

1) Funksiyanın limiti .Sağ və sol limitlər

Tərif 1. Sonlu a və A ədədləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x -in X çoxluğundan götürülmüş və $0 < |x - a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə $x \rightarrow a$ şərtində $f(x)$ funksiyanın limiti deyilir və $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ kimi yazılır. X çoxluğu olaraq a nöqtəsinin müəyyən ətrafı başa düşülür.

Məntiqi simvollarından istifadə etsək tərifini aşağıdakı kimi vermək olar:

$$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \right) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall x \neq a, 0 < |x - a| < \delta) |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Tərif 2. İstənilən M ədədi üçün elə $\delta > 0$ var ki, x -in X çoxluğundan götürülmüş və $0 < |x - a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x)| > M$ münasibəti ödənilir. Onda deyirlər ki, $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ -in limiti sonsuzluğa bərabərdir və bunu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ və yaxud $f(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow a$) kimi yazılır.

Tərif 3. Sonlu A və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədləri verildikdə elə $N > 0$ tapmaq olar ki, x -in $|x| > N$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə $x \rightarrow \infty$ şərtində $f(x)$ funksiyanın limiti deyilir və $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ və ya $f(x) \rightarrow A$ ($x \rightarrow \infty$) şəklində yazılır.

Tərif 4. A ədədinə $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$) şərtində $f(x)$ funksiyanın o vaxt limiti deyilir ki, $\forall \varepsilon > 0$ ədədinə qarşı elə $N = N(\varepsilon)$ olsun ki, x -in $x > N$ ($x < -N$) bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənilir. Bunu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ($\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) kimi yazılar. Əgər $f(x)$ funksiyanın $x \rightarrow +\infty$ və $x \rightarrow -\infty$ şərtlərində limiti varsa və $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ödənilirsə, onda $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ olur. Bunun tərsi də doğrudur.

Funksiyanın sol və sağ limitləri

A ədədi $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyanın limitdirsə, onda x -in a -ya yaxın və onun istənilən tərəfində (sol və ya sağ tərəfində) yerləşən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilir. $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyanın limiti olmadıqda onda (1) bərabərsizliyi x -in a -nın müəyyən tərəfində (məsələn, sol və ya da sağ) tərəfində yerləşən qiymətlərində ödənilə bilər. Belə olduqda $f(x)$ funksiyanın a nöqtəsində sol limitindən və sağ limitindən danışmaq olar.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin sol tərəfində təyin olunmuşdur.

Tərif . Sonlu A və a ədədləri verildikdə $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x -in a -dan kiçik olan və

$$0 < a - x < \delta \quad (2)$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (3)$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə $x \rightarrow a$ şərtində (və ya $x = a$ nöqtəsində) $f(x)$ funksiyasının sol limiti deyilir və

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x < a)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) \quad (4)$$

kimi işarə olunur.

Tərif. Sonlu A və a ədədləri verildikdə $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x -in a -dan böyük olan və

$$0 < x - a < \delta \quad (5)$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə $x \rightarrow a$ şərtində (və ya $x = a$ nöqtəsində) $f(x)$ funksiyasının sağ limiti deyilir və

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (x > a)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) \quad (6)$$

kimi işarə olunur.

Deməli, $x = a$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının limitinin olması üçün

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$$

şərti ödənilməlidir.

2) e -ədədi

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ($n \in N$) ifadəsindən

$$a_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \dots = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \quad (1) \text{ alırıq.}$$

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \dots \quad (2) \text{ olar.}$$

(1) bərabərliyinin sağ tərəfində $(n+1)$ sayda hədd vardır.

(2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hədlərinin sayı $(n+2)$ olur və $(n+2)$ -ci hədd müsbətdir.

(1) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hədlər uyğun olaraq (2) bərabərliyinin sağ tərəfindəki hədlərdən kiçik olduğundan yazı bilərik: $a_n < a_{n+1}$ ($n \in N$). Yəni, $\{a_n\}$ ardıcılığı monoton artan ardıcılıqdır.

Digər tərəfdən

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2 + 1 = 3.$$

Yəni, $\{a_n\}$ ardıcılığı monoton artan olmaqla yuxarıdan 3-lə məhduddur. §2, teorem 4. Fəsil II-dən aydındır ki, belə ardıcılığın sonlu limiti vardır və bu limit 3-dən kiçikdir. Bu limiti e ilə işarə etsək, onda $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (3) yazıla bilər.

Burada $e=2,718281\dots$, $e \in \mathbb{R}$ -dir. e əsasına görə loqarifminə natural loqarifm deyilir və « $\ln$ » ilə işarə olunur. N ədədinin loqarifmi $\ln N$ kimi yazılır. (3) limitinə bəzən 2-ci görkəmli limit də deyilir.

Мисал. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = e \cdot 1 = e.$

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}}$ limitini hesablayın.

Həlli. Bəzi limitlərin hesablanması zamanı

$$1+3+\dots+(2n-1)=n^2$$

$$2+4+\dots+2n=n^2+n \text{ düsturlarından istifadə etmək əlverişlidir.}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2+3-4+5-6+\dots-2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3+5+\dots+(2n-1))-(2+4+6+\dots+2n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-(n^2+n)}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{n}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} = -\frac{2}{1+2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x)-\operatorname{tg}(a-x)}$ limitini hesablayın

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{2x}{2} \cdot \cos \frac{2a}{2}}{\frac{\sin 2x}{\cos(a+x) \cdot \cos(a-x)}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos a \cdot \cos(a+x) \cdot \cos(a-x)}{\sin 2x} = \\
\text{Həlli.} \quad &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos a \cdot \cos(a+x) \cdot \cos(a-x)}{2 \sin x \cdot \cos x} = \\
&= \cos a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) \cdot \cos(a-x)}{\cos x} = \cos a \cdot \cos a \cdot \cos a = \cos^3 a
\end{aligned}$$

5) Funksiyanın kəsilməzliyi. Parçada kəsilməz funksiyaların xassələri.

1. Funksiyanın kəsilməzliyi Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin müəyyən ətrafında (o cümlədən a nöqtəsində) təyin olunmuşdur.

Tərif. Əgər

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda $f(x)$ funksiyasına $x = a$ nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir.

(1) bərabərliyi ödənilmədikdə, deyirlər ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsilir və a nöqtəsi funksiyanın kəsilmə nöqtəsidir. (1) bərabərliyini

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim_{x \rightarrow a} x)$$

kimi də yazmaq olar.

Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası $x = a$ nöqtəsində təyin olunmuşdur. Əgər $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ olarsa, onda $y = f(x)$ funksiyası $x = a$ nöqtəsində sağdan kəsilməyən, $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ olarsa, onda $y = f(x)$ funksiyasına $x = a$ nöqtəsində soldan kəsilməyən funksiya adlanır. Əgər $y = f(x)$ funksiyası $\forall x \in [a, b]$ nöqtəsində kəsilməyəndirsə, onda $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməyən funksiya adlanır.

