Riyaziyyat-1

1. $\bar{a} = (2;3;1)$ $\bar{b} = (5;7;0)$ $\bar{c} = (3;-2;4)$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini göstərin və $\bar{d} = (4;12;-3)$ vektorunu bu vektorlar üzrə xətti kombinasiyaya ayırın.

Həlli.

Xətti asılılığın tərifinə görə $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = 0$ bərabərliyi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olduqda ödənərsə onda $\bar{a}, \bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

Verilənləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$ tənliklər sistemini alarıq.

Üçüncü tənlikdən $\lambda_1 = -4\lambda_3$ əvəzləməsini digər iki tənlikdə nəzərə alsaq

$$\begin{cases} -8\lambda_3 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -12\lambda_3 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$ olar. Buradan $$\begin{cases} 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_2 - 14\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

tərəf-tərəfə çıxcaq $\lambda_3 = 0$ alarıq. Deməli $\lambda_3 = 0$ olduğunu digər tənliklərdə nəzərə alsaq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alarıq.

Deməli bu vektorlar bazis əmələ gətirir.

$\bar{d}$ vektorun $\bar{a}, \bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları üzrə xətti kombinasiyasını tapmaq üçün

$\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c} = \bar{d}$ tənliyini həll etməliyik.

Verilənləri nəzərə alsaq $$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 12 \\ \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \end{cases}$$ alarıq.

Axırıncı tənliyi olduğu kimi saxlayıb -2 –yə vurub 1-ci tənliklə, -3-ə vurub 2-ci tənliklə toplayaq. $\begin{cases} \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 10 \\ 7\lambda_2 - 14\lambda_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 3 \end{cases}$

İkinci və ücüncü tənlikləri tərəf-tərəf cıxsaq $\lambda_3 = -1$ alarıq.

Bu qiyməti 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq $\lambda_2 + 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 1$ olar. $\lambda_3 = -1$ olduğunu $\lambda_1 + 4\lambda_3 = -3$ tənliyində nəzərə alsaq $\lambda_1 = 1$ alarıq.

Deməli yeni koordinatlar $\overline{d}(1;1;-1)$ olar. Yəni $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$ xətti kombinasiya alınar.

2. $\overline{a} = (2;-2)$ və $\overline{b} = (2;-1)$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini göstərin. $\overline{c} = (2;4)$ olarsa, $p = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$ vektorunu $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları üzrə ayrılışını tapın.

Həlli.

$\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini yoxlamaq üçün $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = 0$ bərabərliyindən $\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$ sistemini alarıq.

Tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1 = 0$ alarıq. Yerinə yazsaq $\lambda_1 = 0$ olar.

Deməli, tərifə görə $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

$\overline{P}$ vektorunun koordinatlarını tapaq.

$$\overline{P} = 2(2;-2) - (2;-1) + (2;4) = (4;-4) - (2;-1) + (2;4) = (4;1)$$

Xətti ayrılış üçün $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{p}$ şərti ödənməlidir.

$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases}$ sistemində tənlikləri tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1 = 5$ alarıq. Digər tənlikdə yerinə yazsaq $2\lambda_1 + 2\cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$ alarıq.

Deməli, $\overline{p} = -3\overline{a} + 5\overline{b}$ alınar.

3. R^n - də xətti asılı olan vektorlar haqqında teorem və isbatı.

Həlli.

Teorem 1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmazsa birinin yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilməsidir.

Zərurilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorları xətti asılıdır. Yəni, (2) bərabərliyi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ədədlərinin biri (məsələn, λ_m) sıfırdan fərqli olduqda doğrudur. Onda (2) bərabərliyinin hər tərəfini λ_m–ə bölsək $\vec{a}_m$ vektorunu digərləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$\vec{a}_m = \frac{-\lambda_1}{\lambda_m}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\vec{a}_2 - ... - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\vec{a}_{m-1}. \qquad (4)$$

Burada, $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$ $\left(i = \overline{1, m-1}\right)$ kimi işarə etsək, onda (4) bərabərliyini

$$\vec{a}_m = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} \qquad (5)$$

şəklində yaza bilərik. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_m$ vektoru $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{m-1}$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilir.

Kafilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarından biri (məsələn, $\vec{a}_m$) yerdə qalanlarının xətti kombinasiyasıdır. Yəni, (5) bərabərliyi doğrudur. Onda (5) bərabərliyini

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} + (-1)\vec{a}_m = \vec{0} \qquad (6)$$

kimi yazsaq, $\alpha_m = -1 \neq 0$ olduğundan tərifə əsasən $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olduğunu alırıq.

Qeyd edək ki, əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının heç olmazsa biri sıfır vektordursa, onda bu vektorlar xətti asılıdır. Doğrudan da fərz etsək ki, $\vec{a}_m = \vec{0}$. Onda $\lambda_m = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{m-1} = 0,$ götürsək, (2) bərabərliyi ödənir.

Yoxlamaq olar ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının bir neçəsi xətti asılıdırsa, onda bu vektorların hamısı xətti asılıdır.

4. $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&3&5\\2&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&2&3\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$ matrisləri üzərində qruplaşdırma qanununun ($(AB)C=A(BC)$) doğruluğunu yoxlayın.

Həlli.

$$AB=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&3&5\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&-8\\14&8&-3\\11&18&10\end{pmatrix}$$

$$((AB)C)=\begin{pmatrix}8&1&-8\\14&8&-3\\11&18&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&25&14\\42&39&23\\46&30&7\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&2&3\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&9&2\\9&5&2\\1&3&3\end{pmatrix}$$

$$(A(BC))=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&3&5\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10&9&2\\9&5&2\\1&3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&25&14\\42&39&23\\46&30&7\end{pmatrix}$$

$((AB)C=A(BC))$ -nun doğruluğunu yoxladıq

5. Determinant anlayışı. Minor və cəbri tamamlayıcı. Determinantın xassələri.

Həlli.

n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin a_{ij} elementinin yerləşdiyi i-ci sətri və j-ci sütunu şərti olaraq sildikdən sonra qalan elementlərin əmələ gətirdiyi $n-1$ tərtibli kvadrat matrisin determinantını M_{ij} ilə işarə edək. M_{ij} –yə a_{ij} elementinin minoru deyilir. Bu halda

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\ldots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \quad (7)$$

cəminə n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin determinantı deyilir.

Xassə 1. Determinantın bütün sətirlərinin onun uyğun nömrəli sütunları ilə yerini dəyişdikdə determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

sonrakı xassələrini ancaq sətirləri və ya ancaq sütunları üçün söyləmək kifayətdir.

Xassə 2. Hər hansı determinantın ixtiyari iki sətrinin (sütununun) yerini dəyişsək, onda determinantın yalnız işarəsi dəyişər. Yəni, məsələn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Xassə 3. İki sətri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 4. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vurğu olarsa, həmin vurğu determinantın işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Yəni

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & k\,a_{12} \dots ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Xassə 4 onu göstərir ki, $k \cdot detA_{nxn}$ hasilini tapmaq üçün $detA_{nxn}$ –nin hər hansı bir sətirinin (sütununun) elementlərini həmin k ədədinə vurmaq lazımdır.

Xassə 5. Determinantın iki sətrinin (sütunun) elementləri mütənasibdirlərsə, həmin determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 6. Determinantın hər hansı sətrinin (sütunun) bütün elementləri sıfırdırsa, onda determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 7. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri iki toplananın cəmi şəklindədirsə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabərdir: 1-ci determinantda həmin sətir (sütun) elementi olaraq 1-ci toplanan, 2-ci determinantda isə həmin sətir (sütun) elementləri olaraq 2-ci toplanan götürülür. Yəni, məsələn 1-ci sətir elementləri üçün

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots\dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_2} \qquad (5)$$

olur.

Xassə 8. Determinantın hər hansı sətrinin (sütununun) bütün elementlərini bir ədədə vurub digər bir sətrinin (sütununun) uyğun elementlərinin üzərinə əlavə etsək determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,məsələn,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & ka_{12}+ka_{22}\dots a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} \quad \dots \quad a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \quad \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Xassə 9. Determinantın hər hansı sətir (sütun) elementlərinin, digər sətirin (sütunun) uyğun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi sıfra bərabərdir.

Yəni, məsələn

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0. \qquad (7)$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A) = ?$

Həlli.

$$f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & -3-6+0 & 0-3+0 \\ 0+0+3 & 0+4-3 & 0+2+2 \\ 3+0+6 & -9-6-6 & 0-3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A) = ?$

Həlli.

