Riyaziyyat-1 RUS

1. По определению, если равенство $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ выполняется при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис.
Учитывая данные, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} 2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ 3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=0 \\ \lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=0 \end{cases}$$

Из 3-го уравнения получаем $\lambda_1=-4\lambda_3$. Учитывая, что в 1-ом и 2-ом уравнениях, получаем

$$\begin{cases} -8\lambda_3+5\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ -12\lambda_3+7\lambda_2-2\lambda_3=0 \end{cases}.\quad \text{Отсюда} \begin{cases} 5\lambda_2-5\lambda_3=0 \\ 7\lambda_2-14\lambda_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2-\lambda_3=0 \\ \lambda_2-2\lambda_3=0 \end{cases}$$

Если из 1-го уравнения почленно вычесть 2-ое уравнение, получим $\lambda_3=0$. Учитывая это в других уравнениях, получаем $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, эти векторы образуют базис.

Чтобы найти разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$, надо решить уравнение $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{d}$.

Учитывая данные задачи, получим $\begin{cases} 2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=4 \\ 3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=12 \\ \lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3 \end{cases}$.

Сохраним последнее уравнение без изменений. Умножим это уравнение на 2 и прибавим к 1-ому уравнению, затем умножим на 3 и прибавим ко 2-ому уравнению. Получим

$$\begin{cases} \lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3 \\ 5\lambda_2-5\lambda_3=10 \\ 7\lambda_2-14\lambda_3=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3 \\ \lambda_2-\lambda_3=2 \\ \lambda_2-2\lambda_3=3 \end{cases}$$

Если из 2-го уравнения почленно вычесть последнее, получим $\lambda_3=-1$. Учитывая это во втором уравнении получим $\lambda_2+1=2\Rightarrow\lambda_2=1$ Учитывая $\lambda_3=-1$ в уравнении $\lambda_1+4\lambda_3=-3$ получим $\lambda_1=1$.

И так , получаем новые координаты $\overline{d}(1;1;-1)$. Напишем разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$. $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$

2. Чтобы проверить образуют ли, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ базис, из равенства

$\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}=0$ получаем систему уравнений: $\begin{cases} 2\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2=0 \end{cases}$

Почленно сложив эти уравнения , получим $\lambda_2 = 0$. Учитывая это в одном из уравнений, получаем $\lambda_1 = 0$.

Следовательно, по определению векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\overline{P}$.

$$\overline{P} = 2(2;-2)-(2;-1)+(2;4)=(4;-4)-(2;-1)+(2;4)=(4;1)$$

Для того, чтобы написать разложения вектора $\overline{P}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, требуется выполнение равенства $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}=\overline{p}$.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ Если почленно сложить эти уравнения получим

$\lambda_2 = 5$. Учитывая это в 1-ом уравнении, получим

$2\lambda_1 + 2\cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$. Итак, $\overline{p} = -3\overline{a}+5\overline{b}$

3. Написать и доказать теорему о линейной зависимости векторв в R^n.

ТЕОРЕМА 1. Если система содержит не менее двух векторов, то для линейной зависимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов системы являлся линейной комбинацией остальных векторов системы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сперва необходимость.

Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ - линейно зависимые. Тогда по определению линейной зависимости векторов равенство: $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a}_k = 0$

Имеет место при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Допустим $\lambda_k \neq 0$. Тогда обе части равенства разделим на λ_k.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\overline{a}_2 + ... + \overline{a}_k = 0 \Rightarrow \overline{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} - ... - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\overline{a}_{k-1}$$

$$\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$$

А это разложение вектора $\overline{a}_k$ по остальным векторам этой системы.

Теперь докажем достаточность.

Пусть $\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$ Перенесем все в одну сторону, получим $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1} - \overline{a}_k = 0$

Как видно, $\lambda_k = -1 \neq 0 \Rightarrow$ по определению линейной зависимости векторов векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ - линейнозависимы.

Теорема доказана полностью.

4. Определители и правила их вычисления. Минор и алгебраическое дополнение. Основные свойства определителей.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца определителя n-го порядка, содержащих данный элемент, называют *минором этого элемента*.

Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Например, минором элемента a_{11} в определителе третьего порядка является: $M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Произведение минора M_{ij} на множитель $(-1)^{i+j}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается так:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$$

Свойство 1. Если заменить все строки столбцами (и наоборот), значение определителя не изменится. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n_1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$

Свойство устанавливает равноправность строк и столбцов.

Свойство 2. Если поменять местами две строки (столбца), полученный новый определитель будет отличаться от предыдущего только знаком *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Следствие. Определитель, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю.

Действительно, при перестановке двух одинаковых строк (столбцов) определитель Δ не изменится, а согласно свойству 2 его знак изменится, т.е. получается, что $\Delta=-\Delta$. А это возможно только если $\Delta=0$.

Свойство 3. Если у элементов какой-либо строки (столба) имеется общий множитель его можно вынести за знак определителя, *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Для доказательства достаточно разложить определитель по элементам первой строки.

<u>*Следствие 1.*</u> Определитель, у которого одна строка (столбец) состоит только из нулей, равен нулю.

<u>*Следствие 2.*</u> *Для* умножения определителя на число, достаточно на это число умножить все элементы какой-либо строки (столбца), *Н-р*

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & ka_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & ka_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & ka_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

<u>*Следствие 3.*</u> Определитель, у которого две строки (столбца) пропорциональны, равен нулю.

Действительно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$

<u>*Свойство 4.*</u> Если все элементы, какой- либо строки (столбца) состоят из суммы двух элементов, то этот определитель равен сумме двух определителей в одном из которых за элементы той же строки (столбца) берутся первые слагаемые, а в другом – вторые слагаемые. При этом остальные строки (столбцы) остаются как в данном определителе *Н-р*.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство доказывается прямым вычислением определителей.

<u>Следствие.</u> Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на одно и то же число и сложить или вычесть из соответствующих элементов другой строки (столбца), определитель не изменится. *Н-р*, пусть

<u>*Свойство 5.*</u> Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю. *Н-р*, для определителя 3-го порядка: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

5. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^2 - 3x + 2$, найти $f(A) = ?$

$$f(A)=A^2-3A+2E=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&-3-6+0&0-3+0\\0+0+3&0+4-3&0+2+2\\3+0+6&-9-6-6&0-3+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-9&0\\0&6&3\\9&-9&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-9&-3\\3&1&4\\9&-21&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-9&0\\0&6&3\\9&-9&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-3\\3&-3&1\\0&-12&-3\end{pmatrix}$$

6. Если $A=\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}$ и $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2$, найти

$f(A)=4A^3-2A^2+3A-2E$.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3&-6\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7&-6\\-2&3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=$$

\

$$4\begin{pmatrix}-14-6&21+0\\4+3&-6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&-12\\-4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-80&84\\28&-24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&-12\\-4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102&105\\35&-32\end{pmatrix}$$

7. Проверить для матриц

$A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&3&5\\2&3&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4&2&3\\-1&1&-2\\2&-1&1\end{pmatrix}$ верность

