əyrinin forması dəyişir. σ -nin artması ilə normal əyri yuxarıdan sıxılaraq, absis oxu boyunca genəlir. σ -nin azalması ilə bu əyri yuxarıdan dartılaraq, $x = a$ düz xəttinə yaxınlaşır (şək.2)



22. Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətinin $(\alpha; \beta)$ intervalında qiymət alması ehtimalı düsrurunu yazın və verilən məsələni həll edin.

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyəti normal qanunla paylanmışdır. Onun parametrləri $a = 7$ və $\sigma = 3$ olarsa, bu kəmiyyətin $(0; 7)$ intervalında qiymət alması ehtimalını tapın ($\Phi(2,33) = 0,40824$; $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0,3413$).

• Normal paylanmış kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş (α, β) intervalında qiymət alması

Həlli.

ehtimalını tapaq.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \text{ olur.}$$

Burada $\frac{x-a}{\sigma} = t$ -dən, $x = \alpha$ olduqda $t = \frac{\alpha-a}{\sigma}$ və $x = \beta$ olduqda $t = \frac{\beta-a}{\sigma}$ olduğundan və Laplas

funksiyasından istifadə etdik. Deməli, $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

Verilənləri bu düsturda nəzərə alaq

$$P(0 < x < 7) = \Phi\left(\frac{7-7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{0-7}{3}\right) = \Phi(0) - \Phi(-2,33) = \Phi(0) + \Phi(2,33) = 0 + 0,4898 = 0,4898$$

23. İki təsadüfi argumentin funksiyası . İki təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu verildikdə $Z = X + Y$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanununu yazın.

Məsələ: X və Y təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması verilmişdir.

X	1	4
P	0,3	0,7

y	2	3
g	0,4	0,6

$Z = X + Y$ -in paylanması yazın.

Həlli. X və Y təsadüfi kəmiyyətləri cütünün hər bir mümkün qiymətlərinə Z təsadüfi kəmiyyətinin bir mümkün qiyməti uyğun gələrsə, onda Z -ə iki təsadüfi arqumentin funksiyası deyilir: $Z = \varphi(X, Y)$ kimi işarə olunur.

Praktikada çox vaxt asılı olmayan iki X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş paylanmasına görə $Z = X + Y$ paylanmasını tapmaq tələb olunur. Bunun üçün Z -in bütün mümkün qiymətlərini tapmaq lazımdır. Z -in mümkün qiymətlərini tapmaq üçün isə X -in hər bir mümkün qiyməti ilə Y -in bütün mümkün qiymətlərini toplamaq lazımdır. Z -in tapılmış mümkün qiymətlərinin ehtimalları isə X və Y -in toplanmış qiymətlərinin ehtimalları hasilinə bərabərdir.

. Fərz edək ki, asılı olmayan X və Y -in paylanması verildi.

X	X_1	X_2
p	p_1	p_2

Y	Y_1	Y_2
g	g_1	g_2

Onda $x+y$ -in paylanması aşağıdakı şəkildə olacaq

$$p(x = x_1, y = y_1) = p(x = x_1) \cdot p(y = y_1) = p_1 g_1$$

$$p(x = x_1, y = y_2) = p(x = x_1) \cdot p(y = y_2) = p_1 g_2$$

$$p(x = x_2, y = y_1) = p(x = x_2) \cdot p(y = y_1) = p_2 g_1$$

$$P(x = x_2, y = y_2) = P(x = x_2) \cdot P(y = y_2) = P_2 g_2$$

Onda

$x+y$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$
p	$p_1 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_1$	$p_2 g_2$

Bunları məsələdə nəzərə alsaq

$$P(z = 1 + 2 = 3) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12$$

$$P(z = 1 + 3 = 4) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(z = 4 + 2 = 6) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$$

$$P(z = 4 + 3 = 7) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42$$

Z	3	4	6	7
P	0,12	0,18	0,28	0,42

24. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu .Kopmponentlərin paylanma qanununu.

Bütün mümkün qiymətləri (x, y) ədədlər cütündən ibarət olan (X, Y) təsadüfi kəmiyyəti ikiölçülü adlanır. Eyni zamanda baxılan X və Y komponentləri iki təsadüfi kəmiyyət sistemini təşkil edir. Komponentləri diskret olan ikiölçülü təsadüfi kəmiyyət diskret adlanır. Komponentləri kəsilməz olan ikiölçülü təsadüfi kəmiyyət kəsilməz adlanır. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyəti bəzən təsadüfi vektor adlandırırlar.

Müəyyən nizamlı düzəlmiş $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri çoxluğu, yəni $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ çoxluğu n ölçülü təsadüfi vektor və ya n ölçülü təsadüfi kəmiyyətlər sistemi adlanır. Əvvəlcə iki ölçülü $Z = (X, Y)$ vektoruna baxaq. Fərz edək ki, $Z = (X, Y)$ vektorunun komponentləri $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - dir. Diskret halda bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin ayrı-ayrılıqda paylanma qanunu verilibsə, onda $Z = (X, Y)$ ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətinin də paylanma qanunu yazmaq olar. Doğrudanda

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(1)

və

Y	y ₁	y ₂	...	y _m
g	g ₁	g ₂	...	g _m

(2)

paylanmalarından ikiölçülü $Z = (X, Y)$ təsadüfi kəmiyyətinin

x/y	x ₁	x ₂	...	x _n
y ₁	P ₁₁	P ₂₁	...	p _{n1}
y ₂	P ₁₂	P ₂₂	...	p _{n2}
			...	
y _m	P _{1m}	P _{2m}	...	p _{nm}

(3)

paylanmasını alırıq. (3)-ə ikiölçülü təsadüfi $X = (X, Y)$ kəmiyyətinin paylanma qanunu və yaxud paylanma matrisi deyilir.

(1) -də $P(X = x_k) = P_k$, $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$, (2) -də $P(Y = y_i) = g_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ işarə olunmuşdur.

(1)-də $\sum_{k=1}^n P_k = 1$ və (2) -də $\sum_{i=1}^m g_i = 1$.

X və Y asılı olmadığından $\{X = x_k\}$ və $\{Y = y_i\}$ -də asılı deyildir. Buna görədə $P\{(X = x_k) \cdot (Y = y_i)\} = P\{(X = x_k) \cdot P(Y = y_i)\} = P_k \cdot g_i$ $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ olur.

Deməli $P_{ki} = P\{X = x_k, Y = y_i\} = P\{X = x_k\} \cdot P\{Y = y_i\} = P_k \cdot g_i$ $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ olur. (3) paylanmasından $\{X = x_k, Y = y_i\}$ hadisələri $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ tam qrup əmələ gətirdiyindən

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n P_{ki} = 1 \quad (4)$$

olur.

Qeyd edək ki, yuxarıda (1) və (2) paylanmaları vasitəsilə (3) paylanmasını aldığımız. Bu məsələnin tərsində doğrudur. Yəni (3) paylanması verildikdə bundan istifadə edərək (1) və (2) paylanmalarını tapmaq olar.

Doğrudanda

$$\begin{aligned} P_k &= P(X = x_k) = P((X = x_k) \cdot (Y = y_1) + (X = x_k) \cdot (Y = y_2) + \dots + (X = x_k) \cdot (Y = y_m)) = \\ &= P((X = x_k) \cdot (Y = y_1)) + P((X = x_k) \cdot (Y = y_2)) + \dots + P((X = x_k) \cdot (Y = y_m)) = \\ &= P_k g_1 + P_k g_2 + \dots + P_k g_m = P_{k1} + P_{k2} + \dots + P_{km} \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (5)$$

Eyni qayda ilə

$$g_i = P(Y = y_i) = P_{i1} + P_{i2} + \dots + P_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

alırıq. (5)-dən

X	x ₁	x ₂	...	x _n
P	p ₁	p ₂	...	p _n

alınır. (6) -dən

Y	y ₁	y ₂	...	y _m
g	g ₁	g ₂	...	g _m

alınır.

25. İki təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyası və onun xassələri. Komponentlərin paylanma funksiyaları.

Fərz edək ki, X və Y asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda (X, Y) sisteminin paylanma funksiyası (və ya birgə paylanma funksiyası) $\{X < x\}$ və $\{Y < y\}$ hadisələrinin eyni zamanda (birgə) baş verməsi ehtimalına, yəni $P\{X < x; Y < y\}$ -ə deyilir və $F(x, y)$ kimi işarə olunur.

