<u>1.</u> Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n+7}$$

$$U_n=\frac{2n}{3^n+7},\qquad U_{n+1}=\frac{2\,(n+1)}{3^{n+1}+7}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)\cdot(3^n+7)}{(3^{n+1}+7)2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n+7}{3^{n+1}+7}\cdot\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{7}{3^n}}{3+\frac{7}{3^n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1+0}{3+0}\cdot(1+0)=\frac{1}{3}$$

О: $l=\frac{1}{3}<1$ значит данный ряд сходится.

<u>2.</u> Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

$$U_n=\frac{n!}{3^n(n+1)},\qquad U_{n+1}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 3^n(n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+2)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+1)}{3(n+2)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n+6}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{6}{n}}=\infty$$

$l=\infty$ значит данный ряд расходится.

<u>3.</u> Найти радиус сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)} \quad .$$

$$a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$$

Решение:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 3$$

Ответ : R=3

4. Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными $xy' - y - 1 = 0$

. Решение:

$$x\frac{dy}{dx} = y+1$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + c_1$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y+1| = \ln|cx|$$

y+1=cx

y=cx-1

Ответ : y = cx-1.

5. Найти общее решение уравнения $(x^2+1)\,y' - xy = 0$ с разделяющимися переменными .

Решение:

$$(x^2+1)\,y' - xy = 0$$

$$(x^2+1)\,\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c_1$$

$$\ln|y| = \ln\sqrt{x^2+1} + \ln|c|$$

$$\ln|y| = \ln\left|c\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$y = c\sqrt{x^2+1}$$

Ответ : $y = c\sqrt{x^2+1}$

6. Найти общее решение уравнения $2(x+1)\,y' + y = 0$ с разделяющимися переменными .

Решение:

$$2(x+1)y' + y = 0$$

$$2(x+1)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + c_1$$

: $$\ln|y| = \ln c - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x+1}}$$

Ответ . $\dfrac{c}{\sqrt{x+1}}$

7. Найти общее решение линейного уравнения $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$

Решение : заменим y = uv , тогда подставляя $y' = u'v + uv'$ получим

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{x^2}$$

$$u'v + (v' + 2xv)u = 2xe^{x^2} \qquad (1)$$

$$v' + 2xv = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx$$

$$\ln v = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ это выражение подставим в равенство (1)

$$u'e^{-x^2} = 2xe^{x^2}$$

$$u' = 2xe^{2x^2}$$

$$u = \int 2xe^{2x^2}dx = \frac{1}{2}e^{2x^2} + c$$

$$y = uv = e^{-x^2}(\frac{1}{2}e^{2x^2} + c)$$

Ответ: $$y = \frac{1}{2}e^{x^2} + ce^{-x^2}$$

8/Найти общее решение линейного уравнения $xy' - 3y = x^2$.

Решение : заменим y = uv , тогда $y' = u'v + uv'$. Эти выражения подставим в уравнение.

$$xu'v + xuv' - 3uv = x^2$$

$$xu'v + (xv' - 3v)u = x^2 \qquad (1)$$

$$xv' - 3v = 0$$

$$xv' = 3v$$

$$x\frac{dv}{dx} = 3v$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v} = 3\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = 3\ln x$$

$v = x^3$ Это выражение учитываем в (1) :

$$xu'x^3 = x^2$$

$$u' = \frac{1}{x^2}$$

$$u = \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$y = uv = x^3(-\frac{1}{x} + c)$$

Ответ: $y = x^3\left(-\frac{1}{x} + c\right)$

9. Найти общее решение линейного уравнения $xy' + y = \sin x$.

Решение: заменим y = uv , тогда $y' = u'v + uv'$.Эти выражения подставим в данное уравнение .

$$\begin{aligned}
&x(u'v + uv') + uv = \sin x \\
&xu'v + xuv' + uv = \sin x \\
&xu'v + (xv' + v)u = \sin x \qquad\qquad (1) \\
&x'v + v = 0 \\
&x\frac{dv}{dx} = -v \\
&\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dx}{x} \\
&\ln|v| = -\ln|x| \\
&\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|
\end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{x}.$$

Это выражение подставим в (1) получим:

$$\begin{aligned}
&xu' \cdot \frac{1}{x} = \sin x \\
&u' = \sin x \\
&u = -\cos x + c \\
&y = uv = \frac{1}{x}(c - \cos x)
\end{aligned}$$

Ответ: $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$

10. Найти общее решение уравнения: $y'' = y' Ctgx$

Решение: заменим $y' = \nu(x)$ тогда $y'' = \nu'(x)$. Эти выражения подставим в уравнение:

$$\nu'(x) = \nu(x) ctgx$$

$$\frac{d\nu}{dx} = \nu\, ctgx$$

$$\frac{d\nu}{\nu} = ctgx\, dx$$

$$\int \frac{d\nu}{\nu} = \int ctgx\, dx$$

$$\ln|\nu| = \ln|\sin x| + C_0$$

$$\ln|\nu| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|$$

$$\ln|\nu| = \ln|C_1 \sin x|$$

$$\nu = C_1 \sin x$$

$$y' = C_1 \sin x$$

$$y = -C_1 \cos x + C_2$$

Ответ: $y = -C_1 \cos x + C_2$

11.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot (-1)^{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + (-1)^{n-1} U_n + \ldots \qquad (1)$$

Или

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = -U_1 + U_2 - U_3 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots \qquad (1')$$

Где $U_k > 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots)$ называется знакочередующимся.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. Если члены знакочередующегося ряда (1) по абсолютной величине монотонно убывают, при возрастании их номера, т.е.

$U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, то такой ряд сходится, сумма его положительна и не превышает первый член.

12. Написать формулу полной вероятности и решить данную задачу:
Задача: В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектом , второго -5% и третьего – 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55%- со второго и 20% - с третьего.

Пусть событие А может произойти в результате появления одного и только одного события $H_i(i=1,2,...,n)$ из некоторой полной группы несовершенных событий $H_1, H_2, H_3, ..., H_n$.
События этой группы называют *гипотезами.*
<u>Теорема 1.</u> Вероятность события А равна сумма парных произведений вероятностей всех гипотез, образующих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события А, то есть :

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$$

формула полной вероятности, причем здесь $\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$.

Решение. С рассматриваемым событием А= {Приобретенный телевизор оказался с дефектом} связано три гипотезы: H_1 = {телевизор выпущен первым заводом}, H_2= {выпущен вторым заводом}, H_3= {выпущен третьим заводом}.Вероятности этих событий определяются из условия задачи: $p(H_1)=0{,}25; p(H_2)=0{,}55;\ p(H_3)=0{,}2.$ Условные вероятности события А также определяются из условия задачи: $p(A/H_1)=0{,}1; p(A/H_2)=0{,}05;\ p(A/H_3)=0{,}03.$ Отсюда по формуле полной вероятности следует:

$$p(A)=0{,}25\cdot 0{,}1+0{,}55\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}03=0{,}0585\ .$$

13. Напишите формула Байеса и решите заданную формулу:

Задача: фабрика производит 25% продукции на первом, 35% продукции на втором, 40% на третьем станке. Каждый станок в соответствии выпускается 5%,4% vǝ 2% нестандартной продукции. Найти вероятность того, что случайная взятая стандартная деталь произведена на первом, втором, третьем станке.