$((AB)C=A(BC))$

$$AB=\begin{pmatrix}2&-1&4\\1&3&5\\2&3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&1\\2&3&2\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1&-8\\14&8&-3\\11&18&10\end{pmatrix}$$

$$((AB)C)=\begin{pmatrix}8 & 1 & -8\\ 14 & 8 & -3\\ 11 & 18 & 10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 25 & 14\\ 42 & 39 & 23\\ 46 & 30 & 7\end{pmatrix}$$

$$BC=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 9 & 2\\ 9 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$(A(BC))=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 5\\ 2 & 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10 & 9 & 2\\ 9 & 5 & 2\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 25 & 14\\ 42 & 39 & 23\\ 46 & 30 & 7\end{pmatrix}$$

$((AB)C = A(BC))$ -nun doğruluğunu yoxladıq

8. Если все элементы какого-либо столбца представлячет собой суммы двух слагаемых , то этот определитель можно написать в виде суммы двух определителей..

$$\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+2a+1\\ b & b^2 & b^2+2b+1\\ c & c^2 & c^2+2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a+1\\ b & 1 & b^2+2b+1\\ c & 1 & c^2+2c+1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2\\ b & b^2 & b^2\\ c & c^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a+1\\ b & b^2 & 2b+1\\ c & c^2 & 2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a\\ b & 1 & b^2+2b\\ c & 1 & c^2+2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Первый и последний определители равны нулю, так как по свойству определителя, определитель с двумя одинаковыми и пропорциональными столбцами равен нулю.

Разложим оставшиеся определители

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a\\ b & b^2 & 2b\\ c & c^2 & 2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 2a\\ b & 1 & 2b\\ c & 1 & 2c\end{vmatrix}=$$

$$=0+\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}+0=\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}=0$$

9. Доказать равенство и написать свойства определителя, которые используются в этом доказательстве.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

Если все элементы какой-либо строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, в первом, из которых элементами этой строки (столбца)будут первые слагаемые, а во втором элементами этой строки (столбца) будут вторые слагаемые. При этом остальные элементы остаются такими как в данном определителе. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Если поменять местами две строки или два столбца, то определитель поменяет знак на противоположный. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцам) равен нулю.

Используя эти свойства, напишем

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

10. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Мы знаем, что рангом называется наивысший порядок минора, отличного от нуля. Чтобы найти ранг, воспользуемся методом окаймляющих миноров.

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0$ $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = 8 \neq 0$

Следовательно ранг матрицы $r(A) = 3$. Тогда

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$ является базисным минором..

11. Ранг матрицы и его вычисления.

Пусть дана прямоугольная матрица: $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и столбцов. Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы А, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы А.

Матрица размерности $m \times n$ имеет $C_m^k \cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

$$\left(C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}; \qquad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$

<u>*ОПРЕДЕЛЕНИЕ.*</u> *Рангам матрицы А* называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором.*

$$0 \le r(A) \le \min(m,n)$$

В матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок.

Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположен базисный минор, называется *базисными столбцами и строками.*

<u>ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.</u>

Базисные столбцы (строки) линейно независимы. Любая строка (или столбец) матрицы является линейной комбинацией его базисных строк (столбцов).

Если $r(A) = r(B)$, то матрицы А и В называются *эквивалентными.* В этом случае пишут $A \sim B$. Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований. Под элементарными преобразованиями понимают:

1) замену строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками.
2) перестановку строк матрицы.
3) вычеркивания строки, все элементы которой равны нулю.

4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля и прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ. МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ.

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M_k отличного от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе минор $M_k \neq 0$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если же среди миноров $(k+1)$-го порядка окажется ненулевой минор, вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований.

Этот метод основан на том факте, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранг.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду.

Свойства:

1) $r(A+B) \leq r(A)+r(B)$ 2) $r(A+B) \geq r(A)-r(B)$

3) $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$ 4) $r(A^{\Gamma}A) = r(A)$

5) $r(AB) \geq r(A)+r(B)-n$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Найдем обратную матрицу А методом линейных преобразований. Для этого построим матрицу $Q = (A/E)$.

С помощью элементарных преобразований приведем её к виду E/A.

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Отметим, что мы сложили 1-ую строку со 2-ой и полученное записали во 2-ой строке, 1-ую сложили с 3-й строкой и записали в третью строку. Затем сложили 1-ую строку с 3-й строкой и записали в 1-ую строку. В итоге нашли A^{-1} . $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{pmatrix}$ Найти A^{-2}.

Мы знаем, что $A^{-2}=A^{-1}A^{-1}$. Чтобы найти A^{-1} воспользуемся формулой A^{-2} $\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{vmatrix}=0+2-2+4-0-12=-8$ $\quad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\1&4\end{vmatrix}=12-1=11$;

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&1\\2&4\end{vmatrix}=-(-4-2)=6$; $\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1&3\\2&1\end{vmatrix}=-1-6=-7$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&2\\1&4\end{vmatrix}=-(4-2)=-2$; $\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}=0-4=-4$;

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0&1\\2&1\end{vmatrix}=-(0-2)=2$; $\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}=1-6=-5$;

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}=-(0+2)=-2$; $\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0&1\\-1&3\end{vmatrix}=0+1=1$

Значит $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11&-2&-5\\6&-4&-2\\-7&2&1\end{pmatrix}$, тогда учитывая, что $A^{-2}=A^{-1}\cdot A^{-1}$ получим

$$A^{-2}=\left(-\frac{1}{8}\right)^2\begin{pmatrix}11&-2&-5\\6&-4&-2\\-7&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11&-2&-5\\6&-4&-2\\-7&2&1\end{pmatrix}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}121&-12&+35&-22&+8&-10&-55&+4&-5\\66&-24&+14&-12&+16&-4&-30&+8&-2\\-77&+12&-7&14&-8&+2&35&-4&+1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}144&-24&-56\\56&0&-24\\-72&8&32\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}18&-3&-7\\7&0&-3\\-9&1&4\end{pmatrix}$$

Покажем, что $A^2A^{-2}=E$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&9\\-1&9&5\\7&9&21\end{pmatrix}$$

$$A^2A^{-2}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&5&9\\-1&9&5\\7&9&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18&-3&-7\\7&0&-3\\-9&1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}54&+35&-81&-9&+0&+9&-21-15+36\\-18&+63&-45&3&+0&+5&7-27+20\\126&+63&-189&-21&+0&+21&-49-27+84\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

14. $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ 2x_1+3x_2+x_3=1 \\ 2x_1-x_2+3x_3=11 \\ 3x_1-4x_2-x_3=-5 \end{cases}$

Напишем основную матрицу коэффициентов. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

и расширенную матрицу $A^*=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

По теореме Кнокера-Капелли для существования решения системы, необходимо выполнение условия $r(A)=r(A^*)$.

Сперва найдем $r(A)$.

$M_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=9-4\neq 0$;

$M_3=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=27-2+4-6+3-12=14\neq 0$ следовательно $r(A)=3$.

Теперь найдем $r(A^*)$.

Для этого найдем

$$|A^*|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -4 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}=$$

$$=0-56-24-6\cdot 7\cdot 4-8-0=-80-168-8=-256\neq 0$$

Так как $|A^*|\neq 0$, то $r(A^*)=4$.

Так как $3=r(A)\neq r(A^*=4)$ то система не совместна.

15

Система уравнений, состоящая из m линейных уравнений и n неизвестных. Теорема Кронекера-Капелли.

