

1) Предел функции. Правый и левый пределы.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором бесконечном множестве $X = \{X\}$, и пусть a - точка бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$, быть может и не принадлежащая множеству $\{X\}$, но обладающая тем свойством, что в $\forall$ -ой b -окрестности этой точки имеются точки множества $\{X\}$, отличные от a . То есть точка a является предельной точкой множества $\{X\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. (предел функции по Гейне).

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если для $\forall$ -ой последовательности значений аргумента $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, сходящейся к a и состоящей из чисел X_n , отличных от a , соответствующая последовательность значений функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ сходится к числу b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1* (предел функции по Коши).

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$), если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0$ такой, что $\forall x : 0 < |x - a| < b$

Справедливо неравенство:

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозначается:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. (по Гейне). Число b называется правым пределом (левым пределом) функции $y = f(x)$ в точке a , если для $\forall$ -ой последовательности $\{X_n\}$ значений аргумента, сходящейся к a и состоящей из чисел, больших a (меньших a), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу b .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2* (по Коши). Число b называется правым пределом (левым пределом) функции $y = f(x)$ в точке a , если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0$ такой, что $\forall x$ удовлетворяет условию $a < x < a + b$ ($a - b < x < a$), справедливо неравенство.

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

Обозначаются:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b \quad (\text{правый предел})$$

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b \quad (\text{левый предел})$$

2) Число e

Рассмотрим последовательность :

$$\{X_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}.$$

Если мы докажем, что эта последовательность возрастающая и ограничена сверху, мы тем самым докажем, что эта последовательности сходится.

Применим формулу бинома Ньютона :

$$X_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$\dots + \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-(n-1))}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$X_n = 2 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \quad (1)$$

$$X_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) \quad (2)$$

Непосредственным сравнением (1) и (2) убеждаемся (ибо $\left(1 - \frac{k}{n} \right) < \left(1 - \frac{k}{n+1} \right)$

для $\forall \quad 0 < k < n$ и, кроме того X_{n+1} содержит по сравнению с X_n лишний положительный член), что

$$X_n < X_{n+1}, \quad \text{то есть } \{X_n\} - \text{возрастающая}$$

Теперь докажем, что эта последовательность ограничена сверху.

Заметим, что если каждую круглую скобку в правой части (1) заменить единицей, то указанная правая часть возрастает. Поэтому

$$X_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (3)$$

Учитывая, что $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$ при $k > 2$, получим:

$$X_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^n} < 3 \quad (4)$$

Неравенство (4) доказывает ограниченность последовательности $\{X_n\}$.

Итак, мы доказали, что $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ возрастает и ограничена сверху $\Rightarrow$ имеет предел и этот предел называется числом e .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

3) **Вычислить предел** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 - 1}}$.

Решение. Во время вычисления некоторых пределов

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$2 + 4 + \dots + 2n = n^2 + n \quad \text{полезно воспользоваться формулами.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)) - (2 + 4 + 6 + \dots + 2n)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - (n^2 + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{4n^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{n}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{4 - \frac{1}{n^2}}} = -\frac{2}{1 + 2} = -\frac{1}{3}$$

4) **Вычислить предел** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{\operatorname{tg}(a + x) - \operatorname{tg}(a - x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{2x}{2} \cdot \cos \frac{2a}{2}}{\frac{\sin 2x}{\cos(a + x) \cdot \cos(a - x)}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos a \cdot \cos(a + x) \cdot \cos(a - x)}{\sin 2x} =$$

Решение:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos a \cdot \cos(a + x) \cdot \cos(a - x)}{2 \sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \cos a \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a + x) \cdot \cos(a - x)}{\cos x} = \cos a \cdot \cos a \cdot \cos a = \cos^3 a$$

5) Непрерывность функции. Свойства функции, непрерывной на отрезке.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если функция $f(x)$ имеет в точке a предел и он равен значению функции $f(x)$ в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (по Гейне).

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если для $\forall$ сходящейся к a последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, значений аргумента соответствующая последовательность $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, значений функции, сходится к $f(a)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1* (по Коши).

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такой, что $\forall x$ удовлетворяет условие $|x - a| < \delta$ выполняется:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ФОРМАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ a СПРАВА (СЛЕВА).

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a справа (слева), если правый (левый) предел этой функции в точке a существует и равен частному значению функции $f(x)$ в точке a , то есть:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a) \right)$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a справа (слева), если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такой, что $\forall x : a < x < a + \delta$ ($a - \delta < x < a$) справедливо неравенство:

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Функция, непрерывная в каждой точке интервала (a, b) называется непрерывной в этом интервале.

