1.Dalamber əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n+7}$$

Həlli: $U_n=\frac{2n}{3^n+7}, U_{n+1}=\frac{2(n+1)}{3^{n+1}+7}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)(3^n+7)}{(3^n+7)2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+7}{3^{n+1}+7}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{7}{3^n}}{3+\frac{7}{3^n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1+0}{3+0}\cdot(1+0)=\frac{1}{3}$$

$$l=\frac{1}{3}<1$$

Deməli verililmiş sıra yığılandır.
C:verililmiş sıra yığılandır

2.Koşinin inteqral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

Həlli: $U_n=\frac{n!}{3^n(n+1)}, U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!3^n(n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+2)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{3(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n+6} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{6}{n}} = \infty$$

C: $l = \infty$ olduğu üçün verilimiş sıra dağılandır

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 3$$

Cavab : R=3

4. $xy' - y - 1 = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$x\frac{dy}{dx} = y+1$

$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$

$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x}$

$\ln|y+1| = \ln|x| + c_1$

$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c|$

$\ln|y+1| = \ln|cx|$

y+1=cx

y=cx-1

Cavab : y=cx-1.

5. $(x^2+1)y' - xy = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$$(x^2+1)y' - xy = 0$$

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln\left|c\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$y = c\sqrt{x^2+1}$$

Cavab : $y = c\sqrt{x^2+1}$

6. $2(x+1)y' + y = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli:

$$2(x+1)y' + y = 0$$

$$2(x+1)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + c_1$$

$$\ln|y| = \ln c - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x+1}}$$

Cavab . $\dfrac{c}{\sqrt{x+1}}$

7. $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{x^2}$

$u'v + (v' + 2xv)u = 2xe^{x^2}$ (1)

$v' + 2xv = 0$

$\dfrac{dv}{dx} = -2xv$

$\dfrac{dv}{v} = -2xdx$

$\ln v = -x^2$

$v = e^{-x^2}$

Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq.

$u'e^{-x^2} = 2xe^{x^2}$

$u' = 2xe^{2x^2}$

$u = \int 2xe^{2x^2}dx = \dfrac{1}{2}e^{2x^2} + c$

$y = uv = e^{-x^2}(\dfrac{1}{2}e^{2x^2} + c)$

Cavab: $y = \dfrac{1}{2}e^{x^2} + ce^{-x^2}$

8. $xy' - 3y = x^2$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$xu'\vartheta + xu\vartheta' - 3u\vartheta = x^2$

$xu'\vartheta + (x\vartheta' - 3\vartheta)u = x^2 \quad (1)$

$x\vartheta' - 3v = 0$

$x\vartheta' = 3\vartheta$

$x\frac{d\vartheta}{dx} = 3\vartheta$

$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = 3\frac{dx}{x}$

$\int\frac{d\vartheta}{v} = 3\int\frac{dx}{x}$

$\ln v = 3\ln x$

$\vartheta = x^3$ Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq:

$xu'x^3 = x^2$

$u' = \frac{1}{x^2}$

$u = \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$

$y = u\vartheta = x^3(-\frac{1}{x} + c)$

Cavab: $y = x^3(-\frac{1}{x} + c)$

9. $xy' + y = \sin x$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$x(u'v + uv') + uv = \sin x$

$xu'v + xuv' + uv = \sin x$

$xu'v + (xv' + v)u = \sin x \qquad (1)$

$x'v + v = 0$

$x\frac{dv}{dx} = -v, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x}$

$\ln|v| = -\ln|x|$

$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$

$v = \frac{1}{x}$. Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq.

$xu' \cdot \frac{1}{x} = \sin x$

$u' = \sin x$

$u = -\cos x + c$

$y = uv = \frac{1}{x}(c - \cos x)$

Cavab: $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$

10. $y'' = y' ctgx$ tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli: $y' = \vartheta(x)$əvəzləməsi aparaq, onda $y'' = \vartheta'(x)$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$\vartheta'(x) = \vartheta(x)\, ctgx$

$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta ctgx;$

$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = ctgxdx$

$\int \frac{dv}{v} = \int ctgdx$

$\ln|v| = \ln|\sin x| + c_0$

$\ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|c_1|$

$\ln|v| = \ln|c_1 \sin x|$

$v = c_1 \sin x; \quad y' = c_1 \sin x$

$y = -c_1 \cos x + c_2$

Cavab ; $y = -c_1 \cos x + c_2$

11. İşarələrini növbə ilə dəyişən sıralar. Leybnis əlaməti.

$a_n > 0,\ (n = 1,2,3,...)$ олдугда $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (1)

sırasına işarəsini növbə ilə dəyişən sıra deyilir.

(1) sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2)sırasına baxaq.

(2) sırası yığılan olduqda (1) sırasına mütləq yığılan sıra deyilir.

(2) sırası daığılan, (1) sırası yığılan olduqda (1) sırasına şərti yığılan sıra deyilir.

İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların yığılması üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. (Leybinis əlaməti) İşarəsini növbə ilə dəyişən (1) sırasının hədləri üçün

$$1)\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \qquad (3)$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (4)$$

Şərtləri ödəndikdə həmin sıra yığılandır. Onun cəmi müsbət ədəddir və bu cəm sıranın birinci həddindən (yəni a_1-dən) böyük deyildir.

12. Tam ehtimal düsturunu yazin və verilən məsələni həll edin:

A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, ...A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verirsə, A hadisəsinin ehtimalına tam ehtimal deyilir və aşağıdakı kimi tapılır.

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \cdot P\left(A/A_k\right)$$

Məsələ. Satışa üç zavoddan televizorlar gətirildi. Birirnci zavodun məhsulunun 10% - i defektdir, ikincinin 5% -i və üçüncünün isə 3% - i defektdir. Əgər maqazinə gətirilmiş televizorların 25% - i birinci , 55% - i ikinci , 20% - i isə üçüncü zavoddan gətirilmişdirsə,onda defektli televizor almaq ehtimalını tapın.

<u>Həlli:</u> Nəzərdən keçirilən A = { alınmış televizor defektlidir } hadisəsi üç hipotezlə bağlıdır : H_1={ televizor birinci zavodun istehsalıdır },
H_2= { ikinci zavodun istehsalıdır }, H_3={ üçüncü zavodun istehsalıdır}.
Bu hadisələrin ehtimalları məsələnin şərtindən təyin olunur:
$p(H_1) = 0{,}25; p(H_2) = 0{,}55;\ p(H_3) = 0{,}2.$
A hadisəsinin şərti ehtimalları da məsələnin şərtlərindən təyin olunur:
$p(A/H_1) = 0{,}1; p(A/H_2) = 0{,}05;\ p(A/H_3) = 0{,}03.$
Buradan tam ehtimal düsturuna əsasən alınır:
$p(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 + 0{,}55 \cdot 0{,}05 + 0{,}2 \cdot 0{,}03 = 0{,}0585$

13. Bayes düsturlarını yazin və verilən məsələni həll edin:

A hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, ...A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verir. A hadisəsi artıq baş vermirsə onun baş verməsinə səbəb olan A_k hadisəsinin ehtimalı

$$P\left({}^{A_k}\!\!\diagup_{A}\right)=\frac{P(A_k)\cdot P\left({}^{A}\!\!\diagup_{A_k}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_2)\cdot P\left({}^{A_k}\!\!\diagup_{A_i}\right)} \qquad (1)$$

Məsələ . Fabrikdə məmulatın 25%-i birinci, 35%-i ikinci və 40%-i üçüncü maşında hazırlanır.Birinci,ikinci,üçüncü maşınların buraxdığı məmulatların uyğun olaraq 5%,4% və 2%-i yararsız olur.Təsadüfi götürülən hər hansı bir məmulatın yararsız olması hadisəsinin ehtimalını tapın Bu şərtləri saxlayaraq yararsız məmulatın 1-ci, 2-ci və 3-cü maşının hazırladığı məmulat olması ehtimalını tapın.

Həlli: Götürülən məmulatın yararsız olması hadisəsini A ilə işarə edək.Burada üç fərziyyə ola bilər: Götürülən yararsız məhsul 1-ci maşında (B_1 hadisəsi),2-ci maşında (B_2 hadisəsi),3-cü maşında (B_3 hadisəsi) hazırlana bilər.Onda verilənlərə əsasən

$P(B_1)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$; $P(B_2)=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$; $P(B_3)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ olar.

Götürülən yararsız məmulat 1-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$;

2-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_2}(A)=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$; 3-cü maşında buraxılıbsa $P_{B_3}(A)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$ olar.

Onda tam ehtimal düüsturuna əsasən məmulatın yararsız olması hadisəsinin ehtimalı

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{1}{25}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{50}=0{,}0345$$

$P_A(B_1)$ tapmaq lazımdır.

$P(B_1)=\frac{25}{100}=0{,}25$; $P_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$; $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)=0{,}0345$ olduğundan,Bayes düsturunu tətbiq etməklə

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}=\frac{0{,}0125}{0{,}0345}=\frac{25}{69}$$

$P_A(B_2)$ -tapmaq lazımdır.

$P(B_2)=0{,}35$; $P_{B_2}(A)=0{,}04$; $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)=0{,}0345$ olduğundan , Bayes düsturunu tətbiq etsək,

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}0345}=\frac{28}{69}$$

şərtə əsasən

$P(B_3)=0{,}4$; $P_{B_3}(A)=0{,}02$; $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)=0{,}0345$ olduğundan Bayes düsturuna əsasən

$$P_A(B_3)=\frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}0345}=\frac{80}{345}=\frac{16}{69}$$

14. Asılı olmayan sınaqlar. Bernulli düsturunun cıxarılışı(bəzi hallar).

Fərz edək ki, $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ kimi k sayda müxtəlif element verilmişdir. a_1 elementi n_1 dəfə , a_2 elementi n_2 dəfə və s. a_k elementinin n_k dəfə təkrar olunması şərti ilə düzəldilən $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ şəkilli qruplara təkrarlı permutasionlar deyilir və onların sayı $P_n(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k)$ ilə işarə edilir. Burada $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ bərabərliyi doğrudur.

<u>Teorem 1</u>. $P_n(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$
bərabərliyi doğrudur.

<u>Teprem 2</u>. n asılı olmayan sınağın hər birində hadisənin baş verməsi ehtimalı p-yə $0 < p < 1$ bərabərdirsə, hadisənin m dəfə baş verməsi (hansı ardıcıllıqla fərqi yoxdur) ehtimalı

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} \qquad (1)$$

ədədinə bərabərdir.

İsbatı: Fərz edək ki, ardıcıl olaraq birinci, ikinci və s. m-ci sınaqda A hadisəsi baş vermiş, sonrakı $n-m$ sınaqda baş verməmişdir, yəni

$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \ldots A}_{m} \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}}_{n-m}$$

baş vermişdir. Sınaqlar asılı olmadığından bu kombinasiyanın ehtimalı

$$P\left(A \cdot A \cdot A \ldots A \cdot \overline{A} \cdot \overline{A} \ldots \overline{A}\right) = P^m(A) \cdot P^{n-m}\left(\overline{A}\right) = p^m \cdot q^{n-m}$$

olar. Bütün digər kombinasiyalarında ehtimalları $p^m \cdot q^{n-m}$ bərabər olması aydındır. Bu kombinasiyalardan heç olmasa biri baş verərsə, A hadisəsi düz m dəfə baş verər. Onda uyuşmayan hadisələr üçün toplama teoreminə görə

$$P_n(m) = P\left(AA \ldots A\overline{A}\overline{A} \ldots \overline{A}\right) + P\left(A\overline{A}A\overline{A} \ldots A\right) + \ldots + P\left(\overline{A}\overline{A} \ldots \overline{A}AA \ldots A\right)$$ olar.

Baxılan kombinasiyaların sayını tapaq. Hər qrupda n element var, birinci element m dəfə,ikinci element $n-m$ dəfə təkrar olunur. Deməli kombinasiyaların sayı təkrarlı permutasiyonların sayıdır.

$$P_n(m; n-m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$$ olur.