Əgər $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ sol və $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ sağ limitləri varsa, bunlar biri-birinə bərabər deyildirsə, yəni

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \quad (2)$$

olarsa, onda a kəsilmə nöqtəsi birinci növ kəsilmə nöqtəsi adlanır. Əgər $x = a$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının sağtərəfli və ya soltərəfli limitlərindən heç olmazsa biri və yaxud bunların hər ikisi yoxdursa və ya sonsuzluğa bərabərdirsə, onda $x = a$ nöqtəsi ikinci növ kəsilmə nöqtəsi adlanır. Əgər $x = a$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının sağtərəfli və ya soltərəfli limitləri varsa, bu limitlər bir-birinə bərabərdirsə, bu limitlər $f(a)$ -ya bərabər deyildirsə, yəni $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a)$ -dirsə, onda $x = a$ nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının «aradan qaldırıla bilən» kəsilmə nöqtəsi adlanır. Bu halda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ olur.

Sonlu parçada kəsilməyən funksiyaların xassələri

Sonlu $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası haqqında aşağıdakı teoremləri isbatsız olaraq qeyd edək:

Teorem1 (Veyerstrassın 1-ci teoremi).

Sonlu $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçada məhduddur.

Teorem 2 (Veyerstrassın 2-ci teoremi).

$[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçanın heç olmasa bir α nöqtəsində özünün dəqiq aşağı sərhəddini ($f(\alpha) = \inf_{x \in [a, b]} f(x) = m_0$) və heç olmasa bir β nöqtəsində özünün dəqiq yuxarı sərhəddini ($f(\beta) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) = M_0$) alır.

Teorem 3. $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər olarsa, məsələn, $f(a) = A < 0$, $f(b) = B > 0$ olarsa, onda a və b nöqtələri arasında yerləşən ən azı bir $x = c$ nöqtəsi vardır ki, bu nöqtədə $f(c) = 0$ olur.

6) Funksiyanın törəməsi və diferensialı

Funksiyanın törəməsi

Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $]a, b[$ intervalında təyin olunmuş və x bu intervalın qeyd olunmuş nöqtəsidir ($x \in]a, b[$). Onda $\Delta x \neq 0$ artımını elə seçək ki, $(x + \Delta x) \in]a, b[$ olsun. Bu halda $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ -ə $y = f(x)$ funksiyasının artımı demişdik.

Əgər $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ sonlu limiti varsa, bu limitə $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində törəməsi deyilir və y' , $y'(x)$, $f'(x)$, y'_x və ya $\frac{df(x)}{dx}$ kimi işarə olunur.

Tərifə əsasən, yaza bilərik:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Verilmiş x nöqtəsində törəməsi olan funksiya həmin nöqtədə diferensiallanan funksiya deyildir.

Əgər $\forall x \in]a, b[$ nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi varsa, onda $y = f(x)$ funksiyası $]a, b[$ intervalında diferensiallanan funksiya adlanır.

Əgər $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuşsa, onda parçanın a və b uclarında $y = f(x)$ funksiyasının uyğun olaraq sol və sağ törəmələrindən danışmaq lazımdır.

Əgər $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ limiti varsa və sonludursa, buna $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində sol törəməsi deyilir və $f'_-(x)$ işarə olunur.

Tərifə əsasən $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_-(x)$ yaza bilərik.

Əgər $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ limiti varsa və sonludursa, buna $y = f(x)$ funksiyanın x

nöqtəsində sağ törəməsi deyilir və $f'_+(x)$ işarə olunur.

Tərifə əsasən $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'_+(x)$ yazı bilərik.

Əgər x nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyanın sonlu sol və sağ törəmələri varsa və $f'_-(x) = f'_+(x)$ -dirsə, onda $y = f(x)$ funksiyanın x nöqtəsində törəməsi vardır. Yəni x nöqtəsində törəməsi olan $f(x)$ funksiyası üçün $f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x)$ olur.

Ola bilər ki, funksiyanın verilmiş nöqtədə sonlu sol və sağ törəmələri olsun, lakin həmin nöqtədə törəməsi olmasın.

Məsələn, $f(x) = |x|$ funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində sonlu sol törəməsi:

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 - \text{ə} \quad \text{və} \quad x = 0 \quad \text{nöqtəsində sonlu}$$

sağ törəməsi:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 - \text{ə} \quad \text{bərabərdir. Yəni} \quad f'_-(x) \neq f'_+(x)$$

olur və $f(x) = |x|$ funksiyanın $x = 0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur. Deməli, $f(x) = |x|$ funksiyası $\forall x \in]-\infty, +\infty[$ nöqtəsində kəsilməyəndir və $x = 0$ nöqtəsində törəməsi yoxdur.

Teorem. Əgər $y = f(x)$ funksiyanın x nöqtəsində törəməsi varsa (yəni diferensiallandırsa), onda $f(x)$ funksiyası x nöqtəsində kəsilməyəndir.

Sabitin, sabitlə funksiya hasilinin, cəmin, hasilin və kəsrin törəmələri

Teorem 1. Sabitin törəməsi sıfıra bərabərdir, yəni $c' = 0$ (c sabit ədəddir).

Teorem 2. Əgər $u(x)$ funksiyası x nöqtəsində diferensiallandırsa, onda $c \cdot u(x)$ funksiya da x nöqtəsində diferensiallandı və $[cu(x)]' = c \cdot u'(x)$ olur.

Teorem 3. Əgər $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları x nöqtəsində diferensiallandırsa, onda $u(x) \pm v(x)$ funksiyası da x nöqtəsində diferensiallandı və $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$ olur.

Teorem 4. Əgər $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları x nöqtəsində diferensiallandırsa, onda $u(x) \cdot v(x)$ funksiyası da x nöqtəsində diferensiallandı və

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

olur.

Teorem 5. Əgər $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları x nöqtəsində diferensiallandırsa, onda $v(x) \neq 0$ olduqda $\frac{u(x)}{v(x)}$ funksiyası da x nöqtəsində diferensiallandı və

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

olur.

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x$ limitini hesablayın.

Həlli. Kəsrin sürətini məxrəcinə bölməklə onun tam hissəsini ayıraq.

$$\left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = \left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} \right)^{\frac{x(6x - 4)}{x^2 - 2x + 7}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{6x^2 - 4x}{x^2 - 2x + 7}} \right)^{\frac{6 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} \right)^{\frac{6 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}}$$

Aydındır ki, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} = e$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = 6$ olduğundan

alırıq ki, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = e^6$ olar.

8) $y = \sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1}$ funksiyanın törəməsini tapın.

Həlli. $\ln \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = (\ln \sqrt{1 + x^2} - 1 - (\ln \sqrt{1 + x^2} + 1))$

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1} \right)' = \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \left[\ln(\sqrt{1+x^2}-1) - (\ln \sqrt{1+x^2} + 1) \right] \right)' = \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{(\sqrt{1+x^2}-1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{(\sqrt{1+x^2}+1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}+1)} \right) = \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x(\sqrt{1+x^2}+1) - x(\sqrt{1+x^2}-1)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)} \right) = \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x(\sqrt{1+x^2}+1 - \sqrt{1+x^2}+1)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2-1)} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} = \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}\sqrt{x^2+1}}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}
\end{aligned}$$

9. Roll teoremini yazın və yoxlayın ki, $f(x) = \ln \sin x$ funksiyasına $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$

parçasında Roll teoremini tətbiq etmək olarmı?