$f(A)=4A^3-2A^2+3A-2E$ şəkildə yaza bilərik.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-14-6 & 21+0\\ 4+3 & -6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80 & 84\\ 28 & -24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$$

8. $\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}$ determinantın uyğun xassəsini yazın və həmin xassəyə əsasən hesablayın.

Həlli.

Əgər determinantın hər hansı sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə onu iki determinantın cəmi kimi yaza bilərik.

$$\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+2a+1\\ b & b^2 & b^2+2b+1\\ c & c^2 & c^2+2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a+1\\ b & 1 & b^2+2b+1\\ c & 1 & c^2+2c+1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2\\ b & b^2 & b^2\\ c & c^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a+1\\ b & b^2 & 2b+1\\ c & c^2 & 2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a\\ b & 1 & b^2+2b\\ c & 1 & c^2+2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Əgər determinantın iki sütunu eyni və ya mütənasibdirsə, o determinant sıfra bərabərdir. Onda I toplanan və axırıncı toplanan sıfra bərabər olar. Digər determinantları da ayırsaq

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a \\ b & b^2 & 2b \\ c & c^2 & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ b & 1 & 2b \\ c & 1 & 2c \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

alarıq.

9. Determinantın uyğun xassəsini yazın və həmin xassədən istifadə edərək $\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$ eyniliyini isbat edin.

Həlli.

Determinantın hər hansı sətir və sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə, onda determinant elə iki determinantın cəminə bərabərdir ki, birinci determinantda birinci toplanan, ikinci determinantda isə ikinci toplanan olmaqla qalan elementləri isə verilmiş determinantda olduğu kimi saxlanılır.

Iki sətri və ya sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

Determinantın hər hansı bir sətrinin və ya sütununun bütün elementlərinin ortaq vuruğunu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Hər hansı determinantın iki sətrinin yerini dəyişsək, onda determinant yalnız işarəsini dəyişər. Determinantın mütənasib olan sətirləri və ya sütunları varsa, bu determinant sıfıra bərabərdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz xassələrə əsasən verilmiş determinantı hesablayaq.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ matrisinin ranqını tapın və bazis minorlarından birini yazın.

Həlli.

Bilirik ki, matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək minorunun tərtibinə ranq deyilir. Ranqı tapmaq üçün haşiyələyən minorlar üsulundan istifadə edək.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = 8 \neq 0$$

olduğuna görə bu matrisin ranqı $r(A) = 3$ olar. Onda

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ olduğundan həm də bazis minoru olacaqdır.

11. Matrisin ranqı və onun tapılması üsulları.

Həlli.

mxn ölçülü A_{mxn} düzbucaqlı matrisində $k \leq min\{m,n\}$ şərtini ödəyən ixtiyari k sayda sətir və k sayda sütunların kəsişməsində duran elementlərdən düzəldilmiş k tərtibli A_{kxk} kvadrat matrisin determinantına k tərtibli minor deyilir və M_k ilə işarə olunur. $M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2k} \\ \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} \dots a_{kk} \end{vmatrix}$ kimidir.

Matrislərin ranqı üçün aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu yoxlamaq olar.

1) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$; 2) $r(A+B) \ge |r(A) - r(B)|$;

3) $r(AB) \le min\{r(A), r(B)\}$; 4) $r(A^T A) = r(A)$;

5) $r(AB) = r(A)$ əgər $detB \ne 0$ olarsa;

6) $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$, burada n, A matrisinin sütunlarının sayını və ya B matrisinin sətirləri sayını göstərir.

ranqın tapılması üsullar haşiyələyən minorlar və elementar çevirmələr üsuludur.

1) Haşiyələyən minorlar üsulu.

A_{mxn} matrisinin ranqını tapmaq üçün hesablamanı, onun aşağı tərtibli minorlarından başlayıb yuxarı tərtibli minorlara keçmək və bu prosesdə sıfırdan fərqli r tərtibli M_r minoruna rast gəldikdən sonra, M_r minorunu haşiyələyən (öz daxilində saxlayan) (r+1) – tərtibli minorları hesablamaq lazımdır. Əgər M_r –i $(M_r \ne 0)$ haşiyələyən (r+1) – tərtibli minorların hamısı sıfırdırsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r -dir. Yəni, $r(A_{mxn}) = r$. Əgər (r+1) – tərtibli haşiyələyən minorlardan biri, məsələn, M_{r+1} sıfırdan fərqli olarsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r-dən böyük olmalıdır. Bu prosesi M_{r+1}-i haşiyələyən (r+2) – tərtibli minorları hesablamaqla davam etdirsək və M_{r+1}-i $(M_{r+1}) \ne 0$ haşiyələyən bütün (r+2) – tərtibli minorlar sıfıra bərabərdirsə onda A_{mxn} matrisinin ranqı r+1-ə bərabərdir və s.

2) Elementar çevirmələr üsulu.

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Matrisin üzərində aparılan elementar çevirmələr onun ranqını dəyişmir.

Qeyd edək ki, ranqları bərabər olan matrislərə ekvivalent matrislər deyilir və $r(A)=r(B)\Leftrightarrow A\sim B$ kimi işarə olunur. Deməli, elementar çevirmələrdən sonra alınan matris, verilmiş matrisə bərabər deyildir.

Teorem (bazis minorlar haqqında teorem). Matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyildir. Matrisin ixtiyari sətri (ixtiyari sütunu) onun bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər.

12. $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ matrisinin tərsini elementar çevirmələrlə tapın və $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$ olduğunu yoxlayın.

Həlli.

Bilirik ki, $Q=(A/E)$ kimi bir qoşma matrisi düzəldilir. Onu elementar çevirmələrlə E/A şəklinə gətirilir.

$$A/E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)=\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, birinci sətri ikinci ilə toplayıb ikinci sütunda yazdıq, birinci ilə üçüncü sətri toplayıb üçüncü sətirdə yazdıq. Daha sonra birinci sətirlə ikinci sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Sonra birinci sətirlə üçüncü sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Nəticədə A matrisinin tərsini elementar çevirmələr yoli ilə tapmış olduq.

13. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ olduqda, A^{-2}-ni tapın və $A^2\cdot A^{-2}=A^{-2}\cdot A^2=E$ olduğunu yoxlayın.

Həlli.

Bilirik ki, A matrisinin tərsi $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$ düsturu ilə hesablanır.

Verilmiş A matrisinin tərs matrisini tapaq.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-3\cdot 2=-6,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-(0-9)=9$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0\cdot 2-3\cdot 1=-3,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(2\cdot 0+1\cdot 2)=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3=3,\quad A_{23}=(1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(2-6)=4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3+1\cdot 1=6+1=7,\quad A_{33}=(1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Deməli $$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-6 & -2 & 7\\ 9 & 3 & -3\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

14. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1+x_2+3x_3=11\\ 3x_1+4x_2-x_3=-5\end{cases}$ xətti tənliklər sisteminin uyuşan olub olmadığını (Kroneker-Kapelli teoremi vasitəsilə) yoxlayın, sistemin ümumi və xüsusi həllini tapın.

Həlli.

Bilirik ki, əsas matris dəyişənlərin əmsallarından düzəldilir.

$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -4 & -1\end{pmatrix}$ genişləndirilmiş matris isə

$A^{*}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 11\\ 3 & -4 & -1 & -5\end{pmatrix}$ olar.

Kroneker –Kapelli teoreminə görə sistemin həllinin varlığı üçün $r(A) = r(A^*)$ olmalıdır.

Əvvəlcə $r(A)$ -nı tapaq.

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0$; $M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 2 + 4 - 6 + 3 - 12 = 14 \neq 0$ olduğundan

$r(A) = 3$ olur.

İndi isə A^*-un ranqını tapaq.

Bunun üçün

$$\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -4 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 56 - 24 - 6 \cdot 7 \cdot 4 - 8 - 0 = -80 - 168 - 8 = -256 \neq 0$$

olduğuna görə $r(A^*) = 4$ olar.

Deməli $3 = r(A) \neq r(A^* = 4)$ olduğundan sistem uyuşan deyil.

15. n məchullu m sayda xətti tənliklər sisteminin uyuşan olması haqqında Kroneker-Kapelli teoremi.

Həlli.

n məchullu m xətti tənlik sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \ . \end{cases} \qquad (1)$$

(1) xətti tənliklər sistemini həll etməzdən qabaq onun həllinin olub-olmadığını müəyyən etmək lazım gəlir.