Beləliklə aldıq ki,

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}$$

olması alınır. Sonuncu düstura Bernulli düsturu deyilir.

n sayda asılı olmayan Bernulli sınaqlarında *A* hadisəsinin: a) *m*- dən az, b) *m*-dən çox, v) ən azı *m* dəfə, y) ən çoxu *m* dəfə baş verməsi ehtimalları uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(m-1), \qquad P_n(m+1) + P_n(m+2) + \dots + P_n(n),$$

$$P_n(m) + P_n(m+1) + \dots + P_n(n), \qquad P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(m).$$

15. Ən böyük ehtimallı ədədin tapılma düsturunu yazın və məsələni həll edin.

n sayda asılı olmayan sınaqlar seriyasında $P_n(m_o)$ ehtimalı digər hadisələrin ehtimallarından kiçik deyilsə, onda m_0-a **ən böyük ehtimallı ədəd** deyilir. m_0 tapmaq üçün

$$\begin{cases} P_m(m_0) \ge P_n(m_0+1) \\ P_n(m_0) \ge P_n(m_0-1) \end{cases} \qquad (1)$$

düsturundan istifadə olunur.

Sistemin birinci və ikinci bərabərsizliyini açıq yazaraq həll etsək və bu bərabərsizliklərin hər ikisini birləşdirsək

$$np - q \le m_0 \le np + p \qquad (2)$$

alarıq. Bu bərabərzik vasitəsilə ən böyük ehtimallı ədəd tapılır.

Məsələ. İstehsal dəzgahını standart məhsul buraxması ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. 5 məhsulun istehsalı zamanı standart olmayan məhsulların mümkün ehtimalların tapın.

Həlli. Standart olmayan məhsul istehsal ehtimalı $p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ olar. Bernulli düsturuna görə bütün variantları hesablayaq (n=5, q=0,8,k=0,1,2,3,4,5).

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768; \quad P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096;$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048; \quad P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064; \quad P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032$

Aldığımız ehtimalları qrafik üzərində qeyd etsək ən böyük ehtimala malik ədədin $m_0 = 1$ olduğunu görərik.

Yuxarıda həll etdiyimiz məsələyə uyğun olaraq

$5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \le m_0 \le 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \Rightarrow 0{,}2 \le m_o \le 1{,}2 \Rightarrow m_0 = 1$

olmalıdır. Yəni, 1 məhsulun standart olmaması ehtimalı daha çoxdur və $P_5(1) = 0{,}4096$ -dır.

16. Muavr-Laplasın lokal düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

Teorem. n asılı olmayan sınağın hər birində A hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit p – yə $(0<p<1)$ bərabərdirsə, hadisənin m dəfə baş verməsi ehtimalı(n-nin lazımı böyük qiymətində) təqribən

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Burada $x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ işarə olunmuşdur.

(2) düsturuna Muavır-Laplasın lokal düsturu və ya binomial paylanmanın normal yaxınlaşması deyilir. (2) düsturunda

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{3}$$

işarə etsək $P_n(m) \approx \dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ alarıq.

Məsələ. Hər sınaqda A hadisəsinin baş verməsi eh-timalı 0,6 bərabərdirsə, 2400 sınaqda A hadisəsinin 1400 dəfə baş verməsi ehtimalını tapın.

Həlli. n böyük olduğundan, Laplas lokal teoremindən istifadə edək: $x = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1400-2400\cdot 0{,}6}{\sqrt{2400\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4}} = -\dfrac{40}{24} = -1{,}67$

$\varphi(x)$ funksiyası cüt olduğuna görə $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$ 1-ci əlavədəki cədvələ görə $\varphi(1{,}67) = 0{,}0989$ tapırıq.

Axtarılan ehtimal $P_{2400}(1400) = \dfrac{1}{24} 0{,}0989 = 0{,}0041$ olar.

17. Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları (Binomial, Həndəsi və Puasson) .

Aşağıdakı diskret paylanmalara baxaq:

<u>1. BİNOMİAL PAYLANMA</u>. Bu paylanma

$$P_n(X = k) = P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \tag{1}$$

$(k = 0,1,2,...,n)$ düsturundan alınır

X	0	1	2	…	к	…	n
P_i	q^n	$c_n^1 pq^{n-1}$	$c_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$c_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

(2)

(2) diskret təsadüfi X kəmiyyətinin binomial paylanma qanunu adlanır. Bu paylanma üçün

$\sum_{k=0}^{n} c_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1$ olur.

<u>2. HƏNDƏSİ PAYLANMA</u>. Bu paylanma

$$P(X = k) = p \cdot q^k \qquad (k = 0,1,2,...) \tag{3}$$

$(0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad q = 1 - p)$ düsturundan alınır

X	0	1	2	…	k	…
P_i	p	pq	pq^2	…	pq^k	…

(4)

(4) diskret təsadüfi X kəmiyyətinin həndəsi paylanma qanunudur.
Burada $p + pq + pq^2 + ... + pq^k + ... = p\underbrace{\left(1 + q + q^2 + ... + q^k + ...\right)}_{\frac{1}{1-q}(0<q<1 \text{ olduhundan})} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$ olur.

3. PUASSON PAYLANMASI.

Bu paylanma

$$P_n(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,2,...n,... \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

Puassonun asimptotik düsturundan alınır:

X	0	1	2	…	n	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	…

(6)

(6) diskret X təsadüfi kəmiyyətin Puasson paylanması adlanır. Burada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$ olur.

18. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının xassələrini yazin və verilən məsələni həll edin.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsinə onun <u>sıxlıq funksiyası deyilir</u> və $f(x)$ - ilə işarə olunur:

$$f(x) = F'(x) \tag{1}$$

Sıxlıq funksiyası məlum olduqda paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \tag{2}$$

düsturu ilə tapılır. $F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$ olur.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

<u>1 xassə</u>. Sıxlıq funksiyası mənfi deyildir, yəni $f(x) \geq 0$.

□ $f(x) = F'(x) \geq 0$ ($F(x)$ paylanma funksiyası azalmayan funksiya olduğundan $F'(x) \geq 0$) olur. □

<u>2 xassə.</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Məsələ . Təsadüfi X kəsilməz kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0, x>2\\ ax & x\in[0;2]\end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətinin $[1;2]$ parçasında qiymət alması ehtimalını tapın.

Həlli: $f(x)=ax \quad x\in[0,2]$ olduqda a parametrini tapmaq üçün

$\int_a^b f(x)dx=1$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.

$$\int_a^b axdx=1\Rightarrow \quad \frac{ax^2}{2}\Big|_0^2=1\Rightarrow \quad \frac{a\cdot 4}{2}=0,5$$

$f(x)=F'(x)$ düsturundan istifadə edərək $F(x)$ paylanma funksiyasını tapaq.

$f(x)=0,5x$ olduğundan $F(x)=0,25x^2$ olur.

$$F(x)=\begin{cases}0, \quad x\le 0,\\ 0,25x^2, \quad 0<x\le 2,\\ 1, x>2\end{cases}$$

$[1,2]$ parçasında $F(x)$ funksiyasının qiymət alması ehtimalını tapaq.

$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$ düsturundan istifadə edək.

$$P(1<x<2)=F(2)-F(1)=0,25x^2\Big|_{x=2}-0,25x^2\Big|_{x=1}=0,25\cdot 4-0,25=$$
$$=0,25(4-1)=0,75$$

19. Dispersiya və onun xassələri (D(X+У)= D(X)+D(У) isbatı ilə)

Diskret X təsadüfi kəmiyyətinin sonlu $M(X)$ riyazi gözləməsi varsa, onda $M\left[X-M(X)\right]^2$ ifadəsinə X təsadüfi kəmiyyətinin <u>dispersiyası deyilir</u> və *D(X)* kimi işarə olunur:

$$D(X)=M\left(X-M(X)\right)^2 \ . \qquad (1)$$

Dispersiyanı hesablamaq üçün daha əlverişli düstur çıxaraq:

$$D(X)=M\left[X-M(X)\right]^2=M\left(X^2-2X\cdot MX+M^2X\right)=MX^2-M\left(2X\cdot\underbrace{MX}_{sabitdir}\right)+M\left(\underbrace{M^2X}_{sabitdir}\right)=$$
$$=MX^2-2MX\cdot MX+M^2X=MX^2-M^2X$$

Deməli dispersiyanı

$$DX = MX^2 - M^2X \qquad (2)$$

düsturu ilə hesablamaq bəzən əlverişli olur. Burada MX^2 və M^2X sabit ədədlər olduğundan dispersiyada, yəni DX–də sabit ədədir.

Dispersiyanın xassələri

1 xassə. Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir.

□ (1) düsturunda $X=C$ yazsaq $D(C) = M\left(C - \underbrace{M(C)}_{C}\right)^2 = M(C-C)^2 = \underbrace{M0}_{"0"} = 0$ □

2 xassə. Sabit vurğu kvadratı ilə dispersiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar

□ $D(CX) = M\left(CX - \underbrace{M(CX)}_{CMX}\right)^2 = C^2M(X - MX)^2 = C^2DX$ □

3 xassə. Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası, onların dispersiyalarının cəminə bərabərdir:

$$D(X+У) = DX + D(У) \qquad (3)$$

□ (3)-da X yerinə $X+У$ yazsaq

$$D(X+У) = M(X+У)^2 - \left[\underbrace{M(X+У)}_{MX+MУ}\right]^2 = M\left(X^2 + 2X\cdot У + У^2\right) - \left(M^2X + 2MX\cdot MУ + M^2У\right) =$$

$$= Mx^2 - 2\underbrace{M(X\cdot У)}_{MX\cdot MУ} + MУ^2 - M^2X - 2MX\cdot MУ - M^2У = \left(MX^2 - M^2X\right) + \left(MУ^2 - M^2У\right) = DX + DУ$$ □

□ Burada $X \wedge У$ asılı olmadığından $M(X\cdot У) = MX\cdot MУ$ olur.

4 xassə. X və У asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqinin dispersiyası, onların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$D(X-У) = DX + DУ \qquad (4)$$

□ $D(X-У) = D(X + (-1)У) = DX + D((-1)У) = DX + (-1)^2 DУ = DX + DУ$

20. Diskret təsadüfi kəmiyyətin momentləri . Verilən paylanmanın 2-ci tərtib mərkəzi momenti tapın.

x	**1**	**2**	**4**
p	**0,1**	**0,3**	p_3

Diskret təsadüfi X kəmiyyətinin K tərtibli momenti $(X-a)^k$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə deyilir

$$\nu_k(a) = M(X-a)^k \qquad (1)$$

kimi işarə olunur. $a=0$ olduqda (1) –dən alınan

$$\alpha_k = \nu_k(0) = MX^k \qquad (2)$$

- ya k tərtibli başlanğıc moment deyilir. (2) –dən $k = 0,1,2,3,4,...$ qiymətlərinə uyğun

$\alpha_0 = MX^0 = M1 = 1$

$\alpha_1 = MX$, (bir tərtibli başlanğıc moment riyazi gözləməyə bərabərdir)

$\alpha_2 = MX^2$, $\alpha_3 = MX^3$, $\alpha_4 = MX^4$... alırıq.

(1)– də $a = MX$ yazsaq, alınan $\beta_k = \nu_k(MX) = M\left[X - M(X)\right]^k$ (3)

ifadəsinə k tərtibli mərkəzi moment deyilir. (3) –dən $k = 0.1,2,3,4,...$ qiymətlərinə uyğun

$$\beta_0 = M\left(X - MX\right)^0 = M1 = 1,$$

$$\beta_1 = M\left(X - MX\right) = MX - \underbrace{M\left(MX\right)}_{MX} = MX - MX = 0,$$

$\beta_2 = M\left(X - MX\right)^2 = DX$, (iki tərtibli mərkəzi moment dispersiyaya bərabərdir)

$$\beta_3 = M\left(X - MX\right)^3 = MX^3 - 3MX^2 \cdot MX + 2M^3X$$

$\beta_4 = MX^4 - 4MX^3 \cdot MX + 6MX^2 \cdot M^2X - 3M^4X$, və s. alarıq. Onda mərkəzi momentlərlə, başlanğıc momentlər arasında aşağıdakı münasibətləri ararıq

$$\beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2, \quad \beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3, \quad \beta_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4, \quad \beta_5 = ...$$

....