Используя формулу полной вероятности, решим следующие задачи.
Пусть имеем полную группу парно несовместимых гипотез

$$H_1+H_2+...+H_K$$

С происхождением одного из событий H_K происходит событие А . Следует, определить вероятность события, которая является *причиной появления события* А, то есть условную вероятность.
Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_K)=P(A)P_A(H_K)=P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Отсюда

$$P_A(H_K)=\frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(A)},\quad K=\overline{1,n}$$

Используя

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Имеем:

$$P_A(H_K)=\sum_{i=1}^{n}\frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(H_K)P_{H_K}(A)},\qquad K=\overline{1,n}$$

- это уравнение называется *формулой Бейеса*.
Решение: Взятая деталь нестандартна это событие А. Здесь может быть три гипотез: Взятая нестандартная деталь произведена первым станком (событие B_1), взятая нестандартная деталь произведена вторым станком (событие B_2), , взятая нестандартная деталь произведена третьим станком (событие B_3). Тогда основываясь на заданных получим:
$P(B_1)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$; $P(B_2)=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$; $P(B_3)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$.
Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на первом станке равна $P_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$;
Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на втором станке равна $P_{B_2}(A)=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$;
а на третьем 3-ем станке равна $P_{B_3}(A)=\frac{2}{100}=\frac{1}{50}$ olar.
Тогда основываясь на формуле полной вероятности вероятность того, что случайно взятая деталь будет нестандартной равна:
$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20}+\frac{7}{20}\cdot\frac{1}{25}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{50}=0{,}0345$

Надо вычислить $P_A(B_1)$:
Так как $P(B_1)=\frac{25}{100}=0{,}25$;$P_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=0{,}05$; $P(A)=\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)=0{,}0345$
Применим формулу Байесса получим:
$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{3}P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345}=\frac{0{,}0125}{0{,}0345}=\frac{25}{69}$
Надо вычислить $P_A(B_2)$:

Так как P(B_2) = 0,35 ; P_{B_2}(A) = 0,04 ; P(A) = $\sum_{k=1}^{3} P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)$ = 0,0345
Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}0345} = \frac{28}{69}$$

Основываясь на условиях:
Так как P(B_3)=0,4 ; P_{B_3}(A)=0,02 ; P(A) = $\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)$ = 0,0345
Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}0345} = \frac{80}{345} = \frac{16}{69}$$

14. Независимые испытания. Вывод формулы Бернулли (некоторые случаи).

События А называются *независимыми* в данном испытании, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний. Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие А имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, не зависящую от номера испытания, называется *схемой Бернулли.*

Пусть проведены n независимых испытаний. В результате этих испытаний событие А должно произойти ровно m раз и вероятность этого обозначим $P_n(m)$.

В проведенных n независимых испытаниях последовательность происхождения события А m раз и противоположного события $\overline{A}_{(n-m)}$ раз может быть различной. Запишем одну из них $B = \underbrace{A\cdot A}_{m}\ldots\underbrace{A\cdot\overline{A}\overline{A}\cdot-\overline{A}}_{n-m}$.

Тогда число таких последовательностей равно C_n^m .

Вероятность события А, то есть $P(A) = p$, а события $\overline{A}$, то есть $P(\overline{A}) = q$

Используя теорему умножения независимых событий, получим:

$$P(B) = P_B(AA\ldots A\overline{A}\overline{A}\ldots\overline{A}) = \underbrace{P(A)P(A)\ldots P(A)}_{m}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})\ldots P(\overline{A})}_{n-m} = p^m q^{n-m}$$

Так как число таких последовательностей равно C_n^m, тогда вероятность происхождения события А в n испытаниях ровно m раз на основе теоремы сложения равно сумме всех комбинаций

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \text{ - формула Бернулли.}$$

Эта формула также называется *биноминальной,* то есть её правая часть представляет собой $(m+1)$ - ый *член бинома Ньютона*:

$$(q+p)^m = C_n^0 q^n + C_n^1 pq^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^n p^n$$

15. Написать формулу нахождения наивероятнейшего числа и решить данную задачу.

Задача. Вероятность выпуска стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность наивероятнейшего числа нестандартных деталей из 5 выпущенных.

Решение. Вероятность выпуска нестандартной продукции равна $p=1-0{,}8=0{,}2$. Вычислим все варианты по формуле Бернулли (n=5, q=0,8,k=0,1,2,3,4,5).

$P_5(0)=C_5^0\cdot 0{,}2^0\cdot 0{,}8^5=0{,}32768$; $P_5(1)=C_5^1\cdot 0{,}2^1\cdot 0{,}8^4=0{,}4096$; 0

$P_5(2)=C_5^2\cdot 0{,}2^2\cdot 0{,}8^3=0{,}2048$; $P_5(3)=C_5^3\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2=0{,}0512$;

$P_5(4)=C_5^4\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8^1=0{,}0064$; $P_5(5)=C_5^5\cdot 0{,}2^5\cdot 0{,}8^0=0{,}00032$

Если полученные вероятности отметим на графике то можем увидеть, что $m_0=1$. Значит если в серии из n независимых испытаниях вероятность $P_n(m_0)$ не меньше вероятностей остальных событий тогда, m_0 называется наивероятнейшее число. Для нахождения m_0 используем формулу

$$\begin{cases} P_m(m_0)\ge P_n(m_0+1) \\ P_n(m_0)\ge P_n(m_0-1) \end{cases} \qquad (6)$$

Если первое неравенство системы раскроем то, получим:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!}p^{m_0}\cdot q^{n-m_0}\ge\frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!}p^{m_0+1}\cdot q^{n-m_0-1}$$

Учитывая, что здесь $(m_0+1)!=m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)!=(n-m_0-1)!\,(n-m_0)$, получим $\frac{1}{(n-m_0)}q\ge\frac{1}{m_o+1}\cdot p$. Отсюда можем получить $(m_o+1)q\ge(n-m_0)p\Rightarrow m_o(p+q)\ge np-q\Rightarrow m_o\ge np-q$. Если аналогично раскроем второе неравенство системы (6) получим $m_0<np+q$. Если соединить оба неравенство получим:

$$np-q<m_0<np+p \qquad (7).$$

С помощью этой формулы можно вычислить наивероятнейшее число. Тогда решение вышей заданной задачи будет иметь вид: $5\cdot 0{,}2-0{,}8\le m_0\le 5\cdot 0{,}2+0{,}2\Rightarrow 0{,}2\le m_o\le 1{,}2\Rightarrow m_0=1$.

Значит наивероятнейшее число нестандартных деталей равно единице. Значит вероятность того, что 1 деталь окажется нестандартной больше и равна $P_5(1)=C_5^1pq^4=5\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8^4=0{,}4096$.

16. Написать локальную формулу Муавра-Лапласа и решить данную задачу.

<u>Теорема Лапласа</u>. Пусть $p=P(A)$ - вероятность события A причем $0<p<1$. Тогда вероятность того, что в условиях системы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (1)$$

Где: $q = 1 - p$ и $t = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$

Вводя функцию $\varphi_0(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ формулу (1) перепишем так

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Задача. Найти вероятность того, что событие А наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико используем локальную теорему Лапласа: $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}} = \dfrac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -\dfrac{40}{24} = -1{,}67$

Так как $\varphi(x)$ четная функция тогда $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$ из 1-ой таблицы получим $\varphi(1{,}67) = 0{,}0989$.

Тогда вероятность равна $P_{2400}(1400) = \dfrac{1}{24} 0{,}0989 = 0{,}0041$.

17. Законы распределений дискретных случайных величин (Биномиальное, геометрическое и Пуассона).

1. **Биномиальное распределение**.