Teorem.

1. Roll teoremini yazın və yoxlayın ki, $f(x) = \ln \sin x$ funksiyasına $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right]$

parçasında Roll teoremini tətbiq etmək olarmı?

Teorem. (Roll teoremi) $[a; b]$ parçasında kəsilməyən, (a, b) intervalında diferensiasillanan və həmin parçanın üç nöqtələrində bərabər $f(a) = f(b)$ qiymətləri alan $y = f(x)$ funksiyası üçün (a, b) intervalında yerləşən heç olmasa elə bir c nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $f'(x)$ törəməsi sıfıra bərabərdir, yəni $f'(c) = 0$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = \ln \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f'(x) = (\ln \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctgx} = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \quad x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

intervalında sonlu törəmə var. Deməli, Roll teoremini tətbiq etmək olar.

10. Laqranj teoremi yazın və yoxlayın ki, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiyasına $[1;4]$ parçasında Lagranj teoremini tətbiq etmək olarmı?

Laqranj teoremi: $[a;b]$ parçasında kəsilməyən, $(a;b)$ intervalında diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyası üçün həmin intervalda yerləşən elə $x = c$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ olur.

Bu düstura **Laqranj düsturu** deyilir. Bu düstura bəzən **sonlu artımlar düsturu** da deyilir.

Lagranj düsturu

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$f(4) - f(1) = f'(c) \cdot (4 - 1)$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = 3f'(c)$$

$$3f'(c) = 1 \quad f'(c) = \frac{1}{3} \quad f'(c) = (\sqrt{x})' \Big|_{x=c} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=c} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \quad 2\sqrt{c} = 3; \quad 4c = 9$$

$$c = \frac{9}{4} = 2,25 \in [1;4]$$

Deməli, $c = 2,25$

11. $[0;2]$ parçasında $f(x)=2x^3+5x+1$ və $g(x)=x^2+4$ funksiyaları üçün Koşi teoreminin doğruluğunu yoxlayın. Əgər ödəyərsə c aralıq qiymətini tapın.

Həlli: Koşi teoremi aşağıdakı kimidir.

Teorem: Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a;b]$ parçasında kəsilməyən, (a,b) intervalında diferensiallanan və bu intervalda $g'(x) \neq 0$ şərtini ödəyən funksiyalardırsa onda (a,b) intervalında yerləşən bir elə c nöqtəsi vardır ki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Düsturu doğrudur.

$f(x)=2x^3+5x+1$ və $g(x)=x^2+4$ funksiyaları $[0;2]$ parçasında Koşi teoremini şərtlərini ödəyir.

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 + 1 = 27, \quad f(0) = 1$$

$$g(2) = 2^2 + 4 = 8, \quad g(0) = 4$$

Olduğundan

$$\frac{f(2) - f(0)}{g(2) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \frac{27-1}{8-4} = \frac{6c^2+5}{2c}; \quad \frac{6c^2+5}{2c} = \frac{13}{2}$$

Burada $6c^2 - 13c + 5 = 0$ buradan isə

$$c_1 = \frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{5}{3} \text{ olur.}$$

12. Qeyri müəyyənliklərin açılışı, Lopital teoremi .

Aşağıdakı kimi qeyri-müəyyənliklər vardır:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0 \text{ və } \infty^0.$$

Əvvəlcə « $\frac{0}{0}$ şəklində olan qeyri-müəyyənliklərin açılışının» hesablama qaydasını verək.

1) Tutaq ki, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$ olduqda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ limitini tapmaq lazımdır. Bu halda

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ limitinə kəsrin limiti haqqında teoremi bilavasitə tətbiq etmək olmaz. Belə limitlərin

hesablanmasına adətən, « $\frac{0}{0}$ şəklində olan qeyri-müəyyənliklərin açılışı» deyilir. Qeyri-

müəyyənlikləri açmaq üçün limitlər nəzəriyyəsiindən bir sıra sadə üsullar məlum olmasına baxmayaraq, diferensial hesabını tətbiq edərək qeyri-müəyyənlikləri açmaq üçün ümumi metod almaq olar. Bu metodu Lopital verdiyindən ona qeyri-müəyyənliklərin açılışı üçün Lopital qaydası da deyilir.

Teorem (Lopital qaydası). Tutaq ki, $f(x)$ və $\phi(x)$ funksiyaları $x = a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsi müstəsna olmaqla) təyin olunmuş, diferensiallanan, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = 0$ və həmin

ətrafda $\phi'(x) \neq 0$ şərtini ödəyən funksiyalardır. Onda $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ limiti varsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ limiti də

vardır və $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ olur.

Tutaq ki, $f(x)$ və $\phi(x)$ funksiyaları Koşi teoreminin şərtlərini $[a, b]$ parçasında ödəyir və $x = a$ nöqtəsində sıfıra çevirirlər, yəni $f(a) = \phi(a) = 0$.

Onda $[a, x]$ parçasında Koşi düsturunu yazsaq

$$\frac{f(x) - f(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = \frac{f'(c)}{\phi'(c)}, \quad (c \in]a, x[). \quad (1)$$

$$1)\text{-dən } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{\phi(x) - \phi(a)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\phi'(c)}.$$

$$\text{Buradan } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} \text{ olur.}$$

Əgər $f(x)$ və $\phi(x)$ funksiyalarının $x = a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında n tərtibli törəmələri varsa və

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$\phi'(a) = \phi''(a) = \dots = \phi^{(n-1)}(a) = 0$$

olarsa, $f^{(n)}(x)$, $\phi^{(n)}(x)$ törəmələri üçün teoremin şərtləri ödənərsə, Lopital qaydasını n dəfə ardıcıl tətbiq etməklə

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\phi''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{\phi^{(n-1)}(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)}$ bərabərliyini almaq olar. (Burada $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)}$ limitinin sonlu olduğu fərz olunur)

Qeyd edək ki, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ limitinin olmasından $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)}$ limitinin olması alınmır.

2) $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində olan qeyri-müəyyənliklərin açılışını verək.

Teorem (Lopital qaydası). Əgər $f(x)$ və $\phi(x)$ funksiyaları $x = a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında (a nöqtəsi müstəsna olmaqla) təyin olunmuşsa, diferensiasılanmışsa və $\phi'(x) \neq 0$ (a nöqtəsinin həmin ətrafında) şərti ödənirsə və $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} = A \quad (2)$$

limiti varsa, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ limiti də vardır və $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} = A$ olur.

Teorem isbatsız qəbul olunur.