Tərifə əsasən yazı bilərik:

$$P(X < x; Y < y) = F(x, y). \quad (1)$$

Tərifdən aydındır ki, $F(x, y)$ paylanma funksiyası ikidəyişənli funksiyadır və aşağıdakı xassələrə malikdir.

$$1) \quad 0 \leq F(x, y) \leq 1$$

□ (1) –də $0 \leq P(X < x; Y < y) \leq 1$ olduğundan $0 \leq F(x, y) \leq 1$ olur. □

2) $F(x, y)$ paylanma funksiyası hər bir arqumentə görə azalmayan funksiyadır, yəni

$$x_1 < x_2 \quad \text{olduqda} \quad F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \quad \text{və} \quad y_1 < y_2 \quad \text{olduqda} \quad F(x, y_1) \leq F(x, y_2) \quad \text{olur.}$$

$$\begin{aligned} \square \text{ Doğrudan da } \{X < x_2, Y < y\} &= \underbrace{\{X < x_1, Y < y\} \cup \{x_1 \leq X < x_2, Y < y\}}_{\{\emptyset\}} \Rightarrow \underbrace{P\{X < x_2, Y < y\}}_{(1) \Rightarrow F(x_2, y)} = \\ &= \underbrace{P\{X < x_1, Y < y\}}_{(1) \Rightarrow F(x_1, y)} + P\{x_1 \leq X < x_2, Y < y\} \Rightarrow F(x_2, y) - F(x_1, y) = P\{x_1 \leq X < x_2, Y < y\} \geq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$F(x_1, y) \leq F(x_2, y) \quad \text{olur.} \quad \square$$

Eyni qayda ilə $F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$ isbat olunur.

$$3) \quad \square \quad F(+\infty, +\infty) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} F(x, y) = 1, \quad F(-\infty, -\infty) = 0, \quad F(-\infty, y) = 0, \quad F(x, -\infty) = 0 \quad \square \quad \text{olur.}$$

$$\square \quad F(x, +\infty) = F_1(x) \quad \text{və} \quad F(+\infty, y) = F_2(y) \quad \text{olur.}$$

$$\square \quad F(x, +\infty) = P\left(X < x, \underbrace{Y < +\infty}_{(\Omega)}\right) = P\left(\underbrace{X < x, \Omega}_{(X < x)}\right) = P(X < x) = F_1(x) \quad \text{olur.} \quad \square$$

Eyni qayda ilə $F(+\infty, y) = F_2(y)$ olduğu isbat olunur.

26. İki ölçülü asılı təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu yazın və məsələni həll edin.

Məsələ: İkiölçülü (X, Y) təsadüfi kəmiyyət cədvəldə verilmiş şəkildə paylanıb.

$Y=1$ şərti daxilində X komponentinin paylanma qanununu yazın. X və Y kəmiyyətlərinin asılılığını araşdırın.

Tutaq ki, (X, Y) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ - dir. Onda

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

$Y = y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ şərti daxilində X komponentinin paylanmasına şərti paylanma deyilir. $V = y_j (j = \overline{1, m})$

şərti daxilində X təsadüfi kəmiyyəti müml və ya $(x_2, \dots, x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, bu qiymətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayc

$$\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \right) \text{ tapılacaq şərti ehtimallardır. Yəni}$$

$$P_{Y=y_j}(X = x_i) = \frac{P[(X = x_i); (Y = y_j)]}{P(Y = y_j)} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) \quad (1)$$

şərt ehtimallardır. Onda

$X/Y = y_j$	x_1	x_2	...	x_n
$P_{Y=y_j}$	$P_{Y=y_j}(x_1)$	$P_{Y=y_j}(x_2)$	...	$P_{Y=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli X komponentinin şərti paylanması adlanır.

Analoji olaraq $X = x_i (i = \overline{1, n})$ şərti daxilində Y komponentinin şərti paylanması

$Y/X = x_i$	y_1	y_2	...	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	...	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Həlli. $Y=1$ şərti ilə

$$P(Y=1)_{X=-1} = \frac{P(X=-1; Y=1)}{P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)} = \frac{0,2}{0,2+0,3+0,2} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

$$P(Y=1)_{X=0} = \frac{P(X=0; Y=1)}{P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)} = \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

$$P(Y=1)_{X=1} = \frac{P(X=1; Y=1)}{P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

27. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasını yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. $(X; Y)$ ikiölçülü təsadüfi kəmiyyət paylamaqanunun sıxlıq funksiyası aşağıdakı kimi

verilib:

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

Oblast D $x=0$; $x=3$; $y=0$; $y=3$ düz xətləri ilə məhdudlaşdırılmış kvadrattır. a əmsalını tapın; $(X; Y)$ nöqtəsinin $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$ düz xətləri ilə məhdudlaşdırılmış D kvadratına düşməsi ehtimalını tapın.

Həlli. Əgər ikiölçülü (X, Y) sisteminin $F(x, y)$ paylanma funksiyası hər bir argumentə nəzərən diferensiallanan olub, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ ikinci tərtib qarşıq törəməsinə malikdirsə, onda belə sistemə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər sistemi

deyilir. Bu halda X və Y komponentləri kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərdir. $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ - funksiyasına (X, Y) sisteminin

birgə sıxlıq funksiyası və ya paylanma sıxlığı deyilir və $f(x, y)$ kimi işarə olunur

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

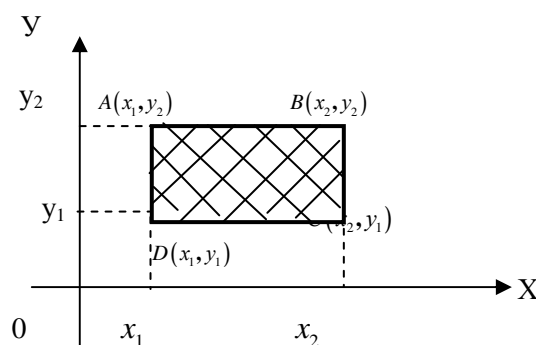
İki ölçülü $f(x, y)$ sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

$$1) f(x, y) \geq 0; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

□ Əvvəlcə $f(x, y) \geq 0$ olmasını isbat edək. Bunun üçün

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)] \quad (2)$$

ifadəsinə baxaq. Bu ehtimal (X, Y) təsadüfi nöqtəsinin $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1 \leq y \leq y_2$ düzbucaqlısına (şək. 1) düşməsi ehtimalıdır.



Şəkil 1

Bilirik ki, $\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int f(x, y) dx dy = 1$ olmalıdır.

$$\int_0^3 \int_0^3 a(x+y) dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^3 a(x+y) dx \right) dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{ax^2}{2} + a y x \right) \Big|_0^3 \right] dx =$$

$$\int_0^3 \left[\frac{9a}{2} + 3ay \right] dy = \left(\frac{9ay}{2} + \frac{3ay^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{27a}{2} + \frac{27a}{2} = \frac{54a}{2} = 27a$$

$$27a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{27} \Rightarrow f(x, y) = \frac{1}{27}(x+y)$$

$$P(1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2) = \int_1^2 \int_1^2 \frac{1}{27}(x+y) dx dy = \int_1^2 \left(\int_1^2 \frac{1}{27}(x+y) dx \right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{54} + \frac{xy}{27} \right) \Big|_1^2 \right] dy = \int_1^2 \left(\frac{4}{54} + \frac{2y}{27} - \frac{1}{54} - \frac{y}{27} \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{3}{54} + \frac{y}{27} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{3}{27} + \frac{2}{27} \right) - \left(\frac{3}{54} + \frac{1}{54} \right) = \frac{5}{27} - \frac{4}{54} = \frac{10-4}{54} = \frac{6}{54} = \frac{1}{9}$$

28. Asılı təsadüfi kəmiyyətlər. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin komponentlərinin şərti paylanması.

Həlli.

Tutaq ki, (X, Y) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ - dir. Onda $Y = y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ şərti daxilində X komponentinin paylanmasına şərti paylanma deyilir. $Y = y_j (j = \overline{1, m})$ şərti daxilində X təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymətlərindən y və ya i alır, bu qiymətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \right)$ tapı . . ehtimallardır. Yəni

$$P_{Y=y_j}(X=x_i) = \frac{P[(X=x_i); (Y=y_j)]}{P(Y=y_j)} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) \quad (1)$$

şərt ehtimallardır. Onda

$X/Y=y_j$	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$P_{Y=y_j}$	$P_{Y=y_j}(x_1)$	$P_{Y=y_j}(x_2)$	$\dots$	$P_{Y=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli X komponentinin şərti paylanması adlanır.

Analoji olaraq $X = x_i (i = \overline{1, n})$ şərti daxilində Y komponentinin şərti paylanması

$Y/X=x_i$	y_1	y_2	$\dots$	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	$\dots$	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Tutaq ki, (X, Y) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər sistemidir, $f(x, y)$ -isə bu sistemin paylanma sıxlığıdır.