ТЕОРЕМА. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a . Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)} (g(a) \neq 0)$ также будут непрерывны в точке $x = a$.

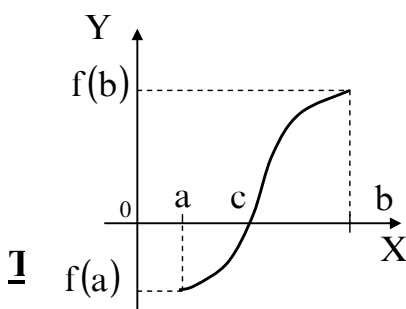
ТЕОРЕМА. Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывна в точке a , а функция $y = f(x)$ непрерывна в точке $b = \varphi(a)$. Тогда сложная функция $y = f[\varphi(t)] = F(t)$ непрерывна в точке a .

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0$ такой, что $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

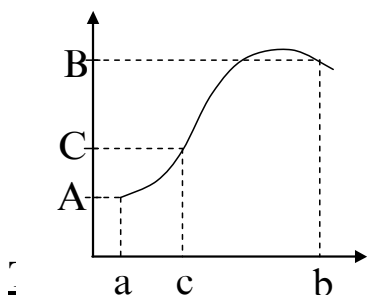
ТЕОРЕМА 2. (первая теорема Больцано-Коши).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.



Эта теорема имеет простой геометрический смысл. Если выполняются условия теоремы, то график функции пересекает ось OX , по крайней мере, в одной точке.

ТЕОРЕМА 3. (третья теорема Больцано-Коши). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$. Пусть далее $C - \forall$ -ое число, заключенное между A и B . Тогда на отрезке $[a, b]$ $\exists c$ такой, что $f(c) = C$.



Теорема 2 является частным случаем теоремы 3, так как если A и B имеют разные знаки, то в качестве C можно взять $C = 0$ будет заключено между A и B .

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то она принимает все значения между $f(a)$ и $f(b)$.

ТЕОРЕМА 5. Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения.

6) Производная и дифференциал функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, заданную на интервале (a, b) . Пусть $x - \forall$ фиксированная точка интервала (a, b) , а Δx - произвольное число, настолько

малое, что значение $(x + \Delta x)$ находится на (a, b) . Это число Δx называется приращением аргумента.

Приращением функции $y = f(x)$ в точке x , отвечающим приращению аргумента Δx будем называть число

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Дадим ещё одно определение непрерывности функции в точке.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x , если приращение Δy этой функции в точке x , отвечающее приращению аргумента Δx является бесконечно малым при $\Delta x \rightarrow 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = 0$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это отношение показывает среднюю скорость изменения функции $y = f(x)$ относительно аргумента x на $[x; x + \Delta x]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения её приращения Δy к соответствующему приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \rightarrow 0$, если этот предел существует

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Если $\exists$ конечный предел (1) в точке x , то функция называется дифференцируемой в этой точке.

Функция, имеющая производную в каждой точке множества X , называется дифференцируемой на этом множестве.

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.левой производной функции $y = f(x)$ в точке x предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ если этот предел существует и он конечен.}$$

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.правой производной функции $y = f(x)$ в точке x называется предел.

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ если этот предел существует и он конечен.}$$

$$f'_+(x) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Если в точке X существуют равные друг другу конечные левая и правая производные, то в этой точке существует производная функции.

Если в некоторой точке X существуют не равные друг другу односторонние производные, т.е. $f'_+(x) \neq f'_-(x)$, то точку X называют угловой точкой графика функции.

$y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в точке x , то произведение производной $f'(x)$ на приращение аргумента Δx называется *дифференциалом*:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (2)$$

В частности, если $y = x$, получим:

$$\begin{aligned} dx &= x' \cdot \Delta x = \Delta x & \text{Тогда:} \\ dy &= f'(x) \cdot dx & (3) \end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \text{ т.е.}$$

Производную можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке X , т.е.

$$du = u'(x)dx, \quad dv = v'(x)dx$$

Тогда функции $[u(x) \pm v(x)]$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ также

дифференцируемы и

$$d[u(x) \pm v(x)] = du(x) \pm dv(x)$$

$$d[u(x) \cdot v(x)] = du(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot dv(x)$$

$$d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x) \cdot du(x) - u(x) \cdot dv(x)}{v^2}$$

7) Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x$

Решение: Делением числителя на знаменатель выделим целую часть.