Əgər $f(x)$ və $\phi(x)$ funksiyalarının $x = a$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında n tərtibli törəmələri varsa,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\phi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{\phi''(x)} = \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x)}{\phi^{(n-1)}(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ -dursa və $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)} = A$ limiti sonludursa, onda

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)}$ sonlu limiti vardır və $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\phi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n)}(x)}{\phi^{(n)}(x)} = A$ olur.

Misal. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 1}{e^x} = \frac{n!}{\infty} = 0$. Deməli $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ olur.

3) $\frac{0}{0}$ şəklində qeyri-müəyyənlik əvvəlcə $\frac{0}{0}$ və ya $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliklərə gətirilir və Lopital qaydası ilə hesablanır. Tutaq ki, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$. Onda

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \phi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)\phi(x)}{\left(\frac{1}{\phi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)^{-1}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ şəklində qeyri-müəyyənliklərin açılışı alınır}\right).$$

4) $0 \cdot \infty$ şəklində qeyri-müəyyənlik $\frac{0}{0}$ və ya $\frac{\infty}{\infty}$ şəklində qeyri-müəyyənliklərə gətirilir və Lopital qaydası ilə hesablanır. Yəni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \phi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\phi(x)}} ; \left(\frac{0}{0}\right)$$

və yaxud

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot \phi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\phi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

şəklində alınır.

5) $1^\infty, \infty^0, 0^0$ şəklində qeyri-müəyyənliklər əvvəlcə $0 \cdot \infty$ şəklində gətirilir. Bunun üçün $[f(x)]^{\phi(x)} = e^{\phi(x) \ln f(x)}$ ($f(x) > 0$) eyniliyindən istifadə olunur və buradan

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\phi(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \ln f(x)} \text{ alırıq.}$$

Deməli, $1^\infty, \infty^0, 0^0$ şəklində olan qeyri-müəyyənliklər əsasən $\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) \cdot \ln f(x)]$ -in hesablanmasına gətirilir.

13. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}$ limitini hesablayın.

Həlli: Verilmiş ifadə $0 \cdot \infty$ şəklində qeyrimüəyyənlikdir. Bu ifadəni $\frac{0}{0}$ -kimi qeyri müəyyənlik şəklinə gətirək, $(1-x) \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} = \frac{(1-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}$

Bundan sonra Lopital qaydasını tətbiq edək

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} : \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-1)'}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

14. Funksiyanın ekstemumu. Ekstemumun varlığı üçün zəruri şərtlər

Fərz edək ki, $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında təyin olunmuşdur və $x_0 \in]a; b[$ -dir.

Əgər $x = x_0$ nöqtəsinin hər hansı $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ ($\delta > 0$) ətrafında yerləşən bütün x nöqtələrində

$$f(x) \leq f(x_0), (f(x) \geq f(x_0)) \quad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində lokal maksimumu (minimumu) var. $f(x_0)$ ədədinə funksiyanın lokal maksimum (minimum) qiyməti deyilir. Funksiyanın lokal maksimumuna və lokal minimumuna birlikdə funksiyanın lokal ekstemumu deyilir.

Teorem (Lokal ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt). Əgər diferensiallana bilən $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində lokal ekstemumu varsa, onda onun törəməsi həmin nöqtədə sıfır bərabərdir, yəni $f'(x_0) = 0$.

Müəyyən olmaq üçün $x = x_0$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum qiymət aldığını fərz edək. Onda ixtiyarı kiçik Δx artımı üçün

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

Buradan isə $\Delta x > 0$ olduqda $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$ alırıq.

$\Delta x < 0$ olduqda $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$ alırıq. Bu bəbərsizliklərdə $\Delta x \rightarrow 0$ şərtində limitə keçsək alırıq:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0, \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0, \quad (3)$$

(2) və (3) bəbərsizlikləri birlikdə yalnız $f'(x_0) = 0$ olduqda doğrudur.

Verilmiş funksiyanın böhran nöqtəsində lokal ekstremumun qiymətinin olduğunu yoxlamaq üçün kafi şərtlər verək

I-kafi şərt: $y = f(x)$ funksiyası $x = x_0$ böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməyən və həmin ətrafda (x_0 - nöqtəsi müstəsna ola da bilər) diferensiallandırsa, onda:

1. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ olduqda $f'(x) > 0$ və $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) < 0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var;

2. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ olduqda $f'(x) < 0$ və $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) > 0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal minimumu var;

3. Əgər $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ və $x > x_0$ olduqda işarəsini dəyişmirsə, onda x_0 nöqtəsində funksiyanın lokal ekstremumu yoxdur.

II Kafi şərt: Əgər x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyanın x_0 nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi varsa və $f'(x_0) = 0$ və $f''(x_0) \neq 0$ -dirsə, onda:

1. $f''(x_0) < 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu vardır;

2. $f''(x_0) > 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumu vardır.

III Kafi şərt. Əgər $y = f(x)$ funksiyanın x_0 böhran nöqtəsində n -ci tərtibə qədər kəsilməyən və

$$f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad (5) \quad \text{şərtlərini ödəyən}$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

törəmələri varsa, onda:

1. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0) < 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu var;

2. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0) > 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumu var;

3. n tək ədəd olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal ekstremumu yoxdur.

15. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$ funksiyanın lokal ekstremumlarını tapın.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4[(x^3 - x^2) - (5x^2 - 5x) + (6x - 6)] = 4[x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)] = 4[(x-1)(x^2 - 5x + 6)] = 4[(x-1)(x-2)(x-3)] = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$$

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$ olur və buradan $f''(1) = 12 - 48 + 44 = 8 > 0$ olduğundan $f(x)$ funksiyanı $x = 1$ nöqtəsində lokal minimum qiymət alır: $f_{\min}(1) = 1 - 8 \cdot 1 + 22 \cdot 1 - 24 + 12 = 3$.

$f''(2) = 12 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 44 = -4 < 0$ olduğundan $f(x)$ funksiyanı $x = 2$ nöqtəsində lokal maksimum qiymət alır: $f_{\max}(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 44 \cdot 2 - 24 = 4$.

$f''(3) = 12 \cdot 9 - 48 \cdot 3 + 44 = 8 > 0$ olduğundan $f(x)$ funksiyanı $x = 3$ nöqtəsində lokal minimum qiymət alır: $f_{\min}(3) = 3$.

16. Qabarıq və çökük ayrılır. Əyrinin əyilmə nöqtəsi

Müstəvi üzərində $y = f(x)$ funksiyasının əyrisini götürək və $f(x)$ funksiyasının diferensiasillənən olduğunu fərz edək. Onda əyrinin $]a; b[$ intervalına uyğun bütün nöqtələri, bu nöqtələrdəki əyriyə çəkilmiş istənilən toxunandan aşağıda (yuxarıda) yerləşirsə, onda $]a; b[$ intervalında əyri qabarıq (çökük) adlanır.

Teorem. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyasının $]a; b[$ intervalında sıfırdan fərqli iki tərtib törəməsi vardır ($f''(x) \neq 0$). Onda:

- 1) $f''(x) < 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $]a; b[$ intervalında qabarıqdır;
- 2) $f''(x) > 0$ olduqda $f(x)$ funksiyası $]a; b[$ intervalında çökükdür.