Onda $\{Y = y\}$ şərti daxilində X komponentinin şərti paylanma sıxlığı (şərti sıxlıq funksiyası)

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \quad (4)$$

kimi təyin olunur. Burada $f_2(y)$ Y – təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyadır və

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \quad (5)$$

kimidir. (5)-i (4)-də nəzərə alsaq

$$\varphi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx} \quad (6)$$

alırıq.

$\{X = x\}$ şərti daxilində Y təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması isə

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy} \quad (7)$$

kimidir. Burada $f_1(x)$, X komponentinin sılıq funksiyasıdır.

Qeyd edək ki, X və Y asılı olduğundan $f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y)$ və $f_1(x) \neq \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, $f_2(y) \neq \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ olur. Əgər $f_1(x) = \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$ və $f_2(y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ olursa, onda X və Y komponentləri asılı olmayan kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərdir.

29.Məsələ: X və Y ikiölçülü diskret təsadüfi kəmiyyət verilmişdir.

Y	X		
	$X_1=2$	$X_2=5$	$X_3=8$
$y_1 = 0,4$	0,15	0,30	0,35
$y_2 = 0,8$	0,05	0,12	0,03

- Komponentlərin şərtsiz paylanma qanunlarını.
- Y komponenti $y_1 = 0,4$ qiymətini aldıqda X komponentin şərti paylanma qanununu ,
- $X=x_2=5$ şərti daxilində Y - in şərti paylanma qanununu tapın.

Tutaq ki, (X, Y) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_m$ - dir. Onda $Y = y_j (j = 1, 2, \dots, m)$ şərti daxilində X komponentinin paylanmasına şərti paylanma deyilir. $Y = y_j (j = \overline{1, m})$ şərti daxilində X təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, bu qiymətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \right)$ tapılacaq şərti ehtimallardır. Yəni

$$P_{Y=y_j}(X = x_i) = \frac{P[(X = x_i); (Y = y_j)]}{P(Y = y_j)} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) \quad (1)$$

şərt ehtimallardır. Onda

$\frac{X}{Y} = y_j$	x_1	x_2	...	x_n
$P_{Y=y_j}$	$P_{Y=y_j}(x_1)$	$P_{Y=y_j}(x_2)$	...	$P_{Y=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli X komponentinin şərti paylanması adlanır.

Analoji olaraq $X = x_i (i = \overline{1, n})$ şərti daxilində Y komponentinin şərti paylanması

$\frac{Y}{X} = x_i$	y_1	y_2	...	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	...	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Həlli: Ehtimalları “sütunlar üzrə “ toplaşaq X- in paylanma qanununu taparıq:
Ehtimalları “sərtlər üzrə “ toplaşaq Y-in paylanma qanununu taparıq:

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

b) Y komponentin $y_1 = 0,4$ qiymətini alması şərti daxilində X- in mümkün qiymətlərini şərti ehtimallarını tapaq:

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,80} = \frac{3}{16}, p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,35}{0,80} = \frac{7}{16}$$

X üçün axtarılan paylanma qanununu yazaq:

Yoxlama: $\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = 1$

x	2	5	8
P(X/y ₁)	3/16	3/8	7/16

C) Analogi olaraq Y –in şərti paylanma qanununu taparıq:

Yoxlama : $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1$

Y	0,4	0,8
P(X ₂ /Y)	5/7	2/7

30. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətlər sisteminin ədədi xarakteristikaları. Korreyyasiya asılılığı və korrelyasiya momenti.

Həlli. (X, Y) – ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları kimi, müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentlər öyrənilir.

$X^K Y^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə, (X, Y) sistemini $K+S$ tərtibli başlanğıc momenti deyilir və $\alpha_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\alpha_{K,S} = M(X^K \cdot Y^S) \quad (1)$$

$(X - MX)^K \cdot (Y - MY)^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə $K+S$ tərtibli mərkəzi moment deyilir və $\beta_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\beta_{K,S} = M[(X - MX)^K \cdot (Y - MY)^S] \quad (2)$$

Əgər X və Y təsadüfi kəmiyyətləri diskret təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ onların uyğun mümkün qiymətləridirsə, onda (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinin $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri

uyğun olaraq

$$\alpha_{K,S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i^K \cdot y_j^S \cdot P_{ij} \quad (3)$$

$$\beta_{K,S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - MX)^K \cdot (y_j - MY)^S P_{ij} \quad (4)$$

düsturları ilə tapılır. Burada $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ işarə olunmuşdur $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin (X, Y) sisteminin sıxlıq funksiyası $f(x, y)$ olduqda $K+S$ tərtibli başlanğıc və

mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\alpha_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot y^S \cdot f(x, y) dx dy, \quad (5)$$

$$\beta_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^K \cdot (y - MY)^S f(x, y) dx dy \quad (6)$$

düsturları ilə tapılır.

$$(2) - \text{də } K=1, S=1 \text{ olduqda} \quad \beta_{1,1} = M[(X - MX) \cdot (Y - MY)] \quad (7)$$

alırıq. (7) bərabərliyindəki ifadə X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası (və ya korrelyasiya momenti) adlanır və $\mathbf{cov}(X, Y)$ və ya K_{XY} kimi işarə olunur:

$$K_{XY} = \mathbf{cov}(X, Y) = M[(X - MX)(Y - MY)]. \quad (8)$$

$$(8) - \text{dən } K_{XY} = M(XY - YMX - X \cdot MY + MXMY) = M(XY) - MX \cdot MY -$$

$$-MX \cdot MY + MX \cdot MY = M(XY) - MX \cdot MY,$$

$$\text{yəni,} \quad K_{XY} = MX \cdot MY - M(X \cdot Y). \quad (9)$$

$$(8) \text{ dən } K_{XX} = M[(X - MX) \cdot (X - MX)] = M(X - MX)^2 = D(X) \text{ alırıq. Eyni qayda ilə } (8) - \text{dən} \\ K_{YY} = M(Y - MY)^2 = D(Y) \text{ alırıq.}$$

Əgər X və Y alılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $M(XY) = MX \cdot MY$ olur və buna əsasən (9) – dan $K_{XY} = 0$ alırıq. Bu fikrin tərsi doğru olmaya da bilər. $K_{XY} = 0$ olduqda (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinə korrele olunmayan, $K_{XY} \neq 0$ olduqda korrele olunan təsadüfi kəmiyyət deyilir. (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinin kovariasiyası

$$|K_{XY}| \leq \sigma_X \cdot \sigma_Y \quad (10)$$

olur. Burada $\sigma_X^2 = K_{XX} = DX$, $\sigma_Y^2 = K_{YY} = DY$ işarə olunmuşdur.

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \quad (11)$$

işarə etsək. r_{XY} kəmiyyəti X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalı adlanır. Korrelyasiya əmsalı ölçüsüz kəmiyyətdir və (10)-dan $|r_{XY}| \leq 1$ olur. Korrelyasiya əmsalı X və Y arasındakı xətti əlaqənin dərəcəsini qiymətləndirmək üçündür. Korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti vahidə nə qədər yaxındırsa, X və Y arasında əlaqə o qədər zəyifdir.

X və Y kəsilməz təsadüfi kəmiyyətləri üçün korrelyasiya momenti

$$K_{XY} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X) \cdot M(Y) \quad (12)$$

düsturu ilə tapılır.

31. Məsələ : İkiölçülü (X, Y) təsadüfi kəmiyyət cədvəldə verilmiş şəkildə paylanıb.

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$

X və Y kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsallarını tapın.

$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

Həlli. $(X - MX)^K \cdot (Y - MY)^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə $K+S$ tərtibli mərkəzi moment deyilir və $\beta_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\beta_{K,S} = M \left[(X - MX)^K \cdot (Y - MY)^S \right] \quad (1)$$

Əgər X və Y təsadüfi kəmiyyətləri diskret təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ və $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ onların uyğun mümkün qiymətləridirsə, onda (X, Y) təsadüfi kəmiyyətinin $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\beta_{K,S} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (x_i - MX)^K \cdot (y_j - MY)^S P_{ij} \quad (2)$$

düsturları ilə tapılır. Burada $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ işarə olunmuşdur ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$).

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin (X, Y) sisteminin sıxlıq funksiyası $f(x, y)$ olduqda $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\beta_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^K \cdot (y - MY)^S f(x, y) dx dy \quad (3)$$

düsturları ilə tapılır.