Paylanmasının 2-ci tərtib mərkəzi momentini tapaq.
2-ci tərtib mərkəzi momentinitapmaq üçün

$$\beta_2 = M\left[X - M(x)\right]^2 = D(x)$$

Mərkəzi momentləri, başlanğıc və mərkəzi momentlərin əlaqə düsturundan istifadə etməklə hesablamaq məqsədəuyğundur.

$$\beta_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2$$

$$\upsilon_1 = M(x)$$

$$\upsilon_2 = M(x^2)$$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ olduğundan $p_3 = 0,6$

$$\upsilon_1 = M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1$$

$$\upsilon_2 = M(x^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$M(x^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + x_3^2p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$\beta_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = 10,9 - (3,1)^2 = 1,29$$

21. Məsələ. İşçi 4 dəzgaha nəzarət edir. Eyni zaman ərzində dəzgahların nəzarət tələb etməməsi hadisələrinin ehtimalları uyğun olaraq 0,9, 0,8,0,75 və 0,7-ə bərabərdir. Dəzgahların X-sayı üçün diqqət tələb etməməsinin paylanma qanununu tərtib edin.

Həlli. Bu məsələni bir neçə üsulla həll etmək olar.

1-ci üsul. A_k-ilə k-cı dəzgahın cari müddəti diqqət tələb etməməsi hadisəsini (uyğun olaraq tələb etməsi hadisəsini) işarə edək. Onda aydındır ki, $P(x=0) = p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3A_4}\right) = (1-0,9)(1-0,8)(1-0,75)(1-0,7) = 0,0015$;

$$P(x=1) = P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\Big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\Big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\Big) =$$

$= 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,3 + \cdot 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,7 = 0,0275$ analoji olaraq:

$$P(x=2) = P\left(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 +$$

$$+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4\Big)=0,1685$$

$$P(x=3)=P\left(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+A_1A_2\overline{A_3}A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+\overline{A_1}A_2A_3A_4\right)=0,4245;$$

$$P(x=4)=P(A_1A_2A_3A_4)=0,378$$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu:

X:	x_k	0	1	2	3	4
	P_k	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

22. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin. $\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)\,dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən *X* təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və *DX* kimi işarə olunur:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \qquad (1)$$

(1) –dən $DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-2M(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}_{MX}+M^2X\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}_{1}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-M^2X$.

Yəni

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx\right)^2 \qquad (2)$$

alırıq.

Əgər *X* kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-\left(\int_a^b x\,f(x)dx\right)^2 \qquad (3)$$

olur.

Məsələ.: *X* təsadüfi kəmiyyəti $(0,\pi)$ **intervalında** $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ **sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir; bu interval xaricində** $f(x)$**=0. X-ın dispersiyasını tapın.**

Həlli. **Dispersiyanı aşağıdakı düsturla tapaq:**

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$$

$M(X)=\frac{\pi}{2}$ **(paylanmanın əyrisi** $x=\pi/2$ **düz xəttinə nəzərən simmetrikdir),**

$a=0,\ b=\pi,\ f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ **götürsək, alarıq:**

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x dx-\left[\frac{\pi}{2}\right]^2 \qquad (*)$$

İki dəfə hissə-hissə inteqrallanmanı yerin yetirsək:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 4 \qquad (**)$$

(**)–nu (*)–da nəzərə alsaq, nəticədə alırıq: $D(X) = \dfrac{\pi^2 - 8}{4}$ **.**

23 . Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)\,dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin <u>dispersiyası deyilir</u> və $D(X)$ kimi işarə olunur:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\,dx \qquad (1)$$

(1) –dən $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - 2M(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx}_{MX} + M^2X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2X$.

Yəni

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx\right)^2 \qquad (2)$$

alırıq.

Əgər X kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left(\int_a^b x\,f(x)\,dx\right)^2 \qquad (3)$$

olur.

Məsələ. X **təsadüfi kəmiyyəti (2,4) intervalında** $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ **sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir; bu interval xaricində** $f(x)$ **=0. X kəmiyyətinin modasını, riyazi gözləməsini, dispersiyasını və medianını tapın.**

Həlli. $(2,4)$ intervalında $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{9}{2}x - 6$ sıxlıq funksiyasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq.

$M(x) = \int_a^b xf(x)dx$ düsturundan istifadə edək.

$$M(x)=\int_2^4\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right)dx=\left(-\frac{3}{4}\frac{x^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}\frac{4^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{4^3}{3}-\frac{6\cdot 4^2}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{2^3}{3}-\frac{6\cdot 2^2}{2}\right)=3$$

$D(x)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(M(x)\right)^2$ düsturundan istifadə edərək dispersiyanı tapaq.

$$D(x)=\int_2^4 x^2\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right)dx-\left(M(x)\right)^2=$$

$$=\int_2^4\left(-\frac{3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^3-6x^2\right)dx-\left(M(x)\right)^2=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4-3^2=\left(-\frac{3}{4}\frac{4^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{4^4}{4}-\frac{6\cdot 4^3}{3}\right)-$$

$$-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{2^4}{4}-\frac{6\cdot 2^3}{3}\right)-9=141$$

24. Müntəzəm paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları(riyazi gözləmə və dispersiya).

Bütün mümkün qiymətləri (a,b) intervalına daxil olan kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası həmin intervalda sabit $f(x)=\frac{1}{b-a}$ qiymətini, bu intervalın xaricində isə $f(x)=0$ qiymətini alırsa, onda x kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinə (a,b) intervalında <u>müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir</u>. Tərifdən aydındır ki, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{(b-a)}\cdot(b-a)=1$ olur. Yəni müntəzəm paylanmadakı $f(x)$ funksiyası doğrudan da sıxlıq funksiyasıdır. X –in paylanma funksiyasını yəni $F(x)$ funksiyasını tapaq.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(t)dt}_{0}+\int_a^x f(t)dt=\int_a^x\frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\Bigg|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$$ olar.

Yəni
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a \quad olarsa,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b \quad olarsa,\\ 1, & x>b \quad olarsa,\end{cases}$$
olur.

Müntəzəm paylanmanın riyazi gözləməsi $MX=\int_a^b x\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$ olar.

Müntəzəm paylanmanın dispersiyası

$$DX=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\int_a^b\left[x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{b-a}=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}-\frac{x^2(a+b)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{1}{b-a}x\right]\Big|_a^b=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{b-a}{b-a}=\frac{a^2-ab+b^2}{3}-\frac{a^3+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

olar.

(a,b) intervalında müntəzəm paylanmış X kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətinin bu intervalın ixtiyarı (α,β) hissəsinə düşməsi ehtimalı $P(\alpha<x<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{x}{b-a}\Big|_\alpha^\beta=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$ olar.

25. Üstlü paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları(riyazi gözləmə və dispersiya).

Kəsilməz X təsadüfi kəmiyyəti

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda,\\ 0 \quad, & x\le 0 \quad olduqda,\end{cases} \tag{1}$$

sıxlıq funksiyasına malikdirsə, onda onun paylanmasına $\lambda(\lambda>0)$ parametrli <u>üstlü paylanma deyilir</u>. Üstlü paylanmanın paylanma funksiyası

$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)dt}_{0}+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$ olur. Yəni

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda,\\ 0 \quad, & x\le 0 \quad olduqda.\end{cases} \tag{2}$$

Üstlü paylanmada X təsadüfi kəmiyyətinin (α,β) intervalındakı qiymətləri alması ehtimalı

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=1-e^{-\lambda\beta}-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \tag{3}$$

düsturu ilə tapılır.

Üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi $MX=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$ olur.

Yəni üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi λ parametrinin tərs qiymətinə bərabərdir:

$$MX=\frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

Üstlü paylanmanın dispersiyası

$$DX=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\underbrace{-x^2\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=2\cdot\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

olur. Yəni,

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5}$$

Onda $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}$ olur. Deməli üstlü paylanmada

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ - dır.} \tag{6}$$

X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin orta kvadratik meylinin onun riyazi gözləməsinə olan nisbətinə təsadüfi *X* kəmiyyətinin <u>variasiya əmsalı deyilir</u> və V –ilə işarə olunur:

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \tag{7}$$

Üstlü paylanma üçün $V = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$ olar.

26. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)\, dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən *X* təsadüfi kəmiyyətinin <u>dispersiyası deyilir</u> və *D*(*X*) kimi işarə olunur:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \tag{1}$$

(1) –dən $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - 2M(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx}_{MX} + M^2X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx}_{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2X.$

Yəni

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx\right)^2 \tag{2}$$

alırıq.

Əgər *X* kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left(\int_a^b x f(x)dx\right)^2 \tag{3}$$

olur.

Məsələ: *X* təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x + x^2}{12}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətin (1;2) –dən qiymət alması ehtimalını tapın.

Həlli: $P(a<x<b)=F(b)-F(a)=F(2)-F(1)=\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=2}-\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=1}=$

$=\frac{2+4}{12}-\frac{1+1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ **alarıq.**

27. Normal paylanma. Normal paylanmada a və σ parametrləri. Normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin (α;β) intervalından qiymət alması ehtimalı.

Kəsilməz təsadüfi X kəmiyyəti

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

sıxlıq funksiyasına malikdirsə, onda X kəmiyyətinin paylanmasına $(a;\sigma)$ parametrli normal paylanma deyilir. Normal paylanmış kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası.

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot dt \qquad (2)$$

kimidir. Əgər (1)-də $a=0,\ \ \sigma=1$ olarsa onda $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

(3)

alırıq. Onda kəsilməyən X təsadüfi kəmiyyətinin paylanmasına standart normal paylanma deyilir.

İsbat edək ki, (1) –dəki a parametri təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsi, σ parametri isə orta kvadratik meylidir.

$$\square\, MX=\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (4)$$

$t=\frac{x-a}{\sigma}$ işarə etsək, buradan $x=a+\sigma t,\ \ dx=\sigma dt$ alarıq. $x=-\infty$ olduqda $t=-\infty$ və $x=+\infty$ olduqda $t=+\infty$ olur. Onda (4) –dən

$$MX=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(a+\sigma t)\cdot e^{-t^2/2}\cdot\sigma dt=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}\cdot dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot e^{-t^2/2}\cdot dt \qquad (5)$$

alarıq. (5) –də $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2/2}dt=\sqrt{2\pi}$ (Puasson inteqralı) və $\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot e^{-t^2/2}\cdot dt=0$ (inteqral altı funksiya tək funksiya, inteqrallama sərhədləri koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir) olduğunu (5)-də nəzərə alsaq $MX=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi}=a$ alırıq.

$$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma^2t^2\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\cdot\sigma dt=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\cdot\left(te^{-\frac{t^2}{2}}\right)\cdot dt \qquad (6)$$

Burada $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t\left(t\cdot e^{-t^2/2}\right)dt = \underbrace{-t\cdot e^{-t^2/2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{"0"} + \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt}_{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$ olduğundan (6)- dan

$DX = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\cdot\sqrt{2\pi} = \sigma^2$ alırıq. Yəni $\sigma = \sqrt{DX}$ -dir və $\sigma > 0$ -dır. □

İndii normal paylanmış kəsilməz X təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş (α,β) intervalında qiymət alması ehtimalını tapaq.

$$P(\alpha < X < \beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-t^2/2}dt = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

olur.