Əyrinin əyilmə nöqtəsi

Kəsilməyən əyrinin qabarıq hissəsini çökük hissəsindən ayıran nöqtəyə əyrinin əyilmə nöqtəsi deyilir.

Əyilmə nöqtəsinin tərifindən aydındır ki, bu nöqtədə toxunan əyrini kəsir, çünki bu nöqtədən bir tərəfdə əyri toxunandan yuxarıda, digər tərəfdə əyri toxunandan aşağıda yerləşir.

Əyilmə nöqtəsinin varlığı üçün zəruri və kafi şərtləri qeyd edək.

Zəruri şərt. $y = f(x)$ funksiyasının $x = x_0$ nöqtəsində ikitərtibli kəsilməz törəməsi varsa və $M(x_0, f(x_0))$ nöqtəsi onun qrafikinə əyilmə nöqtəsidirsə, onda $f''(x_0) = 0$ olur.

17. Əyrinin asimptotları . $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$ funksiyasının maili asimptotunu tapın.

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ və $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$ şərtlərindən heç olmasa biri ödənilsə $x = x_0$ şaquli asimptotdur. $y = kx + b$ maili asimptotdur.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 1} \text{ funksiyasının maili asimptotunu tapın.}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + x}{2(2x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{4x - 2} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

18. $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ funksiyasını $[0;1]$ parçasında ən böyük və ən kiçik qiymətini tapın.

$$f'(x) = \left(\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \right)' = \frac{(2x-1)(1+x-x^2) - (1-2x)(1-x+x^2)}{(1+x-x^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x-1)[1+x-x^2+1-x+x^2]}{(1+x-x^2)^2} = \frac{(2x-1)2}{(1+x-x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) < 0 \quad f'(x) > 0 \quad x = \frac{1}{2} \text{ minimum nöqtəsidir.}$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$f(0) = \left(\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

$$f(1) = \left(\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \right) \Big|_{x=1} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1-x+x^2}{1+x-x^2} \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 \frac{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{5-2}{4}}{\frac{6-1}{4}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Max } f(x)=1 \quad \text{min } f(x) = \frac{3}{5} \text{ funksiyanın araşdırılması.}$$

19. Qeyri müəyyən integralda integrallama üsulları (dəyişəni əvəzetmə üsulu)

Qeyri-müəyyən integralların hesablanmasında dəyişəni əvəzetmə üsulu əsas üsullardan biridir. Integrallamada mahirlik çox zaman dəyişəni elə əlverişli əvəz etməkdən ibarət olur ki, bunun nəticəsində verilmiş integral olduqca sadələşir və asanlıqla tapılır.

Tutaq ki,

$$\int f(x) dx \quad (1)$$

integralını tapmaq lazımdır və $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiyanın varlığını bilirik, lakin onu birbaşa tapmağı bacarmırıq. Bu halda

$$x = \varphi(t) \quad (2)$$

götürməklə dəyişəni əvəz edirik. Burada $\varphi(t)$ funksiyası kəsilməz törəməsi və tərs funksiyası olan funksiyadır.

(2)-dən

$$dx = \varphi'(t) dt \quad (3)$$

alırıq. (2) və (3)-ü (1)-də nəzərə alsaq

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \quad (4)$$

alırıq. (4) bərabərliyinin doğruluğunu göstərmək üçün (4)-ün sol və sağ tərəflərinin diferensiallarının biri-birinə bərabər olduğunu göstərmək kifayətdir.

$$(4)\text{-dən } d \int f(x) dx = f(x) dx = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \quad (5)$$

$$(5)\text{-dən } d \left(\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \right) = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot dt \quad (6)$$

(5) və (6)-dan (4)-ün doğruluğu alınır. Qeyd edək ki, (4) düsturuna qeyri-müəyyən integralda dəyişəni əvəzetmə düsturu deyilir. (4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki integralı hesablandıqdan sonra yenidən x dəyişəninə qayıtmaq üçün $x = \varphi(t)$ əvəzləməsindən t dəyişəni yerinə onun x -lə tapılmış ifadəsini yazmaq lazımdır.

$x = \varphi(t)$ funksiyasını seçmək üçün ümumi üsul yoxdur, bunu elə seçmək lazımdır ki, (4)-ün sağ tərəfi ümumiyyətlə sol tərəfindən sadə olsun.

$$20) \int \frac{(\arctg x)^{100}}{1+x^2} dx \text{ tapmalı}$$

$$\text{Həlli. } t = \arctg x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\text{Onda } \int \frac{(\arctg x)^{100}}{1+x^2} dx = \int t^{100} dx = \frac{t^{101}}{101} + c = \frac{(\arctg x)^{101}}{101}$$

$$21) \int \frac{x^4 dx}{1+x^2} \quad \text{İntegralını hesablayın}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^4-1)+1}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int (x^2-1) dx + \arctg x + C = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C$$

$$22) \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx \quad \text{İntegralını hesablayın}$$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= -ctgx - tgx + c$$

23) $\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx$ **İnteqralını hesablayın**

$$\cos x = t$$

$$- \sin x dx = dt$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x \cdot \cos^6 x dx =$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^3 \cdot \cos^6 x dx = - \int (1 - t^2)^3 \cdot t^6 dt =$$

$$= - \int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) \cdot t^6 dt = - \int (t^6 - 3t^8 + 3t^{10} - t^{12}) dt =$$

$$= - \frac{t^7}{7} + \frac{3t^9}{9} - 3 \frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C = - \frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{1}{3} \cos^9 x - \frac{3}{11} \cos^{11} x - \frac{\cos^{13} x}{13} + C \dots$$

24). $f(x) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ **verilir . F(x) -i tapmal .**

$$\text{Həlli. } F'(x) = f(x) \Rightarrow F'(x) = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C$$

25) Qeyri müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama üsulu

Qeyri-müəyyən inteqralı tapmaq üçün əsas üsullardan biri də qeyri-müəyyən inteqralın hissə-hissə inteqrallanması üsuludur.

Tutaq ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $]a; b[$ intervalında inteqrallananıdır və bu intervalda $v(x) \cdot u'(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyası vardır. Onda $]a; b[$ intervalında $u(x) \cdot v'(x)$ funksiyanın da ibtidai funksiyası vardır və

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int v(x) \cdot u'(x) \cdot dx \quad (7)$$

düsturu doğrudur.

(7) düsturuna qeyri-müəyyən intervalda hissə-hissə inteqrallama düsturu deyilir.

$v'(x) \cdot dx = dv$, $u'(x) \cdot dx = du$ olduğundan (7)-ni aşağıdakı şəkildə yazma bilərik:

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du . \quad (8)$$

(8)-in sağ tərəfindəki $\int v \cdot du$ integralı, ümumiyyətlə, (8)-in sol tərəfindəki $\int u \cdot dv$ - integralından sadə olduqda hissə-hissə integrallama əlverişlidir.