Qeyd edək ki, $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$ (2)

verilən sistemin əsas matrisi,

$$A^*_{mx(n+1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \qquad (3)$$

verilən sistemin genişlənmiş matrisi adlanır.

(1) sisteminin birgə (uyuşan) olub-olmamasını müəy-yənləşdirmək üçün

aşağıdakı teorem mühüm rol oynayır.

Teorem (Кroneker–Кapelli). Verilmiş (1) xətti tənliklər sisteminin birgə (uyuşan) olması üçün zəruri və kafi şərt sistemin əsas matrisinin ranqının onun genişlənmiş matrisinin ranqına bərabər olmasıdır, yəni, $r(A) = r(A^*)$ olmasıdır.

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + \quad x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$ xətti tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edin.

Həlli.

Birinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək. Digər dəyişənləri toplama üsulu ilə “yox” edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

Indi isə ikinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək və toplama üsulu ilə digər dəyişənləri ardıcıl yox edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ \qquad 12x_3 - 6x_4 = 36 \ \big| 5 \\ \qquad 18x_3 - 10x_4 = 56 \ \big| -3 \end{cases} \Rightarrow \quad 60x_3 - 54x_3 - 30x_4 + 30x_4 = 180 - 168$$

$$6x_3 = 12$$
$$x_3 = 2$$

$x_3 = 2$ qiymətini $12x_3 - 6x_4 = 36$ tənliyində yerinə yazsaq

$$\begin{aligned} 24 - 6x_4 &= 36 \\ 6x_4 &= -12 \\ x_4 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x_2 - 4 - 12 &= -14 \\ 2x_2 &= 2 \\ x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2 - 6 - 8 &= -13 \\ x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Deməli, tənliyin ümumi və xüsusi həlləri eynidir.

$\{-1;1;2;-2\}$ olur.

17. a-nın hansı qiymətində $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ xətti tənliklər sisteminin həlli sonsuz saydadır? Bu həlli tapın.

Həlli.

Bilirik ki, bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas matrisin determinantı sıfra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 12a + 7 + 3 - 14a - 8 = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

olarsa, sistemin sonsuz sayda həlli var.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

üçüncü tənliyi aparıcı tənlik kimi saxlayaq.

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3x_2 \text{ alarıq.}$$

$x_2 = C \in R$ qəbul etsək,

$x_3 = 3C$ və $\begin{matrix} x_1 - C + 6C = 0 \\ x_1 = -5C \end{matrix}$ alarıq.

Onda sistemin ümumi həlli $\{-5C; C; 3C\}$ olar.

18. $AX = (x_1 + x_2 + 8x_2; 2x_2; x_1 - x_3)$ xətti çevirməsinin matrisini və məxsusi ədədlərinin çəmini tapın.

Həlli.

Bu çevirmənin matrisi əmsalardan düzəldilir.

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Məxsusi ədədi tapmaq üçün

$|A - \lambda E| = 0$ tənliyini həll etmək lazımdır.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 8(2-\lambda)0 - 0 = 0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - 8) = 0$$

$$-(1-\lambda^2) - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \begin{matrix} \lambda^2 = 9 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_3 = -3 \end{matrix}$$

Onların cəmi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (-3) = 2$ olar

19. $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 2y - z \\ z' = z - x \end{cases}$ (A) və $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + z \\ z' = -x - y \end{cases}$ (B) çevirmələri üşün $AB - BA$ çevirməsini tapın.

Həlli.

Verilən çevirmələrin əmsallarından A və B matrislərini düzəldək

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Onda AB-BA çevirməsi $\begin{cases} x'' = 5x - y + 4z \\ y'' = 3x - 6y + z \\ z'' = 3y \end{cases}$

20. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin məxsusi ədədlərini və məxsusi vektorlarını tapın.

Həlli.

Bilirik ki, məxsusi ədəd $|A - \lambda E| = 0$ tənliyindən tapılır.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+0+0-0-4(2-\lambda)+4\lambda 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8\lambda-8=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda(2-\lambda)+8)=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad 2\lambda-\lambda^2+8=0$$

$$\lambda^2-2\lambda-8=0$$

$$\lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

Hər bir məxsusi ədədə uyğun məxsusi vektorları tapaq.

$\lambda_1=1$ olduğunu nəzərə alaq.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1-2x_2+0=0 \\ -2x_1+(1-\lambda)x_2-2x_3=0 \\ 0\cdot x_1-2x_2-\lambda x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-2x_3=0 \\ -2x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_1=x_3 \\ x_3=-2x_2 \end{cases}$$

$x_2=C_1$ qəbul etsək $0\neq C_1\in R$ olmalıdır.

Onda məxsusi vektor $\{-2C_1;C_1;-2C_1\}$ olar.

2) $\lambda_2=4$-ə uyğun sistem

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2-2x_3=0 \\ -2x_2-4x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ 2x_1-3x_2-2x_3=0 \\ x_2=-2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=C_2\neq 0 \\ x_2=-2C_2 \\ x_1=2C_2 \end{cases} \quad \text{alarıq.}$$

Məxsusi vektor $\{2C_2;-2C_2;C_2\}$ alınar.

3) $\lambda_3=-2$-yə uyğun məxsusi vektor.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_3 \\ x_2 = 2C_3 \\ x_3 = 2C_3 \end{cases}$$

$\{C_3; 2C_3; 2C_3\}$ alınar.

21. Xətti çevirmənin matrisi. Xətti çevirmənin məsusi ədədi və məxsusi vektoru.

Həlli.

Tutaq ki, n-ölçülü R^n xətti fəzasında $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorları və A xətti çevirməsi verilmişdir. Onda bu fəzadan götürülmüş $\vec{X} \in R^n$ vektorunun bazis vektorları üzrə yeganə qayda ilə

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \qquad (1)$$

şəklində ayrılışını yaza bilərik. A xətti çevirmə olduğu üçün bu ayrılışı $\vec{Y} = A(\vec{X})$ bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$\vec{Y} = A(\vec{X}) = x_1 A(\vec{e}_1) + x_2 A(\vec{e}_2) + \ldots + x_n A(\vec{e}_n) \qquad (2)$$

alarıq. Digər tərəfdən $A(\vec{e}_i)$ $(i = \overline{1;n})$ vektorları da R^n fəzasının elementləri olduğundan onların da $e_1, e_2, ..., e_n$ bazis vektorları üzrə ayrılışını yazmaq olar.

$$\begin{cases} A\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n1}\vec{e}_n \\ A\vec{e}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{n2}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\vec{e}_n = a_{1n}\vec{e}_1 + a_{2n}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n \end{cases} \qquad (3)$$

Bu ayrılışları (2) münasibətində nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (4)$$

alarıq. (4) bərabərliyinin əmsallarından düzəldilmiş

$$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matrisinə $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisində A xətti çevirməsinin matrisi deyilir. Burada, $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$-dir.

Bu çevirməni qısa olaraq $Y_{n\times 1} = A_{n\times n} X_{n\times 1}$ kimi yazmaq olar.

Tutaq ki, A operatoru R^n-dən R^n-ə təsir edən xətti çevirmədir.

Tərif. R^n-dən götürülmüş sıfırdan fərqli hər hansı X vektoru üçün

$$AX = \lambda X \quad \left(0 \neq X \in R^n\right) \qquad (5)$$

bərabərliyini ödəyən λ ədədinə A operatorunun məxsusi ədədi, ona uyğun tapılan X vektoruna isə məxsusi vektor deyilir.

Bəzən məxsusi ədəd əvəzinə məxsusi qiymət də işlədilir.

(5) bərabərliyini açıq şəkildə yazsaq

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

şəklində bircins xətti tənliklər sistemi alarıq. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt onun məchullarının əmsallarından düzəldilmiş determinantın sıfra bərabər olmasıdır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

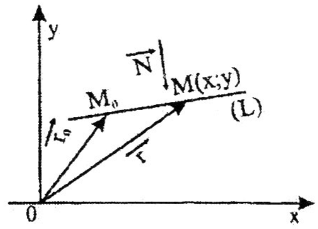
(7) bərabərliyini qısa olaraq $|A - \lambda E| = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyin sol tərəfi həm də λ-dan asılı n-dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədliyə xarakteristik çoxhədli deyilir. Xarakteristik çoxhədlinin kökləri A xətti çevirməsinin məxsusi ədədləridir.