(1)–də $K=1, S=1$ olduqda

$$\beta_{1,1} = M \left[(X - MX) \cdot (Y - MY) \right] \quad (4)$$

alırıq. (4) bərabərliyindəki ifadə X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası (və ya korrelyasiya momenti) adlanır və **cov** (X, Y) və ya K_{XY} kimi işarə olunur:

$$K_{XY} = \text{cov}(X, Y) = M \left[(X - MX)(Y - MY) \right]. \quad (5)$$

(5)–dən $K_{XY} = M(XY - YMX - X \cdot MY + MXMY) = M(XY) - MX \cdot MY -$

$-MX \cdot MY + MX \cdot MY = M(XY) - MX \cdot MY,$

yəni,

$$K_{XY} = MX \cdot MY - M(X \cdot Y). \quad (6)$$

Bilirik ki, X -in paylanması

$$P(x_1 = 2) = P(x_1 = 2, y_1 = 0,4) + P(x_1 = 2, y_2 = 0,8) = 0,15 + 0,05 = 0,2$$

$$P(x_2 = 5) = P(x_2 = 5, y_1 = 0,4) + P(x_2 = 5, y_2 = 0,8) = 0,30 + 0,12 = 0,42$$

$$P(x_3 = 8) = P(x_3 = 8, y_1 = 0,4) + P(x_3 = 8, y_2 = 0,8) = 0,35 + 0,03 = 0,38$$

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Eyni qayda ilə Y -in paylanması

Y	0,4	0,8
P	0,80	0,20

Bilirik ki korrelyasiya əmsali

$$K_{xy} = M(X - M(x)) \cdot M(Y - M(y)) = M(x \cdot y) - M(x) \cdot M(y) \quad \text{-dir}$$

Əvvəlcə komponentlərin paylanmasını tapaq

X	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

Y	0	1
P	0,3	0,7

$X \cdot Y$ -in paylanmasını yazaq :

$x \cdot y$	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 1$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$
p	0,09	0,21	0,15	0,35	0,06	0,14

$x \cdot y$	-1	0	1
p	0,21	0,65	0,14

$$M(x) = -1 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,2 = -0,3 + 0,2 = -0,1$$

$$M(y) = 0 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,7 = 0,7$$

$$M(x \cdot y) = -1 \cdot 0,21 + 0 \cdot 0,65 + 1 \cdot 0,14 = -0,21 + 0,14 = -0,07$$

$$K_{xy} = -0,07 - (-0,1) \cdot 0,73 = -0,07 + 0,07 = 0$$

Deməli korelə olunmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

32. Məsələ (X Y) ikiölçülü kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin birgə sıxlıq funksiyası verilmişdir:

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \notin D \end{cases}$$

D-oblastı $x=0$; $x=3$; $y=0$; $y=3$ kvadratı ilə məhdudlaşmışdır. a -əmsalını tapın.

X və Y kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsallarını tapın.

Həlli. Bilirik ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$ olmalıdır.

$$\int_0^3 \int_0^3 a(x+y) dx dy = \int_0^3 \left(\int_0^3 a(x+y) dx \right) dy = \int_0^3 \left[\left(\frac{ax^2}{2} + ayx \right) \Big|_0^3 \right] dx =$$

$$\int_0^3 \left[\frac{9a}{2} + 3ay \right] dy = \left(\frac{9ay}{2} + \frac{3ay^2}{2} \right) \Big|_0^3 = \frac{27a}{2} + \frac{27a}{2} = \frac{54a}{2} = 27a \Rightarrow 27a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{27}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{27}(x+y)$$

Bilirik ki, kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər korrelyasiya əmsalı

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y) dx dy - M(x)M(y)$$

düsturu ilə tapılır.

$$K_{xy} = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 xy(x+y) dx dy - M(x)M(y) = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 (x^2y + xy^2) dx dy - M(x)M(y) =$$

$$= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\int_0^3 (x^2y + xy^2) dx \right) dy - M(x)M(y) = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\frac{x^3y}{3} + \frac{x^2y^2}{2} \Big|_0^3 \right) dy - M(x)M(y) =$$

$$= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(9y + \frac{9y^2}{2} \right) dy - M(x)M(y) = \frac{1}{27} \left(\frac{9y^2}{2} + \frac{9y^3}{6} \right) \Big|_0^3 - M(x)M(y) =$$

$$= \frac{1}{27} \left(\frac{81}{2} + \frac{81}{2} \right) - M(x)M(y) = 2 - \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} = 2 - \frac{49}{16} = -1 \frac{1}{16}$$

$M(x)$ və $M(y)$ -i tapaq

$$M(x) = \int_0^3 \int_0^3 xf(x, y) dx = \frac{1}{27} \int_0^3 \int_0^3 x(x+y) dx = \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y \right) \Big|_0^3 dy =$$

$$= \frac{1}{27} \int_0^3 \left(\frac{1}{3} \cdot 27 + \frac{1}{2} \cdot 9y \right) dy = \frac{1}{27} \left(9y + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{27} \left(27 + \frac{81}{4} \right) = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$M(y) = \frac{7}{4}$$

33. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma cədvəlini yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. I atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,4-ə, II atıcının hədəfi vurma ehtimalı isə 0,6-ya bərabərdir. Hər iki atıcı bir –birindən asılı olmadan hədəfə iki atəş açır. I və II atıcının atıcının hədəfi vurmasının paylanma qanununu tapın. (X təsadüfi kəmiyyəti I atıcının, Y təsadüfi kəmiyyəti II atıcının hədəfi vurması kəmiyyətləri olsun).

Həlli. Müəyyən nizamla düzəlmiş $X_1, X_2, \dots, X_n$ təsadüfi kəmiyyətləri çoxluğu, yəni $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ çoxluğu n ölçülü təsadüfi vektor və ya n ölçülü təsadüfi kəmiyyətlər sistemi adlanır. Əvvəlcə iki ölçülü $Z = (X, Y)$ vektoruna baxaq. Fərz edək ki, $Z = (X, Y)$ vektorunun komponentləri $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ - dir. Diskret halda bu təsadüfi kəmiyyətlərin hər birinin ayrı-ayrılıqda paylanma qanunu verilibsə, onda $Z = (X, Y)$ ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətinin də paylanma qanunu yazmaq olar. Doğrudanda

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

(1)

və

Y	y ₁	y ₂	...	y _m
g	g ₁	g ₂	...	g _m

(2)

paylanmalarından ikiölçülü $Z = (X, Y)$ təsadüfi kəmiyyətinin

x/y	x ₁	x ₂	...	x _n
y ₁	P ₁₁	P ₂₁	...	P _{n1}
y ₂	P ₁₂	P ₂₂	...	P _{n2}
			...	
y _m	P _{1m}	P _{2m}	...	P _{nm}

(3)

paylanmasını alırıq. (3)-ə ikiölçülü təsadüfi $X = (X, Y)$ kəmiyyətinin paylanma qanunu və yaxud paylanma matrisi deyilir.

(1) -də $P(X = x_k) = P_k$, $(k = 1, 2, 3, \dots, n)$, (2) -də $P(Y = y_i) = g_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ işarə olunmuşdur.

(1)-də $\sum_{k=1}^n P_k = 1$ və (2) -də $\sum_{i=1}^m g_i = 1$.

X və Y asılı olmadığından $\{X = x_k\}$ və $\{Y = y_i\}$ -də asılı deyildir. Buna görədə $P\{(X = x_k) \cdot (Y = y_i)\} = P\{(X = x_k) P(Y = y_i)\} = P_k \cdot g_i$ $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ olur.

Deməli $P_{ki} = P\{X = x_k, Y = y_i\} = P\{X = x_k\} \cdot P\{Y = y_i\} = P_k \cdot g_i$ $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ olur. (3) paylanmasından $\{X = x_k, Y = y_i\}$ hadisələri $(k = \overline{1, n}, i = \overline{1, m})$ tam qrup əmələ gətirdiyindən

$$\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n P_{ki} = 1 \quad (4)$$

olur.

$$p_1 = 0,4 \quad p_2 = 0,6$$

$$q_1 = 0,6 \quad q_2 = 0,4$$

I atıcının paylanması

X	0	1	2
P	0,24	0,48	0,16

II atıcının paylanması

X	0	1	2
P	$q_2 q_2$	$2 p_2 q_2$	$p_2 p_2$

X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

34. Böyük ədədlər qanunu . Çebişev bərabərsizliyi və teoremi.

Həlli. Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının müəyyən mənada yığılması ilə əlaqədar olan teoremlərə limit teoremləri deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün üç cür yığılma anlayışını verək.

1) Ehtimala görə yığılma

$X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0 \quad (1)$$

şərti ödəndikdə $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ardıcılığı X kəmiyyətinə ehtimala görə yığılır deyirlər və bu yığılmanı

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \quad (2)$$

kimi işarə edirlər.

