1. Написать формулу полной вероятности и решить данную задачу:

Задача: В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектом , второго -5% и третьего – 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55%- со второго и 20% - с третьего.

Решение. Пусть событие А может произойти в результате появления одного и только одного события $H_i(i=1,2,...,n)$ из некоторой полной группы несовершенных событий $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$. События этой группы называют *гипотезами.*

__Теорема 1.__ Вероятность события А равна сумма парных произведений вероятностей всех гипотез, образующих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события А, то есть :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$$

формула полной вероятности, причем здесь $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$.

С рассматриваемым событием А= {Приобретенный телевизор оказался с дефектом} связано три гипотезы: H_1 = {телевизор выпущен первым заводом}, H_2 = {выпущен вторым заводом}, H_3 = {выпущен третьим заводом}.Вероятности этих событий определяются из условия задачи: $p(H_1)=0,25; p(H_2)=0,55; \; p(H_3)=0,2.$ Условные вероятности события А также определяются из условия задачи: $p(A/H_1)=0,1; p(A/H_2)=0,05; \; p(A/H_3)=0,03.$ Отсюда по формуле полной вероятности следует:

$$p(A)=0,25\cdot 0,1+0,55\cdot 0,05+0,2\cdot 0,03=0,0585\,.$$

2. Написать формулы Бейеса и решить данную задачу:

Задача: На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. Используя формулу полной вероятности, решим следующие задачи.

Пусть имеем полную группу парно несовместимых гипотез

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_K$$

С происхождением одного из событий H_K происходит событие А . Следует, определить вероятность события, которая является *причиной появления события* А, то есть условную вероятность.

Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_K) = P(A)P_A(H_K) = P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Отсюда

$$P_A(H_K) = \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(A)}, \quad K = \overline{1,n}$$

Используя

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Имеем:

$$P_A(H_K) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(H_K)P_{H_K}(A)}, \qquad K = \overline{1,n}$$

- это уравнение называется *формулой Бейеса*.

С рассматриваемым событием А={приемник зарегистрировал наличие сигнала} связано две гипотезы: H_1= {пришел сигнал и помеха},H_2={пришла только помеха}. Вероятности этих гипотез $p(H_1) = 0{,}9; p(H_2) = 0{,}1$. Условные вероятности события А по отношению г гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи $p(A/H_1) = 0{,}8; p(A/H_2) = 0{,}3$.

Требуется определить условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к событию А, для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$p(H_1/A) = \frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1) + p(H_2)\cdot(A/H_2)} = \frac{0{,}9\cdot 0{,}8}{0{,}9\cdot 0{,}8 + 0{,}1\cdot 0{,}3} = 0{,}96$$

3. Напишите формула Байесса и решите заданную формулу:

Задача: фабрика производит 25% продукции на первом, 35% продукции на втором, 40% на третьем станке. Каждый станок в соответствии выпускается 5%,4% vә 2% нестандартной продукции. Найти вероятность того, что случайная взятая стандартная деталь произведена на первом, втором, третьем станке.

Используя формулу полной вероятности, решим следующие задачи.

Пусть имеем полную группу парно несовместимых гипотез

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_K$$

С происхождением одного из событий H_K происходит событие А . Следует, определить вероятность события, которая является *причиной появления события* А, то есть условную вероятность.

Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_K) = P(A)P_A(H_K) = P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Отсюда

$$P_A(H_K) = \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(A)}, \quad K = \overline{1,n}$$

Используя

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Имеем:

$$P_A(H_K) = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(H_K)P_{H_K}(A)}, \qquad K = \overline{1,n}$$

- это уравнение называется *формулой Бейеса*.

Решение: Взятая деталь нестандартна это событие А. Здесь может быть три гипотез: Взятая нестандартная деталь произведена первым станком (событие B_1), взятая нестандартная деталь произведена вторым станком (событие B_2), , взятая нестандартная деталь произведена третьим станком (событие B_3). Тогда основываясь на заданных получим:

$P(B_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; $P(B_2) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$; $P(B_3) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ **.**

Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на первом станке равна $P_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$;

Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на втором станке равна $P_{B_2}(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$;

а на третьем 3-ем станке равна $P_{B_3}(A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ olar.

Тогда основываясь на формуле полной вероятности вероятность того, что случайно взятая деталь будет нестандартной равна:

$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{1}{25}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{50} = 0{,}0345$

Надо вычислить $P_A(B_1)$:

Так как $P(B_1) = \frac{25}{100} = 0{,}25$; $P_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05$; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$

Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = \frac{25}{69}$$

Надо вычислить $P_A(B_2)$:

Так как $P(B_2) = 0{,}35$; $P_{B_2}(A) = 0{,}04$; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$ Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}0345} = \frac{28}{69}$$

Основываясь на условиях:

Так как $P(B_3)=0{,}4$; $P_{B_3}(A)=0{,}02$; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$ Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}0345} = \frac{80}{345} = \frac{16}{69}$$

4. Независимые испытания. Вывод формулы Бернулли (некоторые случаи).

События А называются *независимыми* в данном испытании, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний. Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие А имеет одну и ту же вероятность $P(A)=p$, не зависящую от номера испытания, называется *схемой Бернулли.*

Пусть проведены n независимых испытаний. В результате этих испытаний событие А должно произойти ровно m раз и вероятность этого обозначим $P_n(m)$.

В проведенных n независимых испытаниях последовательность происхождения события А m раз и противоположного события $\overline{A}(n-m)$ раз может быть различной. Запишем одну из них $B=\underbrace{A\cdot A}_{m}...\underbrace{A\cdot \overline{A}\overline{A}\cdot -\overline{A}}_{n-m}$. Тогда число таких последовательностей равно C_n^m .

Вероятность события А, то есть $P(A)=p$, а события $\overline{A}$, то есть $P(\overline{A})=q$

Используя теорему умножения независимых событий, получим:

$$P(B)=P_B\left(AA...A\overline{A}\overline{A}...\overline{A}\right)=\underbrace{P(A)P(A)...P(A)}_{m}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})...P(\overline{A})}_{n-m}=p^m q^{n-m}$$

Так как число таких последовательностей равно C_n^m, тогда вероятность происхождения события А в n испытаниях ровно m раз на основе теоремы сложения равно сумме всех комбинаций

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}$$ - формула Бернулли.

Эта формула также называется *биноминальной,* то есть её правая часть представляет собой $(m+1)$ - ый *член бинома Ньютона*:

$$(q+p)^m=C_n^0 q^n+C_n^1 pq^{n-1}+C_n^2 p^2 q^{n-2}+...+C_n^n p^n$$

5. Написать формулу нахождения наивероятнейшего числа и решить данную задачу.

Задача. Вероятность выпуска стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность наивероятнейшего числа нестандартных деталей из 5 выпущенных.

Решение. Вероятность выпуска нестандартной продукции равна $p=1-0{,}8=0{,}2$. Вычислим все варианты по формуле Бернулли (n=5, q=0,8,k=0,1,2,3,4,5).

$$P_5(0)=C_5^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=0{,}32768;\quad P_5(1)=C_5^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096;$$
0
$$P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3=0{,}2048;\quad P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2=0{,}0512;$$
$$P_5(4)=C_5^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^1=0{,}0064;\quad P_5(5)=C_5^5\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0=0{,}0003\text{2}$$

Если полученные вероятности отметим на графике то можем увидеть, что m_0=1. Значит если в серии из n независимых испытаниях вероятность $P_n(m_0)$ не меньше вероятностей остальных событий тогда, m_0 называется наивероятнейшее число. Для нахождения m_0 используем формулу

$$\begin{cases} P_m(m_0) \geq P_n(m_0+1) \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1) \end{cases} \tag{6}$$

Если первое неравенство системы раскроем то, получим:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}$$

Учитывая, что здесь $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1), (n-m_0)! = (n-m_0-1)!\,(n-m_0)$, получим $\frac{1}{(n-m_0)} q \geq \frac{1}{m_o+1} \cdot p$. Отсюда можем получить $(m_o+1)q \geq (n-m_0)p \Rightarrow m_o(p+q) \geq np-q \Rightarrow m_o \geq np-q$. Если аналогично раскроем второе неравенство системы (6) получим m_0 <np+q. Если соединить оба неравенство получим:

$$np-q<m_0<np+p \qquad (7).$$

С помощью этой формулы можно вычислить наивероятнейшее число. Тогда решение вышей заданной задачи будет иметь вид: $5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \Rightarrow 0{,}2 \leq m_o \leq 1{,}2 \Rightarrow m_0 = 1$.

Значит наивероятнейшее число нестандартных деталей равно единице.

Значит вероятность того, что 1 деталь окажется нестандартной больше и равна $P_5(1) = C_5^1 pq^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

6. Написать локальную формулу Муавра-Лапласа и решить данную задачу.