Систему уравнений вида $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m_1}x_1+a_{m_2}x_2+\ldots+a_{m_n}x_n=b_m \end{cases}$ (1)

называют системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Коэффициенты этих уравнений можно записать в виде матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

А называется основной матрицей системы (1); В – столбец свободных членов, составленный из чисел, стоящих в правых частях уравнений системы. Если все свободные члены равны нулю, то есть В – нуль матрица, то система (1) называется однородной. Если же хотя бы один из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ отличен от нуля, то система (1) называется неоднородной.

Упорядоченная совокупность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (1), если каждое уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел α_i вместо $X_i (i=1,2,\ldots,n)$.

Решить систему значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то система называется *совместной.*

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Если совместная система имеет одно решение, то она называется *определенной,* если более одного решения, то – *неопределенной.*

Систему линейных уравнений (1) можно записать и в матричной форме: $A \cdot X = B$, где *А*- основная матрица, *В* – столбец свободных членов, а *Х*- матрица –столбец, составленная из неизвестных $X_j (j=1,2,\ldots,n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матрица, состоящая из основной матрицы с добавлением к ней столбца свободных членов системы (1), называется расширенной матрицей системы (1)

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ранг матрицы A^* либо равен рангу А, либо на единицу больше. Чтобы решить систему (1), сначала надо выяснить, совместна она или несовместна.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ.

Система линейных уравнений (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы A^* равен рангу матрицы А.

Причем, если 1) $r(A)=r(A^*)=n$, то система определенная (имеет одно решение).

2) $r\left(A^{*}\right)=r(A)<n$, то система неопределенная (имеет множество решений).

16. Мы знаем, что для существования отличного от нуля решения системы линейных однородных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы детерминант основной матрицы коэффициентов был равен нулю.

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4+12a+7+3-14a-8=0 \Rightarrow -2a-2=0 \Rightarrow$ если $a=-1$, то

система имеет множество решений. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$

Третье уравнения примем за ведущее . $\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 3x_2-x_3=0 \\ 3x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_3=3x_2$

Пусть $x_2=C\in R$ тогда получаем $x_3=3C$ и $x_1-C+6C=0; \quad x_1=-5C$.

Тогда $\{-5C;C;3C\}$ - общее решение системы.

17. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ -x_1+\quad x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=11 \\ 5x_1+6x_2+7x_3-2x_4=19 \end{cases}$

Первое уравнение примем за ведущее. Сохранив x_1 в первом уравнении, исключим ее из остальных уравнений методом сложения .

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ 2x_2-2x_3+6x_4=-14 \\ -2x_2+14x_3-12x_4=50 \\ -4x_2+22x_3-22x_4=84 \end{cases}$$

Теперь за ведущее уравнение примем второе уравнение и исключим остальные неизвестные методом сложения.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ 2x_2-2x_3+6x_4=-14 \\ 12x_3-6x_4=36 \quad |5 \\ 18x_3-10x_4=56 \quad |-3 \end{cases} \Rightarrow 60x_3-54x_3-30x_4+30x_4=180-168 \;;$$

$6x_3=12$

$x_3=2$

Подставив $x_3 = 2$ в $12x_3 - 6x_4 = 36$ получим $24 - 6x_4 = 36; \quad 6x_4 = -12; \quad x_4 = -2$

$$2x_2 - 4 - 12 = -14 \qquad x_1 + 2 - 6 - 8 = -13$$
$$2x_2 = 2 \qquad x_1 = -1$$
$$x_2 = 1$$

Значит общее и частные решения совпадают: $\{-1;1;2;-2\}$.

18. $Ax = (x_1 + x_2 + 8x_3; 2x_2; x_1 - x_3)$

Матрица этого преобразования составляется из коэффициентов

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти собственные числа надо решить уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 8(2-\lambda)0 - 0 = 0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - 8) = 0; \qquad \lambda_1 = 2, \; -(1-\lambda^2) - 8 = 0; \; \lambda^2 = 9; \; \lambda_2 = 3; \; \lambda_3 = -3$$

Сумма их будет $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (-3) = 2$

19/. из коэфициентов при неизвестных заданных преобразований построим матрицы А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда преобразование AB-BA будет иметь вид: $\begin{cases} x'' = 5x - y + 4z \\ y'' = 3x - 6y + z \\ z'' = 3y \end{cases}$

20. Мы знаем, что собственные числа находятся из уравнения $|A-\lambda E|=0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+0+0-0-4(2-\lambda)+4\lambda 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=0\ ;-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8\lambda-8=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8(\lambda-1)=0;\ (\lambda-1)(\lambda(2-\lambda)+8)=0$$

$$\lambda_1=1 \quad 2\lambda-\lambda^2+8=0\ ; \quad \lambda^2-2\lambda-8=0; \quad \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4, \lambda_3=-2$.

Пусть $\lambda_1=1$, тогда $\begin{cases}(2-\lambda)x_1-2x_2+0=0\\ -2x_1+(1-\lambda)x_2-2x_3=0\\ 0\cdot x_1-2x_2-\lambda x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-x_1-2x_2=0\\ -2x_1-2x_3=0\\ -2x_2-x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-2x_2\\ x_1=x_3\\ x_3=-2x_2\end{cases}$

Пусть $x_2=C_1$ $(0\neq C_1\in R)$, тогда собственный вектор будет $\{-2C_1;C_1;-2C_1\}$

Пусть $\lambda_2=4$, тогда

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2=0\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0\\ -2x_2-4x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-x_2\\ 2x_1-3x_2-2x_3=0\\ x_2=-2x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_3=C_2\neq 0\\ x_2=-2C_2\\ x_1=2C_2\end{cases}.$$

Получаем собственный вектор $\{2C_2;-2C_2;C_2\}$.

Пусть $\lambda_3=-2$ тогда.

$$\begin{cases}4x_1-2x_2=0\\ -2x_1+3x_2-2x_3=0\\ -2x_2+2x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_2=2x_1\\ -2x_1+3x_2-2x_3=0\\ x_2=x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=C_3\\ x_2=2C_3\\ x_3=2C_3\end{cases}$$

Получаем собственный вектор $\{C_3;2C_3;2C_3\}$.

21/ Пусть в R^n с фиксированным базисом $e_1,e_2,\dots,e_n$ задано линейное преобразование А. Каждый вектор пространства R^n можно разложить по базисным векторам. Для $\overline{X}\in R^n$:

$$\overline{X}=x_1e_1+x_2e_2+\ldots+x_n\overline{e}_n$$

Координаты $\overline{X}$ запишем в столбец $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

Так как преобразование А – линейное, то

$$A\overline{X}=x_1A\overline{e}_1+x_2Ae_2+\cdots+x_nA\overline{e}_n \qquad (1)$$

С другой стороны векторы $Ae_i\left(i=1,\ldots,n\right)$ являются элементами R_n и поэтому и их можно разложить по векторам базиса $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$:

$$Ae_i=a_{1i}\bar{e}_1+a_{2i}\bar{e}_2+\ldots+a_{ni}\bar{e}_n \qquad \left(i=1,\ldots,n\right)$$

А именно
$$\begin{aligned}
&A\bar{e}_1=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+\ldots+a_{n1}\bar{e}_n\\
&A\bar{e}_2=a_{12}\bar{e}_2+a_{22}\bar{e}_2+\ldots+a_{n2}\bar{e}_n\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&A\bar{e}_n=a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+\ldots+a_{n_n}\bar{e}_n
\end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в равенстве (1), получим:

$$\begin{aligned}
A\bar{X}&=\left(a_{11}\bar{e}_1x_1+a_{21}\bar{e}_2x_1+\ldots+a_{n1}\bar{e}_nx_1\right)+\\
&+\left(a_{12}\bar{e}_1x_2+a_{22}\bar{e}_2x_2+\ldots+a_{n_2}\bar{e}_nx_2\right)+\ldots+\\
&+\left(a_{1n}\bar{e}_1x_n+a_{2n}\bar{e}_2x_n+\ldots+a_{nn}\bar{e}_nx_n\right)=\\
&=\left(a_{11}x_1+a_{12}x_{21}+\ldots+a_{1n}x_{n1}\right)\bar{e}_1+\left(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+\right.\\
&\left.+a_{2n}x_n\right)\bar{e}_2+\ldots+\left(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n\right)\bar{e}_n
\end{aligned} \tag{2}$$

Т.е. $\quad A\bar{X}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+\ldots+y_n\bar{e}_n$, где

$$\left.\begin{aligned}
&y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\\
&y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\} \text{ или } \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{3}$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ называется матрицей преобразования А в данном базисе $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$.