$$\left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = \left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} \right)^{\frac{x(6x - 4)}{x^2 - 2x + 7}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} \right)^{\frac{6x - 4}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} \right)^{\frac{6 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}}}$$

Понятно, что $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6x - 4}{x^2 - 2x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 2x + 7}{6x - 4}} = e;$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{7}{x^2}} = 6 \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 2x + 7} \right)^x = e^6$$

так как то получим , что

8) Найдите производную функцию $y = \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1}$.

$$\ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = (\ln \sqrt{1+x^2} - 1 - (\ln \sqrt{1+x^2} + 1))$$

Решение:

$$y' = \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \right)' = \left(\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \left[\ln(\sqrt{1+x^2} - 1) - (\ln \sqrt{1+x^2} + 1) \right] \right)' =$$

$$= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{(\sqrt{1+x^2} - 1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} - \frac{2x}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - 1)} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} + 1)} \right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x(\sqrt{1+x^2} + 1) - x(\sqrt{1+x^2} - 1)}{\sqrt{1+x^2}(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)} \right) =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x(\sqrt{1+x^2} + 1 - \sqrt{1+x^2} + 1)}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2 - 1)} \right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}\sqrt{x^2 + 1}}{x\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

9). Написать теорему Ролля. Проверить, применима ли эта теорема к

функции $f(x) = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$

ТЕОРЕМА: Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и $f(a) = f(b)$, то существует по крайней мере одна точка c на интервале $(a; b)$ в которой $f'(c) = 0$.

$$f'(c) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{5\pi}{6} = \ln \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f'(x) = (\ln \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

10). Написать теорему Лагранжа. Проверить, применима ли эта теорема к

функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[1; 4]$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется, по крайней мере одна точка $x = c$, ($a < c < b$) в которой выполняется

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$f(4) - f(1) = f'(c) \cdot (4 - 1)$$

$$\sqrt{4} - \sqrt{1} = 3f'(c)$$

$$3f'(c) = 1 \quad f'(c) = \frac{1}{3} \quad f'(c) = (\sqrt{x})' \Big|_{x=c} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=c} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \quad 2\sqrt{c} = 3; \quad 4c = 9$$

$$c = \frac{9}{4} = 2,25 \in [1; 4]$$

Ответ: $c = 2,25$

11) Написать теорему Коши. Проверить справедливость этой теоремы для функций $f(x) = 2x^3 + 5x + 1$, $g(x) = x^2 + 4$ на отрезке $[0; 2]$.

Если теорема Коши справедлива для данных функций, найти число C .

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - две функции, непрерывные на отрезке $[a; b]$ и

дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[a; b]$ найдется точка $x=c$, $a < c < b$

в которой выполняется $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Эта формула называется формулой Коши

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 + 1 = 27, \quad f(0) = 1$$

$$g(2) = 2^2 + 4 = 8, \quad g(0) = 4$$

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \frac{27-1}{8-4} = \frac{6c^2+5}{2c}; \quad \frac{6c^2+5}{2c} = \frac{13}{2}$$

$$6c^2 - 13c + 5 = 0$$

$$c_1 = \frac{1}{2}; \quad c_2 = \frac{5}{3}$$

12) Раскрытие неопределенности. Теорема Лопиталья.

Раскрытие неопределенностей вида:

$$\infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad \infty^0, \quad 0^0$$

1) Неопределенность вида $\infty - \infty$ приводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$

или $\frac{\infty}{\infty}$, а потом применяется правило Лопиталья.

Допустим: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) : \frac{1}{f(x) \cdot \varphi(x)} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot \varphi(x)}}$$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$.

С другой стороны,
$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) \cdot \varphi(x)}{\left(\frac{1}{\varphi(x)} - \frac{1}{f(x)}\right)^{-1}}.$$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

2) Неопределенность вида $0 \cdot \infty$ приводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или

$\frac{\infty}{\infty}$, затем применяется правило Лопиталья.

Например, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}} \text{ - неопределенность вида } \frac{0}{0}$$

Или

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]\varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ - неопределенность вида } \frac{\infty}{\infty}$$

3. Неопределенности вида 1^∞ , ∞^0 , 0^0 приводятся в виду $0 \cdot \infty$. Для этого пользуются равенством:

$$[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) \ln f(x)} \quad (f(x) > 0).$$

13) Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение: Заданное выражение имеет неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Приведем эту неопределенность к виду $\frac{0}{0}$ для этого сделаем преобразование вида

$$(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \frac{(1-x)}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}}, \text{ а затем применим правило Лопиталья, то есть}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Тогда:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x-1)'}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} \right)'}, = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

14) Экстремум функции. Необходимые условия для существования экстремума.

Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $x_0 \in]a, b[$.

Если для всех точек окрестности $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ ($\delta > 0$) точки $x = x_0$ выполняется неравенство $\varphi(x) \leq \varphi(x_0)$, ($\varphi(x) \geq \varphi(x_0)$) (1), тогда функция $y = \varphi(x)$ в точке x_0 имеет локальный максимум (минимум), а $\varphi(x_0)$ является максимумом (минимумом). Локальный максимум и минимум вместе называется локальным экстремумом.

Теорема (необходимое условие существования локального экстремума). Если дифференцируемая функция в точке $x = x_0$ имеет локальный экстремум, тогда в этой точке ее производная первого порядка равна нулю, то есть $\frac{df}{dx}(x_0) = 0$.

Предположим, что функция $y = \varphi(x)$ в точке $x = x_0$ имеет локальный экстремум, тогда для произвольного приращения Δx имеем:

$$\varphi(x_0 + \Delta x) \leq \varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0) \leq 0.$$

$$\text{Если } \Delta x > 0 \text{ получим } \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

$$\text{Если } \Delta x < 0 \text{ получим } \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

В этих неравенствах перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и получим

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \leq 0, \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \varphi'(x_0) \geq 0, \quad (3)$$

Неравенства (2) и (3) совместны только тогда $\varphi'(x_0) = 0$

Для проверки того, что заданная функция в критической точке имеет локальный экстремум, дадим достаточное условие:

Достаточное условие: Функция $y = \varphi(x)$ в точке $x = x_0$ непрерывна и в ее определенной окрестности дифференцируема, тогда:

1. Если производная функции $y = \varphi(x)$ при $x < x_0$ положительна, то есть $\varphi'(x) > 0$ и при $x > x_0$ отрицательна $\varphi'(x) < 0$, тогда в этой точке функция имеет локальный максимум.

2. Если производная функции $y = \varphi(x)$ при $x < x_0$ отрицательна, то есть $\varphi'(x) < 0$ и при $x > x_0$ положительна $\varphi'(x) > 0$, тогда в этой точке функция имеет локальный минимум.
3. Если при $x < x_0$ и $x > x_0$ производная не меняет знак то в этой точке нет локального экстремума.

II достаточное условие. Если в определенной окрестности точки x_0 функция $y = \varphi(x)$ определена и имеет производную второго порядка $\varphi''(x_0) \neq 0$, тогда:

1. Если $\varphi''(x_0) < 0$ тогда в точке x_0 функция имеет максимум;
2. Если $\varphi''(x_0) > 0$ тогда в точке x_0 функция имеет минимум;

III достаточное условие. Пусть в критической точке x_0 функция $y = \varphi(x)$ существует непрерывные производные до n -ого порядка включительно, причем $\varphi'(x_0) = \varphi''(x_0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(x_0) = 0$; $\varphi^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Тогда:

- 1) Если n -четное и $\varphi^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 существует локальный максимум.
- 2) Если n -четное и $\varphi^{(n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 существует локальный минимум.
- 3) Если n -нечетное, то в точке x_0 не существует экстремума.

15) Найти локальные экстремумы функции $f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24 = 4(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 4[(x^3 - x^2) - (5x^2 - 5x) + (6x - 6)] = 4[x^2(x-1) - 5x(x-1) + 6(x-1)] = 4[(x-1)(x^2 - 5x + 6)] = 4[(x-1)(x-2)(x-3)] = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$$

Тогда $f''(x) = 12x^2 - 48x + 44$ и из этого $f''(1) = 12 - 48 + 44 = 8 > 0$. Из этого следует, что в точке $x = 1$ существует локальный минимум.

$$f_{\min}(1) = 1 - 8 \cdot 1 + 22 \cdot 1 - 24 + 12 = 3.$$

$$f''(2) = 12 \cdot 4 - 48 \cdot 2 + 44 = -4 < 0$$

Из этого следует, что в точке $x = 2$ существует локальный максимум.

$$f_{\max}(2) = 4 \cdot 2^3 - 24 \cdot 2^2 + 44 \cdot 2 - 24 = 4.$$

$$f''(3) = 12 \cdot 9 - 48 \cdot 3 + 44 = 8 > 0$$

Из этого следует, что в точке $x = 3$ существует локальный минимум.

$$f_{\min}(3) = 3.$$

16) Выпуклые и вогнутые кривые. Точка перегиба кривой.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале (a, b) , если все точки кривой лежат, ниже любой её касательной на этом интервале.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вниз на (b, c) , если все точки кривой лежат выше любой её касательной на этом интервале

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, называют выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз – вогнутой.