Задача. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. *Теорема Лапласа*. Пусть $p = P(A)$ - вероятность события А причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях системы Бернулли событие А при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (1)$$

Где: $q = 1 - p$ и $t = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$

Вводя функцию $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ формулу (1) перепишем так

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Так как *n* велико используем локальную теорему Лапласа: $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\dfrac{40}{24} = -1{,}67$

Так как $\varphi(x)$ четная функция тогда $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$ из 1-ой таблицы получим $\varphi(1{,}67) = 0{,}0989$.

Тогда вероятность равна $P_{2400}(1400) = \dfrac{1}{24} 0{,}0989 = 0{,}0041$.

7. Решить данную задачу.

Пример По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,6. Число попаданий в цель – случайная величина X. Определить ряд распределения и функцию распределения величины X.

Решение. Случайная величина X может принимать следующие значения: 0, 1,2,3,4,5. Найдем вероятность принятия величиной X этих значений, используя формулу Бернулли:

$$\begin{aligned}
&P\{X = 0\} = (1 - p)^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024,\\
&P\{X = 1\} = C_5^1 p(1 - p)^4 = 5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0768,\\
&P\{X = 2\} = C_5^2 p^2 (1 - p)^3 = 10 \cdot 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304,\\
&P\{X = 3\} = C_5^3 p^3 (1 - p)^2 = 10 \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456,\\
&P\{X = 4\} = C_5^4 p^4 (1 - p) = 5 \cdot 0{,}6^4 \cdot 0{,}4 = 0{,}2592,\\
&P\{X = 5\} = p^5 = 0{,}6^5 = 0{,}07776.
\end{aligned}$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

1.Функцию распределения определим по формуле (5. для переменных:

$x \le 0 \quad F(x) = 0,$

$0 < x \le 1 \quad F(x) = p_0 = 0{,}01024,$

$1 < x \le 2 \quad F(x) = p_0 + p_1 = 0{,}08704,$

$2 < x \le 3 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}31744,$

$3 < x \le 4 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}66304,$

$4 < x \le 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}92224,$

$x > 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$

x	≤ 0	[0;1]	[1;2]	[2;3]	[3;4]	[4;5]	>5
F(x)	0	0,01024	0,08704	0,31744	0,66304	0,92224	1

8. Законы распределений дискретных случайных величин (Бинаминальное, геометрическое и Пуассона).

Рассмотрим следующие распределения:

1. **Бинаминальное распределение**.

Вероятность этого распределения находим по формуле:

$$P_n(X = k) = P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \tag{1}$$

$(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ получим распределение:

X	0	1	2	…	к	…	n
P_i	q^n	$c_n^1 pq^{n-1}$	$c_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$c_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

(2)

Распределение (2) называется биноминальным распределением дискретной случайной величины X. Для этого распределения имеем $\sum_{k=0}^{n} c_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$.

2. **Геометрическое распределение.**

Для этого распределения вероятность находим по формуле

$$P(X = k) = p \cdot q^k \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{3}$$

$(0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad q = 1 - p)$.

Распределение имеет вид:

X	0	1	2	…	k	…
$П_i$	p	pq	pq^2	…	pq^k	…

(4)

(5) называется геометрическое распределение дискретной величины X.

Здесь

$$p + pq + pq^2 + \ldots + pq^k + \ldots = p\underbrace{\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^k + \ldots\right)}_{\frac{1}{1-q}(0<q<1 \ \ olduhundan)} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

3. **Распределение Puassona .**

Вероятность этого распределения находится по формуле

$$P_n(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,\ldots n,\ldots \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

Получаем асимптотические формулы Пуассона:

X	0	1	2	…	n	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	…

(6)

(7) называется распределение Пуассона дискретной величины X.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1 \quad \cdot$$

9. Написать свойства функции плотности и решить данную задачу..

Задача . Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида $f(x) = \begin{cases} c \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0, & |x|. > \pi/2 \end{cases}$

Найти константу **с**, функцию распределения F(x) и вычислить $p\{|x| < \pi/4\}$.

Решение. Константу **с** вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-n/2}^{n/2} c \cos x dx = c \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1$$

Откуда с = 0,5

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности :

Для $x < -\pi/2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int_{-\infty}^{x} 0dy = 0$

Для $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos y}{2} dy = \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi/2} = \frac{1 + \sin x}{2}$

Для $x > \pi/2$ $\qquad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int_{-\pi/2}^{n/2} \frac{\cos y}{2} dy + \int_{\pi/2}^{x} 0dy = 1$

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1 + \sin x)/2 & |x| \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Вероятность $p\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Написать свойства функции плотности непрерывной случайной величины и решить данную задачу.

Задача. Для случайной величины X плотность вероятности $f(x) = ax$ при $x \in [0;2], f(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 2$. Найти коэффициент а, функцию распределения F(x), вероятность попадания на отрезок $[1;2]$

Решение. Так как $f(x) = ax \quad x \in [0,2]$ для нахождения параметра а воспользуемся формулой $\int_a^b f(x)dx = 1$.

$\int_a^b axdx = 1 \Rightarrow \qquad \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow \qquad \frac{a \cdot 4}{2} = 0{,}5$

Используя формулу $f(x) = F'(x)$ найдем функцию распределения $F(x)$.

Зная . что $f(x) = 0{,}5x$ то тогда $F(x) = 0{,}25x^2$. Найдем вероятность того, что функция $F(x)$ примет значение на отрезке $[1,2]$,воспользуемся формулой $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$. $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}25x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2 \end{cases}$

Надо воспользоваться формулой

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0{,}25x^2\Big|_{x=2} - 0{,}25x^2\Big|_{x=1} = 0{,}25 \cdot 4 - 0{,}25 =$$
$$= 0{,}25(4-1) = 0{,}75$$

11. Решить данную задачу .

Из десяти транзисторов, среди которых два бракованные, случайным

Образом выбраны два транзистора для проверки их параметров . Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных транзисторов в выборке; б) функцию распределения F(x) величины X; в) вычислить $p\{X \geq 0{,}5\}, p\{X < 1{,}5\}$

Решение. а) если

1) k=0

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 0 + 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow P_{10}(2) = \frac{C_2^0 \cdot C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{7 \cdot 8}{2}}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{28}{45}$$

x_i	0	1	2
p_i	28/45	16/45	1/45

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$P_{10}2 = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{2 \cdot 8}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{16}{45}$$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 2 + 0 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{1}{45}$$

b)

x	≤ 0	$[0;1]$	$[1;\ 2]$	> 2
F(x)	0	28/45	44/45	1

v) $p\{x \geq 0{,}5\} = 17/45, \quad p\{X < 1{,}5\} = 44/45$

12. Математическое ожидание и свойства (свойство М(ХУ)=М(Х) . М(У) с доказательством)

<u>Определение 1.</u> Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма парных произведений всех возможных её значений на их вероятности.

Если $x_1, x_2, ..., x_n$ есть (полный) набор всех значений дискретной случайной величины X и $p_1 + p_2 + ... + p_n$ - соответствующие им вероятности, то, обозначая буквой *M* математическое ожидание будет иметь:

$$M(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

где: $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины есть величина постоянная и поэтому представляет числовую характеристику случайной величины X.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной, т.е. если *C - постоянная величина*, то

$$M(C) = C$$

Теорема 2. Математическое ожидание суммы двух (или нескольких) случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е. если X и У случайные величины, то

$$M(X + У) = M(X) + M(У)$$

Теорема 3. Математическое ожидание произведения двух независимых величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$M(XУ) = M(X)M(У) \qquad (2)$$

Где X и У – независимые случайные величины.

Доказательство. Пусть (X_i, P_i) $(i = 1,2,...,n)$ и $(У_j, P_i)(j = 1,2,..., m)$-законы распределения соответственно случайных величин X и У.

Так как X и У независимы, то полный набор значений случайной величины XУ состоит из всех произведений вида $(i = 1,2,...,n;\quad j = 1,2,...,m)$ причем вероятности этих значений по теореме умножения для независимых событий равны $P_i P_j$

Имеем:

$$\begin{aligned} M(XУ) &= \sum\sum X_i У_j P_i P_j = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i \sum_{j=1}^{m} У_j P_j = \\ &= \sum_{i=1}^{n} X_i P_i M(У) = M(X)M(У) \end{aligned} \qquad (3)$$

что и требовалось доказать.

Следствие Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Действительно, например, для 3-х взаимно независимых случайных величин Х,У,Z имеем

$$M(XУУ)=M[(XУ)Z]=M(XУ)M(Z)=M(X)M(У)M(Z)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Если С - постоянная и Х - независимая случайная величина, то учитывая, что С и Х независимы, на основании теоремы 1 получим:

$$M(CX)=M(C)M(X)=CM(X)$$

Следствие Математическое ожидание разности независимых двух случайных величин Х и У равно разности математических ожиданий этих величин, т.е.

$$M(X-У)=M(X)-M(У)$$

Используя теорему о сумме математических ожиданий, получим:

$$M(X-У)=M[X+(-У)]=M(X)+M(-У)=$$
$$=M(X)+(-1)M(У)=M(X)-M(У)$$

13. Дисперсия и ее свойства (свойство D(X+У)= D(X)+D(У) с доказательством).