Из соотношения (3) видно, что для того, чтобы получить координаты преобразованного вектора $\bar{Y}$ надо матрицу линейного преобразования умножить на столбец координат вектора $\bar{X}$.

Если в n - мерном линейном пространстве задан базис $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$, то каждому линейному преобразованию соответствует квадратная матрица порядка n, и наоборот.

Чтобы найти матрицу линейного преобразования, надо:

1) подвергнуть его действию базисные векторы $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n$
2) полученные векторы $Ae_i \quad \left(i=1,\ldots,n\right)$ разложить в этом базисе

$$\left.\begin{array}{l} Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \quad \ldots \quad \ldots \\ Ae_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{n_n}e_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

3) коэффициент разложения (4) записать в виде матрицы A, помещая коэффициент строк в соответствующие столбцы матрицы.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Ненулевой вектор $\overline{X} \in R_n$ называется собственным вектором линейного преобразования A, если найдется такое число λ, что

$$A\overline{X} = \lambda\overline{X} \qquad \left(\overline{X} \neq 0\right)$$

Само число λ называется характеристическим числом линейного преобразования A, соответствующим вектору $\overline{X}$.

Если линейное преобразование A в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то уравнение $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ в координатной форме имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Известно, что для существования отличного от нуля решения системы однородных уравнений, необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя основной матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

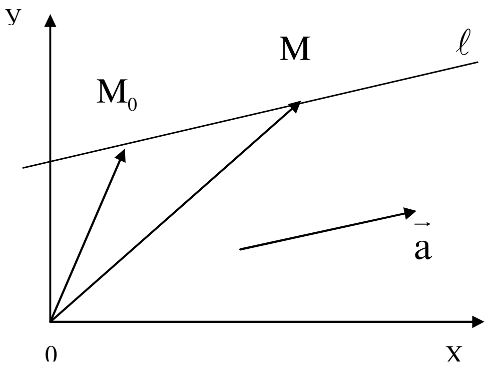
Если вычислим этот определитель, то получим многочлен n-й степени по отношению к λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного преобразования, а (6) называется характеристическим уравнением.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются собственными числами линейного преобразования.

Подставив найденные числа λ_i в систему (5) и решив эту систему относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найдем координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу λ.

22. Уравнения прямой на плоскости. Каноническое, параметрическое и уравнения прямой на плоскости.

Пусть на плоскости задана прямая ℓ с фиксированной точкой $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\bar{a}(m, n) \| \ell$. Этот вектор называется направляющим вектором прямой ℓ.



На прямой ℓ возьмём произвольную точку $M(x; y)$.

Проведем радиус – векторы:

$\vec{r}_0 = \overline{OM_0}$; $\vec{r} = \overline{OM}$.

$\overline{MM} = \bar{r} - \bar{r}_0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, поэтому $\vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{a}$-векторное уравнение прямой (1).

В координатной форме будет:

$$\{x - x_0; y - y_0\} = \{t_m; t_n\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - x_0 = t_m \\ y - y_0 = t_n \end{matrix}\right\} \text{- параметрическое уравнение.} \quad (2)$$

Решая систему относительно t получим:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \text{ - каноническое уравнение прямой.} \quad (3)$$

Теперь возьмём вектор $\overrightarrow{N} = \{A, B\} \perp \ell$. Этот вектор называется *нормалью прямой* ℓ.

$$\overrightarrow{N} \perp \ell \Rightarrow \overrightarrow{N} \perp \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow \left(\overrightarrow{N}, \overrightarrow{M_0M}\right) = 0$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 \Rightarrow \left(\vec{r} - \vec{r}_0, \overrightarrow{N}\right) = 0$$

В координатной форме будет:

$$A(x - x_0)A + (y - y_0)B = 0$$

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

$Ax + By + C = 0 \quad (C = -Ax_0 - By_0)$- общее уравнение прямой (4)

Рассмотрим следующие частичные случаи:

1) $A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0$. В этом случае уравнение (4) можно записать в виде:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \tag{5}$$

$$y = kx + b$$

Где: $k = -\frac{A}{B}, \qquad b = -\frac{C}{B}$

k - называется *условным коэффициентом* и он равен : $k = tg\alpha$,

Где α - угол, образованный прямой с положительным направлением оси ОХ;

b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси ОУ, считая от начала координат.

2) $A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0$.

Прямая проходит через начало координат.

3) $A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0$ Прямая параллельна оси ОХ.

4) $A \neq 0, \quad B = 0, \quad C \neq 0$ Прямая параллельна оси ОУ.

5) $A = 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0$ Прямая совпадает с осью ОХ.

$y = 0$ - уравнение оси ОХ.

6) $A \neq 0, \quad B = 0, \quad C = 0$ Прямая совпадает с осью ОУ.

$x = 0$ - уравнение оси ОУ.

Пусть прямая проходит через точку $A(x_1; y_1)$ и не параллельна оси ОУ. Запишем уравнение этой прямой:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \tag{5}$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через две данные точки:

$A(x_1; y_1), \quad B(x_2; y_2)$.

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1} \qquad (6)$$

или $$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

23. Написать уравнение плоскости параллельной плоскости (X,Z) и проходящей через точку М (2;-5;3).

Решение: уравнение плоскости параллельной к плоскости (X,Z) имеет вид:

$$By+D=0$$

Координаты точки М должны удовлетворять этому уравнению

$$B(-5)+D=0$$
$$D=5B$$

Учитывая это, можем написать

$$By+5B=0$$
$$y+5=0$$

Ответ: $y+5=0$

24. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z-5=0$.

Решение: Запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$x=7+5\lambda$$
$$y=4+\lambda$$
$$z=5+4\lambda$$

Обозначим $M(x_0,y_0,z_0)$ искомую точку. Координаты точки М должны удовлетворять этим уравнениям и уравнению плоскости:

$$\begin{cases} x_0=7+5\lambda \\ y_0=4+\lambda \\ z_0=5+4\lambda \\ 3x_0-y_0+2z_0-5=0 \end{cases}$$

Определим из этих уравнений λ

$$3(7+5\lambda)-(4+\lambda)+2(5+4\lambda)-5=0$$

$$21+15\lambda-4-\lambda+10+8\lambda-5=0$$

$$22\lambda=-22$$

$$\lambda=-1$$

$$x_0=7+5\cdot(-1)=2$$

$$y_0=4-1=3$$

$$z_0=5+4\cdot(-1)=1$$

Ответ: M(2;3;1)

25. Предел функции. Правый и левый пределы функции. Основные теоремы о пределах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1^* (предел функции по Коши).