Вероятность этого распределения находим по формуле:

$$P_n(X = k) = P_n(k) = c_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

$(k = 0, 1, 2, ..., n)$ получим распределение:

X	0	1	2	…	к	…	n
P_i	q^n	$c_n^1 pq^{n-1}$	$c_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$c_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

(2)

Распределение (2) называется биномиальным распределением дискретной случайной величины X. Для этого распределения имеем $\sum_{k=0}^{n} c_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$.

2. **Геометрическое распределение.**

Для этого распределения вероятность находим по формуле

$$P(X = k) = p \cdot q^k \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \qquad (3)$$

$(0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad q = 1 - p)$.

Распределение имеет вид:

X	0	1	2	…	k	…
Π_i	p	pq	pq^2	…	pq^k	…

(4)

(5) называется геометрическое распределение дискретной величины X.
Здесь

$$p+pq+pq^2+\dots+pq^k+\dots=p\underbrace{\left(1+q+q^2+\dots+q^k+\dots\right)}_{\frac{1}{1-q}(0<q<1\ olduhundan)}=p\cdot\frac{1}{1-q}=p\cdot\frac{1}{p}=1 \; .$$

3. Распределение Пуассона .

Вероятность этого распределения находится по формуле

$$P_n(X=k)=P_n(k)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k=0,1,2,\dots n,\dots \quad \lambda>0 \qquad (5)$$

Получаем асимптотические формулы Пуассона:

X	0	1	2	…	n	…
p	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	…	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	…

(6)

(7) называется распределение Пуассона дискретной величины X.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1 \; .$$

18. Написать свойства функции плотности непрерывной случайной величины и решить данную задачу.

Задача. Для случайной величины X плотность вероятности $f(x)=ax$ при $x\in[0;2], f(x)=0$ при $x<0$ и $x>2$. Найти коэффициент a, функцию распределения F(x), вероятность попадания на отрезок $[1;2]$

Так как $f(x)=ax \quad x\in[0,2]$ для нахождения параметра a

воспользуемся формулой $\int_a^b f(x)dx=1$.

$$\int_a^b axdx=1\Rightarrow \quad \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^2=1\Rightarrow \quad \frac{a\cdot 4}{2}=0,5$$

Используя формулу $f(x)=F'(x)$ найдем функцию распределения $F(x)$.
Зная . что $f(x)=0,5x$ то тогда $F(x)=0,25x^2$. Найдем вероятность того, что функция $F(x)$ примет значение на отрезке $[1,2]$,воспользуемся

формулой $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0, \\ 0{,}25x^2, \quad 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

Надо воспользоваться формулой

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0{,}25x^2\Big|_{x=2} - 0{,}25x^2\Big|_{x=1} = 0{,}25 \cdot 4 - 0{,}25 =$$

$$= 0{,}25(4-1) = 0{,}75$$

19. Дисперсия и ее свойства (свойство D(X+У)= D(X)+D(У) с доказательством).

Определение. Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания.

$$D(X) = M\left(X^2\right) - \left[M(X)\right]^2$$

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю.

$$D(C) = 0$$

Действительно, $D(C) = M\left[C - M(C)\right]^2 = M\left[C - C\right]^2 = 0$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Действительно,

$$D(CX) = M\left[CX - M(CX)\right]^2 = M\left[CX - CM(x)\right] =$$

$$= M\left[C^2\left(X - M(x)\right)^2\right] = C^2 M\left[X - M(x)\right]^2 = C^2 D(X)$$

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумма дисперсий этих величин:

$$D(X + У) = D(X) + D(У)$$

Действительно,

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$
$$D(X+У)=M\left[(X+У)^2\right]-\left[M(X+У)^2\right]=$$
$$=M\left[X^2+2XУ+У^2\right]+\left[M(X)+M(У)\right]^2=$$
$$=M\left[X^2+2XУ+У^2\right]-M^2(X)-2M(X)M(У)-M^2(У)=$$
$$=M^2(X^2)+2M(X)\cdot M(У)+M(У^2)-M^2(X)-2M(X)\cdot M(У)-$$
$$-M^2(У)=M(X^2)+M(У^2)-M^2(X)-M^2(У)=$$
$$=\left[M(X^2)-(M(X))^2\right]+\left[M(У^2)-(M(У))^2\right]=D(X)+D(У)$$

Следствие 1. $D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)$

Следствие 2. $D(C+X)=D(C)+D(X)=0+D(X)=D(X)$

Свойство 4.

$$D(X-У)=D(X)+D(У)$$

Действительно,

$$D(X-У)=D(X)+D(У)=D(X)+(-1)^2D(У)=$$
$$=D(X)+D(У)$$

20. Моменты дискретной случайной величины. Найти центральный момент 2-го порядка распределения .

x	1	2	4
p	0,1	0,3	p_3

Для распределения 2-го порядка найти центральные моменты

Для нахождения центральных моментов 2-го порядка воспользуемся формулой

$$\mu_2=M[X-M(x)]^2=D(x)$$

Чтобы найти центральные млменты , целесообразно воспользоваться формулами связи центральных моментов с начальными

$$\mu_2=\upsilon_2-\upsilon_1^2$$
$$\upsilon_1=M(x)$$
$$\upsilon_2=M(x^2)$$

Так как $p_1+p_2+p_3=1$ то $p_3=0,6$

$$\upsilon_1=M(x)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=1\cdot0,2+2\cdot0,3+4\cdot0,6=3,1$$
$$\upsilon_2=M(x^2)=x_1^{\ 2}p_1+x_2^{\ 2}p_2+x_3^{\ 2}p_3=1\cdot0,2+2^2\cdot0,3+4^2\cdot0,6=10,9$$

$$M(x^2) = x_1^{\ 2} p_1 + x_2^{\ 2} p_2 + x_3^{\ 2} p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9$$

$$\mu_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29$$

21. Задача. Рабочий наблюдает за 4 станками. Вероятность того, что за время работы станку понадобится ремонт соответственно равны 0,9; 0,8; 0,75; 0,7. Написать закон распределения X случайной величины показывающее число отремонтированных станков.

Решение: эту задачу можно решить несколькими способами.

I метод. Через $A_к$ обозначим событие показывающее то, что к - ому станку понадобился ремонт. Тогда ясно, что

$$P(x=0) = p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3 A_4}\right) = (1-0{,}9)(1-0{,}8)(1-0{,}75)(1-0{,}7) = 0{,}0015;$$

$$P(x=1) = P\left(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\big) + \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\big) =$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}0275$$

Аналогично, что

$$P(x=2) = P\left(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\right) + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4 +$$

$$+ \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4 + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4\Big) = 0{,}1685$$

$$P(x=3) = P\left(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1A_2\overline{A_3}A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2A_3A_4\right) = 0{,}4245;$$

$$P(x=4) = P(A_1A_2A_3A_4) = 0{,}378$$

Напишем закон распределения величины X:

$x_к$	0	1	2	3	4
$p_к$	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

22. Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины и решить задачу.

Задача. Непрерывная случайная величина X в интервале $(0,\pi)$ задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{2}\sin x$. Вне этого интервала $f(x)$=0. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение: дисперсию вчислим по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - \left[M(X)\right]^2$$

$M(X) = \frac{\pi}{2}$ **(кривая симметрична относительно прямой $x = \pi/2$), если принять $a=0,\ b=\pi,\ f(x) = \frac{1}{2}\sin x$ получим:**

$$D(X) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \sin x\,dx - \left[\frac{\pi}{2}\right]^2 \qquad \textbf{(*)}$$

Дважды проинтегрировав по частям получим:

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx = \pi^2 - 4 \qquad (**)$$

Если (**)учесть в (*)получим: $D(X) = \dfrac{\pi^2 - 8}{4}$**.**

23 . Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины X и решить данную задачу.