Burada $\frac{x-a}{\sigma} = t$ -dən, $x = \alpha$ olduqda $t = \frac{\alpha-a}{\sigma}$ və $x = \beta$ olduqda $t = \frac{\beta-a}{\sigma}$ olduğundan və Laplas funksiyasından istifadə etdik. Deməli,

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right) \quad .$$

28. Normal əyri a və σ parametrlərinin normal əyriyə təsiri.

Normal paylanmış kəsilməz təsadüfi X kəmiyyətinin

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \qquad (1)$$

sıxlıq funksiyasının qrafikinə normal əyri deyilir. (1) –dən

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot 0 = 0$$

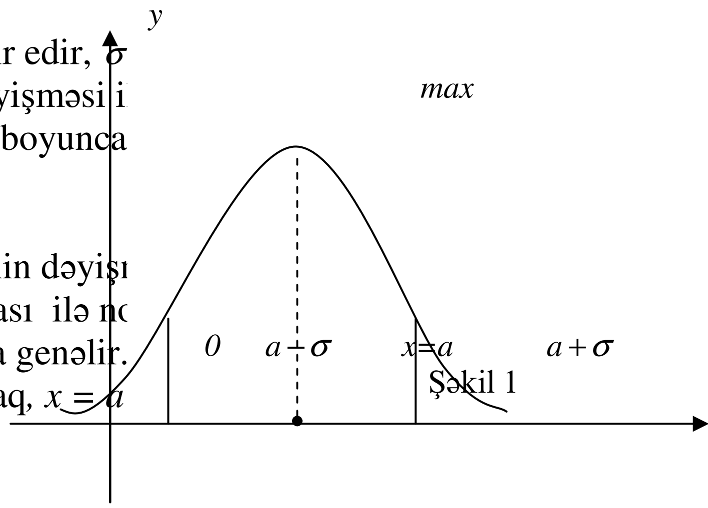
olduğundan absis oxu normal əyrinin asimptotik düz xəttidir. $f(x)$ sıxlıq funksiyası olduğundan $f(x) > 0$ olur. Yəni normal əyri absis oxundan yuxarıda yerləşir. $x = a$ düz xətti normal əyrinin simmetriya xəttidir. $x = a$ nöqtəsi normal əyrinin maksimum nöqtəsidir. Bunu göstərək (1) – dən $f'(x) = \frac{-(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0 \Rightarrow x - a = 0 \Rightarrow x = a$ olur. $x < a$ olduqda $f'(x) > 0$ və $x > a$ olduqda $f'(x) < 0$ olduğundan $\max f(x)\Big|_{x=a} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ olar. $x = a + \sigma$ və $x = a - \sigma$ nöqtələri əyilmə nöqtəsinin absisləridir. Doğrudanda $f''(x) = \frac{(x-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$ -dan $(x-a)^2 - \sigma^2 = 0 \Rightarrow$ $x = a - \sigma$ və $x = a + \sigma$ olur. Onda əyilmə nöqtəsinin ordinatı $f(a\pm\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$ olduğundan normal əyrinin əyilmə nöqtələri $\left(a-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ və $\left(a+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ olar.

$x < a \pm \sigma$ olduqda $f''(x) > 0$ və $x > a \pm \sigma$ olduqda $f''(x) < 0$ olduğından doğrudan da $x = a \pm \sigma$ normal əyrinin əyilmə nöqtəsinin absisidir, $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ funksiyası üçün yuxarıda əldə etdiyimiz nəticələrə əsasən normal əyri (şək.1)

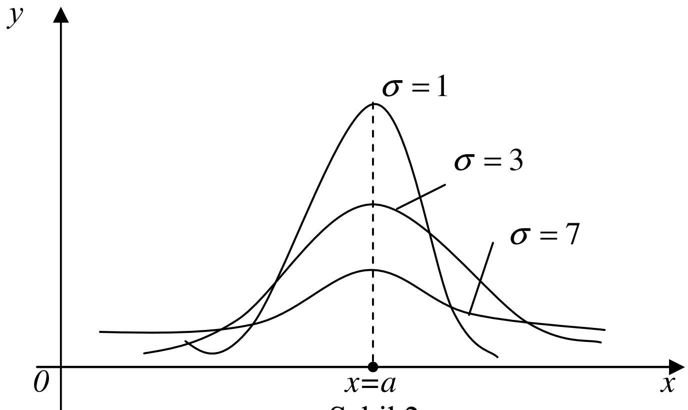
kimidir. Qeyd edək ki, normal paylapnmanın a və σ

parametrləri normal əyriyə müxtəlif cür təsir edir, σ
parametri qeyd edildikdə a parametrinin dəyişməsi i
normal əyri formasını dəyişmir, absis oxu boyunca

sola və ya sağa sürüşdürülür, σ parametrinin dəyişı
normal əyrinin forması dəyişir. σ-nin artması ilə nc
əyri yuxarıdan sıxılaraq, absis oxu boyunca genəlir.
nin azalması ilə bu əyri yuxarıdan dartılaraq, $x = a$
xəttinə yaxınlaşır (şək.2)



Şəkil 1



Şəkil 2

29. Bir təsadüfi aqrumentli funksiya və onun ədədi xarakteristikaları. Verilən məsələni həll edin.

Məsələ: X təsadüfi kəmiyyəti [-1;1] parçasında müntəzəm paylanarsa,

$y = x^2$

kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapın.

Həlli. *X* təsadüfi kəmiyyətinin hər bir mümkün qiymətinə *Y* təsadüfi kəmiyyətinin yalnız bir mümkün qiyməti uyğun gələrsə, onda *Y* -ə <u>təsadüfi *X* arqumentli funksiya deyilir</u> və $Y = \varphi(X)$ kimi işarə olunur.

Diskret *X* təsadüfi kəmiyyətinin verilmiş

X	x_1	x_2	...	x_n

(1)

p	p_1	p_2	...	p_n

paylanmasına görə $Y=\varphi(X)$ paylanmasını tapaq. Aydındır ki, $\{X=x_i\}$ hadisəsi ilə $\{Y=\varphi(x_i)\}$ hadisələri eyni güclü hadisələrdir. Buna görədə $P\{X=x_i\}=P\{Y=\varphi(x_i)\}=P_i \quad (i=\overline{1,n})$ olur.

Onda $Y=\varphi(X)$ təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətləri (1) paylanmasına əsasən $\varphi(x_1),\varphi(x_2),...,\varphi(x_n)$ olduğundan, $Y=\varphi(X)$ -in paylanması

$Y=\varphi(X)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_n)$
p	p_1	p_2	...	p_n

(2)

kimi olar. (2)-dən riyazi gözləmənin tərifinə əsasən

$$M(Y)=M\left[\varphi(X)\right]=\sum_{i=1}^{n}P_i\varphi(x_i), \tag{3}$$

$$DY=D(\varphi(X))=\sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x_i)-M(\varphi(X))\right]^2P_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)P_i-\left(M\left[\varphi(X)\right]\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)P_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)P_i\right)^2=M\left[\varphi^2(X)\right]-\left(M\left[\varphi(X)\right]\right)^2$$

olar.

Bilirik ki, müntəzəm paylanmanın sıxlıq funksiyası

$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$ -dir

$$y=x^2 \qquad x=\sqrt{y} \qquad y>0$$

$$g(y)=f(\psi(y))\cdot\psi'(y)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$M(y)=\int_0^1 yg(y)dy=\int_0^1 y\cdot\frac{1}{4\sqrt{y}}dy=\int_0^1\frac{\sqrt{y}}{4}dy=\frac{1}{4}\left.\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left.y^{\frac{3}{2}}\right|_0^1=\frac{1}{6}$$

$$D(y)=\int_0^1 y^2f(y)dy-(M(y))^2=\int_0^1 y^2\cdot\frac{1}{4\sqrt{y}}dy-\frac{1}{36}=$$

$$=\int_0^1\frac{y\sqrt{y}}{4}dy-\frac{1}{36}=\frac{1}{4}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy-\frac{1}{36}=\frac{1}{4}\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{1}{36}=$$

$$=\frac{1}{10}\left.y^{\frac{5}{2}}\right|_0^1-\frac{1}{36}=\frac{1}{10}-\frac{1}{36}=\frac{18-5}{180}=\frac{13}{180}$$

30. İki təsadüfi arqumentin funksiyası . Iki təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanunu verildikdə $Z=X+Y$ təsadüfü kəmiyyətinin paylanma qanununu yazın.

Məsələ: X və Y təsadüfi kəmiyyətlərin paylanması verilmişdir.

X	1	4
P	0,3	0,7

y	2	3
g	0,4	0,6

$Z = X + Y$ -in paylanmasını yazın.

Həlli. X və Y təsadüfi kəmiyyətləri cütünün hər bir mümkün qiymətlərinə Z təsadüfi kəmiyyətinin bir mümkün qiyməti uyğun gələrsə, onda Z- ə iki təsadüfi arqumentin funksiyası deyilir: $Z=\varphi(X,Y)$ kimi işarə olunur.

Praktikada çox vaxt asılı olmayan iki X və Y təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş paylanmasına görə $Z=X+Y$ paylanmasını tapmaq tələb olunur. Bunun üçün Z-in bütün mümkün qiymətlərini tapmaq lazımdır. Z-in mümkün qiymətlərini tapmaq üçün isə X-in hər bir mümkün qiyməti ilə Y-in bütün mümkün qiymətlərini toplamaq lazımdır. Z-in tapılmış mümkün qiymətlərinin ehtimalları isə X və Y -in toplanmış qiymətlərinin ehtimalları hasilinə bərabərdir.

. Fərz edək ki, asılı olmayan X və Y-in paylanması verildi.

X	X_1	X_2
p	p_1	p_2

Y	Y_1	Y_2
g	g_1	g_2

Onda x+y –in paylanması aşağıdakı şəkildə olacaq

$$p(x=x_1, y=y_1) = p(x=x_1)\cdot p(y=y_1) = p_1 g_1$$

$$p(x=x_1, y=y_2) = p(x=x_1)\cdot p(y=y_2) = p_1 g_2$$

$$p(x=x_2, y=y_1) = p(x=x_2)\cdot p(y=y_1) = p_2 g_1$$

$$P(x=x_2, y=y_2) = P(x=x_2)\cdot P(y=y_2) = P_2 g_2$$

Onda

x+y	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_2	x_2+y_2
P	$p_1 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_1$	$p_2 g_2$

Bunları məsələdə nəzərə alsaq

$$P(z=1+2=3) = 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

$P(z=1+3=4)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$

$P(z=4+2=6)=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28$

$P(z=4+3=7)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$

Z	3	4	6	7
P	0,12	0,18	0,28	0,42

31. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu .Komponentlərin paylanma qanunu.

Həlli. *X* və *У* təsadüfi kəmiyyətləri cütünün hər bir mümkün qiymətlərinə *Z* təsadüfi kəmiyyətinin bir mümkün qiyməti uyğun gələrsə, onda *Z*- ə iki təsadüfi arqumentin funksiyası deyilir: $Z=\varphi(X,У)$ kimi işarə olunur.

Praktikada çox vaxt asılı olmayan iki *X* və *У* təsadüfi kəmiyyətlərinin verilmiş paylanmasına görə *Z*=*X*+*У* paylanmasını tapmaq tələb olunur. Bunun üçün *Z*-in bütün mümkün qiymətlərini tapmaq lazımdır. *Z*-in mümkün qiymətlərini tapmaq üçün isə *X*-in hər bir mümkün qiyməti ilə У-in bütün mümkün qiymətlərini toplamaq lazımdır. Z-in tapılmış mümkün qiymətlərinin ehtimalları isə *X* və *У* -in toplanmış qiymətlərinin ehtimalları hasilinə bərabərdir.
. Fərz edək ki, asılı olmayan X və Y-in paylanması verildi.

X	X_1	X_2
p	p_1	p_2

Y	Y_1	Y_2
g	g_1	g_2

Onda x+y –in paylanması aşağıdakı şəkildə olacaq

$p(x=x_1, y=y_1)=p(x=x_1)\cdot p(y=y_1)=p_1g_1$

$p(x=x_1, y=y_2)=p(x=x_1)\cdot p(y=y_2)=p_1g_2$

$p(x=x_2, y=y_1)=p(x=x_2)\cdot p(y=y_1)=p_2g_1$

$P(x=x_2, y=y_2)=P(x=x_2)\cdot P(y=y_2)=P_2g_2$

Onda

x+y	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_2	x_2+y_2
P	p_1g_1	p_1g_2	p_2g_1	p_2g_2

Bunları məsələdə nəzərə alsaq

$$P(z=1+2=3)=0,3\cdot 0,4=0,12$$

$$P(z=1+3=4)=0,3\cdot 0,6=0,18$$

$$P(z=4+2=6)=0,7\cdot 0,4=0,28$$

$$P(z=4+3=7)=0,7\cdot 0,6=0,42$$

Z	3	4	6	7
P	0,12	0,18	0,28	0,42

alırıq.