(7) düsturunun doğruluğunu göstərək:

$$[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \quad (9)$$

olduğunu bilirik. (9)-un hər tərəfini dx -ə vuraraq, integrallamaqla

$$\int [u(x) \cdot v(x)]' dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx \text{ və yaxud}$$

$$u(x) \cdot v(x) = \int v(x) du(x) + \int u(x) \cdot dv(x) \text{ alırıq.}$$

Buradan isə $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ olur. Yəni (7) düsturu doğrudur.

Qeyd edək ki, $\int p(x) \cdot f(x) dx$ integralında $p(x)$ çoxhədli, xüsusi halda $p(x) = x^n$ olduqda və $f(x)$ funksiyası isə e^{ax} , $\sin ax$, $\cos ax$, $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$ şəklində olduqda (7) düsturundan istifadə olunur, yəni hissə-hissə integrallama aparılır.

Burada 1) $\int p(x) e^{ax} dx$, $\int p(x) \sin ax dx$, $\int p(x) \cos ax dx$ integralını hissə-hissə integrallayarkən $u = p(x)$ və $e^{ax} dx$, $\sin ax \cdot dx$, $\cos ax \cdot dx$ ifadələrini dv ilə işarə etmək lazımdır.

2) $\int p(x) \ln x \cdot dx$, $\int p(x) \arcsin x dx$, $\int p(x) \arccos x dx$, $\int p(x) \arctg x dx$, $\int p(x) \operatorname{arccotg} x dx$ integrallarını hissə-hissə integrallamaq üçün $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\operatorname{arccotg} x$ vuruqlarını $u(x)$ -lə və $p(x) \cdot dx = dv$ ilə işarə etmək lazımdır.

3) $J_1 = \int e^{ax} \cos \beta x \cdot dx$, $J_2 = \int e^{ax} \cdot \sin \beta x \cdot dx$ integrallarını hissə-hissə integrallamaq qaydasını verək. Məsələn, $J_1 = \int e^{ax} \cdot \cos \beta x dx$ integralını tapaq.

$$u = e^{ax} \text{ olduqda } du = ae^{ax} \cdot dx \text{ alırıq.}$$

$$dv = \cos \beta x dx \text{ olduqda } v = \int \cos \beta x dx = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \text{ olur.}$$

Onda bunlara əsasən J_1 -dən alırıq:

$$J_1 = \frac{1}{\beta} e^{ax} \cdot \sin \beta x - \frac{a}{\beta} \int e^{ax} \cdot \sin \beta x dx . \quad (10)$$

(10)-nün sağ tərəfindəki integralı yenə də hissə-hissə integrallayaq:

$$u = e^{ax} \text{-dən } du = ae^{ax} \cdot dx \text{ alırıq.}$$

$$dv = \sin \beta x dx \text{-dən } v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \text{ alırıq.}$$

Bunlara əsasən (10)-dan alırıq:

$$J_1 = \frac{1}{\beta} e^{ax} \cdot \sin \beta x - \frac{a}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{ax} \cdot \cos \beta x \right) - \frac{a^2}{\beta^2} \underbrace{\int e^{ax} \cdot \cos \beta x \cdot dx}_{J_1} \text{ və yaxud}$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{\beta^2} \right) J_1 = e^{ax} \cdot \frac{a \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\beta^2} \text{ olur. Buradan isə}$$

$$\frac{a^2 + \beta^2}{\beta^2} J_1 = e^{ax} \cdot \frac{a \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{\beta^2} \text{ olur. Buradan da}$$

$$J_1 = \int e^{ax} \cos \beta x dx = e^{ax} \cdot \frac{a \cos \beta x + \beta \sin \beta x}{a^2 + \beta^2} + c \quad (11)$$

Eyni qayda ilə

$$J_2 = \int e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x dx = e^{\alpha x} \cdot \frac{\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x}{\alpha^2 + \beta^2} + c \quad (12)$$

alırıq.

26) $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$ İnteqralını hesablayın

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad dt = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin t = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - 4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 - 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + c = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + c \end{aligned}$$

27. $\int x e^x dx$ inteqralını tapın.

Həlli. $u = x \Rightarrow du = dx$

$$e^x dx = dv \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

Onda $\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$

28) . $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$ Hissə-hissə inteqrallama

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \int dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - x + c$$

$$\ln \sin x = u \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int dv$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} dx = du \quad ; \quad \operatorname{tg} x = v$$

29). Müəyyən inteqralın xassələrini yazın.

$$1. \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0;$$

$$2. \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = - \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx;$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$4. \int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^c f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

$$5. \int_a^b cf(x)dx = c \int_a^c f(x)dx$$

$$6. a \leq x \leq b \text{ parçasında } f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$7. a \leq x \leq b \text{ parçasında } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

8. $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməyəndirsə, bu parçasında ən kiçik qiyməti -

m və ən böyük qiyməti $-M$ alır və $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, $a < b$ olur. Buna

müəyyən inteqralın qiymətləndirilməsi deyilir.

9. $f(x)$ funksiyası $[a;b]$ parçasında kəsilməyəndirsə, onda elə $c \in (a;b)$, $(a) < c < b$

nöqtəsi vardır ki $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ olur. $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ ədədi $f(x)$ funksiyasının $[a;b]$ parçasında orta qiyməti adlanır.

10. $f(x)$ tək funksiya olduqda $\int_a^b f(x)dx = 0$ və cüt funksiya olduqda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx \text{ olur.}$$

$$30) \int_a^b (2x+3)dx = 5 \quad a+b=4 \text{ olduğunu bilərək}$$

$$b-a=?$$

$$\int_a^b (2x+3)dx = 5$$

$$\left(\frac{2x^2}{2} + 3x\right)\Big|_a^b = 5$$

$$(x^2 + 3x)\Big|_a^b = 5$$

$$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 5$$

$$b^2 + 3b - a^2 - 3a = 5$$

$$b^2 - a^2 + 3(b - a) = 5$$

$$(b - a)(b + a) + 3(b - a) = 5$$

$$(b - a)(b + a + 3) = 5$$

$$7(b - a) = 5$$

$$b - a = \frac{5}{7}$$

31). Müəyyən integralın təqribi hesablanması, düz bucaqlılar düsturu

Qeyd edək ki, kəsilməyən $f(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyası məlum olduqda

$\int_a^b f(x) dx$ integralını Nyuton-Leybnisin

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (1)$$

düsturu ilə hesablamaq olur. Lakin, kəsilməyən funksiyanın ibtidai funksiyası həmişə elementar funksiylarla ifadə olunmur.

Belə hallarda (1) düsturundan istifadə olunmur və ona görə müəyyən integralı təqribi hesablamaq lazım gəlir. Məsələn, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, e^{x^2} , $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$ və s. kimi funksiyanın integralı

(1) düsturu vasitəsi ilə hesablanmır.

$\int_a^b f(x) dx$ integralını təqribi hesablamaq üçün:

1) düzbucaqlılar düsturu,

2) trapeslər düsturu,

3) parabolalar düsturundan (Simpson düsturu) istifadə olunur. Bunları ayrı-ayrılıqda öyrənək.