Задача. Непрерывная случайная величина X в интервале (2,4) задана дифференциальной функцией $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ вне этого $f(x)$=0. Найти моду, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

$$M(x) = \int_a^b x f(x) dx.$$

$$M(x) = \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x\right)dx = \left(-\frac{3}{4}\frac{x^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\frac{4^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{4^3}{3} - \frac{6\cdot 4^2}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\frac{2^4}{4} + \frac{9}{2}\frac{2^3}{3} - \frac{6\cdot 2^2}{2}\right) = 3$$

Воспользуемся формулой $D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2$. найдем дисперсию.

$$D(x) = \int_2^4 x^2\left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x\right)dx - (M(x))^2 =$$

$$= \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^3 - 6x^2\right)dx - (M(x))^2 =$$

$$= \left(-\frac{3}{4}\frac{x^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 - 3^2 = \left(-\frac{3}{4}\frac{4^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{4^4}{4} - \frac{6\cdot 4^3}{3}\right) -$$

$$-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^5}{5} + \frac{9}{2}\frac{2^4}{4} - \frac{6\cdot 2^3}{3}\right) - 9 = 141$$

24. Равномерное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Если все свои значения X непрерывная величина на интервале (а,в) равна постоянной $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$, а вне этого интервала $f(x) = 0$, тогда эта непрерывная случайная величина называется равномерно распределенной на интервале (а,в). Из определения следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{(b-a)}\cdot(b-a) = 1$. Значит $f(x)$ действительно является функцией плотности. Найдем функцию распределения X:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{a} f(t)dt}_{0} + \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a}\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$ olar.

То есть
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \quad olarsa, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b \quad olarsa, \\ 1, & x > b \quad olarsa, \end{cases}$$ olur.

Математическое ожидание равномерно распределенной величины равно:

$$MX = \int\limits_a^b x\cdot\frac{dx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)}\Bigg|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$ olar.

Дисперсия равномерно распределенной величины равно:

$$DX = \int\limits_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a} = \int\limits_a^b \left[x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{b-a} = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} - \frac{x^2(a+b)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{1}{b-a}x\right]\Bigg|_a^b =$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{b-a}{b-a} = \frac{a^2-ab+b^2}{3} - \frac{a^3+2ab+b^2}{2} + \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Вероятность попадания в произвольный интервал(α,β) расномерно распределенной на интервале (а,в) случайной величины X(находим по формуле: $P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{x}{b-a}\Big|_\alpha^\beta = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$.

25. Показательное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Непрерывная случайная величина имеющяя функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \quad olduqda, \\ 0 \quad , & x \le 0 \quad olduqda, \end{cases} \tag{1}$$

называется показательно распределенной с параметром $\lambda(\lambda > 0)$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{0} f(t)dt}_{0} + \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

то есть

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \quad olduqda, \\ 0 \quad , & x \le 0 \quad olduqda. \end{cases} \tag{2}$$

Вероятность того, что показательно распределенная случайная величина примет значение на интервале (α,β) вычислим по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda\beta} - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta} \tag{3}$$

Математическое показательно распределенной величины находим по формуле: $MX = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$.

То есть математическое ожидание показательно распределенной случайной величина равно обратному значению λ:

$$MX = \frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

Дисперсия показательно распределенной случайной величина равно:

$$DX = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"} + 2\int_0^{\infty} xe^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = 2 \cdot \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}_{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

То есть:

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{5}$$

Тогда $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}$. Отсюда следует, что

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} \text{ - dır.} \tag{6}$$

Отношения средне квадратического отклонения непрерывной величины X на математическое ожидание этой величины называется коэффициентом вариации обозначается через V:

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \tag{7}$$

Для показательного распределения $V = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$.

26. Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины и решить данную задачу**.**

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0, \\ \frac{x + x^2}{12}, \ 0 < x \le 3, \\ 1, \ x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и вероятность того, что функция получит значение на интервале (1;2)

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx$$

так как

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x)=\frac{x}{6}+\frac{1}{12}$$

$$M(x)=\int_0^3 x\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{12}\right)dx=\int_0^3\left(\frac{x^2}{6}+\frac{x}{12}\right)dx=\left(\frac{x^3}{18}+\frac{x^2}{24}\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{27}{18}+\frac{9}{24}=1\frac{7}{8}$$

Воспользуемся формулой $P(a<x<b)=F(b)-F(a)$

$$P(1<x<2)=F(2)-F(1)=\frac{x+x^2}{12}\Bigg|_{x=2}-\frac{x+x^2}{12}\Bigg|_{x=1}=\frac{6}{12}-\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

27. Нормальное распределение. Параметры a vә σ в нормальном распределение. Вероятность попадания в интервал (α;β) нормально распределенной случайной величины.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается дифференциальной функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ. Покажем, что a - математическое ожидание, σ- среднее квадратическое отклонение.

а) $$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Введем переменную $Z=\frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x=\sigma z+a$, $dx=\sigma dz$

$$M(X)=\frac{\sigma}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma z+a)e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sigma ze^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

Первое из слагаемых равно нулю (под знаком интеграла – нечетная функция)

Второе из слагаемых равно a. Так как интеграл Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$.

Итак $M(X)=a$

б) $$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-M(X)]^2f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Введем переменную $Z=\frac{x-a}{\sigma}$. Отсюда $x-a=\sigma z$, $dx=\sigma dz$.

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Z\cdot Ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz$$

Интегрируя по частям, положив $u=z$, $d\upsilon=Ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz$.

Найдем: $D(X)=\sigma^2$ $\sigma(X)=\sigma$

При $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ называют *нормированной*.

Вероятность того, что случайная величина X, заданная дифференциальной функцией $f(x)$ примет значение, принадлежащее интервалу (α,β), такова

$$P(\alpha < X < \beta)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Пусть X распределена по нормальному закону, тогда:

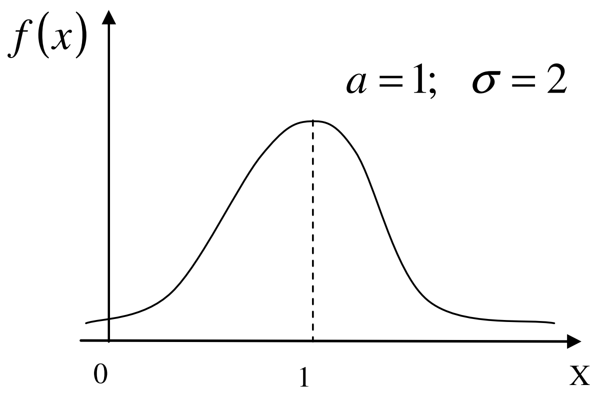
$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx$$

После некоторых преобразований получаем:

$$P(\alpha < X < \beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

28. Нормальная кривая. Воздействие параметров a и σ на нормальную кривую.

При $x=a$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. График функции симметричен относительно прямой $x=a$. Точки графика $\left(a-\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $\left(a+\sigma,\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба.



Изменение ... ормы нормальной кривой, а приво... вправо, если a возрастает и влев...

С возрастанием σ кривая сжимается к оси OX; при убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси OY.

При $a=0$ и $\sigma=1$ нормальную кривую $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ называют *нормированной*.