2). Raylanmaya görə yığılma.

Əgər $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığına $F(x), F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$ paylanma funksiyalar ardıcılığı uyğundursa, və

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad (3)$$

şərti ödənilsə, onda deyirlər ki, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcılığı X kəmiyyətinə paylanmaya görə yığılır deyirlər və bu yığılma

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{F(x)} X \quad (4)$$

kimi işarə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi limit teoremləri dedikdə, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığının paylanmaya görə normal təsadüfi kəmiyyətə yığılması haqqında olan teoremlər nəzərdə tutulur. Əvvəllər qeydetdiyimiz Muavr-Laplasın integral teoremi ilk dəfə verilmiş mərkəzi limit teoremidir.

Qeyd edək ki, ehtimala görə yığılmadan paylanmaya görə yığılma alınır, bunun tərsi doğru olmaya da bilər.

3) $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ təsadüfi kəmiyyətləri ardıcılığı istənilən kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{K=1}^n X_K - \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n M(X_K)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (5)$$

və ya

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{K=1}^n X_K - \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n M(X_K)\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \quad (6)$$

münasibətini ödədikdə, yəni $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ kəmiyyətlərinin

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{K=1}^n X_K \quad (7)$$

ədədi ortası onların riyazi gözləməsinin

$$\frac{1}{n} \sum_{K=1}^n M(X_K) \quad (8)$$

ortasına ehtimala görə yığılarsa, deyirlər ki, $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Verilmiş $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı üçün böyük ədədlər qanunun ödənilməsi şərtlərini (problemini) ilk dəfə P.L. Çebışev tapmışdır.

Lemma: (Çebışev bərabərsizliyi) Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti və $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

□ Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və $f(x)$ onun sıxlıq funksiyasıdır.

Onda

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx \quad (2)$$

münasibətinə əsasən

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \geq \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} \underbrace{(x - M(X))^2}_{\varepsilon^2} \cdot f(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

və ya $D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ olar.

35. Çebişev bərabərsizliyini və Markov bərabərsizliyini yazın və məsələni həll edin.

Məsələ: Bir saat ərzində ATS-ə orta hesabla 300 zəng daxil olur. ATS-ə daxil olan zənglərin: a) 400-dən çox, b) ən çoxu 500 zəngin daxil olması hadisənin ehtimalını qiymətləndirin.

Həlli. Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti və $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

□ Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və $f(x)$ onun sıxlıq funksiyasıdır.

Onda

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx \quad (2)$$

münasibətinə əsasən

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \geq \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} \underbrace{(x - M(X))^2}_{\varepsilon^2} \cdot f(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

və ya $D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ olar.

a) şərtə görə $M(x) = 300$ Markov bərabərsizliyinə görə

$P(x > A) \leq \frac{M(x)}{A} \Rightarrow P(x > 400) \leq \frac{300}{400} = 0,75$ yəni zənglərin sayının 400-ü keçməməsi ehtimalı 0,75 –dən böyük deyil.

b) Digər tərəfdən $P(x \leq A) \geq 1 - \frac{M(X)}{A} = 0,4$ bərabərsizliyinə görə

$P(x \leq 500) \geq 1 - \frac{300}{500} = 0,4$, yəni daxil olan zənglərin 500-dən çox olmaması ehtimalı 0,4-dən kiçik deyil.

36. Çebişev bərabərsizliyini yazın məsələni həll edin.

Məsələ: X diskret təsadüfi kəmiyyəti paylanma qanunu ilə verilmişdir:

Çebişev bərabərsizliyindən istifadə edərək ,

$$|X - M(X)| < 0,2$$

hadisəsinin ehtimalını qiymətləndirin.

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Həlli. Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti və $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1)$$

bərabərsizliyi doğrudur.

□ Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və $f(x)$ onun sıxlıq funksiyasıdır.

Onda

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) = \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx \quad (2)$$

münasibətinə əsasən

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x) dx \geq \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} \underbrace{(x - M(X))^2}_{\varepsilon^2} \cdot f(x) dx \geq \varepsilon^2 \int_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x) dx = \varepsilon^2 \cdot P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$$

və ya $D(X) \geq \varepsilon^2 P(|X - M(X)| \geq \varepsilon)$ olar.

X kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq:

$$M(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = (0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8) - 0,54^2 = 0,0144$$

Çebışev bərabərsizliyinin aşağıdakı şəkildən istifadə edək:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$\varepsilon = 0,2$ olduğunu nəzərə alsaq, nəticədə alarıq.

Burada $M(X) = 0,54$, $D(X) = 0,0144$,

$$P(|X - 0,54| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64$$

37. Seçmə dispersiyası və onun xassələri.

Fərz edək ki, müşahidələrin nəticəsi olaraq $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsi verilmişdir.

$$\bar{x}_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{olduqda} \quad S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1) \text{ ədədinə seçmənin dispersiyası deyilir,}$$

burada $x_i - \bar{x}$ fərqləri meyillərdir. Əgər $x_1, x_2, \dots, x_n$ variantlarının

$m_1, m_2, m_3, \dots, m_k$ tezlikləri məlumdursa, onda seçmə dispersiyası

$$S_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i \quad (2)$$

şəkildə yəyin edilir.

Seçmə dispersiyasının kvadrat kökünə seçmənin orta kvadratik meyli deyilir və

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i}$$

kimi və ya

$$\overline{\sigma}_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i} \quad \text{kimi yazılır.}$$

Aydın ki, $\overline{\sigma}_x$ kəmiyyətinin ölçüsü X kəmiyyətinin ölçüsü ilə eyni olur.

Seçmə dispersiyasının aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1: Sabit kəmiyyətin seçmə dispersiyası sıfıra bərabərdir.

Doğurdanda

$$S_x^2 = \frac{1}{n} (c - c)^2 = \frac{1}{n} \cdot 0 = 0$$

Xassə 2: Müşahidələrin nəticələri olan variantları eyni bir sabit ədəd qədər artırısaq və ya azaltsaq seçmə dispersiyası və orta kvadratik meyl dəyişməz.

$$S_{x \pm c}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i \pm c) - \overline{(x \pm c)} \right)^2 m_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left((x_i \pm c) - (\bar{x} \pm c) \right)^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i = S_x^2$$

İsbastı:

Xəssə 3: Sabit vuruğu seçmə dispersiyanın xaricinə kvadratı ilə çıxarmaq olar.

Doğurdan da

$$S_{cx}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (cx_i - c\bar{x})^2 m_i = \frac{c^2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 m_i = c^2 S_x^2$$

$$\overline{\sigma_{cx}} = \sqrt{c^2 S_x^2} = |c| \sqrt{S_x^2} = |c| \overline{\sigma_x}$$

Xəssə: Əgər variantların uyğun tezliklərini eyni bir ədədə vursaq, onda seçmənin dispersiyası və seçmənin orta kvadratik meyli dəyişmir.

38. Hipotezlər yoxlanarkən yol verilə bilən birinci və ikinci növ səhvlər.

Fərz edək ki hər hansı xarakteristika haqqında irəli sürülən əsas H_0 və ona alternativ olan H_1 hipotezlərinə baxılır. OX oxu üzərində seçilən x_i nöqtəsinin vəziyyətindən asılı olaraq ya H_0 hipotezini qəbul etmək (H_1 hipotezini rədd etmək), ya da H_0 hipotezini rədd etmək (H_1 hipotezini qəbul etmək) qərarına gəlmək olar.

Seçilən x_i nöqtəsi təsadüfi olduğundan qərar qəbul edərkən aşağıdakı dörd haldan biri ola bilər:

- 1) H_0 (sıfırıncı əsas) hipotezi doğrudur (alternativ H_1 yalandır) və H_0 qəbul olunur;
- 2) H_0 hipotezi doğrudur (alternativ H_1 yalandır), amma H_0 hipotezi rədd olunur;
- 3) Alternativ H_1 hipotezi doğrudur (əsas H_0 yalandır) və H_1 qəbul olunur;
- 4) H_1 hipotezi doğrudur (əsas H_0 hipotezi yalandır) amma H_1 rədd edir.

Göründüyü kimi 2) və 4) qərarlarında səhvə yol verilir.

Tərif 1. Əgər əsas (yoxlanılan) H_0 hipotezi doğru ikən rədd edilib, ona əks (alternativ) H_1 hipotezi qəbul olunarsa, onda yol verilən belə səhvə birinci növ səhv deyilir və α ilə işarə olunur.

Tərif 2. Əgər əsas (yoxlanılan) H_0 hipotezi yalan ikən qəbul olunub, ona alternativ olan H_1 hipotezi rədd edilərsə, onda yol verilən belə səhvə ikinci növ səhv deyilir və β ilə işarə olunur.