Теорема.

а) если во всех точках интервала (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпуклая);

б) если во всех точках интервала (b, c) вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнутая).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над ней.

Теорема. (условие существования точки перегиба)

Если в точке $X = X_0$ существует вторая производная функции $y = f(x)$ и точка $M(X_0; f(X_0))$ кривой $y = f(x)$ является точкой перегиба, то в точке $X = X_0$ вторая производная обращается в нуль, т.е.

$$f''(x_0) = 0$$

Теорема. (достаточное условие существования точки перегиба)

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $X = X_0$ и $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, а при переходе через точку $X = X_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M(X_0; f(X_0))$ кривой $y = f(x)$ является точкой перегиба.

17) Асимптоты кривой. Найти наклонную асимптоту кривой $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 1}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \infty$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \infty$ является вертикальной асимптотой.

$y = kx + b$ является наклонной асимптотой, если .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 - x} = \frac{1}{2}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2 - 2x^2 + x}{2(2x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2}{4x - 2} = \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

18) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2}$ **на интервале** $[0; 1]$.

$$f'(x) = \left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \right)' = \frac{(2x - 1)(1 + x - x^2) - (1 - 2x)(1 - x + x^2)}{(1 + x - x^2)^2} =$$

$$= \frac{(2x - 1)[1 + x - x^2 + 1 - x + x^2]}{(1 + x - x^2)^2} = \frac{(2x - 1)2}{(1 + x - x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$f'(x) < 0$ $f'(x) > 0$ точка $x = \frac{1}{2}$ является точкой минимума.

$$0 < x < \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2} \leq x < 1$$

$$f(0) = \left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \right) \Big|_{x=0} = 1$$

$$f(1) = \left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \right) \Big|_{x=1} = 1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2} \right) \Big|_{x=\frac{1}{2}} = 1 \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5-1}{4}}{\frac{6-1}{4}} = \frac{4}{5}$$

$$f_{\min}(x) = 1 \quad ; \quad f_{\max}(x) = \frac{3}{5} \quad .$$

20) Найти $\int \frac{(\arctg x)^{100}}{1+x^2} dx$

Решение $t = \arctg x \Rightarrow dt = \frac{dx}{1+x^2}$

Тогда получим $\int \frac{(\arctg x)^{100}}{1+x^2} dx = \int t^{100} dt = \frac{t^{101}}{101} + c = \frac{(\arctg x)^{101}}{101}$

21) Вычислите интеграл $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}$

$$\int \frac{x^4 dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^4 - 1) + 1}{1+x^2} dx = \int \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 1)}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int (x^2 - 1) dx + \arctg x + C = \frac{x^3}{3} - x + \arctg x + C$$

22) Вычислите интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$= -ctgx - tgx + c$$

23) Вычислите интеграл $\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx$

$$\cos x = t$$

$$- \sin x dx = dt$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\int \sin^7 x \cdot \cos^6 x dx = \int \sin x \cdot \sin^6 x \cdot \cos^6 x dx =$$

$$= \int \sin x (1 - \cos^2 x)^3 \cdot \cos^6 x dx = - \int (1 - t^2)^3 \cdot t^6 dt =$$

$$= - \int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) \cdot t^6 dt = - \int (t^6 - 3t^8 + 3t^{10} - t^{12}) dt =$$

$$= -\frac{t^7}{7} + \frac{3t^9}{9} - 3\frac{t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C = -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{1}{3}\cos^9 x - \frac{3}{11}\cos^{11} x + \frac{\cos^{13} x}{13} + C \dots$$

24). Дано $f(x) = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$. Найти $F(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } F'(x) = f(x) &\Rightarrow F'(x) = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2} \\ &= \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x + C \end{aligned}$$

25) II МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ.

По формуле дифференциала произведения

$$d(uv) = u dv + v du$$

Интегрированием обеих частей этого равенства, получается формула интегрирования по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int v du$ существует, то интеграл $\int u dv$ также существует и

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (*)$$

Это – формула интегрирования по частям.

Эта формула используется в тех, случаях, когда подинтегральное выражение $f(x)dx$ можно представить в виде $u dv$. За dv выбирают такое выражение, содержащее dx , из которого посредством интегрирования можно найти V , а за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании.

Если подинтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на целую рациональную, то за u принимают логарифмическую, среднюю или **

функцию, а все остальные за dv . Если же подинтегральное выражение есть произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то за u принимают многочлен, а оставшееся выражение за dv . При этом формула (*) принимается неоднократно.