Вероятность того, что случайная величина X, заданная дифференциальной функцией $f(x)$ примет значение, принадлежащее интервалу (α, β), такова

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Пусть X распределена по нормальному закону, тогда:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

После некоторых преобразований получаем:

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}} e^{-\frac{Z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

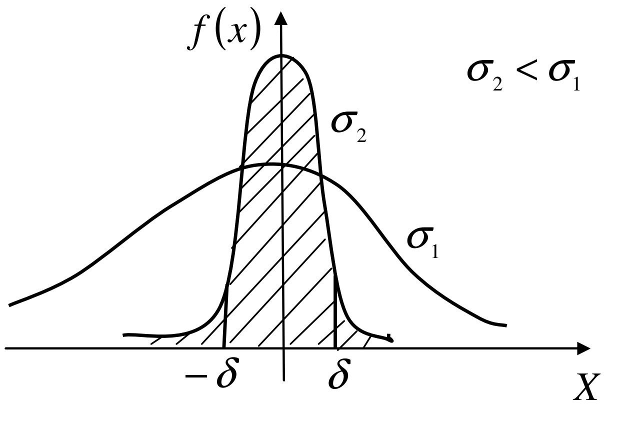
Найдем вероятность события $|X - a| < \delta$

$$P(|X-a| < \delta) = P(a-\delta < X < a+\delta) = \Phi\left[\frac{(a+\delta)-a}{\sigma}\right] -$$

$$-\Phi\left[\frac{(a-\delta)-a}{\sigma}\right] = \Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right] - \Phi\left[-\frac{\delta}{\sigma}\right] = 2\Phi\left[\frac{\delta}{\sigma}\right]$$

В частности, при $a = 0$ $P(|X| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$

Если две случайные величины нормально распределены и $a = 0$, то вероятность принять значение, принадлежащее интервалу $(-\delta, \delta)$, больше у той величины, которая имеет меньшее значение σ.



29. Функция одного случайного аргумента и его числовые характеристики Решить заданную задачу.

Задача : Случайная величина $y = x^2$ равномерно распределена на отрезке $[-1;1]$

Найти математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины

Решение: Если каждому возможному значению случайной величины X можно сопоставить одно возможное значение случайной велчины У то такое соотношение называется функцией одного случайного аргумента и обозначается как $У = \varphi(X)$.

Пусть X дискретная случайная величина и имеет распределение

X	x1	x_2	…	x_n
п	p_1	p_2	…	p_n

(1)

Найдем распределение $У = \varphi(X)$. Явно что, события $\{X = x_i\}$ и $\{У = \varphi(x_i)\}$ равновозможные события, поэтому их соответствующие вероятности равны, то есть $P\{X = x_i\} = P\{У = \varphi(x_i)\} = P_i \quad \left(i = \overline{1,n}\right)$.

Тогда возможные значения случайной величины $У = \varphi(X)$ будут $\varphi(x_1), \varphi(x_2), ..., \varphi(x_n)$ то распределение (1) для $У = \varphi(X)$ примет вид:

$У = \varphi(X)$	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	…	$\varphi(x_n)$
P	p_1	p_2	…	p_n

(2)

Из (2) основываясь определению математического ожидания получим:

$$M(У) = M\left[\varphi(X)\right] = \sum_{i=1}^{n} P_i \varphi(x_i), \qquad (3)$$

а дисперсия

$$DУ = D(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n}\left[\varphi(x_i) - M(\varphi(X))\right]^2 P_i = \sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)P_i - \left(M\left[\varphi(X)\right]\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varphi^2(x_i)P_i - \left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)P_i\right)^2 = M\left[\varphi^2(X)\right] - \left(M\left[\varphi(X)\right]\right)^2$$

Как известно равномерное распределение имеет функцию плотности

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} \text{ -dir}$$

$$y = x^2 \qquad x = \sqrt{y} \qquad y > 0$$

$$g(y) = f(\psi(y)) \cdot \psi'(y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$M(y) = \int_0^1 y g(y) dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{4} dy = \frac{1}{4} \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$D(y) = \int_0^1 y^2 f(y) dy - (M(y))^2 = \int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{y}} dy - \frac{1}{36} =$$

$$= \int_0^1 \frac{y\sqrt{y}}{4} dy - \frac{1}{36} = \frac{1}{4}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy - \frac{1}{36} = \frac{1}{4}\frac{y^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{10} y^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{36} = \frac{1}{10} - \frac{1}{36} = \frac{18-5}{180} = \frac{13}{180}$$

30. Функция двух случайных аргументов.

Задача: Задана распределение двух случайных аргументов X и У:

X	1	4
P	0,3	0,7

y	2	3
g	0,4	0,6

Написать распределение $Z = X + Y$.

Решение:

Если каждой паре возможнох значений случайных величин X и У можно сопоставить одно возможное значение случайной велчины Z то такое соотношение называется функцией двух случайных аргументов и обозначается как

$Z = \varphi(X, У)$.

В практике часто появляется необходимость найти распределение Z=X+Y если задаются распределения и X и У. Для этого сначало надо найти значения Z, то есть к каждому значению случайной величины X прибавляем все значения случайной величины У. А затем находим произведение вероятностей соответствующих сумм.

Пусть заданы случайные величины X и У с соответствующими распределениями

X	X_1	X_2
P	p_1	p_2

Y	Y_1	Y_2
G	g_1	g_2

Тогда распределение X+У будет иметь следующий вид:

$$p(x = x_1, y = y_1) = p(x = x_1) \cdot p(y = y_1) = p_1 g_1$$

$$p(x = x_1, y = y_2) = p(x = x_1) \cdot p(y = y_2) = p_1 g_2$$

$$p(x = x_2, y = y_1) = p(x = x_2) \cdot p(y = y_1) = p_2 g_1$$

$$P(x = x_2, y = y_2) = P(x = x_2) \cdot P(y = y_2) = P_2 g_2$$

Тогда

x+y	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	$x_2 + y_2$	$x_2 + y_2$
P	$p_1 g_1$	$p_1 g_2$	$p_2 g_1$	$p_2 g_2$

Если учесть это в задаче:

$$P(z = 1 + 2 = 3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12$$

$P(z=1+3=4)=0{,}3\cdot 0{,}6=0{,}18$

$P(z=4+2=6)=0{,}7\cdot 0{,}4=0{,}28$

$P(z=4+3=7)=0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}42$

Z	3	4	6	7
P	0,12	0,18	0,28	0,42

31. Закон распределение двумерной случайной величины. Написать закон нахождения компонентов

Все возможные значения случайные величины (X; У) состоящие из (x;y) называются двумерными. Одновременно рассматриваемые компоненты X и У образуют систему двух случайных величин. Если компоненты дискретные то система называется дискретной, а если компоненты непрерывные то система называется непрерывной. Двумерную случайную величину иногда называют вектором.

Множество случачайных величин X_1, X_2, …, $X_н$ построинных в определенной последовательности называется n –мерный вектор $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ или n –мерной системой случайных величин.

Сначало рассмотрим двумерный вектор $Z=(X,У)$.

Пусть компоненты $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, $У=(y_1,y_2,...,y_m)$ компоненты вектора $Z=(X,У)$. Если заданы распределения компонентов в отдельности, тогда можно написать распределение двумерной случайной величины $Z=(X,У)$.