Определение. Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x)=M[X-M(X)]^2$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины Х и квадратом её математического ожидания.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины С равна нулю.

$$D(C)=0$$

Действительно, $D(C)=M[C-M(C)]^2=M[C-C]^2=0$

<u>Свойство 2.</u> Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX)=C^2D(X)$$

Действительно,

$$D(CX)=M[CX-M(CX)]^2=M[CX-CM(x)]=$$
$$=M\left[C^2(X-M(x))^2\right]=C^2M[X-M(x)]^2=C^2D(X)$$

<u>Свойство 3.</u> Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумма дисперсий этих величин:

$$D(X+У)=D(X)+D(У)$$

Действительно,

$$D(X)=M\left(X^2\right)-[M(X)]^2$$
$$D(X+У)=M\left[(X+У)^2\right]-\left[M(X+У)^2\right]=$$
$$=M\left[X^2+2XУ+У^2\right]+[M(X)+M(У)]^2=$$
$$=M\left[X^2+2XУ+У^2\right]-M^2(X)-2M(X)M(У)-M^2(У)=$$
$$=M^2\left(X^2\right)+2M(X)\cdot M(У)+M\left(У^2\right)-M^2(X)-2M(X)\cdot M(У)-$$
$$-M^2(У)=M\left(X^2\right)+M\left(У^2\right)-M^2(X)-M^2(У)=$$
$$=\left[M\left(X^2\right)-(M(X))^2\right]+\left[M\left(У^2\right)-(M(У))^2\right]=D(X)+D(У)$$

<u>Следствие 1.</u> $D(X_1+X_2+...+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)$

<u>Следствие 2.</u> $D(C+X)=D(C)+D(X)=0+D(X)=D(X)$

<u>Свойство 4.</u> $D(X-У)=D(X)+D(У)$

Действительно, $D(X-У)=D(X)+D(У)=D(X)+(-1)^2D(У)=$
$=D(X)+D(У)$

14. Моменты дискретной случайной величины. Найти центральный момент 2-го порядка распределения .

Для распределения 2-го порядка найти центральные моменты

x	**1**	**2**	**4**
p	**0,1**	**0,3**	p_3

Для нахождения центральных моментов 2-го порядка воспользуемся формулой

$\mu_2=M[X-M(x)]^2=D(x)$

Чтобы найти центральные моменты , целесообразно воспользоваться формулами связи центральных моментов с начальными

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2$$

$$\upsilon_1 = M(x)$$

$$\upsilon_2 = M(x^2)$$

Так как $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ то $p_3 = 0{,}6$

$$\upsilon_1 = M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}1$$

$$\upsilon_2 = M(x^2) = {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + {x_3}^2 p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9$$

$$M(x^2) = {x_1}^2 p_1 + {x_2}^2 p_2 + {x_3}^2 p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9$$

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29$$

15. Задача. Рабочий наблюдает за 4 станками. Вероятность того, что за время работы станку понадобится ремонт соответственно равны 0,9; 0,8; 0,75; 0,7. Написать закон распределения X случайной величины показывающее число отремонтированных станков.

Решение: эту задачу можно решить несколькими способами.

I метод. Через $A_к$ обозначим событие показывающее то, что к - ому станку понадобился ремонт. Тогда ясно, что

$$P(x=0) = p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3 A_4}\right) = (1-0{,}9)(1-0{,}8)(1-0{,}75)(1-0{,}7) = 0{,}0015;$$

$$P(x=1) = P\left(A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\Big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 \overline{A_4}\Big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} A_4\Big) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}0275$$

Аналогично, что

$$P(x=2) = P\left(A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} A_4 +$$
$$+ \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4\Big) = 0{,}1685$$

$$P(x=3) = P\left(A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4\right) = 0{,}4245;$$

$$P(x=4) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 0{,}378$$

Напишем закон распределения величины X:

$x_к$	0	1	2	3	4
$p_к$	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

16 . Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины *X* и решить данную задачу.

Задача. Непрерывная случайная величина X в интервале (2,4) задана дифференциальной функцией $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ вне этого $f(x)$=0. Найти моду, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

Решение.

формулой $M(x) = \int_a^b xf(x)dx$.

$$M(x) = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x\right)dx = \left(-\frac{3}{4}\frac{x^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\frac{4^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{4^3}{3} - \frac{6\cdot 4^2}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\frac{2^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{2^3}{3} - \frac{6\cdot 2^2}{2}\right) = 3$$

Воспользуемся формулой $D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(M(x)\right)^2$. найдем дисперсию.

$$D(x) = \int_2^4 x^2\left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x\right)dx - \left(M(x)\right)^2 =$$

$$= \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^3 - 6x^2\right)dx - \left(M(x)\right)^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 - 3^2 = \left(-\frac{3}{4}\frac{4^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{4^4}{4} - \frac{6\cdot 4^3}{3}\right) -$$

$$-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{2^4}{4} - \frac{6\cdot 2^3}{3}\right) - 9 = 141$$

17. Равномерное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Если все свои значения X непрерывная величина на интервале (а,в) равна постоянной $f(x)=\frac{1}{b-a}$, а вне этого интервала $f(x)=0$, тогда эта непрерывная случайная величина называется равномерно распределенной на интервале (а,в). Из определения следует, что $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b \frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{(b-a)}\cdot(b-a)=1$. Значит $f(x)$ действительно является функцией плотности. Найдем функцию распределения X:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt}_{0}+\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^x \frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\Big|_a^x=\frac{x-a}{b-a} \text{ olar.}$$

То есть
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le a \quad olarsa, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x\le b \quad olarsa, \\ 1, & x>b \quad olarsa, \end{cases} \text{ olur.}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной величины равно:

$$MX=\int_a^b x\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2} \text{ olar.}$$

Дисперсия равномерно распределенной величины равно:

$$DX=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\int_a^b\left[x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{b-a}=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}-\frac{x^2(a+b)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{1}{b-a}x\right]\Big|_a^b=$$
$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{b-a}{b-a}=\frac{a^2-ab+b^2}{3}-\frac{a^3+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Вероятность попадания в произвольный интервал(α,β) расномерно распределенной на интервале (а,в) случайной величины X(находим по формуле: $P(\alpha<x<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{x}{b-a}\Big|_\alpha^\beta=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

18. Показательное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Непрерывная случайная величина имеющяя функцию плотности

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda, \\ 0 \quad , & x\le 0 \quad olduqda,\end{cases} \tag{1}$$

называется показательно распределенной с параметром $\lambda(\lambda>0)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt}_{0}+\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$$

то есть

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda,\\ 0 \quad , & x\le 0 \quad olduqda.\end{cases} \qquad (2)$$

Вероятность того, что показательно распределенная случайная величина примет значение на интервале (α,β) вычислим по формуле:

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=1-e^{-\lambda\beta}-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \qquad (3)$$

Математическое показательно распределенной величины находим по формуле: $MX=\int\limits_0^{+\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+\int\limits_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$.

То есть математическое ожидание показательно распределенной случайной величина равно обратному значению λ:

$$MX=\frac{1}{\lambda} \qquad (4)$$

Дисперсия показательно распределенной случайной величина равно: $DX=\int\limits_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\underbrace{-x^2\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+2\int\limits_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=2\cdot\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int\limits_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$

То есть:

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}. \qquad (5)$$

Тогда $\sigma(X)=\sqrt{DX}=\frac{1}{\lambda}$. Отсюда следует, что

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}\ \text{- dır.} \qquad (6)$$

Отношения средне квадратического отклонения непрерывной величины X на математическое ожидание этой величины называется коэффициентом вариации обозначается через V:

$$V=\frac{\sigma(X)}{M(X)} \qquad (7)$$

Для показательного распределения $V=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}=1$.

19. Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины и решить данную задачу**.**

Задача: Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x+x^2}{12}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти математическое ожидание и вероятность того, что функция

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \dfrac{x+x^2}{12} & 0<x\le 3\\ 1 & x>3\end{cases}$$ получит значение на интервале (1;2)

Решение. $M(x)=\int\limits_a^b xf(x)dx$ так как

$$f(x)=F'(x)$$

$$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{1}{12}$$

$$M(x)=\int\limits_0^3 x\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{12}\right)dx=\int\limits_0^3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{12}\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{24}\right)\right|_0^3=$$

$$=\frac{27}{18}+\frac{9}{24}=1\frac{7}{8}$$

Воспользуемся формулой $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

$$P(1<x<2)=F(2)-F(1)=\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=2}-\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=1}=\frac{6}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

20. Нормальное распределение. Параметры a və σ в нормальном распределение. Вероятность попадания в интервал (α;β) нормально распределенной случайной величины.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.
Покажем, что a - математическое ожидание, σ - среднее квадратическое отклонение.

а) $M(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$

Введем переменную $Z=\frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла – нечетная функция)

Второе из слагаемых равно a. Так как интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$.

Итак $M(X)=a$

б) $D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$

Введем переменную $Z=\frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma dz$.