(7) xarakteristik tənliyini həll edərək $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ məxsusi ədədlərini tapırıq və bu məxsusi ədədləri ayrı-ayrılıqda (6) bircins xətti tənliklər sistemində yerinə yazaraq sıfırdan fərqli X həllini (vektorunu) tapırıq. Həmin bu X vektoru uyğun məxsusi vektor olacaqdır.

22. R^2-də düz xəttin ümumi və parçalarla tənliyi.
Həlli.

1. R^2-də düz xəttin ümumi və parçalarla tənliyi.

Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi və bu sistemdə ixtiyari L düz xətti götürək (şəkil 1).



Şəkil 1

L düz xəttinə perpendikulyar olan $\vec{N}\{A;B\}$ vektoruna L düz xəttinin normal vektoru deyilir. L düz xətti üzərində ixtiyari $M(x;y)$ nöqtəsini götürək. L düz xətti üzərində $M(x;y)$ nöqtəsindən fərqli olan qeyd olunmuş məlum koordinatlı $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsini də götürək və $\overrightarrow{M_0M}$ vektorunu çəkək. Koordinat başlanğıcından $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ və $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ vektorlarınıda çəkək. Onda şəkildən $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$ və yaxud $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$ olur.

$\vec{N}\{A;B\}$ normal vektoru L düz xəttinə perpendikulyar olduğundan L düz xətti üzərində yerləşən $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$ vektorunada perpendikulyardır. Yəni bu vektorların skalyar hasili sıfıra bərabərdir.

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}\right) = 0 \qquad (1)$$

Bu skalyar hasili koordinatlarla yazsaq

$$A\cdot(x - x_0) + B\cdot(y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

alırıq. Burada $C = -(Ax_0 + By_0)$ işarə olunmuşdur. (2) tənliyinə düz xəttin müstəvi üzərində ümumi tənliyi deyilir.

Deməli, müstəvi üzərində yerləşən düzbucaqlı koordinat sistemində L düz xəttinin ümumi tənliyini yazmaq üçün L düz xəttinin normal $\vec{N}\{A;B\}$ vektorunun koordinatlarının və onun üzərində qeyd olunmuş $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsinin koordinatlarının verilməsi kifayətdir.

Düz xəttin parçalarla tənliyi

(2) düz xəttin ümumi tənliyinin $(A \neq 0; B \neq 0; C \neq 0)$ hər tərəfini – C-yə bölsək

$\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$ və yaxud $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ alarıq. Burada $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$ işarə etsək

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (3)$$

alarıq. (3)-i düz xəttinin parçalarla tənliyi adlanır. Burada a ədədi düz xəttin absis oxundan, b isə ordinat oxundan ayırdığı parçanın qiymətidir.

23. (x;z) müstəvisinə paralel olan və M(2;-5;3) nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyini yazın.

Həlli.

(x;z) müstəvisinə paralel olan müstəvinin tənliyi By+D=0 şəklindədir. M nöqtəsinin koordinatları bu tənliyi ödəməlidir. $B \cdot (-5) + D = 0; \quad D = 5B$

Bunu nəzərə alaq: By+5B=0 y+5=0

Cavab: y+5=0.

24. $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ düz xətti ilə 3x-y+2z-5=0 müstəvisinin kəsişmə nöqtəsini tapın.

Həlli.

Düz xəttin tənliyini parametrik şəkildə yazaq:

$$\begin{cases} x = 7 + 5\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases}$$ axtarılan nöqtə $M(x_0, y_0, z_0)$ olsun M nöqtəsinin koordimatları bu tənlikləri və müstəvinin tənliyini ödəməlidir:

$$\begin{cases} x_0 = 7 + 5\lambda \\ y_0 = 4 + \lambda \\ z_0 = 5 + 4\lambda \\ 3x_0 - y_0 + 2z_0 - 5 = 0 \end{cases}$$

Bu tənliklərdən λ -nı tapaq.

$$3(7 + 5\lambda) - (4 + \lambda) + 2(5 + 4\lambda) - 5 = 0$$

$$21 + 15\lambda - 4 - \lambda + 10 + 8\lambda - 5 = 0$$

$$22\lambda = -22$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{cases} x_0 = 7 + 5(-1) = 2 \\ y_0 = 4 - 1 = 3 \\ z_0 = 5 + 4(-1) = 1 \end{cases}$$

Cavab: M(2;3;1)

25. Funksiyanin limiti. Sag və sol limitlər. Bəzi limit düsturları.

Həlli.

Tərif 1. Sonlu a və A ədədləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x-in X çoxluğundan götürülmüş və $0 < |x - a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ münasibəti ödənir. Onda A ədədinə $x \to a$ şərtində $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir və $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ kimi yazılır. X çoxluğu olaraq a nöqtəsinin müəyyən ətrafı başa düşülür.

Funksiyanın sol və sağ limitləri

A ədədi $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limitidirsə, onda x-in a-ya yaxın və onun istənilən tərəfində (sol və ya sağ tərəfində) yerləşən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

bərabərsizliyi ödənilir. $x = a$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti olmadıqda onda (1) bərabərsizliyi x-in a-nın müəyyən tərəfində (məsələn, sol və ya da sağ) tərəfində yerləşən qiymətlərində ödənilə bilər. Belə olduqda $f(x)$ funksiyasının a nöqtəsində sol limitindən və sağ limitindən danışmaq olar.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin sol tərəfində təyin olunmuşdur.

Tərif . Sonlu A və a ədədləri verildikdə $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x-in a-dan kiçik olan və

$$0 < a - x < \delta \tag{2}$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda A ədədinə $x \to a$ şərtində (və ya $x = a$ nöqtəsində) $f(x)$ funksiyasının sol limiti deyilir və

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x<a)}} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0) \tag{4}$$

kimi işarə olunur.

Tərif. Sonlu A və a ədədləri verildikdə $\forall \varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x-in a-dan böyük olan və

$$0 < x - a < \delta \tag{5}$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənir. Onda A ədədinə $x \to a$ şərtində (və ya $x = a$ nöqtəsində) $f(x)$ funksiyasının sağ limiti deyilir və

$$\lim_{\substack{x \to a \\ (x>a)}} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0) \tag{6}$$

kimi işarə olunur.

Deməli, $x=a$ nöqtəsində $y=f(x)$ funksiyasının limitinin olması üçün

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a-0)=f(a+0)$$

şərti ödənilməlidir.

26. Funksiyanın kəsilməzliyi. Sonlu parçada kəsilməz funksiyaların xassələri.

Həlli.

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası *a* nöqtəsinin müəyyən ətrafında (o cümlədən *a* nöqtəsində) təyin olunmuşdur.

Tərif. Əgər

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənilərsə, onda $f(x)$ funksiyasına $x=a$ nöqtəsində kəsilməyən funksiya deyilir

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $x=a$ nöqtəsində təyin olunmuşdur. Əgər $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$ olarsa, onda $y=f(x)$ funksiyası $x=a$ nöqtəsində sağdan kəsilməyən, $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$ olarsa, onda $y=f(x)$ funksiyasına $x=a$ nöqtəsində soldan kəsilməyən funksiya adlanır.

Arqumentin x_0 qiyməti ilə ona qonşu olan qiymətinin fərqinə, yəni $x-x_0-a$ arqumentin x_0 nöqtəsindəki artımı deyilir və Δx ilə işarə olunur. Yəni $x-x_0=\Delta x$ olur. Buradan $x=x_0+\Delta x$ alırıq. Onda $\Delta f(x) = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$-a $y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki artımı deyilir. Əgər $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsindəki $\Delta f(x)$ artımı üçün $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x)= \ = \lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$ münasibəti ödənilərsə, onda $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməyən adlanır.

Sonlu parçada kəsilməyən funksiyaların xassələri

Sonlu $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası haqqında aşağıdakı teoremləri isbatsız olaraq qeyd edək:

<u>Teorem1</u>

Sonlu $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçada məhduddur.

<u>Teorem 2</u>

$[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçanın heç olmasa bir α nöqtəsində özünün dəqiq aşağı sərhəddini $(f(\alpha) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x) = m_0)$ və heç olmasa bir β nöqtəsində özünün dəqiq yuxarı sərhəddini $(f(\beta) = \ = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = M_0)$ alır.

<u>Teorem 3.</u> $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası həmin parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər olarsa, məsələn, $f(a) = A < 0$, $f(b) = B > 0$ olarsa, onda a və b nöqtələri arasında yerləşən ən azı bir $x = c$ nöqtəsi vardır ki, bu nöqtədə $f(c) = 0$ olur.