Действительно, пусть

X	x_1	x_2	…	$x_н$
p	p_1	p_2	…	$p_н$

(1)

и

У	y_1	y_2	…	$y_м$
g	g_1	g_2	…	$g_м$

(2)

Тогда $Z=(X,У)$ имеет распределение

x/y	x_1	x_2	…	$x_н$
y_1	P_{11}	p_{21}	…	$p_{н1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	…	P_{n2}
			…	
y_m	P_{1m}	p_{2m}	…	P_{nm}

(3)

(3) называют распределением $Z=(X,У)$ или иногда матрицей ее распределения. Здесь в (1) $\sum_{k=1}^{n} P_k = 1$ и в (2) $\sum_{k=1}^{m} g_i = 1$. Так как в распределение (3) события $\{X=x_k, У=y_i\}$ образуют полную группу, то

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} P_{ki} = 1 \qquad (4)$$

Мы показали что, из распределений (1) и (2) получаем распределение (3). Обратное этой задачи верно. То есть из (3) можно получит (1) и (2).

Для этого при нахождении распределения X в первую строчку распределения пришем значения X а в строчку вероятности складываем вероятности в столбик.

$$\begin{aligned} P_k &= P(X=x_k) = P\big((X=x_k)\cdot(У=y_1)+(X=x_k)(У=y_2)+\dots+(X=x_k)\cdot(У=y_m)\big) = \\ &= P\big((X=x_k)(У=y_i)\big)+P\big((X=x_k)(У=y_2)\big)+\dots+P\big((X=x_k)(У=y_m)\big) = \\ &= P_k g_1 + P_k g_2 + \dots + P_k g_m = P_{k1}+P_{k2}+\dots+P_{km} \quad (k=1,2,3,\dots n). \end{aligned} \qquad (5)$$

Для этого при нахождении распределения У в первую строчку распределения пришем значения У а в строчку вероятности складываем вероятности в строку.

$$g_i = P(У=y_i) = P_{1i}+P_{2i}+\dots+P_{ni} \quad (i=1,2,\dots m) \qquad (6)$$

32. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Функции распределения составляющих.

Функцией распределения двумерной случайной величины (x, y) называют функцию $F(x, y)$ определяющую для каждой пары чисел x, y вероятность того, что X примет значение, меньше y:

$$F(x,y) = P(X<x,\ У<y)$$

Функция распределения двумерной случайной величины имеет следующие свойства :

Свойство 1. Значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству

$$0 \le F(x,y) \le 1$$

Свойство 2. $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому аргументу, т.е.

$$F(x_2,y) \ge F(x_1,y), \quad \textit{если}\ x_2 > x_1$$

$$F(x,y_2) \ge F(x\ ,y_1), \ \textit{если}\ y_2 > y_1$$

Свойство 3. Имеют место предельные соотношения:

$$1)\ F(-\infty,y)=0 \qquad 2) F(x,-\infty)=0$$

$$F(-\infty,\infty)=0 \qquad 4) F(\infty,\infty)=1$$

Свойство 4.

а) При $y=\infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Х:

$$F(x,\infty)=F_1(x)$$

б) При (x,∞) функция распределения системы становится функцией распределения составляющей У:

$$F(\infty,e)=F_2(y)$$

33. Написать закон распределение двумерной случайной величины и решить заданную задачу.

Задача**:** Двумерная случайная величина (X; Y) распределена в виде таблицы:

x_i	y_j	
	$y_1=0$	$y_2=1$
$x_1=-1$	0,1	0,2
$x_2=0$	0,2	0,3
$x_3=1$	0	0,2

Написать условное распределение компонента X при условии Y=1. Исследуйте зависимость компонентов X и Y.

Пусть компоненты системы (Х; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...,y_m$. Тогда распределение компонента Х при условии $У=y_j\,(j=1,2,...,m)$ называется его <u>условным распределением.</u> Случайная величина Х получает только из своих возможных значений $(x_1,x_2,...,x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}\right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X=x_i)=\dfrac{P\left[(X=x_i);(У=y_j)\right]}{P(У=y_j)}\quad \left(i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m}\right)$ (1)

является условной вероятностью.

Тогда получаем

$X/У=y_j$	x_1	x_2	…	$x_н$
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	…	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

Распределение (2) называется <u>условным распределенем компонента Х</u>

Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X=x_i\left(i=\overline{1,n}\right)$

$У/X=x_i$	$й_1$	$й_2$	…	$й_м$

$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

При условии Y=1

$$\underset{X=-1}{P(Y=1)} = \frac{P(X=-1;\,Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0{,}2}{0{,}2+0{,}3+0{,}2} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$$

$$\underset{X=0}{P(Y=1)} = \frac{P(X=0;\,Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} =$$

$$= \frac{0{,}3}{0{,}7} = \frac{3}{7}$$

$$\underset{X=1}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1;\,Y=1)}{P(x=-1)+P(x=0)+P(x=1)} = \frac{0{,}2}{0{,}7} = \frac{2}{7}$$

$X_{y=1}$	-1	0	1
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$

34. Зависимые случайные величины. Условные законы распределения составляющих.

Зависимые случайные величины. Условное распределение компонентов двумерной случайной величины.

Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1, x_2, \ldots x_n;\ y_1, y_2, \ldots, y_m$. Тогда распределение компонента X при условии $У = y_j\ (j = 1, 2, \ldots, m)$ называется его условным распределением. Случайная величина X получает только из своих возможных значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}\right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X = x_i) = \dfrac{P\left[(X = x_i);(У = y_j)\right]}{P(У = y_j)} \quad \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$ (1)

является условной вероятностью.

Тогда получаем

$X/_{У=y_j}$	x_1	x_2	…	$x_н$

$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	…	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

Распределение (2) называется условным распределенем компонента X

Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X = x_i \left(i=\overline{1,n}\right)$

$У/_{X=x_i}$	й$_1$	$й_2$	…	$й_м$
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

Пусть (X; У) система непрерывных случайных величин, $f(x,y)$ функция ее плотность этой системы. Плотность компонента X при условии $\{У=y\}$ находится по формуле

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)} \qquad (4)$$

Здесь $f_2(y)$ функция плотности компонента У и вычисляется по формуле

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \qquad (5)$$

Учитывая (5) в (4) получим

$$\varphi\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx} \qquad (6).$$

Условное распределение компонента У при условии $\{X=x\}$ вычисляется по формуле:

$$\varphi\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy} \qquad (7)$$

Здесь $f_1(x)$ функция плотности компонента X.

Отметим что, так как X и У зависимы $f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$ и $f_1(x)\neq\varphi\left(x/y\right)$, $f_2(y)\neq\varphi\left(y/x\right)$. Если $f_1(x)=\varphi\left(x/y\right)$ и $f_2(y)=\varphi\left(y/x\right)$, тогда компоненты X и У независимые непрерывные случайные величины.

35. Задача: задана двумерная дискретная случайная величина X и Y.