Число b называется пределом функции $y=f(x)$ в точке a (или при $x \to a$), если для $\forall \varepsilon>0$ $\exists b>0$ такой, что $\forall x: 0<|x-a|<b$

Справедливо неравенство: $|f(x)-b|<\varepsilon$

Обозначается: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Определение (нахождение предела функции слева).

Число *B* называется пределом функции *f(x)* слева при $x \to a$, если для любой сходящейся к *a*последовательности аргументов функции x_n, значения которых остаются меньше *a* ($x_n < a$), последовательность значений этой функции сходится к *B*.

Обозначается $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=B$.

Определение (нахождение предела функции справа).

Число *B* называется пределом функции *f(x)* справа при $x \to a$, если для любой сходящейся к *a*последовательности аргументов функции x_n, значения которых остаются больше *a* ($x_n > a$), последовательность значений этой функции сходится к *B*.

Обозначается $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=B$.

Определение (существование предела функции в точке).

Предел функции *f(x)* в точке *a* существует, если существуют пределы слева и справа *a* и они равны между собой.

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = B$$

<u>ТЕОРЕМА.</u> Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ определены на множестве X, а точка x_0 является предельной точкой этого множества и $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда при $x \to x_0$ функции $(f(x) \pm g(x)), f(x)\cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (B \neq 0)$ тоже имеют предел и верны следующие равенства:

1) $\lim_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = A + B$

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$

3) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

26. Непрерывность функции. Свойства непрерывной функции на конечном отрезке.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если функция $f(x)$ имеет в точке a предел и он равен значению функции $f(x)$ в этой точке, т.е. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a, если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такой, что $\forall x$ удовлетворяет условие $|x - a| < \delta$ выполняется: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a справа (слева), если правый (левый) предел этой функции в точке a существует и равен частному значению функции $f(x)$ в точке a, то есть:

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)\right)$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке a справа (слева), если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ такой, что $\forall x : a < x < a + \delta (a - \delta < x < a)$ справедливо неравенство: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Функция, непрерывная в каждой точке интервала (a, b) называется непрерывной в этом интервале.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ не непрерывна, то она называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 называется точкой *разрыва.*

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ В ТОЧКЕ И НА ОТРЕЗКЕ

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке X_0 ^ $f(x_0) \neq 0$. Тогда $\exists \delta > 0$ такой, что $\forall x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(x)$ непрерывная на $[a, b]$ и на концах отрезка имеет значения разных знаков. Тогда существует точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.

ТЕОРЕМА 3 Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, причем $f(a) = A,\ f(b) = B$. Пусть далее $C - \forall$-ое число, заключенное между А и В. Тогда на отрезке $[a, b]$ $\exists c$ такой, что $f(c) = C$.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 5. Непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ принимает свои наибольшие и наименьшие значения.

27. Вычислить предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{Cosx - 1}$

Решение: Применим правило Лопиталя

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(e^{x^2} - 1\right)'}{(\cos - 1)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2xe^{x^2}}{-\sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{x^2}}{-\dfrac{\sin x}{x}} = \frac{2 \cdot 1}{-1} = -2$$

Ответ: -2

28. Производная сложной функции.

Пусть даны функции $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ и образованная из этих функций, сложная функция $y = f(\varphi(t))$.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0 и производная вычисляется по формуле

$$\left(f(\varphi(t))\right)' = f'(x_0) \cdot \varphi'(t_0) \qquad (1)$$

Доказательство.

Согласно определению производной

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}=\varphi'(t_0)+\alpha(t),\ \text{где}\quad \lim_{t\to t_0}\alpha(t)=0$$

Или

$$x-x_0=\varphi(t)-\varphi(t_0)=(t-t_0)(\varphi'(t_0)+\alpha(t)) \qquad (2)$$

Напишем аналогичное равенство для $f(x)$

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,(f'(x_0)+\beta(x)) \qquad (3)$$

$$\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$$

Учитывая равенства (2) и (3) получим:

$$f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))=f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\ f'(x_0)+\beta(x)= \\ =(t-t_0)(\varphi'(t_0)+\alpha(t))(f'(x_0)+\beta(x)) \qquad (4)$$

Так как $x=\varphi(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она непрерывна в этой точке. Поэтому из $t\to t_0$ следует $x\to x_0$ и

$$\lim_{t\to t_0}\beta(x)=\lim_{x\to x_0}\beta(x)=0$$

В равенстве

$$\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=(\varphi'(t_0)+\alpha(t))(f'(x_0)+\beta(x))$$

Перейдем к пределу при $t\to t_0$, получим

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=\varphi'(t_0)\cdot f'(x_0)$$

Это показывает справедливость равенства (1).
Равенство (1) иногда записывают и в следующей форме:

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t \qquad (4)$$

2. Производная обратной функции.

Теорема. Пусть функция $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет конечную производную $f'(x_0)$, отличную от нуля, и в окрестности точки $y=y_0=f(x_0)$ имеет непрерывную, однозначную обратную функцию $x=g(y)$. Тогда существует производная $g'(y_0)$, которая равна $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство. Обозначим через Δx и Δy соответствующие приращения ***x*** и ***y***, т.е.

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Так как $g(y)$ есть функция возрастающая (или убывающая), то $g(y_0 + \Delta y) \neq g(y_0)$, т.е. $\Delta x \neq 0$, тогда $\Delta y \neq 0$.Поэтому можем написать $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$.

С другой стороны известно, что если $g(y)$ непрерывна, то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$ и наоборот, т.е. Δx и Δy одновременно стремятся к нулю. Последнее равенство в пределе приводит к равенству

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} \quad \text{или} \quad g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

29.

$$df(x) = d\sqrt{\cos(2x+3)} = \left(\sqrt{\cos(2x+3)}\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot (\cos(2x+3))' dx =$$

: Решение: $$= \frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot (-\sin(2x+3))(2x+3)' dx = -\frac{1}{2\sqrt{\cos(2x+3)}} \cdot \sin(2x+3) \cdot 2dx =$$

$$= -\frac{\sin(2x+3)}{\sqrt{\cos(2x+3)}} dx$$

Ответ: $df(x) = -\dfrac{\sin(2x+3)}{\sqrt{\cos(2x+3)}} dx\cdot$

30. Найти дифференциал функции: $f(x) = \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sin x}$

Решение: $$df(x) = d\left(\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin x}\right)' = \left(\sin\frac{1}{x} + \frac{1}{\sin}\right)' dx =$$

$$= \left(\cos\frac{1}{x} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx = \left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) dx =$$

Ответ: $df(x)\left(-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx$

31. В отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ к функции $f(x)=5\cdot\sin 2x$ применить теорему Ролля и найти значение ***x = C.***

Решение : $f'(x)=10\cos 2x$. Данная функция непрерывна на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ и дифференцируема в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f(0)=5 \quad \text{и} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right)=5$$

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Значит, к этой функции применима теорема Ролля.

$$f'(c)=0$$

$$10\cos 2c=0$$

$$\cos 2c=0$$

$$2c=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$$C=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$$

$$C=\frac{\pi}{4}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

Ответ: $C=\dfrac{\pi}{4}$

32. Для функции $f(x)=5\sqrt{x}$ на отрезке $[1;9]$ запишите формулу Лагранжа и определите значение $x=C$.