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Z\cdot Ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz$$

Интегрируя по частям, положив $u=z,\quad d\upsilon=Ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz$.

Найдем: $D(X)=\sigma^2 \qquad \sigma(X)=\sigma$

При $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{X^2}{2}}$ называют *нормированной*.

Вероятность того, что случайная величина X, заданная дифференциальной функцией $f(x)$ примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), такова

$$P(\alpha<X<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$$

Пусть X распределена по нормальному закону, тогда:

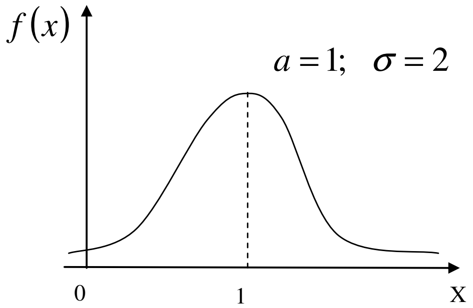
$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

После некоторых преобразований получаем:

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

21. Нормальная кривая. Воздействие параметров a и σ на нормальную кривую.

При $x = a$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. График функции симметричен относительно прямой $x = a$.Точки графика $\left(a-\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба.



Изменение величины параметра a не изменяет формы нормальной кривой, а приводит лишь к её сдвигу вдоль оси OX: вправо, если a возрастает и влево, если a убывает.

С возрастанием σ кривая сжимается к оси OX; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси OУ.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ нормальную кривую $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}}$ называют *нормированной*.

Вероятность того, что случайная величина X, заданная дифференциальной функцией $f(x)$ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), такова

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

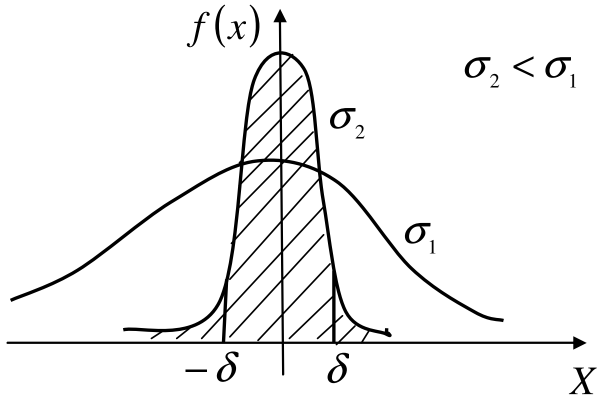
Пусть X распределена по нормальному закону, тогда:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

После некоторых преобразований получаем:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{Z^2}{2}}dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{Z^2}{2}}dz = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Найдем вероятность события $|X-a| < \delta$



$$P(|X-a| < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right] -$$

$$-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\delta}{\sigma}\right] = 2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right]$$

В частности, при $a = 0$ $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Если две случайные величины нормально распределены и $a = 0$, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу $(-\delta, \delta)$, больше у той величины, которая имеет меньшее значение σ.

22. Написать формулу вероятности попадания в интервал (α;β) и решите заданную задачу.

Задача: Случайная величина X нормально распределена. Его параметры a=5, σ =2. Найти вероятность того, что эта величина попадет в интервал (0,7). **(** $\Phi(2{,}33) = 0{,}40824$ **;** $\Phi(-1) = -\Phi(1) = -0{,}34(13)$ **).**

Решение: Найдем вероятность попадание в заданный интервал (α, β) нормально распределенной случайной величины X**:**

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Здесь $\frac{x-a}{\sigma}=t$, а $x=\alpha$ тогда $t=\frac{\alpha-a}{\sigma}$ и $x=\beta$ тогда $t=\frac{\beta-a}{\sigma}$. Используя функцию Лапласа получим:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Учитывая данные в формуле получим

$$P(0<x<7)=\Phi\left(\frac{7-7}{3}\right)-\Phi\left(\frac{0-7}{3}\right)=\Phi(0)-\Phi(-2{,}33)=\Phi(0)+\Phi(2{,}33)=$$

$$=0+0{,}4898=0{,}4898$$

23. Функция двух случайных аргументов.

Задача: Задана распределение двух случайных аргументов Х и У:

X	**1**	**4**
P	**0,3**	**0,7**

y	**2**	**3**
g	**0,4**	**0,6**

Написать распределение $Z=X+Y$.

Решение:

Если каждой паре возможнох значений случайных величин Х и У можно сопоставить одно возможное значение случайной велчины Z то такое соотношение называется функцией двух случайных аргументов и обозначается как $Z=\varphi(X,У)$.

В практике часто появляется необходимость найти распределение Z=X+Y если задаются распределения и Х и У. Для этого сначало надо найти значения Z, то есть к каждому значению случайной величины Х прибавляем все значения случайной величины У. А затем находим произведение вероятностей соответствующих сумм.

Пусть заданы случайные величины Х и У с соответствующими распределениями

X	X_1	X_2
P	p_1	p_2

Y	Y_1	Y_2
G	g_1	g_2

Тогда распределение Х+У будет иметь следующий вид:

$$p(x=x_1,y=y_1)=p(x=x_1)\cdot p(y=y_1)=p_1g_1$$

$$p(x=x_1,y=y_2)=p(x=x_1)\cdot p(y=y_2)=p_1g_2$$

$$p(x=x_2,y=y_1)=p(x=x_2)\cdot p(y=y_1)=p_2g_1$$

$$P(x=x_2,y=y_2)=P(x=x_2)\cdot P(y=y_2)=P_2g_2$$

Тогда

x+y	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_2	x_2+y_2
P	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Если учесть это в задаче:

$P(z=1+2=3)=0{,}3\cdot 0{,}4=0{,}12$

$P(z=1+3=4)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$

$P(z=4+2=6)=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28$

$P(z=4+3=7)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$

Z	3	4	6	7
P	0,12	0,18	0,28	0,42

24.Закон распределение двумерной случайной величины. Написать закон нахождения компонентов.

Все возможные значения случайные величины (X; У) состоящие из (x;y) называются двумерными. Одновременно рассматриваемые компоненты X и У образуют систему двух случайных величин. Если компоненты дискретные то система называется дискретной, а если компоненты непрерывные то система называется непрерывной. Двумерную случайную величину иногда называют вектором.

Множество случачайных величин *X₁, X₂, …, Xн* построинных в определенной последовательности называется n –мерный вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ или n –мерной системой случайных величин.

Сначало рассмотрим двумерный вектор $Z=(X,У)$.

Пусть компоненты $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, $У=(y_1,y_2,...,y_m)$ компоненты вектора $Z=(X,У)$. Если заданы распределения компонентов в отдельности, тогда можно написать распределение двумерной случайной величины $Z=(X,У)$.

Действительно, пусть

X	x_1	x_2	…	$x_н$
p	p_1	p_2	…	$p_н$

(1)

и

У	y_1	y_2	…	$y_м$
g	g_1	g_2	…	$g_м$

(2)

Тогда $Z=(X,У)$ имеет распределение

$x \diagup y$	x1	x2	…	xн
y_1	P11	p21	…	pн1
y_2	p12	p22	…	Pn2
			…	
y_m	P1m	p2m	…	Pnm

(3)

(3) называют распределением $Z=(X,У)$ или иногда матрицей ее распределения. Здесь в (1) $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$ и в (2) $\sum_{k=1}^{m} g_i = 1$. Так как в распределение (3) события $\{X = x_k, У = y_i\}$ образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{ki} = 1 \qquad (4)$$

Мы показали что, из распределений (1) и (2) получаем распределение (3). Обратное этой задачи верно. То есть из (3) можно получит (1) и (2).

Для этого при нахождении распределения X в первую строчку распределения пришем значения X а в строчку вероятности складываем вероятности в столбик.

$$\begin{aligned} P_k &= P(X = x_k) = P\big((X = x_k)\cdot(У = y_1) + (X = x_k)(У = y_2) + \dots + (X = x_k)\cdot(У = y_m)\big) = \\ &= P\big((X = x_k)(У = y_i)\big) + P\big((X = x_k)(У = y_2)\big) + \dots + P\big((X = x_k)(У = y_m)\big) = \\ &= P_k g_1 + P_k g_2 + \dots + P_k g_m = P_{k1} + P_{k2} + \dots + P_{km} \quad (k = 1,2,3,\dots n). \end{aligned} \qquad (5)$$

Для этого при нахождении распределения У в первую строчку распределения пришем значения У а в строчку вероятности складываем вероятности в строку.

$$g_i = P(У = y_i) = P_{1i} + P_{2i} + \dots + P_{ni} \quad (i = 1,2,\dots m) \qquad (6)$$

25. Фу нкция распределения двух случайных величин и его свойства. Функция распределения компонентов.