Düzbucaqlılar düsturu.

Tutaq ki, $[a, b]$ parçasında kəsilməyən $y = f(x)$ funksiyası verilmişdir və $\int_a^b f(x) dx$

integralını təqribi hesablamaq lazımdır. $[a, b]$ parçasını $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ nöqtələri ilə n

bərabər hissəyə bölək. Hər bir hissənin uzunluğu $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ olar.

$f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ işarə edək və $\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot \Delta x, \sum_{k=1}^n y_k \cdot \Delta x$ cəmlərini düzəldək. Bu

cəmlərdən hər biri $f(x)$ funksiyası üçün $[a, b]$ parçasında inteqral cəmdir, yəni $\int_a^b f(x) dx$ inteqralının təqribi qiymətidir. Başqa sözlə

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k, \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y_k \quad (3)$$

olur. (2) və (3) düsturuna düzbucaqlılar düsturu deyilir. Düzbucaqlılar düsturu ilə $\int_a^b f(x) dx$ inteqralını hesabladığımızda $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ kiçik olduqda xəta kiçik olur.

32). $y = \ln \sin x$ əyrisinin $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ parçasında uzunluğunu tapın.

Həlli. $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ əyri qövsün uzunluğunun hesablanması düsturu

$$y = \ln \sin x \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \sec x = \frac{1}{\sin x}. \text{ Onda}$$

$$l = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|_{\pi/3}^{\pi/2} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$$

33). $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli. $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$ olar və

$$x = 1 \Rightarrow 1 = t^2 \Rightarrow t = 1, x = 4 \Rightarrow 4 = t^2 \Rightarrow t = 2 \text{ Onda}$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{t \cdot 2t dt}{1 + t} = 2 \int_1^2 \frac{t^2 dt}{1 + t} =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{(t^2 - 1) + 1}{1 + t} dt = 2 \int_1^2 (t - 1) dt + 2 \int_1^2 \frac{dt}{1 + t} = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_1^2 + 2 \ln |1 + t| \Big|_1^2 =$$

$$= 2(2-2) - 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 2\ln 3 - 2\ln 2 = 1 + \ln \frac{9}{4} \text{ olar.}$$

34) $f(x, y, z) = \frac{x + y + z}{x^2 + y^2 + z^2}$ verilir. $f\left(x; \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right)$ -ni tap.

$$\text{Həlli. } f\left(x; \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{x^3 + x + 1}{x^6 + x^2 + 1} \cdot x^2$$

35). I –ci növ qeyri-məxsusi integralların xassələri

I növ qeyri-məxsusi integralların aşağıdakı xassələrini qeyd edək. Bu xassələri $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ qeyri-məxsusi integralı üçün qeyd edək.

Xassə 1. $[a, +\infty[$ intervalında kəsilməyən $f(x)$ funksiyaının ibtidai funksiyaası $F(x)$ olarsa və $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$ sonlu limiti varsa, onda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ifadəsini

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) \text{ düsturudur.}$$

Bu düstur I növ qeyri-məxsusi integral üçün Nyuton- Leybnis düsturudur.

Xassə 2. $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ və $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ integralları yığılındırsa, onda istənilən α və β ədədləri üçün

$$\int_a^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta \varphi(x)] dx \text{ integralı da yığılındır.}$$

Xassə 3. $u = u(x)$ və $v = v(x)$ funksiyaalarının $[a, +\infty[$ intervalında kəsilməz törəmələri varsa,

$\int_a^{+\infty} v \cdot du$ qeyri-məxsusi integralı yığılındırsa, $\lim_{b \rightarrow +\infty} u(b)v(b)$ limiti vardırsa və sonludursa, onda

$\int_a^{+\infty} u \cdot dv$ qeyri-məxsusi integralı yığılındır və

$$\int_a^{+\infty} u \cdot dv = \lim_{b \rightarrow +\infty} u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^{+\infty} v du \quad (4)$$

düsturu doğrudur.

Xəssə 4. $f(x)$ funksiyası $[a, +\infty[$ intervalında kəsilməyəndirsə, $x = \varphi(t)$ funksiyasının $[\alpha, \beta]$, $(\alpha < \beta < +\infty)$ yarım intervalında kəsilməz törəməsi varsa və $a = \varphi(\alpha) \leq \varphi(t) < \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = +\infty$

münasibəti doğrudursa, onda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ inteqralı yığılandır və

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt \quad (5)$$

düsturu doğrudur.

36). II növ qeyri-məxsusi inteqrallar

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a, b[$ intervalında təyin olunub və kəsilməzdir. Lakin $x = b$ nöqtəsində kəsiləndir. Onda $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ limiti varsa və sonludursa, bu limitə II növ qeyri-məxsusi inteqral deyilir və

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (1)$$

şəklində yazılır. Bu halda inteqral vardır və ya yığılandır deyirlər.

Əgər $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ limiti yoxdursa və yaxud sonsuzluqdursa, onda $\int_a^b f(x) dx$ yoxdur və ya dağılındır deyirlər.

Əgər $y = f(x)$ funksiyası $]a, b]$ intervalında təyin olunmuş və kəsilməyəndirsə, $x = a$ nöqtəsində kəsiləndirsə, onda $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ limiti varsa və sonludursa bu limitə $]a, b]$ intervalında II növ qeyri-məxsusi inteqral deyilir və

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (2)$$

kimi yazılır. Bu halda da $\int_a^b f(x) dx$ yığılan adlanır.

Əgər $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$ limiti yoxdursa, yaxud sonsuzluqdursa, onda $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı dağılan adlanır.

Əgər $[a, b]$ parçasının bir $x = c$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyası kəsiləndirsə və $[a, c[$, $]c, b]$ intervalllarında təyin olunmuş və kəsilməyəndirsə, onda

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx. \quad (3)$$

(3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limitlərin hər biri varsa və sonludursa, $\int_a^b f(x) dx$ inteqralı yığılan adlanır.

(3) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limitlərin heç olmazsa biri yoxdursa yaxud sonsuzluqdursa onda (3)-ün sol tərəfindəki $\int_a^b f(x)dx$ inteqralı dağılan adlanır. II növ qeyri-məxsusi inteqralların bəzi xassələrini qeyd edək.

Xassə 1. $[a, b[$ intervalında kəsilməyən $f(x)$ funksiyanın ibtidai funksiyası $F(x)$ -dirsə, onda

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b - \varepsilon) - F(a) \quad (4)$$

Nyuton-Leybnis düsturu doğrudur.

Xassə 2. $u = u(x)$ və $v = v(x)$ funksiyalarının $[a, b[$ yarımintervallarında kəsilməz törəmələri varsa və $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon)$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} v du - \int_a^{b-\varepsilon} u \cdot dv$ limitləri vardırsa və sonludursa, onda $\int_a^b u dv$ II növ qeyri-məxsusi inteqralı vardır və

$$\int_a^b u dv = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(b - \varepsilon) \cdot v(b - \varepsilon) - u(a)v(a) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} v du \quad (5)$$

düsturu doğrudur.