Решение: Функция $f(x)=5\sqrt{x}$ непрерывна на отрезке $[1;9]$ и дифференцируема в интервале (1;9):

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}$$

По теореме Лагранжа можем писать:

$$\left(5\sqrt{x}\right)_{x=9} - \left(5\sqrt{x}\right)_{x=1} = (9-1)\cdot\frac{5}{2\sqrt{C}}$$

$$15-5 = 8\cdot\frac{5}{2\sqrt{C}}$$

$$10 = \frac{20}{\sqrt{C}}$$

$$\sqrt{C} = 2$$

$$C = 4$$

Ответ: C = 4.

33. Экстремум функции. Необходимые условия для существования экстремума.

Говорят, что функция $f(x)$ в точке x_1 имеет локальный максимум ($\max$), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем её значения во всех точках некоторого интервала, содержащего т. x_1. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке x_2 локальный минимум ($\min$), если значение функции в точке x_2 меньше, чем её значения во всех точках некоторого интервала, содержащего т. x_2.

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_2$ локальный экстремум, то её производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не является достаточным условием существования локального экстремума.

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может, самой точки x_0).

а) Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_0$ функция имеет локальный максимум. То есть, если

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0$$

и

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x$$

то в точке x_0 функция имеет локальный $\max$.

б) Если при переходе через точку x_0, слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке локальный минимум.

То есть, если:

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x < x_0$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x$$

то в точке x_0 существует локальный минимум.

<u>Теорема 2.</u> Пусть при $x = x_0$ $f'(x) = 0$. Кроме того существует $f''(x)$ и она непрерывна в некоторой окрестности точки x_0. Тогда при $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$ и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

<u>Теорема 3.</u> Пусть в критической точке x_0 функция $y = f(x)$ существуют непрерывные производные до n-го порядка включительно, причем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Тогда:

1) если n - четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 существует локальный максимум.

2) если n - четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 существует локальный минимум.

3) если n - нечетное , то в точке x_0 не существует экстремума.

34. Найти наибольшее значение функции $f(x) = x - x\ln x$ на отрезке $\left[\frac{1}{e}, e\right]$.

<u>Решение</u>: $f'(x) = 1 - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = -\ln x$

$$-\ln x = 0$$

$$x = 1$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e} = \frac{2}{e}$$

$$f(e) = e - e\ln e = 0$$

$$f(1) = 1 - 1\cdot\ln 1 = 1$$

Наибольшее значение равно 1.

Ответ: 1

35. Найти наклонную асимптоту кривой $f(x) = \dfrac{4x - x^3}{x^2 + 4}$

Решение: $y = kx + b$

$$K = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{4 - x^2}{x^2 + 4} = -1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x - x^3}{x^2 + 4} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{x^2 + 4} = 0$$

Наклонной асимптотой является прямая $y = -x$

Ответ: $y = -x$

36. Функция многих переменных и её предел. Двойные и повторные пределы.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области G плоскости **ОХУ** и пусть точка M_0 - предельная точка области G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **А** называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $MM_0 < r$, имеет место неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$

Обозначение: $\lim\limits_{M\to M_0} f(x, y) = A$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет предел число **А** при стремлении переменных x, y соответственно к x_0, y_0, если для

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такой, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ лишь только выполнить: $|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < 0 \quad \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **А** называется пределом функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для $\forall$ сходящейся к M_0 последовательности $\{M^k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\{M^k\} \subset G(M^k \neq M^0)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(M^k)\}$ сходится к А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **А** называется пределом функции $z = f(x, y)$ при $x, y \to +\infty(-\infty)$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такой, что $|f(x, y) - A| < \varepsilon$ лишь только $x > \delta, y > \delta$ (или $x < -\delta, \; y < -\delta$).

Обозначается следующим образом: $A = \lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x, y) \left(A = \lim\limits_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} f(x, y) \right)$

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в прямоугольнике

$\prod = \{(x, y) : |x - x_0| < \delta_1, \; |y - y_0| < \delta_2\}$, кроме быть может отрезков прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

При фиксированном значении y функция $z = f(x, y)$ становится функцией от одной переменной $\mathbf{X}$.

Пусть для любого фиксированного значения y, удовлетворяющего условию: $0 < |y - y_0| < \delta_2$, существует предел функции $f(x, y)$ при $x \to x_0$
$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ |y - y_0| < \delta_2}} f(x, y) = \varphi(y)$

Пусть далее предел функции $\varphi(y)$, при $y \to y_0$, существует и равен b:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b$$

Тогда говорят, что в точке (x_0, y_0) существует повторный предел функции $f(x, y)$ и пишут: $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = b$

При этом $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ |y - y_0| < \delta_2}} f(x, y)$ называется внутренним пределом в повторном. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, в котором внутренним является $\lim\limits_{\substack{y \to y_0 \\ |x - x_0| < \delta_1}} f(x, y)$

<u>Замечание.</u> Повторные пределы не всегда равны.

37. Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$внутренняя точка области определения функции $z = f(x, y)$.

Частной производной функции $z = f(x, y)$ по аргументу X в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует.

Обозначается следующим образом $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, либо $Z'_x(M_0)$.

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по аргументу y называется $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, если он существует. Обозначается следующим образом $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, либо $Z'_y(M_0)$. Если от функции $z=f(x,y)$ берется производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то аргумент y считается постоянным, и наоборот, если берется производная $\frac{\partial z}{\partial y}$, то аргумент X считается постоянным.

Для функции $Z=f(x,y)$ полное приращение определяется следующим образом $\Delta Z=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y+0\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$ (2)

Дифференциалом dz дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$ функции $Z=f(x,y)$, называется *линейная,* относительно приращений аргументов, *часть*

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\Delta y \qquad (3)$$

По дифференциалам независимой переменной $dx(dy)$ понимается любое, независимое от $x(y)$, число.

Если $z=x$, то получим $dx=\Delta x$ Если $z=y$, то получим $dy=\Delta y$

Тогда : $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ (D)

По формуле (D) вычисляется полный дифференциал функции $Z=f(x,y)$. В случае функции $Z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\dots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

38. Найти двойные и повторные пределы функции $f(x;y)=\frac{x-2y}{x+3y}$ в точке (0;0).

Решение . Сначала найдем двойной предел **:** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-2y}{x+3y}$.