Функцией распределения двумерной случайной величины (x, y) называют функцию $F(x, y)$определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньше y:

$$F(x, y) = P(X < x, У < y)$$

Функция распределения двумерной случайной величины имеет следующие свойства :

Свойство 1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x, y) \le 1$$

Свойство 2. $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \quad если \ x_2 > x_1$$
$$F(x, y_2) \geq F(x \ , y_1), \ если \ y_2 > y_1$$

Свойство 3. Имеют место предельные соотношения:

$$1) \ F(-\infty, y) = 0 \qquad 2) F(x, -\infty) = 0$$
$$F(-\infty, \infty) = 0 \qquad 4) F(\infty, \infty) = 1$$

Свойство 4.

а) При $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X:

$$F(x, \infty) = F_1(x)$$

б) При (x, ∞) функция распределения системы становится функцией распределения составляющей У:

$$F(\infty, e) = F_2(y)$$

26. Написать закон распределение двумерной случайной величины и решить заданную задачу.
Задача: Двумерная случайная величина (X; Y) распределена в виде таблицы:

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

Написать условное распределение компонента X при условии Y=1. Исследуйте зависимость компонентов X и Y.

Пусть компоненты $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $У = (y_1, y_2, ..., y_m)$ компоненты вектора $Z = (X, У)$. Если заданы распределения компонентов в отдельности, тогда можно написать распределение двумерной случайной величины $Z = (X, У)$.
Действительно, пусть

X	x_1	x_2	…	$x_н$
p	p_1	p_2	…	$p_н$

(1)

и

У	y_1	y_2	…	$y_м$
g	g_1	g_2	…	$g_м$

(2)

Тогда $Z=(X,У)$ имеет распределение

$x \diagup y$	x_1	x_2	…	$x_н$
y_1	P_{11}	p_{21}	…	$p_{н1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	P_{n2}
			…	
y_m	P_{1m}	p_{2m}	…	P_{nm}

(3)

(3) называют распределением $Z=(X,У)$ или иногда матрицей ее распределения. Здесь в (1) $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$ и в (2) $\sum_{k=1}^{m} g_i = 1$. Так как в распределение (3) события $\{X=x_k, У=y_i\}$ образуют полную группу, то $\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{ki} = 1$

При условии Y=1

$$\underset{X=-1}{P(Y=1)} = \frac{P(X=-1;\, Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}3+0{,}2} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$$

$$\underset{X=0}{P(Y=1)} = \frac{P(X=0;\, Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$$

$X_{y=1}$	-1	0	1
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$

$$\underset{X=1}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1;\, Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$$

27. Написать функцию плотности двумерной случайной величины и решить заданную задачу:

Задача. Двумерная случайная величина (X ,Y) имеет закон распределения с плотностью

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x+y), & (x,y)\in D \\ 0, & (x,y)\in D \end{cases}$$

Область D- квадрат, ограниченный прямыми *x=0; x=3; y=0; y=3.*

Требуется определить коэффициент *a;* вычислить вероятность попадания случайной точки (X ,Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми *x=1, x=2, y=1, y=2*.

Плотностью совместного распределения вероятностей $f\left(x, y\right)$ двумерной непрерывной случайной величины (*Х,У*) называют *вторую смешанную частную производную* от функции распределения:

$$f\left(x, y\right) = \frac{\partial^2 F\left(x, y\right)}{\partial x \partial y}$$

Функция плотности имеет следующие свойства:

1) Двумерная плотность вероятности неотрицательна:

$$f\left(x, y\right) \geq 0 \qquad (1)$$

Из (1) получим $P\left(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq У \leq y_2\right) = \left[F\left(x_2, y_2\right) - F\left(x_1, y_2\right)\right] - \left[F\left(x_2, y_1\right) - F\left(x_1, y_1\right)\right]$ (2)

Формула (2) формула вероятности попадания точки (Х; У) в прямоугольник $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1 \leq y \leq y_2$.

2) Двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) dxdy = 1 \qquad (3)$$

Знаем что, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f\left(x, y\right) dxdy = 1$.

$$\int\limits_0^3\int\limits_0^3 a\left(x + y\right) dxdy = \int\limits_0^3 \left(\int\limits_0^3 a\left(x + y\right) dx\right) dy = \int\limits_0^3 \left[\left(\frac{ax^2}{2} + ayx\right)\Bigg|_0^3\right] dx =$$

$$\int\limits_0^3 \left[\frac{9a}{2} + 3ay\right] dy = \left(\frac{9ay}{2} + \frac{3ay^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27a}{2} + \frac{27a}{2} = \frac{54a}{2} = 27a$$

$$27a = 1$$

$$a = \frac{1}{27}$$

$$f\left(x, y\right) = \frac{1}{27}\left(x + y\right)$$

$$P(1\le x\le 2;\ \ 1\le y\le 2\ )=\int_1^2\int_1^2\frac{1}{27}\,(x+y)dxdy=\int_1^2\left(\int_1^2\frac{1}{27}(x+y)dx\right)dy=$$

$$=\int_1^2\left[\left(\frac{x^2}{54}+\frac{xy}{27}\right)\Bigg|_1^2\right]dy=\int_1^2\left(\frac{4}{54}+\frac{2y}{27}-\frac{1}{54}-\frac{y}{27}\right)dy=\int_1^2\left(\frac{3}{54}+\frac{y}{27}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{3}{27}+\frac{2}{27}\right)-\left(\frac{3}{54}+\frac{1}{54}\right)=\frac{5}{27}-\frac{4}{54}=\frac{10-4}{54}=\frac{6}{54}=\frac{1}{9}$$

28. Зависимые случайные величины. Условное распределение компонентов двумерной случайной величины.

Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$. Тогда распределение компонента X при условии $У=y_j\ (j=1,2,...,m)$ называется его <u>условным распределением.</u> Случайная величина X получает только из своих возможных значении $(x_1,x_2,...,x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}\right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X=x_i)=\dfrac{P\left[(X=x_i);(У=y_j)\right]}{P(У=y_j)}\quad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right)$ (1)

является условной вероятностью.

Тогда получаем

$X/У=y_j$	x_1	x_2	...	$x_н$
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	...	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

Распределение (2) называется <u>условным распределенем компонента X</u>

Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X=x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$

$У/X=x_i$	$у_1$	$y2$	...	$yм$
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	...	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

Пусть (X; У) система непрерывных случайных величин, $f(x,y)$ функция ее плотность этой системы. Плотность компонента X при условии $\{У=y\}$ находится по формуле

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \tag{4}$$

Здесь $f_2(y)$ функция плотности компонента У и вычисляется по формуле

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad (5)$$

Учитывая (5) в (4) получим

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad (6).$$

Условное распределение компонента У при условии $\{X=x\}$ вычисляется по формуле:

$$\varphi\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy} \qquad (7)$$

Здесь $f_1(x)$ функция плотности компонента X.

Отметим что, так как X и У зависимы $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$ и $f_1(x)\neq\varphi\left(x/y\right)$, $f_2(y)\neq\varphi\left(y/x\right)$. Если $f_1(x)=\varphi\left(x/y\right)$ и $f_2(y)=\varphi\left(y/x\right)$, тогда компоненты X и У независимые непрерывные случайные величины.

29. Задача: задана двумерная дискретная случайная величина X и Y.

Y	*X*		
	X₁=2	*X₂=5*	*X₃=8*
$y_1=0{,}4$	*0,15*	*0,30*	*0,35*
$y_2=0{,}8$	*0,05*	*0,12*	*0,03*

a) Закон безусловеного распределения компонентов.

b) Написать условное распределение компоненита X при значении $y_1=0{,}4$ компонента Y.

c) При условии $X=x_2=5$ написать условное распределение компонента Y.

Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$. Тогда распределение компонента X при условии $У=y_j\ (j=1,2,...,m)$ называется его <u>условным распределением.</u> Случайная величина X получает только из своих возможных значениях $(x_1,x_2,...,x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}\right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X=x_i)=\frac{P\left[(X=x_i);(У=y_j)\right]}{P(У=y_j)}\quad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right) \qquad (1)$

является условной вероятностью.

Тогда получаем

$X/_{У=y_j}$	x_1	x_2	…	$x_н$

$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	...	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

Распределение (2) называется <u>условным распределенем компонента X</u>
Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X = x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$

$y/_{X=x_i}$	y_1	y_2	...	$y_м$
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	...	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

Решение: Если сложить вероятности «по столбцам» то получим распределение X-а , а если «по строкам» получим распределение У:
Вычисляем соответствующие вероятности распределение X:

$$P(x_1 = 2) = P(x_1 = 2,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_1 = 2,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$$

$$P(x_2 = 5) = P(x_2 = 5,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_2 = 5,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}30 + 0{,}12 = 0{,}42$$

$$P(x_3 = 8) = P(x_3 = 8,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_3 = 8,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}35 + 0{,}03 = 0{,}38$$

Получим распределение X

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Анологично находим распределения У

Y	0,4	0,8
P	0,80	0,20

b) Вычислим условные вероятности возможных значений компонента X при условии $y_1 = 0{,}4$:

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}80} = \frac{3}{16},\ p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}35}{0{,}80} = \frac{7}{16}$$

Напишем распределение компонента X:

x	2	5	8
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Проверка: $\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = 1$

С) Анологично находим условное распределение компонента У:

Y	0,4	0,8
P(X2/Y)	5/7	2/7

Проверка : $\frac{5}{7}+\frac{2}{7}=1$

30. Числовые характеристики системы двух случайных величин корреляционная зависимост .Коэффициент корреляции.