39. Momentlər üsulu (qısa nəzəri məlumat).

Momentlər üsulu ilə verilən seçməyə görə müəyyən paylanmanı təmin edən naməlum parametrlərin nöqtəvi qiymətləndirilməsi üçün eyni tərtibli nəzəri və empirik momentlər bərabər götürülür. Alınan tənlik və ya tənliklər nəzəri parametrlərə görə həll edilir.

Əgər nəzəri paylanma bir parametrdən asılıdırsa $\gamma = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x, \alpha) dx = m_1(\alpha)$

Nəzəri başlanğıc momenti bir tərtibli $\overline{x_c} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$

Empirik momentinə bərabər götürüləcək.

$$m_1(\alpha) = \overline{x_c}(1) \quad (M[x] = \overline{x_c})$$

Tənliyini α -ya nəzərən həll etsək, tənliyin alınan α -üçün qiymət kimi götürülür.

Paylanmada iki parametrlərsə, yəni paylanmanın sıxlıq funksiyası $P(x, \alpha_1, \alpha_2)$

şəklindədirsə bu zaman α_1 və α_2 parametrlərini tapmaq üçün iki nəzəri momentin iki empirik momentə bərabərləşdirməliyik. Burada birinci tərtib başlanğıc və empirik , ikinci tərtib nəzəri və empirik mərkəzi momentləri bərabərləşdirilməsindən α_1 və α_2 -ni qiymətləndirə bilərik. Aydındır ki, $\gamma = M[x], \mu_2 = m_2, \mu_2 = D[x]$ olduğunda

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c \end{cases} \quad (2)$$

Tənliklər sistemindən naməlum parametrlər tapılır. Bu qiymət həmin parametrlərin nöqtəvi qiymətləndirilməsi olur. Burada $\overline{x_c}$ seçmə orta D_c seçmə dispersiya məlum $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ seçməsinə əsasən tapılır.

40. Parametrlərin Momentlər üsulu ilə qiymətləndirilməsi haqqında qısa nəzəri məlumat və aşağıdakı məsələni həll et.

Məsələ: x təsadüfi kəmiyyəti Puasson qanunu ilə paylanmışdır. Aşağıda $n=200$ qeyri – standart detalların paylanması verilmişdir. bir partiyada standart olmayan detalların sayını göstərən variantlar və onların tezlikləri verilir.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Momentlər üsulu ilə Puasson paylanmasının naməlum

λ parametrlərini qiymətləndirin .

Momentlər üsulu. Bu üsulda eyni tərtib nəzəri və empirik momentləri tapıb onları bərabərləşdirirlər. Əgər nəzəri paylanma funksiyası $F(x, \theta^*)$ bir parametrlə təyin olunarsa onda bir tərtibli nəzəri momenti, yəni

$M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x, \theta) = m_1(\theta)$ və birtərtibli empirik momenti, yəni $\overline{x_s} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ tapıb, bunları bərabərləşdirərək $m_1(\theta) = \overline{x_s}$ tənliyini alırıq.

$m_1(\theta) = \overline{x_s}$ tənliyindən tapılan θ^* kökü θ üçün qiymət kimi götürülə bilər. Əgər nəzəri paylanma funksiyası k sayda nəməlum parametrdən

asılıdırsa, yəni $F(X, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ şəklindədirsə, onda k -çi tərtibə qədər bütün nəzəri və empirik momentləri tapıb, uyğun tərtib nəzəri və empirik momentləri bərabərləşdirərək k sayda nəməlum parametrləri qiymətləndirmək üçün k sayda

$$\left. \begin{aligned} m_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) &= \overline{x_s} \\ m_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) &= (\overline{x_s})^2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ m_k(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) &= (\overline{x_s})^k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

tənliklər sistemini alırıq. (1) sisteminin $(\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_k^*)$ kökü $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ nəməlum parametrləri üçün qiymət kimi götürülə bilər.

Qeyd edək ki, bu zaman k tərtibə qədər olan nəzəri momentlər

$$m_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^j dF(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \quad (j=1, 2, \dots, k) \quad (2)$$

düsturları ilə, empirik momentlər isə

$$\overline{x_s^j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j \quad (j=1,2,\dots,k)$$

(3)

düsturları ilə tapılır.

Həlli: Aydındır ki, $M[x] = \overline{x_c}$, Puasson paylanmasının riyazi gözləməsinin bu paylanmanın λ parametrinə bərabər olduğunu nəzərə alsaq $\lambda = \overline{x_c}$ olar.

$$\lambda = x_c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{132 \cdot 0 + 1 \cdot 43 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{200} = \frac{57}{200} = 0,285 \text{ olar.}$$

41.Nöqtəvi qiymətləndirmənin momentlər üsulu haqqında qısa nəzəri məlumat. Momentlər üsulu ilə aşağıdakı məsələni həll et.

Məsələ. Sıxlıq funksiyası $f(x) = \frac{1}{b-a}$ olan müntəzəm paylanmanın momentlər üsulu ilə a və b parametrlərini $x_1, x_2, \dots, x_n$. Seçməyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsini tapın.

Həlli: Parametrlərin sayı iki olduğundan onları təyin etmək üçün

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c = \sigma^2 \end{cases}$$

Münasibətlərindən, yəni tənliklər sistemindən istifadə etməliyik.

Müntəzəm paylanma üçün $M[x] = \frac{a+b}{2}$; $G(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ olduğu üçün

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \overline{x_c} \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{D_c} \end{cases} \text{ olar.}$$

Ona görə də bu tənliklər sistemindən

$$a = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c}$$

$$b = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c} \text{ olur. Deməli}$$

$$a^* = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c}, b^* = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c} \text{ olar.}$$

42.Parametrlərin etibarlılıq intervalı ilə qiymətləndirilməsi

Əgər θ^* qiyməti θ üçün tapılmış qiymətdirsə, onda $\delta > 0$ ədədi üçün $|\theta - \theta^*| < \delta$ olursa, onda aydındır ki, δ ədədi kiçildikcə θ^* qiyməti θ -ya daha çox yaxın olur. Buna görə də δ -ya qiymətin dəqiqliyi deyilir.

$P(|\theta - \theta^*| < \delta)$ ehtimalına ehtibarlılıq ehtimalı deyilir və bu ehtimal çox vaxt $P = 0,95$; $P = 0,99$ qiymətlərindən biri götürülür. $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \nu$.

Bu bərabərlikdən alınır ki, naməlum θ parametri ν ümüdlüyü ilə $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ intervalında yerləşdiyindən bu intervala ehtibarlılıq intervalı deyilir.

Normal paylanmanın riyazi gözləməsi üçün ehtibarlılıq intervalı.

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış baş yığının dispersiyası $D(X) = \sigma^2$ məlumdur, riyazi gözləməsi a isə məlum deyildir. Naməlum a parametrinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinin $\bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ orta qiyməti vasitəsilə qiymətləndirilməsinin etibarlılıq intervalını tapmaq lazımdır.

Bilirik ki, normal paylanmada $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ (1)

doğrudur. Burada X yerinə $\bar{x}$ və σ yerinə $\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}$ yazsaq

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_s}\right) \quad (2)$$

alırıq. $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_s} = t$ işarə etsək, buradan $\delta = \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}$ alırıq. Bunları (2)-də nəzərə alsaq

$$P\left(|a - \bar{x}| < \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) \quad (3)$$

alırıq. (3) – dən

$$P\left(-\frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}} < a - \bar{x}_s < \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \nu \quad (4)$$

alırıq.

Deməli naməlum a parametrini qiymətləndirmək üçün ν ümüdlüyü ilə $\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_s + \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right)$ etibarlılıq intervalını tapırıq. Burada $2\Phi(t) = \nu$ və $\Phi(t)$ funksiyası cədvəl 2-dən tapılır.

Orta kvadratik meylin etibarlılıq intervalı

Tutaq ki, baş yığım normal qanunla paylanmışdır. σ orta kvadratik meyil naməlumdur. Seçmənin düzəldilmiş S^* orta kvadratik meylinə görə ν ümüdlüyü ilə σ üçün etibarlılıq intervalını tapaq:

$$P(|\sigma - S^*| < \delta) = P(-\delta < \sigma - S^* < \delta) = P(S^* - \delta < \sigma < S^* + \delta) = P\left(S^* \left(1 - \frac{\delta}{S^*}\right) < \sigma < S^* \left(1 + \frac{\delta}{S^*}\right)\right) = P\left(S^* \left(1 - q\right) < \sigma < S^* \left(1 + q\right)\right) = \nu$$

Burada q verilmiş n və p -yə görə χ^2 (χ^2 –kvadratik) cədvəlindən tapılır (bax əlavəyə). Deməli naməlum σ parametrini üçün etibarlılıq intervalı $(S^*(1 - q); S^*(1 + q))$ kimi olar.