Пусть точка , $M(x,y)$ приближается к точке 0(0;0) не произвольно, а по некоторой прямой $y=kx$ $(k\neq 0)$:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-2y}{x+3y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2kx}{x+3kx}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x(1-2k)}{x(1+3k)}=\frac{1-2k}{1+3k}$$

Как видно, результат меняется в зависимости от выбора **К** (т.е. предельное значение не единственное) Следовательно, при $M(x,y)\to 0(0;0)$ предел не существует. Теперь найдем повторные пределы.

$$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}\frac{x-2y}{x+2y}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-2\cdot 0}{x+3\cdot 0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}1=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{x+3y}=\lim_{y=0}\frac{0-2y}{0+3y}=-\frac{2}{3}$$

39. Найти полный дифференциал функции $u = arctg\,\dfrac{xy}{z^2}$

Решение: Известно что, полный дифференциал находится по формуле $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$. (1)

Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{yz^2}{z^4+x^2\cdot y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{x}{z^2}=\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\left(-\frac{2xy}{z^3}\right)=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{-2xy}{z^3}=-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2} \qquad (4)$$

Принимая во внимание (2), (3) и (4) (1) получим :

$$du=\frac{yz^2}{z^4+x^2y^2}dx+\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2}dy-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2}dz$$

40. Найти дифференциал функции $u=x^{y^2z}$

Известно, что дифференциал функции находится по формуле данной функции по каждому из аргументов: $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$

Найдем частные производные :

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^2z\cdot x^{y^2z-1}$; $\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=x^{y^2z}\cdot 2yz\cdot\ln x$; $\dfrac{\partial u}{\partial z}=x^{y^2z}\cdot y^2\cdot\ln x$

Подставляем найденные частные производственные в формулу полного дифференциала:

$$du=y^2z\cdot x^{y^2z-1}dx+x^{y^2z}\cdot 2yz\cdot\ln x\,dy+x^{y^2z}\cdot y^2\ln x\,dz$$

41. Найти дифференциал второго порядка функции $u=arctg\,\dfrac{x+y}{1-xy}$**.**

Напишем формулу для дифференциала второго порядка:

$$d^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}\cdot dx^2+2\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\cdot dxdy+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}dy^2$$

Найдем частные производные первого порядка по ***x*** и по ***y*:**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+(x+y)y}{(1-xy)^2}=$$

$$=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+y^2+2xy}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)+(x^2+1)y^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+(x+y)x}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+y^2}$$

Найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[(1+x^2)^{-1}\right]_x'=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=0$$

Подставим эти частные производные в формулу:

$$d^2u=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx^2-\frac{2y}{(1+y^2)^2}dy^2$$

42. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия для существования экстремума.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена на множество $G\subset R_2$.

Точка $X^0(x^0,y^0)$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует такая окрестность точки $X^0(x^0,y^0)$, что для всех точек $X(x,y)$ из $\nu(X^0)\cap G$ выполняется неравенство.

$f(x)\le f(x^0)$ $\qquad (f(x)\ge f(x^0))$

В случае $f(x)<f(x^0)$ $(f(x)>f(x^0))$, точка X^0 называется точкой строго локального максимума (минимума).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Из определения следует, что если функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке X^0, то $\Delta z=f(x)-f(x^0)$ в этой точке X^0 удовлетворяет одному из следующих условий.

1) если X^0 - точка локального максимума, то $\Delta z\le 0$
2) если X^0 - точка локального минимума, то $\Delta z\ge 0$
3) если X^0 - точка строгого локального максимума, то $\Delta z<0$
4) если X^0 - точка строгого локального минимума, то $\Delta z>0$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие существования экстремума).

Если функция $z = f(x, y)$ определена в окрестности точки экстремума $X^0(x^0, y^0)$ и в этой точке существуют частные производные первого порядка, то в этой точке они равны нулю, т.е.

$$f'_x(x^0, y^0) = f'_y(x^0, y^0) = 0 \qquad (1)$$

<u>*ЗАМЕЧАНИЕ.*</u> Условие (1) является необходимым условием, но не достаточным.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Точка X^0, в которой все частные производные существуют и равны нулю, называется стационарной точкой.

Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

11. Экстремумы функций многих переменных. Достаточные условия для существования экстремума.

<u>ТЕОРЕМА</u>. (достаточное условие существования экстремума)

Пусть функция $z = f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности своей стационарной точки $X^0(x^0, y^0)$.

Положим $$\Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x^0 y^0) & f''_{xy}(x^0 y^0) \\ f''_{yx}(x^0 y^0) & f''_{yy}(x^0 y^0) \end{vmatrix} = f''_{xx}(x^0 y^0) \cdot f''_{yy}(x^0 y^0) - \left[f''_{xy}(x^0 y^0)\right]^2 \qquad (2)$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то в точке $\mathbf{X}^0$ существует экстремум , причем

а) при $A = f''_{xx}(x^0 y^0) < 0$ - локальный максимум;

б) при $A = f''_{xx}(x^0 y^0) > 0$ - локальный минимум.

2) если $\Delta < 0$, то в точке X^0 не существует экстремума;

3) если $\Delta = 0$, то требуется провести дальнейшее исследование, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

43. Найти экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

$$Z'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$Z'_y = 6xy - 12$$

Приравняем частные производные 0, и найдем координаты стационарных точек

$$\begin{matrix} Z'_x = 0 \\ Z'_y = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ \left(\dfrac{2}{y}\right)^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ \dfrac{4}{y^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ 4 + y^4 = 5y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{y} \\ y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Обозначим $y^2 = t$

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \qquad t_1 = \frac{5+3}{2} = 4 \qquad y^2 = 4 \qquad y^2 = 1$$

$$D = 9 > 0 \qquad t_2 = \frac{5-3}{2} = 1 \qquad y_{1,2} = \pm 2 \qquad y_{3,4} = \pm 1$$

Найдем x.

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1 \qquad x_3 = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_2 = \frac{2}{-2} = -1 \qquad x_4 = \frac{2}{-1} = -2$$

Получим следующие стационарные точки

$$A_1(1;\ 2) \quad A_2(2;1) \quad A_3(-1;-2) \quad A_4(-2;-1)$$

Найдем производные II –го порядка

$$Z''_{xx} = 6x \qquad Z''_{xy} = 6y$$

$$Z''_{yy} = 6x \qquad Z''_{yx} = 6y$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2$$

1) А подставим точку $A_1(1;2) \Rightarrow \Delta = 36 \cdot 1 - 36 \cdot 2^2 = -36 < 0$ экстремума нет.

2) Подставим точку $A_2(2;1)$ $\Delta = 36 \cdot 2^2 - 36 \cdot 1 = 36(4-1) = 36 \cdot 3 > 0$ экстремум есть и min, так как $z''_{xx} > 0$

3) Подставим $A_3(-1;-2)$. $\Delta = 36 \cdot (-1)^2 - 36(-2)^2 < 0$ экстремума нет.

4). Подставим $A_4(-2;-1)$. $\Delta = 36 \cdot (-2)^2 - 36(-1)^2 > 0$ экстремум есть, и он достигает min, так как $z''_{xx} = 36 \cdot (2)^2 > 0$

Вычислим минимальное значение

$$Z_{\min} = (-2)^3 + 3(-2)(-1)^2 - 15(-2) - 12 \cdot (-1) = -8 - 6 + 30 + 12 = 28$$

$Z_{\min}$ в точке (2;1)$\Rightarrow Z_{\min} = (2)^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 - 15 \cdot 2 - 12 \cdot 1 = 8 + 6 - 30 - 12 = -28$

44. Первообразная функция, неопределенный интеграл и его свойства .

Ранее мы рассматривали следующую задачу: дана функция $F(x)$, требуется найти её производную, т.е. функцию $f(x) = F'(x)$.

Теперь рассмотрим обратную задачу. Пусть дана функция $f(x)$. Требуется найти такую функцию $F(x)$ производная которой равна $f(x)$, т.е.

$$F'(x) = f(x)$$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Функция $F(x)$ называется первообразной от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Рассмотрим следующий пример.