Y	*X*		
	X₁=2	*X₂=5*	*X₃=8*
$y_1=0{,}4$	*0,15*	*0,30*	*0,35*
$y_2=0{,}8$	*0,05*	*0,12*	*0,03*

а) Закон безусловного распределения компонентов.

b) Написать условное распределение компоненита X при значении $y_1 = 0,4$ компонента Y.

c) Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1, x_2, ... x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m$. Тогда распределение компонента X при условии $У = y_j\ (j = 1, 2, ..., m)$ называется его <u>условным распределением.</u> Случайная величина X получает только из своих возможных значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}\right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X = x_i) = \frac{P\left[(X = x_i); (У = y_j)\right]}{P(У = y_j)} \quad \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$ (1)

является условной вероятностью.
Тогда получаем

(2)

$X / У = y_j$	x_1	x_2	…	$x_н$
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	…	$P_{У=y_j}(x_n)$

Распределение (2) называется <u>условным распределенем компонента X</u>

Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X = x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$

$У / X = x_i$	$й_1$	$й_2$	…	$й_м$
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

Решение: Если сложить вероятности «по столбцам» то получим распределение X-а , а если «по строкам» получим распределение У:
Вычисляем соответствующие вероятности распределение X:

$$P(x_1 = 2) = P(x_1 = 2,\ y_1 = 0,4) + P(x_1 = 2,\ y_2 = 0,8) = 0,15 + 0,05 = 0,2$$

$$P(x_2 = 5) = P(x_2 = 5,\ y_1 = 0,4) + P(x_2 = 5,\ y_2 = 0,8) = 0,30 + 0,12 = 0,42$$

$$P(x_3 = 8) = P(x_3 = 8,\ y_1 = 0,4) + P(x_3 = 8,\ y_2 = 0,8) = 0,35 + 0,03 = 0,38$$

Получим распределение X

X	2	5	8
P	0,2	0,42	0,38

Анологично находим распределения У

Y	0,4	0,8

P	0,80	0,20

b) Вычислим условные вероятности возможных значений компонента X при условии $y_1 = 0,4$:

$$p(x_1 / y_1) = \frac{p(x_1, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,15}{0,80} = \frac{3}{16}, \; p(x_2 / y_1) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,30}{0,80} = \frac{3}{8},$$

$$p(x_3 / y_1) = \frac{p(x_3, y_1)}{p(y_1)} = \frac{0,35}{0,80} = \frac{7}{16}$$

Напишем распределение компонента X:

x	2	5	8
$P(X/y_1)$	3/16	3/8	7/16

Проверка: $\frac{3}{16} + \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = 1$

С) Анологично находим условное распределение компонента У:

Y	0,4	0,8
$P(X_2/Y)$	5/7	2/7

Проверка : $\frac{5}{7} + \frac{2}{7} = 1$

При условии $X=x_2=5$ написать условное распределение компонента Y.

36. Числовые характеристики системы двух случайных величин. Корреляционная зависимость. Коэффициент корреляции.

37. Двумерная случайная величина (X, Y) распределена в виде таблицы:

x_i	y_j	
	$y_1 = 0$	$y_2 = 1$
$x_1 = -1$	0,1	0,2
$x_2 = 0$	0,2	0,3
$x_3 = 1$	0	0,2

Найти коэффициенты корелляции величин X и Y.

Математическое ожидание произведения $(X - MX)^K \cdot (У - МУ)^S$ называется центральный момент <u>*К+С*</u> и обозначается как $\beta_{K,S}$:

$$\beta_{K,S} = M\left[(X - MX)^K \cdot (У - МУ)^S\right] \qquad (1)$$

Если в (2) –а *К*=1, *С*=1 получим

$$\beta_{1,1} = M\left[\left(X - MX\right)\cdot\left(У - MУ\right)\right] \qquad (2)$$

(6) называется <u>ковариацией (или корреляционный момент)случаных величин Х и У</u> и обозначается как $\mathbf{cov}(X,У)$ или $K_{XУ}$:

$$K_{XУ} = \mathbf{cov}(X,У) = M\left[\left(X - MX\right)\left(У - MУ\right)\right]. \qquad (3)$$

Из (3) получаем

$$K_{XУ} = MX\cdot MУ - M\left(X\cdot У\right). \qquad (4)$$

Сначало напишем распределение Х и У

X	-1	0	1
P	0,3	0,5	0,2

Y	0	1
P	0,3	0,7

А затем напишем распределение $X\cdot Y$:

$x\cdot y$	$-1\cdot 0$	$-1\cdot 1$	$0\cdot 0$	$0\cdot 1$	$1\cdot 0$	$1\cdot 1$
P	0,09	0,21	0,15	0,35	0,06	0,14

$x\cdot y$	-1	0	1
P	0,21	0,65	0,14

Затем вычислим математическое ожидание:

$$M(x) = -1\cdot 0{,}3 + 0\cdot 0{,}5 + 1\cdot 0{,}2 = -0{,}3 + 0{,}2 = -0{,}1$$

$$M(y) = 0\cdot 0{,}3 + 1\cdot 0{,}7 = 0{,}7$$

$$M(x\cdot y) = -1\cdot 0{,}21 + 0\cdot 0{,}65 + 1\cdot 0{,}14 = -0{,}21 + 0{,}14 = -0{,}07$$

Отсюда вычислим

$$K_{xy} = -0{,}07 - (-0{,}1)\cdot 0{,}73 = -0{,}07 + 0{,}07 = 0$$

Значит эти величины имеют корреляционную зависимость.

38. Написать таблицу распределения двумерной случайной величины и решите заданную задачу.

Задача: вероятность поразить мишень первым стрелком равна 0,4, а для второго стрелка 0,6. Каждый из стрелков стреляет по два раза независимо друг от друга. Написать закон распределения поражения мишени I и II стрелками. (случайная величина X показывает поражения I стрелком, аY показывает поражение II стрелком).

Решение: Пусть компоненты системы (X; У) являются зависимые дискретные случайные величины и значения соответственно являются $x_1, x_2, ...x_n;\ y_1, y_2, ..., y_m$. Тогда распределение компонента X при условии $У = y_j\ (j = 1, 2, ..., m)$ называется его <u>условным распределением.</u> Случайная величина X получает только из своих возможных значений $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и вероятность получений этих значений вычисляется по формуле $\left(P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} \right)$.

Вероятность $P_{У=y_j}(X = x_i) = \frac{P\left[(X = x_i); (У = y_j)\right]}{P(У = y_j)} \quad \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right)$ (1)

является условной вероятностью.

Тогда получаем

$X / У = y_j$	x_1	x_2	…	$x_н$
$P_{У=y_j}$	$P_{У=y_j}(x_1)$	$P_{У=y_j}(x_2)$	…	$P_{У=y_j}(x_n)$

(2)

Распределение (2) называется <u>условным распределенем компонента X</u>

Анологично можно написать распределение компоненита У при условии $X = x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$

$У / X = x_i$	й$_1$	$й_2$	…	$й_м$
$P_{X=x_i}$	$P_{X=x_i}(y_1)$	$P_{X=x_i}(y_2)$	…	$P_{X=x_i}(y_m)$

(3)

$p_1 = 0,4 \qquad p_2 = 0,6$

$q_1 = 0,6 \qquad q_2 = 0,4$

Используя следующее распределение

X	0	1	2
P	$q_2 q_2$	$2 p_2 q_2$	$p_2 p_2$

Напишем распределение I стрелка

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

Напишем распределение II стрелка

X	0	1	2
P	0,16	0,48	0,36

39. Закон больших чисел. Неравенство и теорема Чебышева.

<u>НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА</u>

Неравенство Чебышева справедлива для дискретных и непрерывных случайных величин.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, заданную таблицей распределения:

$$\begin{matrix} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{matrix}$$

Подставим перед собой задачу оценить вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания не превышает по абсолютной величине положительного числа ε. Если ε достаточно мало, то мы оценим, таким образом, вероятность того, что X примет значение, достаточно близкие к своему математическому ожиданию. П.Л.Чебышев доказал неравенство позволяющее дать интересующую нас оценку.

<u>Неравенство Чебышева</u>. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от её математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-D(X)/\varepsilon^2$

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

<u>Теорема Чебышева</u>. Если $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$- попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа С), то, как бы мало ни было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами, в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots -$ попарно независимые случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a, и если дисперсии этих величин равномерно ограничены , то как бы мало ни было число $\varepsilon > 0$, вероятность неравенства

$$\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon$$

будет как угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико.