43. Parametrlərin etibarlılıq interval ilə qiymətləndirilməsi haqqında qısa nəzəri məlumat

Məsələ. Kondensatorun tutumu $\bar{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$ olduqda 0,99 etibarlılıq intervalını tapın. ($\phi(t) = 0,495$, olduqda) $t = 2,58$

Həlli. Normal paylanmanın riyazi gözləməsi üçün etibarlılıq intervalı.

Tutaq ki, normal qanunla paylanmış baş yığının dispersiyası $D(X) = \sigma^2$ məlumdur, riyazi gözləməsi a isə məlum deyildir. Naməlum a parametrinin $x_1, x_2, \dots, x_n$ seçməsinin $\bar{x}_s = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ orta qiyməti vasitəsilə qiymətləndirilməsinin ehtibarlılıq intervalını tapmaq lazımdır.

Bilirik ki, normal paylanmada $P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ (1)

doğrudur. Burada X yerinə $\bar{x}$ və σ yerinə $\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}$ yazsaq

$$P(|\bar{x} - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_s}\right) \quad (2)$$

alırıq. $\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_s} = t$ işarə etsək, buradan $\delta = \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}$ alırıq. Bunları (2)-də nəzərə alsaq

$$P\left(|a - \bar{x}| < \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) \quad (3)$$

alırıq. (3) – dən

$$P\left(-\frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}} < a - \bar{x}_s < \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \nu \quad (4)$$

alırıq.

Deməli naməlum a parametrini qiymətləndirmək üçün ν ümüdlüyü ilə $\left(\bar{x}_s - \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}; \bar{x}_s + \frac{t\sigma_s}{\sqrt{n}}\right)$

ehtibarlılıq intervalını tapırıq.

$\gamma = 0,99$, $\phi = 0,495$, Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $t = 2,58$ tapırıq. Verilənləri

$$\bar{x}_s - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bərabərsizliyində nəzərə alaq.

$$20 - 2,58 \frac{4}{\sqrt{16}} < a < 20 + 2,58 \frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$20 - 2,58 < a < 20 + 2,58$$

$$17,42 < a < 22,58$$

44. PARAMETRLƏRİN EHTİBARLILIQ İNTERVALI İLƏ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA QISA NƏZƏRİ MƏLUMAT.

MƏSƏLƏ: 300 asılı olmayan sınaqda A hadisəsi eyni ehtimalla 250 dəfə baş vermişdir.

$\gamma = 0,95$ etibarlılıq ehtimalı ilə p ehtimalının interval qiymətləndirilməsini aparın.

($\Phi(t) = 0,475; t = 1,96$)

Həlli: 300 asılı olmayan sınaqda A hadisəsi 250 dəfə baş vermişdiyindən bu hadisənin

bu hadisənin baş vermə tezliyi $\omega = \frac{250}{300} = \frac{5}{6}$; $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlindən $t=1,96$.

$$P_1 = \omega - t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \quad P_2 = \omega + t \sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \quad P_1 < P < P_2$$

Düsturlarından istifadə edək

$$P_1 = \frac{5}{6} - 1,96 \sqrt{\frac{5}{300 \cdot 36}} \approx 0,79$$

$$P_1 = \frac{5}{6} + 1,96 \sqrt{\frac{5}{300 \cdot 36}} \approx 0,88$$

Olduğundan $0,79 < P < 0,88$ olur.

45. Empirik paylanma funksiyasını yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. Seçmənin verilmiş paylanmasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın

x_i	4	7	10
n_i	16	24	40

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ variantlarından ibarət təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ variantlarında x -dən kiçik olan variantların sayını n_x -lə işarə edək. Onda $\frac{n_x}{n}$ -ə seçmənin paylanma funksiyası və ya empirik paylanma funksiyası deyilir və $F^*(x)$ -lə

işarə olunur:
$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \quad (1)$$

Qeyd edək ki, ehtimal nəzəriyyəsində öyrəndiyimiz $F(x)$ paylanma funksiyası $\{X < x\}$ hadisəsinin ehtimalına yəni $P\{X < x\}$ -ə bərabər olduğu halda $F^*(x)$ empirik paylanma funksiyası seçmənin nisbi tezliyinə, yəni $\frac{n_x}{n}$ -ə bərabərdir. Onda böyük ədədlər qanununa əsasən

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon) = 1, \quad (\varepsilon > 0) \quad (2)$$

Bernulli teoreminə görə hadisənin $\frac{n_x}{n}$ nisbi tezliyi onun ehtimalına ehtimal mənada yığılır, yəni

$$F^*(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} F(x).$$

Buradan aydındır ki, seçmənin empirik paylanma funksiyası baş yığımın nəzəri paylanma funksiyası üçün təqribi ifadə kimi qəbul oluna bilər.

Empirik paylanma funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$ - olur. Yəni empirik paylanma funksiyasının qiymətləri $[0;1]$ parçasına daxildir.

2) $F^*(x)$ azalmayan funksiyadır.

3) Əgər x_1 ən kiçik, x_k – isə ən böyük variantdırsa onda $x \leq x_1$ olduqda $F^*(x) = 0$ və $x \leq x_k$ olduqda $F^*(x) = 1$ olur.

Həlli: Seçmənin həcmi tapın: $n = 16 + 24 + 40 = 80$. Ən kiçik variant 4-ə bərabərdir.

Ona görə də $x \leq 4$ olduqda $F^*(x) = 0$. $x < 7$ qiyməti 16 dəfə müşahidə edilmişdir, deməli

$4 < x \leq 7$ olduqda $F^*(x) = \frac{16}{80} = 0,2$. $x < 10$ qiymətləri

$7 < x \leq 10$

yəni $x_1 = 4$ və $x_2 = 7$ qiymətləri $16 + 24 = 40$ dəfə müşahidə edilmişdir, deməli

olduqda $F^*(x) = \frac{40}{80} = 0,5$ $x = 10$ ən böyük variant olduğu üçün $x > 10$ olduqda

$F^*(x) = 1$.

Beləliklə emperik paylanma funksiyası:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4 & \text{olduqda} \\ 0,2 & 4 < x \leq 7 & \text{olduqda} \\ 0,5 & 7 < x \leq 10 & \text{olduqda} \\ 1 & x > 10 & \text{olduqda} \end{cases}$$

46. Seçmənin ədədi xarakteristikalarını yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. Baş yığım paylanma cəlvəli şəkildə verilmişdir

$$x_i \quad 8 \quad 3 \quad 5$$

$$n_i \quad 4 \quad 6 \quad 10$$

Baş dispersiyanı tapın.

Seçmə yığım $x_1, x_2, \dots, x_k$ variantlarına və bu variantlara uyğun $n_1, n_2, \dots, n_k$ tezliklərinə malikdirsə,

$$\bar{x}_s = \frac{\sum n_i x_i}{n} \quad (1) \text{ seçmə orta}$$

$$D_s = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} \quad (2) \text{ seçmə dispersiya adlanır.}$$

Teorem. Seçmə dispersiya seçmə variantlarının kvadratları cəminin orta qiymətilə, seçmə ortanın kvadratı fərdinə bərabərdir:

$$D_s = \overline{x^2} - (\bar{x}_s)^2$$

$$\text{Baş ortanı tapaq } \bar{x}_s = \frac{8 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{20} = \frac{100}{20} = 5$$

Baş dispersiyanı tapaq:

$$D_s = \frac{4 \cdot (8 - 5)^2 + 6 \cdot (3 - 5)^2 + 10 \cdot (5 - 5)^2}{4 + 6 + 10} = \frac{36 + 24 + 0}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

47. Seçmə dispersiyanı yazın və məsələni həll edin

Məsələ Həcmi $n=10$ olan seçmənin verilmiş paylanmasına görə seçmə dispersiyanı tapın

$$\begin{array}{ccc} x_i & -5 & 1 & 3 \\ n_i & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

Seçmə yığımı $x_1, x_2, \dots, x_k$ variantlarına və bu variantlara uyğun $n_1, n_2, \dots, n_k$ tezliklərinə malikdirsə,

$$\bar{x}_s = \frac{\sum n_i x_i}{n} \quad (1)$$

seçmə orta

$$D_s = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} \quad (2)$$

seçmə dispersiya adlanır.