32. İki təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma funksiyası və onun xassələri. Komponentlərin paylanma funksiyasıyaları.

Fərz edək ki, X və У asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Onda (X, У) sisteminin paylanma funksiyası (və ya birgə paylanma funksiyası) {X < x} və {У < y} hadisələrinin eyni zamanda (birgə) baş verməsi ehtimalına, yəni P{X < x ; У < y} –ə deyilir və F(x,y) kimi işarə olunur.

Tərifə əsasən yaza bilərik:

$$P(X < x\ ;\ У < y) = F(x,y)\ . \qquad (1)$$

Tərifdən aydındır ki, F(x,y) paylanma funksiyası ikidəyişənli funksiyadır və aşağıdakı xassələrə malikdir.

1) $0 \le F(x,y) \le 1$

□ (1) –də $0 \le P(X < x; У < y) \le 1$ olduğundan $0 \le F(x,y) \le 1$ olur. □

2) F(x,y) paylanma funksiyası hər bir arqumentə görə azalmayan funksiyadır, yəni $x_1<x_2$ olduqda $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$ və $y_1<y_2$ olduqda $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$ olur.

□ Doğrudan da

$$\{X < x_2, У < y\} = \underbrace{\{X < x_1, У < y\} \cup \{x_1 \le X < x_2, У < y\}}_{\{\varnothing\}} \Rightarrow \underbrace{P\{X < x_2, У < y\}}_{(1)\Rightarrow F(x_2,y)} =$$

$$= \underbrace{P\{X < x_1, У < y\}}_{(1)\Rightarrow F(x_1,y)} + P\{x_1 \le X < x_2, У < y\} \Rightarrow F(x_2,y) - F(x_1,y) = P\{x_1 \le X < x_2, У < y\} \ge 0$$

olduğundan $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$ olur. □

Eyni qayda ilə $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$ isbat olunur.

□

3)□ $F(+\infty,+\infty)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x,y)=1,\ F(-\infty,-\infty)=0,\ F(-\infty,y)=0,\ F(x,-\infty)=0$ olur.

□ $F(x,+\infty)=F_1(x)$ və $F(+\infty,y)=F_2(y)$ olur.

□ $F(x,+\infty)=P\left(X<x,\underbrace{Y<+\infty}_{(\Omega)}\right)=\underbrace{P(X<x,\Omega)}_{(X<x)}=P(X<x)=F_1(x)$ olur. □

Eyni qayda ilə $F(+\infty,y)=F_2(y)$ olduğu isbat olunur.

33. İki ölçülü asili təsadüfü kəmiyyətin paylanma qanununu yazın və məsələni həll edin.

Məsələ: İkiölçülü (X,Y) təsadüfü kəmiyyət cədvəldə verilmiş şəkildə paylanıb.

x_i	y_j	
	$y_1=0$	$y_2=1$
$x_1=-1$	0,1	0,2
$x_2=0$	0,2	0,3
$x_3=1$	0	0,2

Y=1 şərti daxilində *X* komponentinin paylanma qanununu yazin. *X* və *Y* kəmiyyətlərinin asılılığını araşdırın.

Tutaq ki, (X,У) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$ - dir. Onda $Y=y_j\ (j=1,2,...,m)$ şərti daxilində *X* komponentinin paylanmasına <u>şərti paylanma deyilir</u>. $Y=y_j\left(j=\overline{1,m}\right)$ şərti daxilində *X* təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1,x_2,...,x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, və ya nətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\left(P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad P_A(B)=\frac{P(\ldots)}{P(A)}\right)$ lacaq şərti ehtimallardar. Yəni

$$P_{Y=y_j}(X=x_i)=\frac{P\left[(X=x_i);(Y=y_j)\right]}{P(Y=y_j)}\qquad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right) \tag{1}$$

şərt ehtimallardır. Onda

$X/Y=y_j$	x_1	x_2	…	x_n
$P_{Y=y_j}$	$P_{Y=y_j}(x_1)$	$P_{Y=y_j}(x_2)$	…	$P_{Y=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli <u>*X* komponentinin şərti paylanması adlanır.</u>

Analoji olaraq $X=x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ şərti daxilində У komponentinin şərti paylanması

$Y/X=x_i$	y_1	y_2	…	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Y=1 şərti ilə

$$P_{X=-1}(Y=1) = \frac{P(X=-1;\ Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0,2}{0,2+0,3+0,2} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

$$P_{X=0}(Y=1) = \frac{P(X=0;\ Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0,3}{0,7} = \frac{3}{7}$$

$$P_{X=1}(Y=1) = \frac{P(X=1;\ Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} = \frac{0,2}{0,7} = \frac{2}{7}$$

34. Asılı təsadüfi kəmiyyətlər. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətin komponentlərinin şərti paylanması.

Tutaq ki, (X,У) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1, x_2, ... x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m$ - dir. Onda $У = y_j\ (j = 1, 2, ..., m)$ şərti daxilində *X* komponentinin paylanmasına <u>şərti paylanma deyilir</u>. $У = y_j\left(j = \overline{1,m}\right)$ şərti daxilində *X* təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, və ya nətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(\ldots)}{P(A)}\right)$ lacaq şərti ehtimallardar. Yəni

$$P_{У=y_j}(X = x_i) = \frac{P\left[(X = x_i);(У = y_j)\right]}{P(У = y_j)} \qquad \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right) \tag{1}$$

şərt ehtimallardır. Onda

$X / У = y_j$	x_1	x_2	…	x_n
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	…	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli <u>*X* komponentinin şərti paylanması adlanır.</u>

Analoji olaraq $X = x_i\left(i = \overline{1,n}\right)$ şərti daxilində У komponentinin şərti paylanması

$у / X = x_i$	y_1	y_2	…	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Tutaq ki, (*X,*У) kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər sistemidir, $f(x, y)$-isə bu sistemin paylanma sıxlığıdır. Onda $\{У = y\}$ şərti daxilində *X* komponentinin şərti paylanma sıxlığı (şərti sıxlıq funksiyası)

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad (4)$$

kimi təyin olunur. Burada $f_2(y)$ У – təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyadır və

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad (5)$$

kimidir. (5)-i (4)-də nəzərə alsaq

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad (6)$$

alarıq.

$\{X=x\}$ şərti daxilində У təsadüfi kəmiyyətinin şərti paylanması isə

$$\varphi\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy} \qquad (7)$$

kimdir. Burada $f_1(x)$, X komponentinin sılıq funksiyasıdır.

Qeyd edək ki, X və У asılı olduğundan $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$ və $f_1(x)\neq\varphi\left(x/y\right)$, $f_2(y)\neq\varphi\left(y/x\right)$ olur. Əgər $f_1(x)=\varphi\left(x/y\right)$ və $f_2(y)=\varphi\left(y/x\right)$ olursa, onda X və У komponentləri asılı olmayan kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərdir

35.Məsələ: X və Y ikiölçülü diskret təsadüfi kəmiyyət verilmişdir.

Y	*X*		
	X₁=2	*X₂=5*	*X₃=8*
$y_1=0,4$	*0,15*	*0,30*	*0,35*
$y_2=0,8$	*0,05*	*0,12*	*0,03*

a) Komponentlərin şərtsiz paylanma qanunlarını.

b) Y komponenti $y_1=0,4$ qiymətini aldıqda X komponentin şərti paylanma qanununu ,

c) X=x_2=5 şərti daxilində Y - in şərti paylanma qanununu tapın.

d)

e) Tutaq ki, (X,У) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$- dir. Onda $У=y_j\ (j=1,2,...,m)$ şərti daxilində X komponentinin paylanmasına <u>şərti paylanma deyilir</u>. $У=y_j\ \left(j=\overline{1,m}\right)$ şərti daxilində X təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1,x_2,...,x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, bu qiymətlərin və ya ı ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\left(P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}\right)$ tapı rti ehtimallardar. Yəni

f) $$P_{У=y_j}(X=x_i)=\frac{P\left[(X=x_i);(У=y_j)\right]}{P(У=y_j)}\qquad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right) \qquad (1)$$

g) şərt ehtimallardır. Onda

(2)

$X/Y=y_j$	x_1	x_2	...	x_n
$P_{Y=y_j}$	$P_{Y=y_j}(x_1)$	$P_{Y=y_j}(x_2)$	...	$P_{Y=y_j}(x_n)$

(2) cədvəli X komponentinin şərti paylanması adlanır.

Analoji olaraq $X = x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ şərti daxilində У komponentinin şərti paylanması

$Y/X=x_i$	y_1	y_2	...	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	...	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

Həlli: Ehtimalları "sütunlar üzrə " toplasaq X- in paylanma qanununu taparıq:

Ehtimalları "sərtlər üzrə " toplasaq Y-in paylanma qanununu taparıq:

Y	0,4	0,8
p	0,80	0,20

b) Y komponentin $y_1 = 0{,}4$ qiymətini alması şərti daxilində X- in mümkün qiymətlərini şərti ehtimallarını tapaq:

$$p(x_1/y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}15}{0{,}80} = \frac{3}{16},\ p(x_2/y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}30}{0{,}80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3/y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0{,}35}{0{,}80} = \frac{7}{16}$$

X üşün axtarılan paylanma qanununu yazaq:

x	2	5	8
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Yoxlama: $\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = 1$

C) Analogi olaraq Y –in şərti paylanma qanunun taparıq:

Y	0,4	0,8
$P(X_2/Y)$	5/7	2/7

Yoxlama : $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1$

36. İkiölçülü təsadüfi kəmiyyətlər sisteminin ədədi xarakteristikaları. Korreyyasiya asılılığı və korrelyasiya momenti.

Həlli. $(X,У)$ – ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları kimi, müxtəlif tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentlər öyrənilir.

$X^K У^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə, $(X,У)$ sistemini $K+S$ tərtibli başlanğıc momenti deyilir və $\alpha_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\alpha_{K,S} = M\left(X^K \cdot У^S\right) \tag{1}$$

$(X-MX)^K \cdot (У-MУ)^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə <u>$K+S$ tərtibli mərkəzi</u> <u>moment deyilir</u> və $\beta_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\beta_{K,S} = M\left[(X-MX)^K \cdot (У-MУ)^S\right] \tag{2}$$

Əgər X və $У$ təsadüfi kəmiyyətləri diskret təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $(y_1, y_2, ..., y_m)$ onların uyğun mümkün qiymətləridirsə, onda $(X,У)$ təsadüfi kəmiyyətinin $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\alpha_{K,S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i^k \cdot y_j^s \cdot P_{ij} \tag{3}$$

$$\beta_{K,S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (x_i - MX)^K \cdot (y_j - MУ)^S P_{ij} \tag{4}$$

düsturları ilə tapılır. Burada $P_{ij} = P\{X = x_i, У = y_j\}$ işarə olunmuşdur $\left(i = \overline{1,n}; j = \overline{1,m}\right)$.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin $(X,У)$ sisteminin sıxlıq funksiyası $f(x,y)$ olduqda $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\alpha_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^K \cdot y^S \cdot f(x,y)\,dx\,dy, \tag{5}$$

$$\beta_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-MX)^K \cdot (y-MУ)^S f(x,y)\,dx\,dy \tag{6}$$

düsturları ilə tapılır.