Решение: Как числовые характеристики двумерной случайной величины (X; У) изучаются начальные и центральные моменты.

Математическое ожидание произведения $X^K У^C$ называется начальный момент К+С порядка системы (X; У) и обозначается как $\alpha_{K,S}$:

$$\alpha_{K,S}=M\left(X^K\cdot У^S\right) \qquad (1)$$

Математическое ожидание произведения $(X-MX)^K\cdot(У-MУ)^S$ называется центральный момент <u>*К+С*</u> и обозначается как $\beta_{K,S}$:

$$\beta_{K,S}=M\left[(X-MX)^K\cdot(У-MУ)^S\right] \qquad (2)$$

Если случайные величины X и У дискретные величины и $(x_1,x_2,...,x_n)$ и $(y_1,y_2,...,y_m)$ их соответствующие значения, тогда их начальные и центральные моменты К+С порядка вычисляются по формуле :

$$\alpha_{K,S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}x_i^k\cdot y_j^s\cdot P_{ij} \qquad (3)$$

$$\beta_{K,S}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(x_i-MX\right)^K\cdot\left(y_j-MУ\right)^S P_{ij} \qquad (4)$$

Здесь $P_{ij}=P\{X=x_i,У=y_j\}$ $\left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right)$.

Если функция плотности $f(x,y)$ системы непрерывных случайных величин (X; У), тогда начальные и центральные моменты К+С порядка будут вычислятся по формуе:

$$\alpha_{K,S}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^K\cdot y^S\cdot f(x,y)\,dx\,dy\,, \qquad (5)$$

$$\beta_{K,S}=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^K\cdot(y-MУ)^S f(x,y)\,dx\,dy \qquad (6)$$

Если в (2) –а *К*=1, *С*=1 получим:

$$\beta_{1,1}=M\left[(X-MX)\cdot(У-MУ)\right] \qquad (7)$$

(7) называется <u>ковариацией (или корреляционный момент)случаных величин X и У</u> и обозначается как $\mathbf{cov}(X,У)$ или Kxy:

$$K_{XУ}=\mathbf{cov}(X,У)=M\left[(X-MX)(У-MУ)\right]. \qquad (8)$$

Из (8) получаем

$$K_{XY} = MX \cdot MY - M\left(X \cdot Y\right). \qquad (9)$$

Для ковариация случайной величины $(X,У)$ верно

$$\left|K_{XY}\right| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y \qquad (10)$$

Здесь $\sigma_X^2 = K_{xx} = DX$, $\sigma_У^2 = K_{yy} = DУ$.

коэффициенты корреляции компонентов X и Y $r = \dfrac{K_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$

31. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена в виде таблицы:

Найти

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

коэффициенты корелляции величин X и Y.

Математическое ожидание произведения $\left(X - MX\right)^K \cdot \left(У - MУ\right)^S$ называется центральный момент <u>$K+C$</u> и обозначается как $\beta_{K,S}$:

$$\beta_{K,S} = M\left[\left(X - MX\right)^K \cdot \left(У - MУ\right)^S\right] \qquad (1)$$

Если в (2) –а K=1, C=1 получим

$$\beta_{1,1} = M\left[\left(X - MX\right) \cdot \left(У - MУ\right)\right] \qquad (2)$$

(6) называется <u>ковариацией (или корреляционный момент)случаных величин X и У</u> и обозначается как $\mathbf{cov}\left(X,У\right)$ или $K_{XУ}$:

$$K_{XУ} = \mathbf{cov}\left(X,У\right) = M\left[\left(X - MX\right)\left(У - MУ\right)\right]. \qquad (3)$$

Из (3) получаем

$$K_{XУ} = MX \cdot MУ - M\left(X \cdot У\right). \qquad (4)$$

Сначало напишем распределение X и У

X	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

Y	0	1
P	0,3	0,7

А затем напишем распределение $X \cdot Y$:

$x \cdot y$	$-1 \cdot 0$	$-1 \cdot 1$	$0 \cdot 0$	$0 \cdot 1$	$1 \cdot 0$	$1 \cdot 1$
P	0,09	0,21	0,15	0,35	0,06	0,14

$x \cdot y$	-1	0	1
P	0,21	0,65	0,14

Затем вычислим математическое ожидание:

$$M(x) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}2 = -0{,}3 + 0{,}2 = -0{,}1$$

$$M(y) = 0 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}7 = 0{,}7$$

$$M(x \cdot y) = -1 \cdot 0{,}21 + 0 \cdot 0{,}65 + 1 \cdot 0{,}14 = -0{,}21 + 0{,}14 = -0{,}07$$

Отсюда вычислим

$$K_{xy} = -0{,}07 - (-0{,}1) \cdot 0{,}73 = -0{,}07 + 0{,}07 = 0$$

Значит эти величины имеют корреляционную зависимость.

32. Двумерная случайная величина (X Y) имеет двумерную плотность:

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x+y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in D \end{cases}$$

Область D ограничена квадратом: *x=0;* *x=3;* *y=0;* *y=3*.Найти коэффициент a.

Найти коэффициенты корреляции компонентов X и Y.

Знаем что, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dxdy = 1$.

$$\int\limits_0^3\int\limits_0^3 a(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^3\left(\int\limits_0^3 a(x+y)\,dx\right)dy = \int\limits_0^3\left[\left(\frac{ax^2}{2} + ayx\right)\Bigg|_0^3\right]dx =$$

$$\int\limits_0^3\left[\frac{9a}{2} + 3ay\right]dy = \left(\frac{9ay}{2} + \frac{3ay^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27a}{2} + \frac{27a}{2} = \frac{54a}{2} = 27a \Rightarrow 27a = 1 \Rightarrow \quad a = \frac{1}{27}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{27}(x+y)$$

Мы знаем что, коэффициент корреляции непрерывной случайной величинывычисляется по формуле:

$$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x, y)\,dxdy - M(x)M(y)$$

Сначало вычислим $M(x)$ və $M(y)$:

$$M(x) = \int\limits_0^3\int\limits_0^3 xf(x, y)\,dx = \frac{1}{27}\int\limits_0^3\int\limits_0^3 x(x+y)\,dx = \frac{1}{27}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 y\right)\Bigg|_0^3 dy =$$

$$= \frac{1}{27}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{3}\cdot 27 + \frac{1}{2}\cdot 9y\right)dy = \frac{1}{27}\left(9y + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_0^3 = \frac{1}{27}\left(27 + \frac{81}{4}\right) =$$

$$= 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$$

$$M(y) = \frac{7}{4}$$

А затем коэффициент корреляции

$$K_{xy}=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 xy(x+y)dxdy-M(x)M(y)=\frac{1}{27}\int_0^3\int_0^3 (x^2y+xy^2)dxdy-M(x)M(y)=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(\int_0^3 (x^2y+xy^2)dx\right)dy-M(x)M(y)=\frac{1}{27}\int_0^3\left(\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{2}\Bigg|_0^3\right)dy-M(x)M(y)=$$

$$=\frac{1}{27}\int_0^3\left(9y+\frac{9y^2}{2}\right)dy-M(x)M(y)=\frac{1}{27}\left(\frac{9y^2}{2}+\frac{9y^3}{6}\right)\Bigg|_0^3-M(x)M(y)=$$

$$=\frac{1}{27}\left(\frac{81}{2}+\frac{81}{2}\right)-M(x)M(y)=2-\frac{7}{4}\cdot\frac{7}{4}=2-\frac{49}{16}=-1\frac{1}{16}$$

33. Написать таблицу распределения двумерной случайной величины и решите заданную задачу.

Задача: вероятность поразить мешень первым стрелком равна0,4, а для второго стрелка 0,6. Каждый из стрелков стреляет по два раза независимо друг от друга. Написать закон распределения поражения мишени I и II стрелками. (случайная величина X показывает поражения I стрелком, aY показывает поражение II стрелком).

Решение: Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$. Тогда $Z=(X,Y)$ имеет распределение

$x \diagup y$	x_1	x_2	…	$x_н$
y_1	P_{11}	p_{21}	…	$p_{н1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	P_{n2}
			…	
y_m	P_{1m}	p_{2m}	…	P_{nm}

(3)

(3) называют распределением $Z=(X,Y)$ или иногда матрицей ее распределения. Здесь в (1) $\sum_{k=1}^{n}P_k=1$ и в (2) $\sum_{k=1}^{m}g_i=1$. Так как в распределение (3) события $\{X=x_k, Y=y_i\}$ образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}P_{ki}=1 \qquad (4)$$

Мы показали что, из распределений (1) и (2) получаем распределение (3). Обратное этой задачи верно. То есть из (3) можно получит (1) и (2).