37). Çoxdəyişənli funksiya və onun limiti. Təkrar və ikiqat limitlər.

Tutaq ki, G çoxluğu xy müstəvisinin nöqtələr çoxluğu və həqiqi z ədədlərin F çoxluğu verilmişdir.

Tərif1. G çoxluğunun hər bir $M(x, y)$ nöqtəsinə F çoxluğundan müəyyən $z = f(x, y)$ ədədini qarşı qoyan f uyğunluğuna G çoxluğunda təyin olunmuş və qiymətləri F çoxluğuna daxil olan funksiya deyilir

Tərif Tutaq ki, sonlu A ədədi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə

$$\delta \text{ ədədi var ki, } G \text{ çoxluğunun } 0 < \rho(M, M_0) < \delta \text{ nöqtələri } M = (x, y) \in G \text{ } \quad (1)$$

Bərabərsizliyini ödəyən bütün $M = (x, y) \in G$ nöqtələrində

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad (4)$$

Münasibəti ödənilir. Onda A ədədinə $M \rightarrow M_0$ şərtində G çoxluğu üzrə f

funksiyanın limiti deyilir. A ədədinin G çoxluğu üzrə $M \rightarrow M_0$ şərtində f funksiyanın limiti olmasını

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad (2) \text{ kimi yazılır.}$$

Tərifdəki $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ əvəzinə $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ və yaxud $|x - x_0| < \delta \quad |y - y_0| < \delta$ bərabərsizliklərinin yazmaq olar.

İkidəyişənli funksiyaların x və y argumentləri növbə ilə x_0, y_0 ədədlərinə $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ yaxınlaşdıqda da limitindən danışmaq olar. limitinə funksiyanın təkrar limiti deyilir. Sonuncu ifadədə limitlərin yerini dəyişməklə müxtəlif təkrar

limitlər almaq olar. $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$

Teorem 1 $C = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ İkiqat limiti varsa, y -in qeyd olunmuş qiymətində x

dəyişəninə nəzərən $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ limiti varsa, onda $A = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ təkrarlanan limitdə var və ikiqat C limitinə bərabərdir.

Ümumiyyətlə G oblastında təyin olunmuş $f(x, y)$ funksiyanının $M_0(x_0, y_0)$

limit nöqtəsində $C = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ ikiqat limiti varsa x və y –in qeyd olunmuş

qiymətlərində, uyğun olaraq $\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ və $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ limitləri varsa, onda

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ bərabərliyi doğrudur.

38). $f(x, y) = \frac{x - 2y}{x + 3y}$ funksiyanının $(0,0)$ nöqtəsində, təkrar və ikiqat limitini tapın.

Əvvəlcə $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - 2y}{x + 3y}$ ikiqat limitini tapaq:

Fərz edək ki, $M(x, y)$ nöqtəsi $O(0;0)$ nöqtəsinə yaxınlaşır. Onda x və y –in $y=kx$ düz xətti üzrə dəyişməsinə baxaq ($k \neq 0$)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x - 2y}{x + 3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 2kx}{x + 3kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - 2k)}{x(1 + 3k)} = \frac{1 - 2k}{1 + 3k}$$

Göründüyü kimi, nəticə k -nın seçilməsindən asılı olaraq, dəyişir (yəni limit yeganə deyildir). Deməli, $M(x, y) \rightarrow O(0;0)$ -da baxılan limit yoxdur.

Təkrar limitləri tapmaq.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-2y}{x+2y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2 \cdot 0}{x+3 \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{y=0} \frac{0-2y}{0+3y} = -\frac{2}{3}$$

39). $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$ limitini, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$ və $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$ təkrar

limitlərini tapın.

$$\begin{aligned} \text{Həlli: } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{(3 + \sqrt{xy+9})}{9 - (xy+9)} = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{xy(3 + \sqrt{xy+9})}{-xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \frac{3+3}{-1} = -6 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+3}{-1} = -6$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3+3}{-1} = -6$$

40 . $u = \ln(x^2 - y^2)$ funksiyasının $M_0(2; -1)$ nöqtəsində xüsusi törəmələrini tapmalı .

$$\text{Həlli : } u'_x = \frac{(x^2 - y^2)'_x}{(x^2 - y^2)} = \frac{2x}{(x^2 - y^2)} \quad u'_x(2; -1) = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$$

$$u'_y = \frac{(x^2 - y^2)'_y}{(x^2 - y^2)} = \frac{-2y}{(x^2 - y^2)} \quad u'_y(2; -1) = \frac{-2(-1)}{4-1} = \frac{2}{3}$$

41 : $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ verilir. $z''_{xy} = z''_{yx}$ olduğunu göstərin.

Həlli :

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2 + 1)'_x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \rightarrow z''_{xy} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$z'_y = \frac{(x^2 + y^2 + 1)'_y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \rightarrow z''_{xy} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_x = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

Deməli, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$ alırıq.

42 $z = x^2y^2$ verilir. d^2z -i tapmalı.

Həlli: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2xy^2)'_y = 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 2y^2 dx^2 + 8xy dx dy + 2x^2 dy^2$$

43. Dəlambert əlamətinə görə sıranın yığılan olmasını araşdırın. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)}$

Həlli: $U_n = \frac{n!}{3^n(n+1)}, U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!3^n(n+1)}{3^{n+1} \cdot (n+2) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+1)}{3(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n + 6} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{6}{n}} = \infty$$

C: $l = \infty$ olduğu üçün verilmiş sıra dağılındır. .

44 Koşinin integral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını

araşdırın: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln|x| - \ln|x+1|) \Big|_1^b =$$

Həlli:

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \frac{b}{b+1} \right| - \ln \frac{1}{2} \right) =$$

$$= -\ln \frac{1}{2} = \ln 2 < \infty$$

Deməli verilmiş sıra yığılandır.

45 Koşinin integral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını

araşdırın: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$

Həlli:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{3x-2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{3x-2}} d(3x-2) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt{3x-2} \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{3} (\sqrt{3b-2} - 1) = \infty$$

Cavab : Verilimi sıra dağılıdır.

46 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli:

$$a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 3$$

Cavab : R=3

47 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli:

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1$$

Cavab :R=1

48. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^4}}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli:

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n} \cdot 3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Cavab. $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$

49. $xy' - y - 1 = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

$$x \frac{dy}{dx} = y + 1 \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y+1| = \ln|x| + c_1 \Rightarrow$$

Həll

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c| \Rightarrow \ln|y+1| = \ln|cx|$$

$$y+1=cx$$

$$y=cx-1$$

Cavab : $y=cx-1$.

50. $(x^2 + 1)y' - xy = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$$(x^2 + 1)y' - xy = 0$$

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c_1$$

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2 + 1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|c \sqrt{x^2 + 1}|$$

$$y = c \sqrt{x^2 + 1}$$

Cavab : $y = c\sqrt{x^2 + 1}$