26) Найти интеграл $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \quad dt = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin t = \frac{2t}{1+t^2} \quad \cos t = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - 4 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2 \int \frac{dt}{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{2t^2 - 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = -\frac{1}{t-2} + c = -\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} + c \end{aligned}$$

27). Найти интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. $u = x \Rightarrow du = dx$

$$e^x dx = dv \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\text{Тогда } \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$$

28) . Найти интеграл интегрированием по частям $\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \int dx = \ln \sin x \cdot \operatorname{tg} x - x + c$$

$$\ln \sin x = u \quad ; \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int dv$$

$$\frac{\cos x}{\sin x} dx = du \quad ; \quad \operatorname{tg} x = v$$

29). ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Свойство 1 Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и k - постоянная, тогда функция $kf(x)$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$$

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то их сумма также интегрируема на $[a, b]$ и

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

То есть, интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интеграла от слагаемых.

Свойство 3. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Следствие 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Следствие 2.

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$

То

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Свойство 5. (теорема о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдется такая точка c , что справедливо следующее равенство

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

Замечание. Число $f(c) = \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx$ средним значением функции $f(x)$, непрерывной на $[a, b]$.

Свойство 6. Пусть $a < c < b$, Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Следствие. Если c лежит вне промежутка (a, b) (например $a < b < c$) и в этом случае верно равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

30) Если $\int_a^b (2x + 3) dx = 5$ и $a + b = 4$ известно. Тогда $b - a = ?$

$$\int_a^b (2x + 3) dx = 5$$

$$\left(\frac{2x^2}{2} + 3x \right) \Big|_a^b = 5$$

$$(x^2 + 3x) \Big|_a^b = 5$$

$$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 5$$

$$b^2 + 3b - a^2 - 3a = 5$$

$$b^2 - a^2 + 3(b - a) = 5$$

$$(b - a)(b + a) + 3(b - a) = 5$$

$$(b - a)(b + a + 3) = 5$$

$$7(b - a) = 5$$

$$b - a = \frac{5}{7}$$

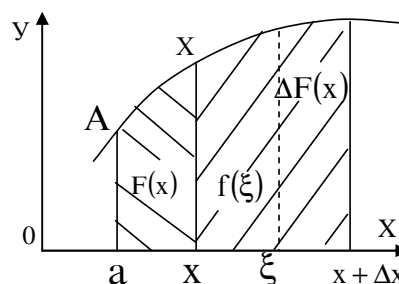
31). ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ. ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ (ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА)

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$. Тогда она интегрируема и в промежутке $[a, x]$, где $a \leq x \leq b$, т.е. для любого $x \in [a, b]$ имеет смысл интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (3)$$

При постоянном a этот интеграл будет представлять собой функцию верхнего предела x .

Если $f(t)$ - неотрицательная функция, то $F(x)$ - численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$.



Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от изменения x . Найдем производной от $F(x)$ по x .

Теорема 1. Если $f(t)$ - непрерывная функция в точке $t = x$, то в этой точке имеет место равенство $F'(x) = f(x)$.

Иными словами производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подинтегральной функции, в которую вместо

переменной интегрирования подставлена значение верхнего предела (при условии, что подинтегральная функция непрерывна).

Замечание. Из этой теоремы следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную. Примером является определенный интеграл (3) с переменным верхним пределом, так как $F'(x) = f(x)$.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (4)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

32). Найти длину дуги $y = \ln \sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение . $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$ $y = \ln \sin x \Rightarrow y' = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}. \quad \text{Тогда}$$

$$l = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \ln 1 - \ln \frac{1}{\sqrt{3}} = \ln \sqrt{3} = \frac{1}{2} \ln 3$$

33). Вычислите интеграл $\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение . $t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$x = 1 \Rightarrow 1 = t^2 \Rightarrow t = 1, \quad x = 4 \Rightarrow 4 = t^2 \Rightarrow t = 2 \quad \text{Тогда}$$

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{t \cdot 2t dt}{1 + t} = 2 \int_1^2 \frac{t^2 dt}{1 + t} =$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{(t^2 - 1) + 1}{1 + t} dt = 2 \int_1^2 (t - 1) dt + 2 \int_1^2 \frac{dt}{1 + t} = 2 \left(\frac{t^2}{2} - t \right) \Big|_1^2 + 2 \ln |1 + t| \Big|_1^2 =$$

$$= 2(2-2) - 2\left(\frac{1}{2} - 1\right) + 2\ln 3 - 2\ln 2 = 1 + \ln \frac{9}{4} \text{ olar.}$$

34) Дано $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$. Найти $f\left(x; \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right)$.

$$\text{Решение. } f\left(x; \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} = \frac{x^3 + x + 1}{x^6 + x^2 + 1} \cdot x^2$$

35). Свойства несобственного интеграла I рода .