(2) –də K=1, S=1 olduqda

$$\beta_{1,1} = M\left[(X-MX)\cdot(У-MУ)\right] \tag{7}$$

alarıq. (7) bərabərliyindəki ifadə X və У <u>təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası</u> (və ya korrelyasiya momenti) <u>adlanır</u> və $\mathbf{cov}(X,У)$ və ya K_{XY} kimi_ işarə olunur:

$$K_{XУ} = \mathbf{cov}(X,У) = M\left[(X-MX)(У-MУ)\right]. \tag{8}$$

(8)–dən $K_{KУ} = M(XУ - УMX - X\cdot MУ + MXMУ) = M(XУ) - MX\cdot MУ -$
$-MX\cdot MУ + MX\cdot MУ = M(XУ) - MX\cdot MУ,$

yəni,

$$K_{XУ} = MX\cdot MУ - M(X\cdot У). \tag{9}$$

(8) dən $K_{XX} = M\left[(X-MX)\cdot(X-MX)\right] = M(X-MX)^2 = D(X)$ alırıq. Eyni qayda ilə (8) -dən $K_{уу} = M(У-MУ)^2 = D(У)$ alırıq.

Əgər X və У alılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $M(XУ) = MX\cdot MУ$ olur və buna əsasən (9) – dan $K_{XУ} = 0$ alarıq. Bu fikrin tərsi doğru olmaya da bilər. $K_{XУ} = 0$ olduqda $(X,У)$ təsadüfi kəmiyyətinə <u>korrelə olunmayan</u>, $K_{XУ} \neq 0$ olduqda korrelə olunan təsadüfi kəmiyyət deyilir. $(X,У)$ təsadüfi kəmiyyətinin koveryasiyası

$$|K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y \tag{10}$$

olur. Burada $\sigma_X^2 = K_{xx} = DX$, $\sigma_Y^2 = K_{YY} = DY$ işarə olunmuşdur.

$\square$ $M\left(\frac{X-MX}{\sigma_X} \pm \frac{Y-MY}{\sigma_Y}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow M\left[\frac{(X-MX)^2}{\sigma_X^2} \pm 2\left(\frac{(X-MX)(Y-MY)}{\sigma_X\sigma_Y}\right) + \frac{(Y-MY)^2}{\sigma_Y^2}\right] =$

$= \frac{1}{\sigma_X^2} M(X-MX)^2 \pm \frac{2}{\sigma_X\sigma_Y} M\left[(X-MX)(Y-MY)\right] + \frac{M(Y-MY)^2}{\sigma_Y^2} = \underbrace{\frac{DX}{\sigma_X^2}}_{1} \pm \frac{2K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} +$

$+ \underbrace{\frac{DY}{\sigma_Y^2}}_{1} = 2 \pm \frac{2K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \ge 0 \Rightarrow \pm \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \le 1 \Rightarrow |K_{XY}| \le \sigma_X \cdot \sigma_Y \cdot$ $\square$

$$r_{XY} = \frac{K_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{11}$$

işarə etsək. r_{XY} kəmiyyəti X və $У$ təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsalı adlanır. Korrelyasiya əmsalı ölçüsüz kəmiyyətdir və (10)-dan $|r_{XY}| \le 1$ olur. Korrelyasiya əmsalı X və $У$ arasındakı xətti əlagənin dərəcəsini qiymətləndirmək üçündür. Korrelyasiya əmsalının mütləq qiyməti vahidə nə qədər yaxındırsa, X və $У$ arasında əlaqə o qədər zəyifdir.

37. Məsələ : İkiölçülü (X,Y) təsadüfü kəmiyyət cədvəldə verilmiş şəkildə paylanıb.

X və Y

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

kəmiyyətlərinin korrelyasiya əmsallarını tapın.

$(X-MX)^K \cdot (Y-MY)^S$ hasilinin riyazi gözləməsinə <u>$K+S$ tərtibli mərkəzi</u> <u>moment deyilir</u> və $\beta_{K,S}$ kimi işarə olunur:

$$\beta_{K,S} = M\left[(X-MX)^K \cdot (Y-MY)^S\right] \tag{1}$$

Əgər X və $У$ təsadüfi kəmiyyətləri diskret təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ və $(y_1, y_2, ..., y_m)$ onların uyğun mümkün qiymətləridirsə, onda *(X,У)* təsadüfi kəmiyyətinin $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\beta_{K,S} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i - MX)^K \cdot (y_j - MY)^S P_{ij} \tag{2}$$

düsturları ilə tapılır. Burada $P_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ işarə olunmuşdur $\left(i = \overline{1,n};\, j = \overline{1,m}\right)$.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlərin $(X,У)$ sisteminin sıxlıq funksiyası $f(x,y)$ olduqda $K+S$ tərtibli başlanğıc və mərkəzi momentləri uyğun olaraq

$$\beta_{K,S} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^K \cdot (y-MY)^S f(x,y)\,dx\,dy \tag{3}$$

düsturları ilə tapılır.

(1) –də K=1, S=1 olduqda

$$\beta_{1,1} = M\left[(X - MX)\cdot(У - MУ)\right] \tag{4}$$

alarıq. (4) bərabərliyindəki ifadə X və У təsadüfi kəmiyyətlərinin kovariasiyası (və ya korrelyasiya momenti) adlanır və $\mathbf{cov}(X,У)$ və ya $K_{XУ}$ kimi_ işarə olunur:

$$K_{XУ} = \mathbf{cov}(X,У) = M\left[(X - MX)(У - MУ)\right]. \tag{5}$$

(5)–dən $K_{KУ} = M(XУ - УMX - X\cdot MУ + MXMУ) = M(XУ) - MX\cdot MУ -$
$-MX\cdot MУ + MX\cdot MУ = M(XУ) - MX\cdot MУ$,

yəni,

$$K_{XУ} = MX\cdot MУ - M(X\cdot У). \tag{6}$$

Bilirik ki , X-in paylanması

$$P(x_1 = 2) = P(x_1 = 2,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_1 = 2,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}15 + 0{,}05 = 0{,}2$$

$$P(x_2 = 5) = P(x_2 = 5,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_2 = 5,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}30 + 0{,}12 = 0{,}42$$

$$P(x_3 = 8) = P(x_3 = 8,\ y_1 = 0{,}4) + P(x_3 = 8,\ y_2 = 0{,}8) = 0{,}35 + 0{,}03 = 0{,}38$$

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Eyni qayda ilə Y-in paylanması

Y	0,4	0,8
P	0,80	0,20

Bilirik ki korrelyasiya əmsali

$$K_{xy} = M(X - M(x))\cdot M(Y - M(y)) = M(x\cdot y) - M(x)\cdot M(y) \quad \text{-dir}$$

Əvvəlcə komponentlərin paylanmasını tapaq

X	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

Y	0	1
P	0,3	0,7

$X\cdot Y$ -in paylanmasını yazaq :

$x\cdot y$	$-1\cdot 0$	$-1\cdot 1$	$0\cdot 0$	$0\cdot 1$	$1\cdot 0$	$1\cdot 1$
p	0,09	0,21	0,15	0,35	0,06	0,14

$x\cdot y$	-1	0	1
p	0,21	0,65	0,14

$$M(x) = -1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}2 = -0{,}3 + 0{,}2 = -0{,}1$$

$$M(y) = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}7 = 0{,}7$$

$$M(x\cdot y) = -1\cdot 0{,}21 + 0\cdot 0{,}65 + 1\cdot 0{,}14 = -0{,}21 + 0{,}14 = -0{,}07$$

$$K_{xy} = -0{,}07 - (-0{,}1)\cdot 0{,}73 = -0{,}07 + 0{,}07 = 0$$

Deməli korelə olunmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

38. İkiölçülü təsadüfü kəmiyyətin paylanma cədvəlini yazın və məsələni həll edin.
Məsələ. I atıcının hədəfi vurma ehtimalı 0,4-ə, II atıcının hədəfi vurma ehtimalı isə 0,6-ya bərabərdir. Hər iki atıcı bir –birindən asılı olmadan hədəfə iki atəş açır. I və II atıcının atıcının hədəfi vurmasının paylanma qanununu tapın. (X təsadüfi kəmiyyəti I atıcının, Y təsadüfi kəmiyyəti II atıcının hədəfi vurması kəmiyyətləri olsun).

Həlli. Tutaq ki, (X,У) sisteminin komponentləri asılı diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir və bunların mümkün qiymətləri uyğun olaraq $x_1, x_2, ... x_n$; $y_1, y_2, ..., y_m$ -dir. Onda $У = y_j\ (j = 1,2,...,m)$ şərti daxilində X komponentinin paylanmasına <u>şərti paylanma deyilir</u>. $У = y_j\left(j = \overline{1,m}\right)$ şərti daxilində X təsadüfi kəmiyyəti mümkün $(x_1, x_2, ..., x_n)$ qiymətlərindən yalnız birini alır, bu qiymətlərin alınması ehtimalları bizə məlum olan qayda ilə $\Big(P_B($ və ya $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}\Big)$ tapılacaq şərti ehtimallardar.

Yəni

$$P_{У=y_j}(X = x_i) = \frac{P\left[(X = x_i);(У = y_j)\right]}{P(У = y_j)} \quad \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right) \qquad (1)$$

şərt ehtimallardır. Onda

$X / У = y_j$	x_1	x_2	...	x_n
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	...	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

(2) cədvəli <u>X komponentinin şərti paylanması adlanır.</u>

Analoji olaraq $X = x_i \left(i=\overline{1,n}\right)$ şərti daxilində У komponentinin şərti paylanması

$y/_{X=x_i}$	y_1	y_2	…	y_m
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

kimi olar.

$p_1 = 0{,}4 \qquad p_2 = 0{,}6$

$q_1 = 0{,}6 \qquad q_2 = 0{,}4$

I atıcının paylanması

X	0	1	2
P	0,24	0,48	0,16

II atıcının paylanması

X	0	1	2
P	$q_2 q_2$	$2p_2 q_2$	$p_2 p_2$
X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

39. Böyük ədədlər qanunu . Çebışev bərabərsizliyi və teoremi.

Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının müəyyən mənada yığılması ilə əlaqədar olan teoremlərə limit teoremləri deyilir.

Təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün üç cür yığılma anlayışını verək.

1) Ehtimala görə yığılma

$X, X_1, X_2, ..., X_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|X_n - X\right| > \varepsilon\right\} = 0 \qquad (1)$$

şərti ödəndikdə $\{X_n\}_{n=1}^{+\infty}$ ardıcıllığı X kəmiyyətinə ehtimala görə yığılır deyirlər və bu yığılmanı

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} X \qquad (2)$$

kimi işarə edirlər.

2). Paylanmaya görə yığılma.

Əgər $X, X_1, X_2, ..., X_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığına $F(x), F_1(x), F_2(x), ..., F_n(x), ...$ paylanma funksiyalar ardıcıllığı uyğundursa, və

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x) \tag{3}$$

şərti ödənirsə, onda deyirlər ki, $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığı X kəmiyyətinə paylanmaya görə yığılır deyirlər və bu yığılma

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{F(x)} X \tag{4}$$

kimi işarə olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi limit teoremləri dedikdə, təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığının paylanmaya görə normal təsadüfi kəmiyyətə yığılması haqqında olan teoremlər nəzərdə tutulur. Əvvəllər qeydetdiyimiz Muavr-Laplasın inteqral teoremi ilk dəfə verilmiş mərkəzi limit teoremidir.

Qeyd edək ki, ehtimala görə yığılmadan paylanmaya görə yığılma alınır, bunun tərsi doğru olmaya da bilər.

3) $X, X_1, X_2, ..., X_n, ...$ təsadüfi kəmiyyətləri ardıcıllığı istənilən kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} X_K - \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} M(X_K)\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{5}$$

və ya

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} X_K - \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} M(X_K)\right| \geq \varepsilon\right) = 0 \tag{6}$$

münasibətini ödədikdə, yəni $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ kəmiyyətlərinin

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} X_K \tag{7}$$

ədədi ortası onların riyazi gözləməsinin

$$\frac{1}{n}\sum_{K=1}^{n} M(X_K) \tag{8}$$

ortasına ehtimala görə yığılarsa, deyirlər ki, $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ ardıcıllığı üçün böyük ədədlər qanunu ödənilir.

Verilmiş $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı üçün böyük ədədlər qanunun ödənilməsi şərtlərini (problemini) ilk dəfə P.L. Çebışev tapmışdır.