Teorem. Seçmə dispersiya seçmə variantlarının kvadratları cəminin orta qiymətilə, seçmə ortanın kvadratı fərdinə bərabərdir:

$$D_s = \overline{x^2} - (\bar{x}_s)^2$$

Həlli: Baş ortanı tapaq $\bar{x}_s = \frac{-5 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 3}{10} = \frac{4}{10} = 0,4$

Baş dispersiyanı tapaq:

$$D_s = \frac{2 \cdot (-5 - 0,4)^2 + 5(1 - 0,4)^2 + 3(3 - 0,4)^2}{2 + 5 + 3} = \frac{58,32 + 1,8 + 20,28}{10} = \frac{80,40}{10} = 8,04$$

48. Baş dispersiyanın yerini dəyişən qiymətləndirilməsi yazın və məsələni həll edin

Məsələ. Müəyyən fiziki kəmiyyəti eyni cihazla ölçmə nəticəsində aşağıdakı nəticəsində aşağıdakı nəticələr alınmışdır 21; 33 ; 36. Cihazın səhvlərinin seçmə dispersiyasını tapın.

Əgər $x_1, x_2, \dots, x_k$ variantları $n_1, n_2, \dots, n_k$ tezlikləri ilə seçməyə daxildirsə, onda

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^K n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{\sum_{i=1}^K n_i} \quad (1)$$

seçmə dispersiya olar. Deməli baş yığımın $M(X)$ riyazi gözləməsi və $D(X)$ dispersiyası üçün seçmənin ədədi xarakteristikalarını təqribi qiymət kimi götürmək olar:

$$M(X) \approx \bar{x}_s, \quad D(X) \approx S^2 \quad (2)$$

S^2 qiymətinin $D(X)$ dispersiyası üçün yerini dəyişən qiymət olduğunu göstərək. (1) –dən alırıq:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x}_s)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[(x_k - a) - (\bar{x}_s - a) \right]^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x}_s - a) \sum_{k=1}^n (x_k - a) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\bar{x}_s - a)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x}_s - a) \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n x_k}_{\bar{x}_s \cdot n} - \underbrace{\sum_{k=1}^n a}_{n \cdot a} \right) + \frac{1}{n} \cdot n (\bar{x}_s - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 - \frac{2}{n} (\bar{x}_s - a)^2 \cdot n + (\bar{x}_s - a)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - a)^2 - (\bar{x}_s - a)^2.
\end{aligned} \tag{3}$$

$a = MX$ işarə olunmuşdur. (3) –dən

$$M(S^2) = \frac{1}{n} M \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - a)^2}_{(2) \Rightarrow nS^2} - M(\bar{x}_s - a)^2 \right) = \frac{1}{n} \cdot nS^2 - \frac{1}{n} S^2 = S^2 - \frac{1}{n} S^2 = \frac{n-1}{n} \cdot S^2.$$

Yəni $M(S^2) = \frac{n-1}{n} S^2$ olur. $S^2 = D(X)$ olduğundan $MS^2 \neq D(X)$ olur. Deməli S^2 qiyməti DX üçün

yerini dəyişən qiymətləndirmədir. S^2 əvəzinə $\frac{n}{n-1} S^2$ götürsək, $M\left(\frac{n}{n-1} S^2\right) = DX$ olar. Yəni

$(S^*)^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_s)^2$ qiyməti DX üçün yerini dəyişməyən qiymətdir. Bəzən $(S^*)^2$ – düzəldilmiş dispersiya da adlanır. $(S^*)^2$ – düzəldilmiş dispersiyanın qiyməti həmdə mötəbərdir.

Qeyd edək ki, yalnız bir θ^* ədədi ilə təyin olunan statistik qiymətləndirmə nöqtəvi qiymətləndirmə adlanır. Seçmə orta, seçmə

dispersiya, orta kvadratik meyil və empirik momentlər nöqtəvi qiymətləndirmədir.

Həlli: Seçmə ortanı tapaq:

$$\bar{x}_s = \frac{1}{3} (21 + 33 + 36) = \frac{1}{3} \cdot 90 = 30$$

Seçmə dispersiyanı tapaq:

$$D_s = \frac{1}{3} \left((21 - 30)^2 + (33 - 30)^2 + (36 - 30)^2 \right) = \frac{1}{3} (81 + 9 + 36) = \frac{1}{3} \cdot 126 = 42$$

49. Empirik paylanma funksiyası yazın və məsələni həll edin.

Məsələ. Seçmənin verilmiş paylanmasına görə empirik paylanma funksiyasını tapın.

x_i	3	5	9
n_i	10	30	60

Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan həcmi n olan $x_1, x_2, \dots, x_n$ variantlarından ibarət təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. $x_1, x_2, \dots, x_n$ variantlarında x -dən kiçik olan variantların sayını n_x –lə işarə edək. Onda $\frac{n_x}{n}$ – ə seçmənin paylanma funksiyası və ya empirik paylanma funksiyası deyilir və $F^*(x)$ –lə

$$\text{işarə olunur: } F^*(x) = \frac{n_x}{n} \tag{1}$$

Qeyd edək ki, ehtimal nəzəriyyəsində öyrəndiyimiz $F(x)$ paylanma funksiyası $\{X < x\}$ hadisəsinin ehtimalına yəni $P\{X < x\}$ –ə bərabər olduğu halda $F^*(x)$ empirik paylanma funksiyası seçmənin nisbi tezliyinə, yəni $\frac{n_x}{n}$ –ə bərabərdir. Onda böyük ədədlər qanununa əsasən

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon) = 1, \quad (\varepsilon > 0) \quad (2)$$

Bernulli teoreminə görə hadisənin $\frac{n_x}{n}$ nisbi tezliyi onun ehtimalına ehtimal mənada yığılır, yəni

$$F^*(x) = \frac{P}{n \rightarrow \infty} F(x).$$

Buradan aydındır ki, seçmənin empirik paylanma funksiyası baş yığının nəzəri paylanma funksiyası üçün təqribi ifadə kimi qəbul oluna bilər.

Empirik paylanma funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

- 1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$ - olur. Yəni empirik paylanma funksiyasının qiymətləri $[0;1]$ parçasına daxildir.
- 2) $F^*(x)$ azalmayan funksiyadır.
- 3) Əgər x_1 ən kiçik, x_k - isə ən böyük variantdırsa onda $x \leq x_1$ olduqda $F^*(x) = 0$ və $x \leq x_k$ olduqda $F^*(x) = 1$ olur.

Həlli. Seçmənin həcmi tapıq $n = 10 + 30 + 60 = 100$

Ən kiçik variant 3-ə bərabərdir. Ona görə də $x \leq 3$ olduqda $F^*(x) = 0$. $x < 5$ qiyməti 10

dəfə müşahidə edilmişdir, deməli $3 < x \leq 5$ olduqda $F^*(x) = \frac{10}{100} = 0,1$.

$x < 9$ qiyməti yəni $x_1 = 3$ və $x_2 = 5$ qiymətləri $10 + 30 = 40$ dəfə müşahidə edilmişdir,

deməli $5 < x \leq 9$ olduqda $F^*(x) = \frac{40}{100} = 0,4$. $x = 9$ ən böyük variant olduğu üçün

$x > 9$ olduqda $F^*(x) = 1$

Beləliklə empirik paylanma funksiyası

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 3 \text{ olduqda} \\ 0,1 & 3 < x \leq 5 \text{ olduqda} \\ 0,4 & 5 < x \leq 9 \text{ olduqda} \\ 1 & x > 9 \text{ olduqda} \end{cases}$$

50. Seçmə dispersiyanı yazın və məsələni həll edin.

Məsələ . Həcmi $n=10$ olan seçmənin verilmiş paylanmasına görə seçmə dispersiyanı

tapın:

x_i	2	4	-1
n_i	5	3	2

Seçmə yığım $x_1, x_2, \dots, x_k$ variantlarına və bu variantlara uyğun $n_1, n_2, \dots, n_k$ tezliklərinə malikdirsə,

$$\bar{x}_s = \frac{\sum n_i x_i}{n} \quad (1) \text{ seçmə orta}$$

$$D_s = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_s)^2}{n} \quad (2) \text{ seçmə dispersiya adlanır.}$$

Teorem. Seçmə dispersiya seçmə variantlarının kvadratları cəminin orta qiymətilə, seçmə ortanın kvadratı fərdinə bərabərdir:

$$D_s = \overline{x^2} - (\overline{x_s})^2$$

Həlli:

$$\begin{aligned} D_s &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i \right)^2 = \frac{1}{10} (5 \cdot 2^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot (-1)^2) - \left[\frac{1}{10} (5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)) \right]^2 = \\ &= \frac{1}{10} (20 + 48 + 2) - \left[\frac{1}{10} (10 + 12 - 2) \right]^2 = \frac{1}{10} \cdot 70 - \left(\frac{1}{10} \cdot 20 \right)^2 = 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$