27. limiti hesablayın.: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$

Həlli.

Lopital qaydasını tətbiq edək:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)'}{(\cos x-1)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{2e^{x^2}}{-\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{2\cdot 1}{-1} = -2$$

Cavab: -2.

28. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi düsturunun çıxarılışı.

Həlli.

Fərz edək ki, $y = f(x)$ və $x = \varphi(t)$ funksiyaları və həmin funksiyalardan düzəldilmiş $y = f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası verilmişdir.

<u>Teorem.</u> $x = \varphi(t)$ funksiyası t_0 nöqtəsində və $y = f(x)$ funksiyası uyğun $x_0 = \varphi(t_0)$ nöqtəsində diferensiallanan olduqda $y = -f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası t_0 nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi

$$\left(f(\varphi(t_0))\right)' = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) \qquad (1)$$

dusturu ilə hesablanır.

<u>İsbatı</u>. Törəmənin tərifinə əsasən

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} = \varphi'(t_0)+\alpha(t) \qquad \lim_{t\to t_0}\alpha(t) = 0$$

və ya

$$x - x_0 = \varphi(t) - \varphi(t_0) = (t - t_0)(\varphi'(t_0) + \alpha(t)) \tag{2}$$

bərabərliyini yazmaq olar. Bu bərabərliyi $f(x)$ funksiyası üçün də yazaq:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)(f'(x_0)\beta(x)) \qquad \lim_{x \to x_0} \beta(x) = 0 \tag{3}$$

(2) və (3) bərabərliklərini nəzərə alsaq:

$$f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0)) = f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\ f'(x_0) + \beta(x) =$$
$$= (t - t_0)(\varphi'(t_0) + \alpha(t))(f'(x_0) + \beta(x))$$

$x = \varphi(t)$ funksiyası t_0 nöqtəsində diferensiallanan olduğundan həmin nöqtədə kəsilməyəndir. Buna görə də $t \to t_0$ şərtində $x \to x_0$ və $\lim\limits_{t \to t_0} \beta(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$ bunları nəzərə alaraq

$$\frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = (\varphi'(t_0) + \alpha(t))(f'(x_0) + \beta(x))$$

bərabərliyində $t \to t_0$ şərtində limitə keçsək

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(\varphi(t)) - f(\varphi(t_0))}{t - t_0} = \varphi'(t_0) \cdot f'(x_0)$$

münasibətini alarıq, bu da (1) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərir (1) bərabərliyini bəzən

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t \tag{4}$$

şəklində yazırlar.

29. $f(x) = \sqrt{\cos(2x+3)}$ funksiyasının diferensialını tapın

Həlli.

$$df(x) = d\sqrt{\cos(2x+3)} = \left(\sqrt{\cos(2x+3)}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot (\cos(2x+3))' dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot (-\sin(2x+3))(2x+3)' dx = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot \sin(2x+3) \cdot 2dx =$$

$$= -\frac{\sin(2x+3)}{\sqrt{\cos(2x+3)}} dx$$

Cavab $df(x) = -\dfrac{\sin(2x+3)}{\sqrt{\cos(2x+3)}} dx \cdot$

30. $f(x)=\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}$ funksiyasının diferensialını tapın.

Həlli.

$$df(x)=d\left(\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}\right)=\left(\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{\sin x}\right)'dx=\left(\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx=$$

$$=\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$$

Cavab $df(x)=\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$

31. $f(x)=5\sin 2x$ funksiyasına $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında Roll teoremini tətbiq edin və x=c qiymətini tapın.

Həlli.

$$f'(x)=10\cos 2x, \quad \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$$

Verilmiş funksiya $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında kəsilməzdir, $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervalında diferensiallanandır. $f(0)=5$ və $f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ Yəni, deməli bu funksiyaya verilmiş parçada Roll teoremini tətbiq etmək olar.

$$f'(c)=0;\ \ 10\cos 2c=0;\ \ \cos 2c=0;\ \ 2c=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$$c=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \ c=\frac{\pi}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Cavab: $c=\frac{\pi}{4}$

32. $f(x)=5\sqrt{x}$ funksiyası üçün $[1;9]$ parçasında Laqranj düsturunu yazın və x=c- ni tapın.

Həlli.

$f(x)=x\sqrt{x}$ funksiyası üçün $[0;3]$ parçasında kəsilməzdir və (0;3) intervalında diferensiallanandır. $f'(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

Laqranj teoreminə əsasən yaza bilərik:

$$(x\sqrt{x})_{x=3}-\left(x\sqrt{x}\right)_{x=0}=(3-0)\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)_{x=c};\quad 3\sqrt{3}-0=3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{c}$$

$$3\sqrt{3}=\frac{9}{2}\sqrt{c};\ 1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{c};\quad c=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

Cavab : $c=1\frac{1}{3}$

33. Funksiyanın ekstemumu. Ekstemumun varlığı üçün zəruri və kafi şərtlər

Həlli.

Fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur və $x_0\in\,]a;b[$-dir.

Əgər $x=x_0$ nöqtəsinin hər hansı $]x_0-\delta;x_0+\delta[\ \ (\delta>0)$ ətrafında yerləşən bütün x nöqtələrində

$$f(x)\le f(x_0),\left(f(x)\ge f(x_0)\right) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində lokal maksimumu (minimumu) var. $f(x_0)$ ədədinə funksiyanın lokal maksimum (minimum) qiyməti deyilir. Funksiyanın lokal maksimumuna və lokal minimumuna birlikdə funksiyanın lokal ekstemumu deyilir.

<u>Teorem (Lokal ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt).</u> Əgər diferensiallana bilən $y=f(x)$ funksiyasının $x=x_0$ nöqtəsində lokal ekstemumu varsa, onda onun törəməsi həmin nöqtədə sıfra bərabərdir, yəni $f'(x_0)=0$.

Müəyyən olmaq üçün $x=x_0$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum qiymət aldığını fərz edək. Onda ixtiyarı kiçik Δx artımı üçün

$$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)\Leftrightarrow f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

Buradan isə $\Delta x>0$ olduqda $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$ alırıq.

$\Delta x<0$ olduqda $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$ alırıq. Bu bəbərsizliklərdə $\Delta x\to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\le 0, \qquad (2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\ge 0, \qquad (3)$$

(2) və (3) bərabərsizlikləri birlikdə yalnız $f'(x_0)=0$ olduqda doğrudur.

Verilmiş funksiyanın böhran nöqtəsində lokal ekstemumun qiymətinin olduğunu yoxlamaq üçün kafi şərtlər verək

I-kafi şərt: $y=f(x)$ funksiyası $x=x_0$ böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməyən və həmin ətrafda (x_0- nöqtəsi müstəsna ola da bilər) diferensiallanandırsa, onda:

1. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x<x_0$ olduqda $f'(x)>0$ və $x>x_0$ olduqda isə $f'(x)<0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var;

2. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x<x_0$ olduqda $f'(x)<0$ və $x>x_0$ olduqda isə $f'(x)>0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal minimumu var;

3. Əgər $f'(x)$ törəməsi $x<x_0$ və $x>x_0$ olduqda işarəsini dəyişmirsə, onda x_0 nöqtəsində funksiyanın lokal ekstemumu yoxdur.

II Kafi şərt: Əgər x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş $y=f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi varsa və $f'(x_0)=0$ və $f''(x_0)\neq 0$-dırsa, onda:

1. $f''(x_0)<0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu vardır;

2. $f''(x_0)>0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumu vardır.

III Kafi şərt. Əgər $y=f(x)$ funksiyasının x_0 böhran nöqtəsində n-ci tərtibə qədər kəsilməyən və $\begin{matrix} f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{matrix}$ (5) şərtlərini ödəyən törəmələri varsa, onda:

1. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0)<0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu var;

2. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0)>0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumu var;

3. n tək ədəd olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal ekstemumu yoxdur.

34. f(x)= x – x lnx funksiyasının $\left[\frac{1}{e};e\right]$ parçasında ən böyük qiymətini tapın.

Həlli.

$$f'(x) = 1 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = -\ln x; \quad -\ln x = 0; \quad x = 1$$

$$f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \cdot \ln\frac{1}{e} = \frac{2}{e}; \quad f(e) = e - e\ln e = 0;$$

$$f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1$$

35. $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{x^2 + 4}$ əyrisinin maili asimptotunu tapın.