40. Cebışev bərabərsizliyini yazın məsələni həll edin.

Məsələ:X diskret təsadüfi kəmiyyəti paylanma qanunu ilə verilimişdir: Çebışev bərabərsizliyindən istifadə edərək, $|X - M(X)| < 0{,}2$ hadisəsinin ehtimalını qiymətləndirin.

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Həlli. Sonlu dispersiyası olan X təsadüfi kəmiyyəti və $\varepsilon > 0$ ədədi üçün

$$P\left(|X - M(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

□ Tutaq ki, X kəsilməz təsadüfi kəmiyyətdir və $f(x)$ onun sıxlıq funksiyasıdır. Onda

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right) = \int\limits_{|x - M(X)| \geq \varepsilon} f(x)\,dx \qquad (2)$$

münasibətinə əsasən

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - M(X)\right)^2 f(x)\,dx \geq \int\limits_{|x-M(X)|\geq\varepsilon} \underbrace{\left(x - M(X)\right)^2}_{\varepsilon^2} \cdot f(x)\,dx \geq \varepsilon^2 \underbrace{\int\limits_{|x-M(X)|\geq\varepsilon} f(x)\,dx}_{P\left(|x-M(X)|\geq\varepsilon\right)} = \varepsilon^2 \cdot P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$

və ya $D(X) \geq \varepsilon^2 P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \varepsilon\right)$ olar.

X kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq:

$M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54$

$D(X) = M(X^2) - \left[M(X)\right]^2 = \left(0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8\right) - 0{,}54^2 = 0{,}0144$

Çebışev bərabərsizliyinin aşağıdakı şəklindən istifadə edək:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Burada M(X) =0,54 ,D(X)=0,0144, $\varepsilon = 0{,}2$ olduğunu nəzərə alsaq, nəticədə alarıq.

$$P\left(\left|X - 0{,}54\right| < 5\right) \geq 1 - \frac{0{,}0144}{0{,}04} = 0{,}64$$

41.Seçmə dispersiyası və onun xassələri.

Fərz edək ki, müşahidələrin nəticəsi olaraq $x_1, x_2, \ldots x_n$ seçməsi verilmişdir. $\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ olduqda $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2$ (1) ədədinə seçmənin dispersiyası deyilir , burada $x_i - \overline{x}$ fərqləri meyllərdir. Əgər $x_1, x_2, \ldots x_n$ variantlarının $m_1, m_2, m_3 \ldots m_k$ tezlikləri məlumdursa, onda seçmə dispersiyası

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i \qquad (2)$$

şəklində yəyin edilir.

Seçmə dispersiyasının kvadrat kökünə seçmənin orta kvadratik meyli deyilir və

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

kimi və ya

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i}$$

kimi yazılır.

Aydındır ki, $\overline{\sigma_x}$ kəmiyyətinin ölçüsü X kəmiyyətinin ölçüsü ilə eyni olur.
Seçmə dispersiyasının aşağıdakı xassələri vardır.

Xassə 1: Sabit kəmiyyətin seçmə dispersiyası sıfıra bərabərdir.
Doğurdanda

$$S_x^2 = \frac{1}{n}(c-c)^2 = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$$

Xassə 2: Müşahidələrin nəticələri olan variantları eyni bir sabit ədəd qədər artırsaq və ya azaltsaq seçmə dispersiyası və orta kvadratik meyl dəyişməz.

$$S_{x\pm c}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i \pm c) - \overline{(x \pm c)}\right)^2 m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((x_i \pm c) - (\overline{x} \pm c)\right)^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = S_x^2$$

İsbastı:

Xassə 3: Sabit vuruğu seçmə dispersiyanın xaricinə kvadratı ilə çıxarmaq olar.
Doğurdan da

$$S_{cx}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(cx_i - c\overline{x}\right)^2 m_i = \frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = c^2 S_x^2$$

$$\overline{\sigma_{cx}} = \sqrt{c^2 S_x^2} = |c|\sqrt{S_x^2} = |c|\overline{\sigma_x}$$

Xassə: Əgər variantların uyğun tezliklərini eyni bir ədədə vursaq, onda seçmənin dispersiyası və seçmənin orta kvadratik meyli dəyişmir.

42.Hipotezlər yoxlanarkən yol verilə bilən birinci və ikinci növ səhvlər.

Fərz edək ki hər hansı xarakteristika haqqında irəli sürülən əsas H_0 və ona alternativ olan H_1 hipotezlərinə baxılır. OX oxu üzərində seçilən x_i nöqtəsinin vəziyyətindən asılı olaraq ya H_0 hipotezini qəbul etmək (H_1 hipotezini rədd etmək), ya da H_0 hipotezini rədd etmək (H_1 hipotezini qəbul etmək) qərarına gəlmək olar.

Seçilən x_i nöqtəsi təsadüfi olduğundan qərar qəbul edərkən aşağıdakı dörd haldan biri ola bilər:

1) H_0 (sıfırıncı əsas) hipotezi dogrudur (alternativ H_1 yalandır) və H_0 qəbul olunur;
2) H_0 hipotezi dogrudur (alternativ H_1 yalandır) , amma H_0 hipotezi rədd olunur;
3) Alternativ H_1 hipotezi dogrudur (əsas H_0 yalandır) və H_1 qəbul olunur;
4) H_1 hipotezi dogrudur (əsas H_0 hipotezi yalandır) amma H_1 rədd edir.

Göründüyü kimi 2) və 4) qərarlarında səhvə yol verilir .
Tərif 1. Əgər əsas (yoxlanılan) H_0 hipotezi doğru ikən rədd edilib, ona əks (alternativ) H_1 hipotezi qəbul olunarsa , onda yol verilən belə səhvə birinci növ səhv deyilir və α ilə işarə olunur.
Tərif 2. Əgər əsas (yoxlanılan) H_0 hipotezi yalan ikən qəbul olunub, ona alternativ olan H_1 hipotezi rədd edilərsə, onda yol verilən belə səhvə ikinci növ səhv deyilir və β ilə işarə olunur.

43.Momentlər üsulu (qısa nəzəri məlumat).
Momentlər üsulu ilə verilən seçməyə görə müəyyən paylanmanı təmin edən naməlum parametrlərin nöqtəvi qiymətləndirilməsi üçün eyni tərtibli nəzəri və emprik momentlər bərabər götürülür. Alınan tənlik və ya tənliklər nəzəri parametrə görə həll edilir.
Əgər nəzəri paylanma bir parametrdən asılıdırsa

$$\gamma = M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)dx = m_1(\alpha)$$

Nəzəri başlanğıc momenti bir tərtibli

$$\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Empirik momentinə bərabər gotürüləcək.

$$m_1(\alpha) = \overline{x_c}(1) \qquad \left(M[x] = \overline{x_c}\right)$$

Tənliyini α -ya nəzərən həll etsək , tənliyin alınan α -üçün qiymət kimi götürülür.
Paylanmada iki parametr vardırsa, yəni paylanmanın sıxlıq funksiyası $P(x,\alpha_1,\alpha_2)$ şəklindədirsə bu zaman α_1 və α_2 parametrlərini tapmaq üçün iki nəzəri momentin iki empirik momentə bərabərləşdirməliyik. Burada birinci tərtib başlanğıc və emprik , ikinci tərtib nəzəri və emprik mərkəzi momentləri bərabərləşdirilməsindən α_1 və α_2-ni qiymətləndirə bilərik. Aydındır ki,
$\gamma = M[x], \mu_2 = m_2 \quad \mu_2 = D[x]$ olduğunda

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c \end{cases} \qquad (2)$$

Tənliklər sistemindən naməlum parametrlər tapılır. Bu qimət həmin parametrlərin nöqtəvi qimətləndirilməsi olur.Burada $\overline{x_c}$ seçmə orta D_c seçmə dispersiya məlum $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ seçməsinə əsasən tapılır.

44.Parametrlərin momentlər üsulu ilə qiymətləndirilməsi haqqında qısa nəzəri məlumat və aşağıdakı məsələni həll et.

Məsələ: x təsadüfi kəmiyyəti Puasson qanunu ilə paylanmışdır. Aşağıda n=200 qeyri –standart detalların paylanması verilmişdir.bir partiyada standart olmayan detalların sayını göstərən variantlar və onların tezlikləri verilir.

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Momentlər üsulu ilə Puasson paylanmasının naməlum λ parametrini qiymətləndirin .

Həlli: Aydındır ki , $M[x]=\overline{x_c}$, Puasson paylanmasının riyazi gözləməsinin bu paylanmanın λ parametrinə bərabər olduğunu nəzərə alsaq $\lambda=\overline{x_c}$ olar.

$$\lambda = x_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{132\cdot 0 + 1\cdot 43 + 2\cdot 20 + 3\cdot 3 + 4\cdot 2}{200} = \frac{57}{200} = 0{,}285$$ olar

45.Nöqtəvi qimətləndirmənin momentlər üsulu haqqında qısa nəzəri məlumat. Momentlər üsulu ilə aşağıdakı məsələni həll et.

Məsələ. Sıxlıq funksiyası

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$ olan müntəzəm paylanmanın momentlər üsulu ilə a və b parametrlərini $x_1, x_2,\ldots x_n$ Seçməyə görə nöqtəvi qiymətləndirilməsini tapın.

Həlli: Momentlər üsulunda eyni tərtib nəzəri və empirik momentləri tapıb onları bərabərləşdirirlər. Əgər nəzəri paylanma funksiyası $F\left(x,\theta^*\right)$ bir parametrlə təyin olunarsa onda bir tərtibli nəzəri momenti, yəni $M(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,d\,F(x,\theta)=m_1(\theta)$ və birtərtibli empirik momenti, yəni $\overline{x_s}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ tapıb, bunları bərabərləşdirərək $m_1(\theta)=\overline{x_s}$ tənliyini alırıq.

$m_1(\theta)=\overline{x_s}$ tənliyindən tapılan θ^* kökü θ üçün qiymət kimi götürülə bilər. Əgər nəzəri paylanma funksiyası k sayda naməlum parametrdən asılıdırsa, yəni $F(X,\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_k)$ şəklindədirsə, onda k-çi tərtibə qədər bütün nəzəri və empirik moentləri tapıb, uyğun tərtib nəzəri və empirik momentləri bərabərləşdirərək k sayda nəmalum parametrləri qiymətləndirmək üçün k sayda

$$\left.\begin{aligned} m_1(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)&=\overline{x_s}\\ m_2(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)&=\left(\overline{x_s}\right)^2\\ \ldots\ \ldots\ &\ldots\ \ldots\\ m_k(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)&=\left(\overline{x_s}\right)^k \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

tənliklər sistemini alırıq. (1) sisteminin $\left(\theta_1^*,\theta_2^*,\ldots,\theta_k^*\right)$ kökü $\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k\right)$ naməlum parametrləri üçün qiymət kimi götürülə bilər.

Qeyd edək ki, bu zaman k tərtibə qədər olan nəzəri momentlər

$$m_j(\theta_1,\theta_2,...,\theta_k)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^j d F(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_k) \quad (j=1,2,...,k) \qquad (2)$$

düsturları ilə, empirik momentlər isə

$$\overline{x_s^j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j \qquad (j=1,2,...,k) \qquad (3)$$

düsturları ilə tapılır.
Məsələnin həlli:
Verilən parametrlər üçün

$$\begin{cases} M[x]=\overline{x_c} \\ D[x]=D_c=\sigma^2 \end{cases}$$

yazmaq olar . Müntəzəm paylanma üçün $M[x]=\frac{a+b}{2};D(x)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ olduğunu nəzərə alaq, onda

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2}=\overline{x_c} \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}}=\sqrt{D_c} \end{cases}$$

olur. Buradan isə

$$a=\overline{x_c}-\sqrt{3D_c}$$
$$b=\overline{x_c}+\sqrt{3D_c}$$

tapırıq. Deməli,

$$a^*=\overline{x_c}-\sqrt{3D_c},\ b^*=\overline{x_c}+\sqrt{3D_c}.$$

46.Parametrlərin etibarlılıq intervalı ilə qiymətləndirilməsi

Paylanmada iştirak edən parametrləri qiymətləndirmək üçün onun daxil olduğu elə interval axtarılır ki, $P(|\theta-\theta^2|<\delta)=\gamma$ şərti ödənilir. γ -etibarlılıq ehtimalı, θ qiymətləndiriləcək parameter, θ^* isə onun təqribi qiymətidir. δ -təyin edilir.
Normal paylanmaya malik paylanmada δ məlum olduqda a parametrini tapmaq üçün qiymətləndirmə intervalı

$$\overline{x}_s-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}_s+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Kimi təyin edilir, n seçmənin həcmi, σ -orta kvadratik meyldir.

t-isə $\phi=\frac{\gamma}{2}$ bərabərliyindən tapılır. γ -etibarlılıq ehtimalıdır -Laplas funksiyasıdır.