<u>ТЕОРЕМА.</u> Если $F_1(x), F_2(x)$ - две первообразные от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то разность между ними равна постоянному числу, т.е. $F_2(x) - F_1(x) = C$

Из теоремы следует, что если для какой-либо функции $f(x)$ найдена первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид: $F(x) + C$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то выражение $(F(x)+C)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x)+C\,, \quad \text{если} \quad F'(x) = f(x).$$

С точки зрения геометрии неопределенный интеграл представляет собой совокупность кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз , т.е. вдоль оси ОУ.

Возникает вопрос, для всякой ли функции $f(x)$ существует первообразные, а значит и неопределенный интеграл. Оказывается, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то для этой функции существует неопределенный интеграл.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется интегрированием функции $f(x)$.

Из определения неопределенного интеграла следует:

1^0) Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции, т.е. если $F'(x)=f(x)$, то $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$

2^0) Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

3^0) Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

4) Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x) + \ldots + \int f_n(x)dx$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла, т.е., если $a = const$, то $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.

При вычислении неопределенных интегралов полезно иметь в виду следующие правила. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то

1) $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+C$

2) $\int f(x+b)dx = F(x+b)+C$

3) $\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$

45. Основные методы интегрирования в неопределенный интеграл.

К основным методам интегрирования относятся

I. Метод замены переменной

Пусть функция $t=\varphi(x)$ определена и дифференцируема на множестве $\{x\}$ и пусть символ $\{t\}$ обозначает множество всех значений этой функции. Пусть далее для функции $g(t)$ существует на множестве $\{t\}$ первообразная $G(t)$, т.е.

$$\int g(t)dt = G(t)+C \;**$$

Тогда всюду на множестве $\{x\}$ для функции $g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$ существует первообразная, равная $G[\varphi(x)]$, т.е. $\int g[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx = G[\varphi(x)]+C$

II.Метод интегрирования по частям

По формуле дифференциала произведения

$$d(uv)=udv+vdu$$

Интегрированием обеих частей этого равенства, получается формула интегрирования по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы и интеграл $\int vdu$ существует, то интеграл $\int udv$ также существует и

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (*)$$

Это – формула интегрирования по частям.

Эта формула используется в тех, случаях, когда подинтегральное выражение $f(x)dx$ можно представить в виде udv. За dv выбирают такое выражение, содержащее dx, из которого посредством интегрирования можно найти v, а за u удобно принимать множитель, который упрощается при дифференцировании.

Если подинтегральное выражение содержит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на целую рациональную, то за u принимают логарифмическую, среднюю **или** ** функцию, а все остальные за dv. Если же подинтегральное выражение есть произведение многочлена на тригонометрическую или показательную функцию, то за u принимают многочлен, а оставшееся выражение за dv. При этом формула (*) принимается неоднократно.

46. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2+2x-3}$

$$J=\int\frac{dx}{x^2+2x-3}=\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}$$

Напишем подинтегральную функцию в виде серий простейших дробей:

$$\frac{1}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx-B}{(x-1)(x+3)}=\frac{(A+B)\cdot X+3A-B}{(x-1)(x+3)}$$

Используя равенство дробей, напишем:

$$\begin{cases}A+B=0\\3A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-B\\-3B-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-\frac{1}{4}\\A=\frac{1}{4}\end{cases}$$

Учитывая, что $A=\frac{1}{4};\ B=-\frac{1}{4}$, подинтегральную функцию напишем в виде:

$$\int\frac{dx}{(x-1)(x+3)}=\int\left(\frac{\frac{1}{4}}{x-1}-\frac{\frac{1}{4}}{x+3}\right)dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln|x+3|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C.$$

47. Определение и свойства определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a,b]$ Разобъём отрезок $[a,b]$ на n частей. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку ξ. Длина каждого отрезка $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на $[a,b]$ называется сумма вида $S_n = \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k$ (1)

Сумма S_n зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек ξ_k.

Рассмотрим различные разбиения отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$такие, что $\max \Delta X_k \to 0$. Тогда при этом число отрезков n разбиения стремятся к бесконечности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если при любых разбиениях отрезка $[a,b]$ таких, что $\max \Delta X_k \to 0$ и при любом выборе точек ξ_k сумма $S_n = \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k$

стремится к пределу I, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Предел I называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$ $\mathrm{I} = \lim_{\max \Delta X_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k = \int_a^b f(x)dx$ (2)

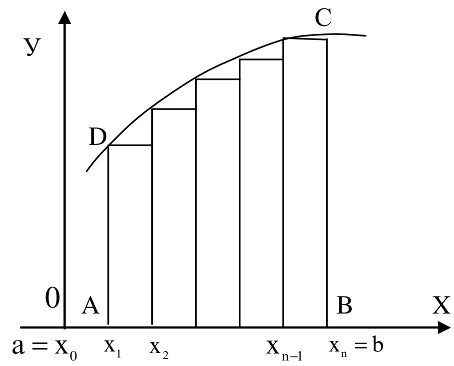
Число a называется нижним пределом, число b - верхним пределом.

При определении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предположили, что $a < b$. Если же $a > b$, то все ΔX_k будут иметь отрицательный знак

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

И ещё заметим, что $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Действительно, в этом случае все отрезки разбиения являются точками, а их длины $\Delta x_k = 0 \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = 0$.



Свойство1 Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и k- постоянная , тогда функция $kf(x)$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Свойство 2. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то их сумма также интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

То есть, интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интеграла от слагаемых.

Свойство 3. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Следствие 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

Следствие 2. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$

Свойство 4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \le f(x) \le M, \quad x \in [a,b]$

То $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Свойство 5. (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка С, что справедливо следующее равенство $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$

Замечание. Число $f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ средним значением функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b]$.

Свойство 6. Пусть $a < c < b$, Если функция $\mathrm{f(x)}$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[a,b]$ и справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Следствие. Если c лежит вне промежутка (a,b) (например $a < b < c$) и в этом случае верно равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

48. Вычислить интеграл: $\int \sin^3 xdx$

$$\int \sin^3 xdx = \int \sin^2 x \cdot \sin xdx = \int \left(1-\cos^2 x\right)\cdot \sin xdx =$$

$$= [u = \cos x, du = -\sin xdx] = -\int \left(1-u^2\right)du = -\left(u - \frac{u^3}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

49. Вычислить интеграл $J = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$I=\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=2\sin t\Rightarrow dx=2\cos tdt \\ t_1=0,\quad t_2=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin t)^2\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\cdot$$

$$\cdot\,2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{0}}4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{0}}16\sin^2 t\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\frac{(1-\cos 2t)}{2}\cdot$$

$\cdot$

$$\cdot\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 2t)dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt=4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4tdt=4\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-2\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi-\pi-$$

$$-\frac{1}{2}(\sin 2\pi-\sin 0)=\pi$$

50. Вычислить интеграл

$$J=\int_3^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$$

Сделаем замену**:** $\sqrt{x+6}=t\Rightarrow x+6=t^2\Rightarrow dx=2tdt$

Таким образом $x-1=t^2-7$

При этом поменяются и пределы интегрирования

$x_1=3;\qquad t_1=\sqrt{3+6}=3$

$x_2=10\qquad t_2=\sqrt{10+6}=4$

$$\int_3^4\frac{2tdt}{(t^2-7)t}=\int_3^4\frac{2dt}{t^2-7}=\frac{2}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right|\Bigg\|_3^4=\frac{1}{\sqrt{7}}\left[\ln\left|\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}\right|-\ln\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right|\right]$$