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Мы до сих пор рассматривали интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ -неправ. – на $[a, b]$, а $[a, b]$ - конечен. Такой определенный интеграл называется «собственным». Если же нарушается хотя бы одно из этих условий, то определенный интеграл называется несобственным интегралом.

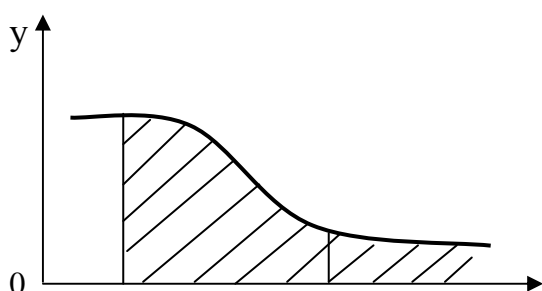
Несобственные интегралы бывают I и II рода: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от разрывных функций.

1) интегралы с бесконечными пределами.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \leq x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл: $I(b) = \int_a^b f(x)dx$

При изменении b , этот интеграл является функцией b . Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \rightarrow +\infty$



Определение: Если существует конечный предел то этот предел называют несобственным интегралом от функции $f(x)$

X на интервале $[a, +\infty]$ и обозначают

так $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, и так по определению имеем $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$.

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ существует или

сходится. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ при $b \rightarrow +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят,

что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ не существует или расходится.

Если $f(x) \geq 0$, то несобственные I –го рода имеет следующий геометрический

смысл: если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой

$y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$, то собственно считать, что

несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь неограниченной между

линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интегралов:

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_{\alpha}^a f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \int_{\varphi}^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx$$

36. Свойства несобственного интеграла II рода .

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.

Мы до сих пор рассматривали интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ -неправ. –

на $[a, b]$, а $[a, b]$ - конечен. Такой определенный интеграл называется

«собственным». Если же нарушается хотя бы одно из этих условий, то определенный интеграл называется несобственным интегралом.

Несобственные интегралы бывают I и II рода: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от разрывных функций.

2) ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ.

Определение. Если функция $f(x)$ либо не определена, либо терпит беспрерывный разрыв в точке $x = c$, принадлежащий отрезку $[a; b]$ и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c+\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ изменяются независимо друг от друга, если в правой части этого равенства существуют конечные пределы, то несобственный интеграл II рода сходится, в противном случае – расходится.

При $c = a$ или $c = b$ имеем

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

Если функция $f(x)$, определенная на $[a; b]$, имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, \dots, a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на $[a; b]$ определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx$$

Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, то и $\int_a^b f(x) dx$ называется расходящимся.

37). Функция многих переменных и его предел. Повторные и двойные пределы.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области G плоскости **ОХУ** и пусть точка M_0 - предельная точка области G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \exists r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $MM_0 < r$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(x, y) = A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет предел число A при стремлении переменных x, y соответственно к x_0, y_0 , если для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такой, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

лишь только выполнить: $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число A называется пределом функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для $\forall$ сходящейся к M_0 последовательности $\{M^k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\{M^k\} \subset G (M^k \neq M^0)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(M^k)\}$ сходится к A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x, y \rightarrow +\infty (-\infty)$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ такой, что $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ лишь только $x > \delta, y > \delta$ (или $x < -\delta, y < -\delta$).

Обозначается следующим образом:

$$A = \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} f(x, y) \quad \left(A = \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow -\infty}} f(x, y) \right)$$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$\Pi = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\}$, кроме быть может отрезков прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

При фиксированном значении y функция $z = f(x, y)$ становится функцией от одной переменной x .

Пусть для любого фиксированного значения y , удовлетворяющего условию: $0 < |y - y_0| < \delta_2$, существует предел функции $f(x, y)$ при $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ |y - y_0| < \delta_2}} f(x, y) = \varphi(y)$$

Пусть далее предел функции $\varphi(y)$, при $y \rightarrow y_0$, существует и равен b :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = b$$

Тогда говорят, что в точке (x_0, y_0) существует повторный предел функции $f(x, y)$ и пишут:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = b$$

При этом $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ |y - y_0| < \delta_2}} f(x, y)$ называется внутренним пределом в повторном.