Для этого при нахождении распределения X в первую строчку распределения пришем значения X а в строчку вероятности складываем вероятности в столбик.

$$\begin{aligned}&P_k=P(X=x_k)=P\big((X=x_k)\cdot(Y=y_1)+(X=x_k)(Y=y_2)+...+(X=x_k)\cdot(Y=y_m)\big)=\\&=P\big((X=x_k)(Y=y_i)\big)+P\big((X=x_k)(Y=y_2)\big)+...+P\big((X=x_k)(Y=y_m)\big)=\\&=P_kg_1+P_kg_2+...+P_kg_m=P_{k1}+P_{k2}+...+P_{km}\quad (k=1,2,3,...n).\end{aligned} \qquad (5)$$

Для этого при нахождении распределения У в первую строчку распределения пришем значения У а в строчку вероятности складываем вероятности в строку.

$$g_i = P(У = y_i) = P_{1i} + P_{2i} + \ldots + P_{ni} \quad (i = 1, 2, \ldots m) \qquad (6)$$

$p_1 = 0{,}4 \qquad p_2 = 0{,}6$

$q_1 = 0{,}6 \qquad q_2 = 0{,}4$

Используя следующее распределение

X	0	1	2
P	$q_2 q_2$	$2 p_2 q_2$	$p_2 p_2$

Напишем распределение I стрелка

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Напишем распределение II стрелка

X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

34. Закон больших чисел. Неравенство и теорема Чебышева.

НЕРАВЕНСТВА ЧЕБЫШЕВА

Неравенство Чебышева справедлива для дискретных и непрерывных случайных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

$$\begin{array}{ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}$$

Подставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность того, что X примет значение, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П.Л.Чебышев доказал неравенство позволяющее дать интересующую нас оценку.

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Теорема Чебышева. Если $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ - попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots -$ попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены , то как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами в условиях теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-a\right|<\varepsilon\right)=1$$

35. Написать неравенство Чебышева и неравенство Маркова и решить заданную задачу.

Задача: В течение часа в АТС поступает 300 звонков. Оценить вероятность того, что число звонков поступивших в АТС а) более 400, в) не более 500 .

Решение: Для X случайной величины имеющяя конечную дисперсию и для числа $\varepsilon > 0$ верно:

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (1).$$

a) по условию имеем M(x) =300. Используя неравенство Маркова получим: $P(x>A)\le\frac{M(x)}{A}\Rightarrow P(x>400)\le\frac{300}{400}=0{,}75$

вероятность того, что число звонков непревысит 400 не более 0,75.

b) с другой стороны используя формулу $P(x\le A)\ge 1-\frac{M(X)}{A}=0{,}4$ получим $P(x\le 500)\ge 1-\frac{300}{500}=0{,}4$. Значит вероятность того, что число звонков не более 500 не менее 0,4.

36. Написать неравенство Чебышева и решить заданную задачу:
Задача: X дискретная случайная величина X задана распределением:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева оценить вероятность события

$\left|X-M(X)\right|<0{,}2$.

Решение: Для X случайной величины имеющяя конечную дисперсию и для числа $\varepsilon>0$ верно:

$$P\left(\left|X-M(X)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\qquad(1).$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины X:

$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54$

$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=\left(0{,}3^2\cdot 0{,}2+0{,}6^2\cdot 0{,}8\right)-0{,}54^2=0{,}0144$

Используем неравенство Чебышева в следующем виде: $P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ из условия задачи имеем:

$\varepsilon=0{,}2$

M(X) =0,54 ,D(X)=0,0144,
В результате получим:

$$P\left(\left|X-0{,}54\right|<5\right)\ge 1-\frac{0{,}0144}{0{,}04}=0{,}64$$

37. Выборочная дисперсия и ее свойства.

Пусть в результате наблюдений дана выборка $x_1, x_2,...x_n$. Если $\overline{x_c}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ тогда $S_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2$ (1)

называется дисперсией выборки. Здесь разницы $x_i - \overline{x}$ являются приращениями. Если частоты $m_1, m_2, m_3 \dots m_k$ вариантов известны, тгда дисперсия вычисляется по формуле $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i$ (2)

Подкоренное значение выборочной дисперсии называется среднее квадратическое отклонение выборки и записывается как:

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Или

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i}$$

.

Понятно что размерность величины X одинаково величиной $\overline{\sigma_x}$.

Дисперсия выборки имеет следующие свойства:

Свойство1:дисперсия постоянной величины равно единице.

Действительно $S_x^2 = \frac{1}{n}\left(c - c\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$.

Свойство 2: Если варианты являющиеся результатами наблюдения возрастают или убывают к определенному постоянному числу тогда дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменяется.

Доказательство:

$$S_{x\pm c}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i \pm c\right) - \overline{\left(x \pm c\right)}\right)^2 m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i \pm c\right) - \left(\overline{x} \pm c\right)\right)^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = S_x^2$$

Свойство 3: Постоянную можно вывести за знак дисперсии квадратом.

Действительно

$$S_{cx}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(cx_i - c\overline{x}\right)^2 m_i = \frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = c^2 S_x^2$$

$$\overline{\sigma_{cx}} = \sqrt{c^2 S_x^2} = |c|\sqrt{S_x^2} = |c|\overline{\sigma_x}$$

Свойство 4: Если частоты соответствующих вариантов умножить постоянную то выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменится.

38. Ошибки первого и второго рода, которые могут быть допущены в итоге статистической проверки гипотезы.

Пусть рассматривается основная гипотеза H_0 и альтернативная ей гипотеза H_1 выдвинутые для характеристики чего-либо. В зависимости от выбора точки x_i на оси OX решается принимать гипотезу H_0(гипотезу H_1 отвергать) или отвергать (гипотеза H_1 принемать).

Так как выбор точки x_i случаен, тогда при принятие решения могут быть следующие:

1) гипотеза H_0 (нулевая основная) верна, (альтернативная гипотеза H_1 не верна) и гипотеза H_0 принимается.
2) гипотеза H_0 верна, (альтернативная гипотеза H_1 не верна) и гипотеза H_1 принимается.
3) альтернативная гипотеза H_1 верна (основная гипотеза H_0 не верна), но H_1 принимается.
4) гипотеза H_1 верна (основная гипотеза H_0 не верна), но H_1 отвергается.

Как видно в решениях 2) и в 4) допустима ошибка.

Определение. Если основная гипотеза H_0 (провереная) верна и отвергается, а ей противоположная (альтернативная) гипотеза H_1 принимается, тогда сделанная ошибка называется ошибкой первого рода и обозначается через α.

Определение 2. Если основная H_0 (провереная) не верна и принимается, а альтернативная гипотеза H_1 отвергается, тогда сделанная ошибка называется ошибкой второго рода и обозначается через β.

39. Метод моментов.

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Полученное уравнение или уравнения решаются относительно теоретических параметров.

Если теоретический параметр зависит от одного параметра тогда:

$$\gamma = M\left[x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)dx = m_1(\alpha)$$

Начальный теоретический момент первого порядка

$$\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Возмем равного порядка емперическому.

$$m_1(\alpha) = \overline{x_c}(1) \qquad \left(M\left[x\right] = \overline{x_c}\right)$$

Уравнение решаем относительно α.

Если в распределение есть два параметра , т.е. функция плотности в виде $P(x,\alpha_1,\alpha_2)$ тогда для нахождения параметров α_1 и α_2 двум теоретическим момента приравняем двум эмпирическим моментам.

Здесь начальные и эмпирические моменты первого порядка, второго порядка теоретические моменты и эмперические приравниваем и можем оценить α_1 и α_2. Ясно, что так как

$$\gamma = M\left[x\right], \mu_2 = m_2 \quad \mu_2 = D\left[x\right]$$

тогда

$$\begin{cases} M\left[x\right] = \overline{x_c} \\ D\left[x\right] = D_c \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы получаем неизвестные параметры. Это значения является точечной оценкой параметра. Здесь выборочная средняя $\overline{x_в}$, выборочная дисперсия $D_в$ находится основываясь на выборке $x_1, x_2, x_3 ... x_n$

40. Оценка параметров методом моментов.

Решить задачу.

Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Задано распределение *n=200* нестандартных деталей (перечень вариантов и соответствующих частот)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Методом моментов оценить неизвестный параметр λ распределения Пуассона.

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Полученное уравнение или уравнения решаются относительно теоретических параметров.

Если теоретический параметр зависит от одного параметра тогда:

$$\gamma = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)dx = m_1(\alpha)$$

Начальный теоретический момент первого порядка

$$\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Возмем равного порядка емперическому.

$$m_1(\alpha) = \overline{x_c}(1) \qquad \left(M[x] = \overline{x_c}\right)$$

Уравнение решаем относительно α.

Если в распределение есть два параметра , т.е. функция плотности в виде $P(x,\alpha_1,\alpha_2)$ тогда для нахождения параметров α_1 и α_2 двум теоретическим момента приравняем двум эмпирическим моментам.