Düzəldilmiş dispersiyadan istifadə edərək σ parametrini qiymətləndirmək intervalı

$$s(1-q)<\sigma<s(1+q) \qquad (q<1 olduqda)$$
$$0<\sigma<s(1+q) \qquad (q>1 olduqda)$$

n və γ verildikdə q-nü tapmaq üçün cədvəl vardır. A parametrini də S-lə qiymətləndirmək olur.

$$\bar{x}_c - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_c + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Parametrlərin etibarlılıq interval ilə qiymətləndirilməsi haqqında qısa nəzəri məlumat

Aşağıdakı məsələdə etibarlılıq intervalını tap

Məsələ. Kondensatorun tutumu $\bar{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$ olduqda $0{,}99$ etibarlılıq intervalını tapın. $(\phi(t) = 0{,}495, olduqda)$ $t = 2{,}58$

Həlli. $\gamma = 0{,}99$, $\phi = 0{,}495,$ Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $t = 2{,}58$ tapırıq. Verilənləri

$$\bar{x}_s - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bərabərsizliyində nəzərə alaq.

$$20 - 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 2 + 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$20 - 2{,}58 < a < 2 + 2{,}58$$

$$17{,}42 < a < 22{,}58$$

47. Parametrlərin etibarlılıq interval ilə qiymətləndirilməsi haqqında qısa nəzəri məlumat

Aşağıdakı məsələdə etibarlılıq intervalını tap

Məsələ. Kondensatorun tutumu $\bar{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$ olduqda $0{,}99$ etibarlılıq intervalını tapın. $(\phi(t) = 0{,}495, olduqda)$ $t = 2{,}58$

Həlli: İnterval qiymət dedikdə elə θ_1 və θ_2 sərhətləri başa düşülür ki, naməlum θ parametri müəyyən ehtimalla göstərilən sərhədlər arasında olsun.

Əgər θ^* qiyməti θ üçün tapılmış qiymətdirsə, onda $\delta > 0$ ədədi üçün $|\theta - \theta^*| < \delta$ olursa, onda aydındır ki, δ ədədi kiçildikcə θ^* qiyməti θ-ya daha çox yaxın olur. Buna görədə δ-ya qiymətin dəqiqliyi deyilir.

$P(|\theta - \theta^*| < \delta)$ ehtimalına etibarlılıq ehtimalı deyilir və bu ehtimal çox vaxt $P = 0{,}95;$ $P = 0{,}99$ qiymətlərindən biri götürülür.

$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \nu$.

Bu bərabərlikdən alınır ki, naməlum θ parametri ν ümüdlüyü ilə $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ intervalında yerləşdiyindən bu intervala etibarlılıq intervalı deyilir.

Həlli. $\gamma = 0{,}99$, $\phi = 0{,}495$, Laplas funksiyasının qiymətləri cədvəlindən $t = 2{,}58$ tapırıq. Verilənləri

$$\bar{x}_s - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bərabərsizliyində nəzərə alaq.

$$20 - 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 2 + 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$20 - 2{,}58 < a < 2 + 2{,}58$$

$$17{,}42 < a < 22{,}58$$

48. .PARAMETRLƏRİN ETİBARLILIQ İNTERVALI İLƏ QİYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA QISA NƏZƏRİ MƏLUMAT.

. MƏSƏLƏ: 300 asılı olmayan sınaqda A hadisəsi eyni ehtimalla 250 dəfə baş vermişdir. $\gamma = 0{,}95$ etibarlılıq ehtimalı ilə p ehtimalının interval qiymətləndirilməsini aparın. ($\Phi(t) = 0{,}475; t = 1{,}96$)

Həlli:

İnterval qiymət dedikdə elə θ_1 və θ_2 sərhətləri başa düşülür ki, naməlum θ parametri müəyyən ehtimalla göstərilən sərhədlər arasında olsun.

Əgər θ^* qiyməti θ üçün tapılmış qiymətdirsə, onda $\delta > 0$ ədədi üçün $|\theta - \theta^*| < \delta$ olursa, onda aydındır ki, δ ədədi kiçildikcə θ^* qiyməti θ-ya daha çox yaxın olur. Buna görədə δ-ya qiymətin dəqiqliyi deyilir.

$P(|\theta - \theta^*| < \delta)$ ehtimalına etibarlılıq ehtimalı deyilir və bu ehtimal çox vaxt $P = 0{,}95$; $P = 0{,}99$ qiymətlərindən biri götürülür.

$P\{|\theta - \theta^*| < \delta\} = P\{-\delta < \theta - \theta^* < \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \nu$.

Bu bərabərlikdən alınır ki, naməlum θ parametri ν ümüdlüyü ilə $(\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$ intervalında yerləşdiyindən bu intervala etibarlılıq intervalı deyilir.

Məsələnin həlli: 300 asılı olmayan sınaqda A hadisəsi 250 dəfə baş vermişdiyindən bu hadisənin bu hadisənin baş vermə tezliyi

$$\omega = \frac{250}{300} = \frac{5}{6};\ \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}\ \ \Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$$

Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlindən t=1,96.

$$P_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_1 < P < P_2$$

Düsturlarından istifadə edək

$$P_1 = \frac{5}{6} - 1{,}96\sqrt{\frac{5}{300 \cdot 36}} \approx 0{,}79$$

$$P_1 = \frac{5}{6} + 1{,}96\sqrt{\frac{5}{300 \cdot 36}} \approx 0{,}88$$

Olduğundan $0{,}79 < P < 0{,}88$ olur.

49. <u>Empirik paylanma funksiyasının xassələrinin yazın , məsələni həll edin:</u>

<u>Məsələ .</u> Seçmənin verilmiş paylanmasına görə emperik paylanma funksiyasını tapın

x_i	4	7	10
n_i	16	24	40

Həlli: Tutaq ki, paylanma funksiyası $F(x)$ olan baş yığımdan həcmi n olan $x_1, x_2, ..., x_n$ variantlarından ibarət təsadüfi seçmə yığım ayrılmışdır. $x_1, x_2, ..., x_n$ variantlarında x- dən kiçik olan variantların sayını n_x – lə işarə edək. Onda $\frac{n_x}{n}$ - ə seçmənin paylanma funksiyası və ya <u>empirik paylanma funksiyası deyilir</u> və $F^*(x)$ -lə işarə olunur:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n} \qquad (1)$$

Qeyd edək ki, ehtimal nəzəriyyəsində öyrəndiyimiz $F(x)$ paylanma funksiyası $\{X < x\}$ hadisəsinin ehtimalına yəni $P\{X < x\}$-ə bərabər olduğu halda $F^*(x)$ empirik paylanma funksiyası seçmənin nisbi tezliyinə, yəni $\frac{n_x}{n}$-ə bərabərdir. Onda böyük ədədlər qanununa əsasən

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad (\varepsilon > 0) \qquad (2)$$

Bernulli teoreminə görə hadisənin $\frac{n_x}{n}$ nisbi tezliyi onun ehtimalına ehtimal mənada yığılır, yəni $F^*(x) \xrightarrow[n\to\infty]{P} F(x)$.

Buradan aydındır ki, seçmənin empirik paylanma funksiyası baş yığımın nəzəri paylanma funksiyası üçün təqribi ifadə kimi qəbul oluna bilər.

Empirik paylanma funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$ - olur. Yəni empirik paylanma funksiyasının qiymətləri [0;1] parçasına daxildir.

2) $F^*(x)$ azalmayan funksiyadır.

3) Əgər x_1 ən kiçik, x_k – isə ən böyük variantdırsa onda $x \le x_1$ olduqda $F^*(x) = 0$ və $x \le x_k$ olduqda $F^*(x) = 1$ olur.

Həlli: Seçmənin həcmini tapaq: n=16+24+40=80.

Ən kiçik variant 4-dür, ona görə $x \le 4$ olduqda $F^x(x) = 0$. $x < 7$ qiyməti

16 dəfə müşahidə edilib, ona görə $F^x(x)=\frac{16}{80}=0,2$, $4<x\le 7$. $x<10$ qiyməti, daha dəqiq x_1=4 və x_2=7 , 16+24=40 dəfə müşahidə edilib, ona görə $F^x(x)=\frac{40}{80}=0,5$, $7<x\le 10$. Belə ki, x=10 ən böyük variantdır, onda $F^x(x)=1$, $x>10$.

Axtarılan empirik funksiya:

$$F^x(x)=\begin{cases} 0, & x\le 4 \\ 0,2 & 4<x\le 7 \\ 0,5 & 7<x\le 10 \\ 1 & x>10 \end{cases}$$

<u>50.</u> Baş dispersiya düsturunu yazın və məsələni həll edin:

<u>Məsələ .</u> Baş yığım paylanma cədvəli şəkildə verilmişdir

x_i	8	3	5
n_i	4	6	10

Seçmə orta və seçmə dispersiyanı tapın.

Həlli:

Seçmə yığım $x_1, x_2, ..., x_k$ variantlarına və bu variantlara uyğun $n_1, n_2, ..., n_k$ tezliklərinə malikdirsə,

$$\overline{x_s}=\frac{\sum n_i x_i}{n} \qquad (1)$$

seçmə orta

$$D_s=\frac{\sum n_i\left(x_i-\overline{x_s}\right)^2}{n} \qquad (2)$$

seçmə dispersiya adlanır.

Seçmə variantları ilə seçmə ortanın fərdinə, yəni $x_i-\overline{x_s}$ -ə seçmə variantlarının <u>meyli deyilir.</u>

<u>Teorem.</u> Seçmə variantlarının meyilinin uyğun tezliklərinə hasillərinin cəmi sıfıra bərabərdir: $\sum n_i\left(x_i-\overline{x_s}\right)=0$.

$$\square \sum n_i\left(x_i-\overline{x_s}\right)=\underbrace{\sum n_i x_i}_{(1)\Rightarrow n\cdot\overline{x_s}}-\overline{x_s}\underbrace{\sum n_i}_{n}=n\overline{x_s}-n\overline{x_s}=0 \ \square$$

<u>Teorem.</u> Seçmə dispersiya seçmə variantlarının kvadratları cəminin orta qiymətilə, seçmə ortanın kvadratı fərqinə bərabərdir:

$$D_s=\overline{x^2}-\left(\overline{x_s}\right)^2$$

□ $$D_s=\frac{\sum n_i\left(x_i-\overline{x_s}\right)^2}{n}=\frac{\sum n_i x_i^2}{n}-\frac{2\overline{x_s}}{n}\cdot\underbrace{\sum n_i x_i}_{n\overline{x_s}}+\frac{\sum n_i\left(\overline{x_s}\right)^2}{n}=\overline{x^2}-2\left(\overline{x_s}\right)^2+\left(\overline{x_s}\right)^2\cdot\underbrace{\frac{\sum n_i}{n}}_{1}=\overline{x^2}-\left(\overline{x_s}\right)^2.$$ □

Həlli: Seçmə ortanı tapaq: $\overline{x}_S=\dfrac{8\cdot 4+3\cdot 8+5\cdot 10}{20}=5$ □

Seçmə dispersiyanı tapaq:

$$D_S=\frac{4\cdot(8-5)^2+6(3-5)^2+10(5-5)^2}{4+6+10}=\frac{36+24+0}{20}=\frac{60}{20}=3$$