Аналогично определяется другой повторный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$, в котором

внутренним является $\lim_{\substack{y \rightarrow y_0 \\ |x - x_0| < \delta_1}} f(x, y)$

Замечание. Повторные пределы не всегда равны.

38). Найти повторные и двойные пределы функции $f(x, y) = \frac{x-2y}{x+3y}$ в точке $(0, 0)$

Сначала найдем двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x-2y}{x+3y}$

Пусть точка $M(x, y)$ подходит к точке $O(0; 0)$. Тогда рассмотрим изменение x и y по прямой $y=kx$ ($k \neq 0$)

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2kx}{x+3kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-2k)}{x(1+3k)} = \frac{1-2k}{1+3k}$$

Как видим в результате получаем зависимость от k , то есть при разных значениях k пределе получает разные значения. Это означает при $M(x, y) \rightarrow O(0; 0)$ -нет предела.

Найдем повторный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2 \cdot 0}{x+3 \cdot 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0-2y}{0+3y} = -\frac{2}{3}$$

39). Найти лимит $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$ и $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}}$

и повторные лимиты..

Решение: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{(3 + \sqrt{xy+9}) \cdot xy}{9 - (xy+9)} =$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{xy(3 + \sqrt{xy+9})}{-xy} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \frac{3+3}{-1} = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3+3}{-1} = -6$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{3 - \sqrt{xy+9}} = \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + \sqrt{xy+9}}{-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3+3}{-1} = -6$$

40) .Найти производную функции $u = \ln(x^2 - y^2)$ в точке $M_0(2; -1)$.

Решение: $u'_x = \frac{(x^2 - y^2)'_x}{(x^2 - y^2)} = \frac{2x}{(x^2 - y^2)} \quad u'_x(2; -1) = \frac{4}{4 - 1} = \frac{4}{3}$

$$u'_y = \frac{(x^2 - y^2)'_y}{(x^2 - y^2)} = \frac{-2y}{(x^2 - y^2)} \quad u'_y(2; -1) = \frac{-2(-1)}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

41) Дано: $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ Докажите равенство $z''_{xy} = z''_{yx}$

Решение :

$$z'_x = \frac{(x^2 + y^2 + 1)'_x}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \rightarrow z''_{xy} = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_y = \frac{-2x \cdot 2y}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$z'_y = \frac{(x^2 + y^2 + 1)'_y}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \rightarrow z''_{yx} = \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right)'_x = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

Значит получим, $z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$.

42) Дано $z = x^2 y^2$. Найти $d^2 z$.

Решение : $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2xy^2)'_y = 4xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y \rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^2$$

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 = 2y^2 dx^2 + 8xy dx dy + 2x^2 dy^2$$

43) Исследовать сходимость ряда по принципу Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)} \text{ применим признак Даламбера:}$$

$$U_n = \frac{n!}{3^n(n+1)}, \quad U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$$

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot 3^n(n+1)}{3^{n+1} \cdot (n+2) \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)(n+1)}{3(n+2)} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{6}{n}} = \infty \end{aligned}$$

$l = \infty$ значит данный ряд расходится.

44) Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{Решение: } \int_1^{\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln|x| - \ln|x+1| \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| \Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln \left| \frac{b}{b+1} \right| - \ln \frac{1}{2} \right) = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2 < \infty$$

Данный ряд сходится.

45) Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{3x-2}} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_1^b \frac{1}{\sqrt{3x-2}} d(3x-2) =$$

Решение :

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \sqrt{3x-2} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{2}{3} (\sqrt{3b-2} - 1) = \infty$$

Ответ: данный ряд расходится.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)} .$$

46) Найти радиус сходимости ряда:

$$a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$$

Решение:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = 3$$

Ответ : R=3

47) Найти радиус сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} .$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Решение:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1$$

Ответ : R=1

48) Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$

Решение:

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{3^n \sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n} \cdot 3^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

49) Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными $xy' - y - 1 = 0$.

Решение:

$$x \frac{dy}{dx} = y + 1$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + c_1$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y+1| = \ln|cx|$$

$$y+1=cx$$

$$y=cx-1$$

Ответ : $y = cx-1$.

50). Найти общее решение уравнения $(x^2 + 1)y' - xy = 0$ с разделяющимися переменными .

Решение:

$$(x^2 + 1)y' - xy = 0$$

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + c_1$$

$$\ln|y| = \ln \sqrt{x^2 + 1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln|c\sqrt{x^2 + 1}|$$

$$y = c\sqrt{x^2 + 1}$$

ОТВЕТ : $y = c\sqrt{x^2 + 1}$