Здесь начальные и эмпирические моменты первого порядка, второго порядка теоретические моменты и эмперические приравниваем и можем оценить α_1 и α_2. Ясно, что так как

$$\gamma = M[x], \mu_2 = m_2 \quad \mu_2 = D[x]$$

тогда

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c \end{cases} \qquad (2)$$

Решение: Известно, что в распределение Пуассона математическое ожидание равно параметру λ и известно, что $M[x] = \overline{x_c}$, тогда получим $\lambda = \overline{x_c}$.

Тогда получим

$$\lambda = x_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{132 \cdot 0 + 1 \cdot 43 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{200} = \frac{57}{200} = 0{,}285$$

41. Метод моментов точечной оценки (краткая информация)

Решить задачу.

Методом моментов найти точечную оценку параметров a и b равномерного распределения, с плотностью $f(x) = \frac{1}{b-a}$ по выборке $x_1, x_2, \ldots x_n$

Решение: Так как имеем два параметра для их определения имеем**:**

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c = \sigma^2 \end{cases}$$

Используем уравнения системы .

Так как равномерное распределение имеем: $M[x] = \frac{a+b}{2}; G(x) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Отсюда $\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = \overline{x_c} \\ \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{D_c} \end{cases}$

Из системы уравнений имеем:

$$a = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c}$$
$$b = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c}$$

Значит:

$$a^* = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c},\ b^* = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c}\ .$$

42. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения.

Для оценки параметров распределения находим такой интервал в котором удовлетворяется условие $P(\left|\theta - \theta^2\right| < \delta) = \gamma$. Здесь γ вероятность достоверности, θ-параметр оценки, θ^* его приблизительное значение. Определяется δ .

Так как распределение имеющая нормальное распределение δ неизвестна, для нахождения параметра а интервал достоверности имеет вид

Nобьем выборки, σ -среднее квадратическое отклонение.

t находим из равенства $\phi = \dfrac{\gamma}{2}$.

γ -вероятность достоверности и функция Лапласа.

Используя исправную дисперсию интервал достоверности параметра σ примет вид:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \qquad (q < 1 olduqda)$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \qquad (q > 1 olduqda)$$

Если n и γ заданы то для нахождения q есть таблица. Параметр A можно оценить с помощью параметра S.

$$\bar{x}_c - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_c + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

43. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения (краткая информация)

*Решить задачу***.**

Вместимость конденсатора $\bar{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$, $\gamma = 0{,}99$

Найти доверительный интервал $(\Phi(t) = 0{,}495; t = 2{,}58)$

Решение : $\gamma = 0{,}99$,из таблицы функции Лапласа получим $t = 2{,}58$.

Заданные учитывая в формуле

$$\bar{x}_s - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Получим:

$$20 - 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 2 + 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$20 - 2{,}58 < a < 2 + 2{,}58$$

$$17{,}42 < a < 22{,}58$$

44. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения (краткая информация)

Решить задачу.

В 300 независимых испытаниях события A с одинаковой вероятностью наступает 250 раз. Найти доверительные интервалы для оценки вероятности p , если задана надежность $\gamma = 0{,}95$ $(\Phi(t) = 0{,}475; t = 1{,}96)$

Решение: Частота того, что в 300 независимых испытаниях событие А происходит 250 раз будет:

$$\omega = \frac{250}{300} = \frac{5}{6};\ \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}\ \ \Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$$

Значение функции Лапласа находим из таблицы, т.е t=1,96.

$$P_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_1 < P < P_2$$

Используя формулы

$$P_1 = \frac{5}{6} - 1,96\sqrt{\frac{5}{300\cdot 36}} \approx 0,79$$
$$P_1 = \frac{5}{6} + 1,96\sqrt{\frac{5}{300\cdot 36}} \approx 0,88$$

Тогда получим $0,79 < P < 0,88$.

45.__**Эмпирическая функия распределения**__

__**Задача .**__ Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки

x_i	4	7	10
n_i	16	24	40

Эмперической функцией распределения называют функцию $F^x(x)$ определяющую для каждого значения x относительную частоту события

X< x: $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$

где n_x - число вариант меньше x, n - объем выборки.

__Решение:__ Найдем объем выборки: n=16+24+40=80.

Наименьшая варианта равно 4, поэтому при $x \le 4$. $F^x(x) = 0$.Значение $x < 7$

наблюдалось 16 раз, следовательно $F^*(x)=\frac{16}{80}=0{,}2$ при $4<x\le 7$.

Значения $x<10$, а именно x_1=4 и x_2=7 наблюдались 16+24=40 раз, следовательно $F^*(x)=\frac{40}{80}=0{,}5$ при $7<x\le 10$. Так как x=10 наибольшая варианта, то $F^*(x)=1$ при $x>10$.

Искомая эмпирическая функция:

$$F^*(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 4\\ 0{,}2 & при \quad 4<x\le 7\\ 0{,}5 & при \quad 7<x\le 10\\ 1 & при \quad x>10\end{cases}$$

46.Генеральная дисперсия

Задача . Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	8	3	5
n_i	4	6	10

Найти генеральную дисперсию.

Решение.

Найдем генеральную среднюю.

$$\bar{x}_Г=\frac{8\cdot 4+3\cdot 6+5\cdot 10}{4+6+10}=5$$

Найдем генеральную дисперсию :

$$D_Г=\frac{4\cdot(8-5)^2+6\cdot(3-5)^2+10\cdot(5-5)^2}{4+6+10}=\frac{36+24+0}{20}=\frac{60}{20}=3$$

47.Выборочная дисперсия

<u>Задача</u> Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки n=10

x_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

Выборочной дисперсией $D_в$ называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_b$

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2$$

Решение:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2 = \frac{1}{10}\left[2\cdot(-5)^2 + 3\cdot 3^2\right] - \left[\frac{1}{10}\left(2\cdot(-5) + 5\cdot 1 + 3\cdot 3\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{10}\left[50 + 5 + 27\right] - \left[\frac{1}{10}\cdot(-10 + 5 + 9)\right]^2 = \frac{1}{10}\cdot 82 - \left(\frac{4}{10}\right)^2 = 8{,}2 - 0{,}16 = 8.04$$

<u>48.Смещенная оценка генеральной дисперсии</u>

<u>Задача</u> . В итоге трех измерений некоторой физической величины одним прибором получены следующие результаты 21; 23 ; 26.Найти выборочную дисперсию ошибок прибора.

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i - \left(x_i - \bar{x}_b\right)^2$$

<u>Решение</u>: Найдем выборочную среднюю

$$\bar{x}_b = \frac{1}{3}(21 + 33 + 36) = \frac{1}{3}\cdot 90 = 30$$

Найдем выборочную дисперсию

$$D_b = \frac{1}{3}\left((21-30)^2 + (33-30)^2 + (36-30)^2\right) = \frac{1}{3}(81 + 9 + 36) = \frac{1}{3}\cdot 126 = 42$$

49.Эмперическая функция распределения.

Задача . Найти эмперическую функцию по данному распределению выборки.

x_i	3	5	9
n_i	10	30	60

Эмперической функцией распределения называют функцию $F^x(x)$ определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n_x - число вариант меньших x; n - объем выборки.

Решение: Найдем объём выборки: $n = 10 + 30 + 60 = 100$.

Наименьшая варианта равна 3, поэтому при $x \le 3$ $F^x(x)=0$. Значение $X < 5$ наблюдалось 10 раз. Следовательно $F^*(x) = \frac{10}{100} = 0{,}1$ при $3 < x \le 5$.

Значения $X < 9$, а именно $x_1=3$, $x_2=5$ наблюдались 10+30 раз , следовательно

$F^*(x) = \frac{40}{100} = 0{,}4$ при $5 < x \le 9$. Так как x=9 наибольшая варианта тоесть

$F^x(x)=1$ при $X > 9$

Искомая эмпирическая функция

$$F^x(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 3 \\ 0{,}1 & при \quad 3 < x \le 5 \\ 0{,}4 & при \quad 5 < x \le 9 \\ 1 & при \quad x > 9 \end{cases}$$

50.Выборочная дисперсия.

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\bar{x}_b$

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_b\right)^2$$

удобная формула для вычислений дисперсии

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\;2} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2$$

<u>Задача 8</u>. Найти выборочную дисперсию по данному распределению выборки объема n=10 :

$$\begin{array}{cccc} x_i & 2 & 4 & -1 \\ n_i & 5 & 3 & 2 \end{array}$$

Решение:

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^{\;2} - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2 = \frac{1}{10}\left(5\cdot 2^2 + 3\cdot 4^2 + 2\cdot(-1)^2\right) -$$

$$-\left[\frac{1}{10}\left(5\cdot 2 + 3\cdot 4 + 2\cdot(-1)\right)\right] = \frac{1}{10}(20 + 48 + 2) - \left[\frac{1}{10}(10 + 12 - 2)\right]^2 = =$$

$$= \frac{1}{10}\cdot 70 - \left(\frac{1}{10}\cdot 20\right)^2 = 7 - 4 = 3$$