Həlli.

y=kx+b

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4 - x^2}{x^2 + 4} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \bigl(f(x) - kx\bigr) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x - x^3}{x^2 + 4} + x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{x^2 + 4} = 0$$

Deməli y=-x düz xətti verilən əyrinin maili asimptotudur.

Cavab: y= -x .

36. Çoxdəyişənli funksiya və onun limiti. Təkrar və ikiqat limitlər.

Həlli

Tutaq ki, G çoxluğu xy müstəvisinin nöqtələr çoxluğu və həqiqi z ədədlərin F çoxluğu verilmişdir.

Tərif1. G çoxluğunun hər bir $M(x, y)$ nöqtəsinə F çoxluğundan müəyyən $z = f(x, y)$ ədədini qarşı qoyan f uyğunluğuna G çoxluğunda təyin olunmuş və qiymətləri F çoxluğuna daxil olan funksiya deyilir

Tərif2 . Tutaq ki, sonlu A ədədi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə δ ədədi var ki, G çoxluğunun

$$0 < \rho(M_0, M) < \delta \qquad (1)$$

bərabərsizliyini ödəyən bütün $M(x, y) \in G$ nöqtələrində

$$|f(M) - A| < \varepsilon$$

münasibəti ödənərsə, onda A ədədinə $M \to M_0$ şərtində $f(M) = f(x, y)$ funksiyasının limiti deyilir. Yəni,

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \qquad (2)$$

Tərifdəki $0 < \rho(M_0, M) < \delta$ əvəzinə $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ və yaxud $|x - x_0| < \delta,\ |y - y_0| < \delta$ bərabərsizliklərini də yazmaq olar.

Ikidəyişənli funksiyanın arqumentləri x_0 və y_0-a yaxınlaşdıqda təkrar limit olan $\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$ və ya $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ iki müxtəlif təkrar limitlərdir.

Teorem. Əgər $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$ limiti və $0 < |y - y_0| < \delta$ qiymətlərində $\varphi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ limiti varsa onda onun təkrar $\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ limiti də var və ikiqat limitə bərabərdir.

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \qquad (3)$$

$M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsində $\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$ onda

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) \qquad (4)$$

olar.

37. Xüsusi törəmələr. Tam artım və tam diferensial.

Həlli.

$U = f(x,y,z)$ funksiyasının təyin oblastına daxil olan ixtiyari bir $M(x,y,z)$ nöqtəsini götürək və x,y,z arqumentlərinə uygun olaraq elə $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, $\Delta z \neq 0$ artımlarını verək ki, $N(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ nöqtəsi də $u = f(x,y,z)$ funksiya sının təyin oblastına daxil olsun. Onda

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x, y, z) - f(x,y,z), \qquad (1)$$

$$\Delta_y u = f(x, y + \Delta y, z) - f(x,y,z), \qquad (2)$$

$$\Delta_z u = f(x,y,z + \Delta z) - f(x,y,z), \qquad (3)$$

ifadələri $u = f(x,y,z)$ funksiyasının uygun olaraq, x,y,z arqumentlərinə nəzərən xüsusi artımları adlanır. $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$ nisbətinin $\Delta x \to 0$-da sonlu limiti varsa, bu limitə $u = f(x,y,z)$ funksiyasının M nöqtəsində x arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi deyilir və $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, u'_x, f'_x$ simvollarından biri ilə işarə olunur. Tərifə əsasən

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \text{ olur.}$$

Eyni qayda ilə $u = f(x,y,z)$ funksiyasının y arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi $\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y,\ z) - f(x,y,z)}{\Delta y}$ və $u = f(x,y,z)$ funksiyasının z arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

şəklində yazılır.

Tərifdən aydındır ki, $u = f(x,y,z)$ funksiyasının bir arqumentinə nəzərən xüsusi törəməsini hesabladıqda onun yerdə qalan arqumentlərini sabit hesab etmək lazımdır. Buna görə də çoxdəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrini hesabladıqda birdəyişənli funksiya törəməsinin hesablanma qaydalarından və düsturlarından bilavasitə istifadə olunur.

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının $M(x,y,z)$ nöqtəsində tam artımı

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \qquad (4)$$ şəklindədir.

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının tam artımını $M(x,y,z)$ nöqtəsində

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z \qquad (5)$$

şəklində göstərmək mümkün olduqda ona $M(x,y,z)$ nöqtəsində diferensiallana bilən funksiya deyilir. $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z, \qquad (6)$

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının $M(x,y,z)$ nöqtəsində tam diferensialı adlanır.

$dx = x'\cdot\Delta x = \Delta x$; $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$ olduğundan (3)-dən alarıq:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz.$$

38. $f(x,y) = \frac{x-2y}{x+3y}$ funksiyasının $(0,0)$ nöqtəsində, təkrar və ikiqat limitini tapın.

Həlli.

Fərz edək ki, $M(x,y)$ nöqtəsi 0(0;0) nöqtəsinə yaxınlaşır. Onda x və y –in $y=kx$ düz xətti üzrə dəyişməsinə baxaq $(k \neq 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{x\to 0} \frac{x-2kx}{x+3kx} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-2k)}{x(1+3k)} = \frac{1-2k}{1+3k}$$

Göründüyü kimi, nəticə k-nın seçilməsindən asılı olaraq, dəyişir (yəni limit yeganə deyildir). Deməli, $M(x,y) \to 0(0;0)$ -da baxılan limit yoxdur.

Təkrar limitləri tapaq.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2\cdot 0}{x+3\cdot 0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{x+3y}=\lim_{y=0}\frac{0-2y}{0+3y}=-\frac{2}{3}$$

39. $u=arctg\frac{xy}{z^2}$ funksiyasının tam diferensialını tapın.

Həlli.

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz \qquad (1)$$

düsturu ilə hesablanır.
Xüsusi törəmələri hesablayaq.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{yz^2}{x^4+x^2\cdot y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{x}{z^2}=\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\left(-\frac{2xy}{z^3}\right)=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{2xy}{z^3}=-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2} \qquad (4)$$

(2), (3) və (4) –ü (1) –də nəzərə alarıq.

$$du=\frac{yz^2}{z^4+x^2y^2}dx+\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2}dy-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2}dz$$

40. $u=x^{y^2z}$ funksiyasının diferensialını tapın.

Həlli.

Məlumdur ki, funksiyanın diferensialı $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

düsturu ilə tapılır. Xüsusi törəmələri tapaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z\cdot x^{y^2z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\cdot 2yz\cdot\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\cdot y^2\cdot\ln x$$

Tapdığımız xüsusi törəmələri tam diferensial düsturunda yerinə yazaq:

$$du=y^2z\cdot x^{y^2z-1}dx+x^{y^2z}\cdot 2yz\cdot\ln x\,dy+x^{y^2z}\cdot y^2\ln x\,dz$$

41. $u = arctg\frac{x+y}{1-xy}$ funksiyasının ikinci tərtib differensialını tapın.

Həlli.

İkidəyişənli funksiyanın tam diferensial düsturu aşağıdaki kimidir:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy$$

Bu düstura əsasən funksiyanın xüsusi törəmələrini yazaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arctg\frac{x+y}{1-xy}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(arctg\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

Bunları düsturda yerinə yazsaq alarıq:

$$du = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}dx + \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)}dy$$

$$du = \frac{1}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\left((1+y^2)dx+(1+x^2)dy\right)$$

42. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu. Ekstremum üçün zəruri şərt.

Həlli.

$M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsinə kafi yaxın və ondan fərqli olan $M(x,y)$ nöqtələri üçün $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ $(f(x;y) > f(x_0;y_0))$ olduqda $z = f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində maksimumu (minimumu) var deyirik. $z = f(x;y)$ funksiyasının maksimum və minimumuna birlikdə onun ekstemumu deyilir.

$$f(x;y) < f(x_0;y_0) \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) < 0. \qquad (1)$$

Burada $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ işarə etsək (1)-dən alarıq:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) - f(x_0;y_0) < 0 \text{ və yaxud } \Delta f < 0$$

Yəni, x və y arqumentlərinin bütün kafi kiçik $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ artımı üçün $\Delta f < 0$ olarsa, onda $z = f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində maksimumu var.

$$f(x;y) > f(x_0;y_0) \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) > 0 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0;y_0) > 0$$

və yaxud $\Delta f > 0.$

Yəni, x və y arqumentlərinin bütün kafi kiçik $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ artımı üçün $\Delta f > 0$ olarsa, onda $z = f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində minimumu var.

Funksiyanın verilmiş oblasta (təyin oblastında) bir neçə maksimum və minimumu ola da bilər və maksimum, minimumu olmaya da bilər.

Teorem (ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt).

Diferensiallanan $z = f(x;y)$ funksiyası $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində ekstemuma malikdirsə, onda $z = f(x;y)$funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələri $M_0(x_0;y_0)$nöqtəsində sıfra bərabərdir. Yəni

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = 0. \qquad (2)$$

y dəyişəninə y_0 qiymətini versək, onda $f(x;y)$ bir x dəyişəninin funksiyası olur. Bu funksiyanın $x = x_0$ nöqtəsində ekstemumu olduğu üçün onun $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ var və sıfra bərabərdir. Eyni qayda ilə $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}$ törəməsinin sıfra bərabər olduğunu göstərmək olar.

(2) bərabərlikləri ekstemumun zəruri şərtini ifadə edirlər. (2) sistemini ödəyən nöqtələrə stasionar nöqtələr deyilir. Funksiya ekstemum qiymətini xüsusi törəmələrinin biri və ya hər ikisi olmadığı nöqtələrdə də ala bilər.

43. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ funksiyasının ekstremumunu tapın.

Həlli.

Verilən funksiyanın xüsusi törəmələrini tapaq.

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \equiv 6xy - 12$$

Ekstremum varlığı üçün zəruri şərti əsasən

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Buradan $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 y^2 = 4 \end{cases}$ Viyet teoreminə $K^2 - 5K + 4 = 0$ buradan $K_1 = 1; \quad K_2 = 4$

Odur ki $\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \end{cases}$ buradan isə $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

olduğundan. Bu funksiyanın $M_1(1:2)$ $M_2(2;1)$ $M_3(-1;-2)$ $M_4(-2;-1)$ kimi stasionar nöqtələri vardı.

Funksiyanın ikinci tərtib törəmələrini tapaq

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y$$

və hər dir nöqtə üçün $\Delta = AC - B^2$ diskrimenantını hesablayaq

1) $M_1(1;2)$ nöqtəsi üçün $A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6;$ $B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} = 12$

$C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 6$ $\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ olduğu üçün M_1 nöqtəsində eksremum yoxdur.

2) $M_2(2:1)$ nöqtəsi üçün A=12, B=6, C=12, $\Delta = 144 - 36 > 0$ və $A > 0$ olduğundan M_2 nnöqtəsində funksiyanın minimumu vardı. Funksiyanın bu minimum qiyməti

$$Z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28 \text{ olur.}$$

3) $M_3(-1;-2)$ nöqtəsi üçün A =- 6, B= - 12, C = - 6;

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$ olduğundan M_3 nöqtəsində ekstremum yoxdur.

4). $M_4(-2;-1)$ nöqtəsi üçün A=-12; B = -6; C=-12,

$\Delta = 144 - 3 > 0,\ A > 0$ olduğunda bu funksiyanın $M_4(-2;-1)$ nöqtəsində maksimum vardır. Bu maksimum qiymət $Z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$ olur.

44. İbtidai funksiya,qeyri müəyyən inteqral və onun xassələri.

Həlli.

Tərif. Əgər $]a,b[$ intervalının bütün nöqtələrində diferensiallanan $F(x)$ funksiyasının $F'(x)$ törəməsi $f(x)$ funksiyasına bərabərdirsə, yəni $F'(x) = f(x)$-dirsə, onda $F(x)$ funksiyasına $]a,b[$ intervalında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası deyilir.

Tərif. $f(x)$ funksiyasının $]a,b[$ intervalında bütün ibtidai funksiyaları çoxduğuna, yəni $\{F(x) + c\}$-yə $f(x)$ funk- siyasının $]a,b[$ intervalında qeyri-müəyyən inteqralı deyilir və $\int f(x)\,dx$ (1)

kimi işarə olunur.

Tərifə əsasən $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ yaza bilərik. Burada $f(x)$ funksiyası inteqral altı funksiya, $f(x) \cdot dx$ inteqralaltı ifadə, x inteqral dəyişəni adlanır. $\int$ - işarəsi qeyri-müəyyən inteqral işarəsidir.

Verilmiş funksiyanın ibtidai funksiyasını tapmağa həmin funkisyanı inteqrallamaq deyilir.

Qeyri-müəyyən inteqralın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

1. Qeyri-müəyyən inteqralın törəməsi inteqralaltı funksiyaya bərabərdir. Yəni $F'(x) = f(x)$ olarsa, onda $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$ olur.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x).$$

2. Qeyri-müəyyən inteqralın diferensialı inteqralaltı ifadəyə bərabərdir: $d\int f(x)\,dx = f(x)\cdot dx$.

$$d\int f(x)\,dx = d[F(x)+c] = dF(x) = \underbrace{F'(x)}_{f(x)}dx = f(x)\cdot dx.$$

3. Hər hansı bir funksiya diferensialının qeyri-müəyyən inteqralı, həmin funksiya ilə ixtiyari sabitin cəminə bərabərdir: $\int dF(x) = F(x)+c$.

$$\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x)+c \quad .$$

4. İki və ya bir neçə funksiyanın cəminin qeyri-müəyyən inteqralı onların inteqrallarının cəminə bərabərdir:

$$\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int \varphi(x)\,dx \qquad (2)$$

. İsbat üçün həmin bərabərliyin sol və sağ tərəfinin törəmələrini tapaq:

$$\left(\int [f(x)+\varphi(x)]\,dx\right)' = f(x)+\varphi(x). \qquad (3)$$

$$\left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' + \left(\int g(x)dx\right)' = f(x)+\varphi(x) \qquad (4)$$

(3) və (4)-dən deyə bilərik ki, (3) və (4)-ün sol tərəfində duran ibtidai funksiyalar bir-birindən sabit toplananla fərqlənir. (2) bərabərliyini də bu mənada başa düşmək lazımdır.

5. Sabit vurğu qeyri-müəyyən inteqral işarəsi altından onun işarəsi xaricinə çıxartmaq olar: $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$. (5)

$\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$ və $\left(k\int f(x)dx\right)' = k\cdot\left(\int f(x)dx\right)' = kf(x)$ olduğundan $\int kf(x)dx$ və $k\int f(x)dx$ inteqralları eyni $k\cdot f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyalarıdır. Bu ibtidai funksiyalar bir-birindən sabit toplananla fərqlənir. (5) bərabərliyini bu mənada başa düşmək lazımdır.

45. Qeyri müəyyən inteqralda inteqrallama üsulları

Həlli.

1. Dəyişəni əvəzetmə üsulu.

Qeyri-müəyyən inteqralların hesablanmasında dəyişəni əvəzetmə üsulu əsas üsullardan biridir. İnteqrallamada mahirlik çox zaman dəyişəni elə əlverişli əvəz etməkdən ibarət olur ki, bunun nəticəsində verilmiş inteqral olduqca sadələşir və asanlıqla tapılır.

Tutaq ki,

$$\int f(x)dx \tag{1}$$

inteqralını tapmaq lazımdır və $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiyanın varlığını bilirik, lakin onu birbaşa tapmağı bacarmırıq. Bu halda

$$x = \varphi(t) \tag{2}$$

götürməklə dəyişəni əvəz edirik. Burada $\varphi(t)$ funksiyası kəsilməz törəməsi və tərs funksiyası olan funksiyadır.

(2)-dən

$$dx = \varphi'(t)dt \tag{3}$$

alırıq. (2) və (3)-ü (1)-də nəzərə alsaq

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt \tag{4}$$

alırıq. (4) bərabərliyinin doğruluğunu göstərmək üçün (4)-ün sol və sağ tərəflərinin diferensiallarının biri-birinə bərabər olduğunu göstərmək kifayətdir.

(4)-dən $d\int f(x)dx = f(x)dx = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt$ (5)

(5)-dən $d\left(\int f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)dt\right) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t)\cdot dt$ (6)

(5) və (6)-dan (4)-ün doğruluğu alınır. Qeyd edək ki, (4) düsturuna qeyri-müəyyən inteqralda dəyişəni əvəzetmə düsturu deyilir. (4) bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqralı hesablandığdan sonra yenidən x dəyişəninə qayıtmaq üçün $x=\varphi(t)$ əvəzləməsindən t dəyişəni yerinə onun x-lə tapılmış ifadəsini yazmaq lazımdır.

Dəyişənin əvəz olunması üsulundan istifadə edərək

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+c;\ \int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+c;\ \int sinkxdx = \frac{-1}{k}coskx+c;$$

$$\int coskxdx = \frac{1}{k}sinkx+c;\ \int a^{kx}\cdot dx = \frac{a^{kx}}{klna}+c;\ \int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}ln|ax+b|+c$$

olduğunu göstərmək olar.

Tutaq ki, $u(x)$ və $v(x)$ funksiyaları $]a;b[$ intervalında inteqrallanandır və bu intervalda $v(x)\cdot u'(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası vardır. Onda $]a;b[$ intervalında $u(x)\cdot v'(x)$ funksiyasının da ibtidai funksiyası vardır və

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)\cdot dx \tag{7}$$

düsturu doğrudur.

(7) düsturuna qeyri-müəyyən intervalda hissə-hissə inteqrallama düsturu deyilir.

46. $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$ inteqralını hesablayın.

Həlli.

$$\int \frac{xdx}{x^2+2x-3} = \int \frac{1}{(x-1)(x+3)}dx = \int\left(\frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+3)}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + c$$

47. Müəyyən inteqral və onun xassələri.

Həlli.

Sonlu $[a,b]$ parçasında kəsilməyən $f(x)$ funksiyası verilsin. $[a,b]$ parçasını $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ nöqtələri ilə n hissəyə bölək (burada $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ olduğu fərz olunur). Bu halda $[a,b]$ parçası kiçik $[x_{k-1}, x_k]$ $(k=\overline{1,n})$ hissələrinə bölünür. $[x_{k-1}, x_k]$ parçasının uzunluğunu Δx_k ilə işarə edək:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad (k=\overline{1,n}).$$

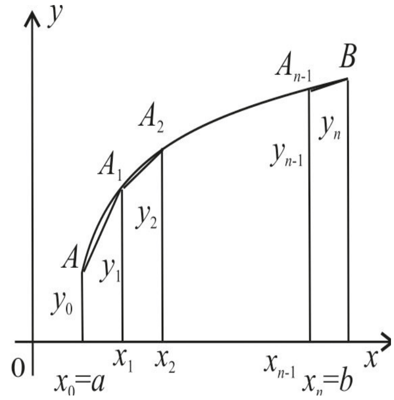
$$\alpha_1 \in [x_0, x_1], \alpha_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \alpha_k \in [x_{k-1}, x_k], \ldots,$$

$\alpha_n \in [x_{n-1}, x_n]$ ixtiyari nöqtələrini götürək $(x_{k-1} < \alpha_k < x_k,\ k=\overline{1,n})$ və bu nöqtələrin hər birində funksiyanın qiymətlərini uyğun olaraq $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots,$ $f(\alpha_k), ..., f(\alpha_n)$ işarə edərək $\dot{I}(x_k, \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k$ (1)

cəmini düzəldək. (1) cəminə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında inteqral cəmi deyilir. Bu cəmin qiyməti $[a,b]$ parçasının kiçik parçalara bölgü qaydasından, həm də bu kiçik parçalarda α_k nöqtələrinin seçilməsindən asılıdır. $\lambda = max\Delta x_k$ $(k=\overline{1,n})$ işarə edək.

<u>**Tərif.**</u> $[a,b]$ parçasının kiçik parçalara bölünmə qaydasından və bu kiçik parçalarda α_k nöqtələrinin seçilmə üsulundan asılı olmayaraq $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə (1) inteqral cəminin $\lambda \to 0$ şərtində sonlu limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə müəyyən inteqralı

deyilir və $\int_a^b f(x)\,dx$ kimi işarə olunur. Tərifə əsasən yaza bilərik: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\cdot \Delta x_k$. (2)



Burada $f(x)$-ə inteqralaltı funksiya, $f(x)\cdot dx$-ə inteqralaltı ifadə, a və b ədədləri uyğun olaraq müəyyən inteqralın aşağı və yuxarı sərhədləri, x dəyişəni isə inteqrallama dəyişəni adlanır. $[a,b]$ parçası inteqrallama parçası adlanır. Müəyyən inteqralın həndəsi mənasını verək. Bunun üçün əvvəlcə (1) inteqral cəminin həndəsi izahını göstərək.

Yuxarıdan $y=f(x)$ $(f(x)>0)$ funksiyasının əyrisi ilə, yanlardan $x=a$ və $x=b$ düz xətləri ilə, aşağıdan absis oxu ilə əhatə olunmuş əyri xətli trapesi çəkək (şəkil 1).
Şəkildən görünür ki, $I(x_k,\alpha_k)$ inteqral cəmi oturacağı Δx_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ hündürlüyü $f(\alpha_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, sahəsi $f(\alpha_k)\cdot \Delta x_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ olan ştrixlənmış düzbucaqlıların sahələrinin cəmidir Onda $\lim_{\lambda \to 0} I(x_k,\alpha_k) = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$
inteqralı həndəsi olaraq $f(x)\geq 0$ olduqda şəkildəki $a\ A\ B\ b$ əyrixətli trapesin sahəsini verir. Qeyd edək ki, müəyyən inteqral yalnız $f(x)$ funksiyasının təbiətindən və inteqralın sərhədlərindən asılı olur, inteqral dəyişənindən asılı olmur, ona görə inteqrallama dəyişəninin istənilən dəyişən ilə işarə etmək olar. Yəni $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz$

Müəyyən inteqral anlayışını verərkən biz $a<b$ olduğunu fərz etmişdik. $b<a$ olduqda

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

olduğunu qəbul edək. $a=b$ olduqda yenə də qəbul edək ki, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Müəyyən inteqralın əsas xassələri

<u>Xassə 1.</u> $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, $k\cdot f(x)$ funksiyası da $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır və $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ olur.

<u>Xassə 2.</u> $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda bir neçə funksiyanın cəminin müəyyən inteqralı, toplananların müəyyən inteqrallarının cəminə bərabərdir. $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$ olur.

Xassə 3. $f(x)$ funksiyası $[a,c]$ və $[c,b]$ parçalarında inteqrallanandırsa, onda $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır və $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ olur.

Xassə 4. $[a,b]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində $f(x) \le \varphi(x)$ şərtini ödəyirsə, onda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx. \qquad (2)$$

Xassə 5. m və M ədədləri $[a, b]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ funksiyasının ən kiçik və ən böyük qiymətləridirsə və $a < b$-dirsə, onda

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \qquad (4)$$ olur.

Xassə 6 (orta qiymət teoremi). $f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda elə $c \in]a,b[$, $(a < c < b)$ nöqtəsi vardır ki,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c) \qquad (6)$$ olur.

48. $\int \sin^3 x dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli.

$u = \cos x$ əvəz edək

$$du = -\sin x dx$$

$$\sin x dx = -du$$

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x dx =$$

$$= -\int (1 - u^2)du = -\left(u - \frac{1}{3}u^3\right) + C = -\left(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right) + C$$

49. $J = \int_0^2 x^2\sqrt{4 - x^2}dx$ inteqralını hesablayın.

Həlli.

$x = 2\sin t$ əvəz edək $x = 0$ olarsa $t = 0$ olur. $x = 2$ olarsa $t = \frac{\pi}{2}$ olur . Onda $dx = 2\cos t dt$.

$$J=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t2\sqrt{1-\sin^2 t}\,2\cos tdt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\sin^2 t\cos t\cdot 2\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\sin^2 t\cos^2 tdt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2tdt=$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=2\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=2\left(\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\sin 2\pi\right)-2\left(0-\frac{1}{4}\sin 0\right)\right)=\pi$$

Cavab π.

50. $J=\int_3^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$ inteqralını hesablayın.

Həlli.

Inteqralda aşağidaki əvəzləməni aparaq:

$\sqrt{x+6}=t\Rightarrow x+6=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

eyni qayda ilə $x-1=t^2-7$

Dəyişəni əvəz etdiyimizdən inteqralın sərhəddidə dəyişər

$x_1=3;\qquad t_1=\sqrt{3+6}=3$

$x_2=10\qquad t_2=\sqrt{10+6}=4$

$$\int_3^4\frac{2tdt}{(t^2-7)t}=\int_3^4\frac{2dt}{t^2-7}=\frac{2}{2\sqrt{7}}\ln\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\Bigg|_3^4=\frac{1}{\sqrt{7}}\left[\ln\left|\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}\right|-\ln\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right|\right]$$