Другими словами в условиях теоремы будет иметь место равенство

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

40. Написать неравенство Чебышева и решить заданную задачу:
Задача: Х дискретная случайная величина Х задана распределением:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность события

$|X - M(X)| < 0{,}2$.

Решение: Для Х случайной величины имеющяя конечную дисперсию и для числа $\varepsilon > 0$ верно:

$$P(|X - M(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (1).$$

Найдем математическое ожидание и дисперсию величины Х:

$M(X) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}8 = 0{,}54$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = (0{,}3^2 \cdot 0{,}2 + 0{,}6^2 \cdot 0{,}8) - 0{,}54^2 = 0{,}0144$

Используем неравенство Чебышева в следующем виде: $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ из условия задачи имеем:

$$\varepsilon = 0{,}2$$

M(X) =0,54 ,D(X)=0,0144,
В результате получим:

$$P(|X - 0{,}54| < 5) \geq 1 - \frac{0{,}0144}{0{,}04} = 0{,}64$$

41. Выборочная дисперсия и ее свойства.

Пусть в результате наблюдений дана выборка $x_1, x_2, ... x_n$. Если $\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ тогда $S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$ (1)

называется дисперсией выборки. Здесь разницы $x_i - \overline{x}$ являются приращениями. Если частоты $m_1, m_2, m_3 ... m_k$ вариантов известны, тгда дисперсия вычисляется по формуле

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i \qquad (2)$$

Подкоренное значение выборочной дисперсии называется среднее квадратическое отклонение выборки и записывается как:

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{S_x^2} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2}$$

Или

$$\overline{\sigma_x} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i}$$

.

Понятно что размерность величины X одинаково величиной $\overline{\sigma_x}$.

Дисперсия выборки имеет следующие свойства:

Свойство1:дисперсия постоянной величины равно единице.

Действительно $S_x^2 = \frac{1}{n}(c-c)^2 = \frac{1}{n}\cdot 0 = 0$.

Свойство 2: Если варианты являющиеся результатами наблюдения возрастают или убывают к определенному постоянному числу тогда дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменяется.

Доказательство:

$$S_{x\pm c}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i \pm c\right) - \overline{\left(x \pm c\right)}\right)^2 m_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\left(x_i \pm c\right) - \left(\overline{x} \pm c\right)\right)^2 m_i =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = S_x^2$$

Свойство 3: Постоянную можно вывести за знак дисперсии квадратом. Действительно

$$S_{cx}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(cx_i - c\overline{x}\right)^2 m_i = \frac{c^2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i = c^2 S_x^2$$

$$\overline{\sigma_{cx}} = \sqrt{c^2 S_x^2} = |c|\sqrt{S_x^2} = |c|\overline{\sigma_x}$$

Свойство 4: Если частоты соответствующих вариантов умножить постоянную то выборочная дисперсия и среднее квадратическое отклонение не изменится.

42. Ошибки первого и второго рода, которые могут быть допущены в итоге статистической проверки гипотезы.

Первого и второго типа ошибки допустимые
при проверке гипотез.

Пусть рассматривается основная гипотеза H_0 и альтернативная ей гипотеза H_1 выдвинутые для характеристики чего-либо. В зависимости от выбора точки x_i на оси OX решается принимать гипотезу H_0(гипотезу H_1 отвергать) или отвергать (гипотеза H_1 принемать).

Так как выбор точки x_i случаен, тогда при принятие решения могут быть следующие:

1) гипотеза H_0 (нулевая основная) верна, (альтернативная гипотеза H_1 не верна) и гипотеза H_0 принимается.
2) гипотеза H_0 верна, (альтернативная гипотеза H_1 не верна) и гипотеза H_1 принимается.
3) альтернативная гипотеза H_1 верна (основная гипотеза H_0 не верна), но H_1 принимается.
4) гипотеза H_1 верна (основная гипотеза H_0 не верна), но H_1 отвергается.

Как видно в решениях 2) и в 4) допустима ошибка.

Определение. Если основная гипотеза H_0 (провереная) верна и отвергается, а ей противоположная (альтернативная) гипотеза H_1 принимается, тогда сделанная ошибка называется ошибкой первого рода и обозначается через α.

Определение 2. Если основная H_0 (провереная) не верна и принимается, а альтернативная гипотеза H_1 отвергается, тогда сделанная ошибка называется ошибкой второго рода и обозначается через β.

43. Метод моментов.

Метод моментов точечной оценки неизвестных параметров заданного распределения состоит в приравнивании теоретических моментов соответствующим эмпирическим моментам того же порядка. Полученное уравнение или уравнения решаются относительно теоретических параметров.

Если теоретический параметр зависит от одного параметра тогда:

$$\gamma = M\left[x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,\alpha)dx = m_1(\alpha)$$

Начальный теоретический момент первого порядка

$$\overline{x_c} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

Возмем равного порядка емперическому.

$$m_1(\alpha) = \overline{x_c}(1) \qquad \left(M\left[x\right] = \overline{x_c}\right)$$

Уравнение решаем относительно α.

Если в распределение есть два параметра , т.е. функция плотности в виде $P(x, \alpha_1, \alpha_2)$ тогда для нахождения параметров α_1 и α_2 двум теоретическим момента приравняем двум эмпирическим моментам.
Здесь начальные и эмпирические моменты первого порядка, второго порядка теоретические моменты и эмперические приравниваем и можем оценить α_1 и α_2. Ясно, что так как

$$\gamma = M[x], \mu_2 = m_2 \quad \mu_2 = D[x]$$

тогда

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c \end{cases} \qquad (2)$$

Из системы получаем неизвестные параметры. Это значения является точечной оценкой параметра. Здесь выборочная средняя $\overline{x_в}$, выборочная дисперсия $D_в$ находится основываясь на выборке $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$

44. Оценка параметров методом моментов.
Решить задачу.
Случайная величина X распределена по закону Пуассона. Задано распределение *n=200* нестандартных деталей (перечень вариантов и соответствующих частот)

x_i	0	1	2	3	4
n_i	132	43	20	3	2

Методом моментов оценить неизвестный параметр λ распределения Пуассона.

Решение. Имеется выборка объёма n из некоторой генеральной совокупности $F(X, \theta)$.

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

Имеются некоторые методы оценки параметров распределения генеральной совокупности

Оценка двух параметров. Выборка есть из генеральной совокупности с плотностью распределения $f(x, \theta_1 \theta_2)$. Тогда сравним II порядка моменты.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= \mu_1 \\ \mu_2 &= m_2 \end{aligned}\right\} \quad или \quad \left.\begin{aligned} M(X) &= \overline{X}b \\ D(x) &= Db \end{aligned}\right\}$$

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x - f(x, \theta_1, \theta_2)\, dx = \varphi_1(\theta_1, \theta_2)$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varphi(\theta_1, \theta_2))^2 f(x, \theta_1, \theta_2)\, dx = \varphi_2(\theta_1, \theta_2)$$

Тогда : $\begin{matrix} \varphi_1(\theta_1,\theta_2) = \overline{X}_b \\ \varphi_2(\theta_1,\theta_2) = D_b \end{matrix}\Bigg\} \quad \begin{matrix} \theta_1^* n = g(X_1, X_2, ..., X_n) \\ \theta_2 n = g_2(X_1, X_2, ..., X_n) \end{matrix}\Bigg\}$

Эти оценки являются функциями от варианты выборки.

Решение задачи: Известно, что в распределение Пуассона математическое ожидание равно параметру λ и известно, что $M[x] = \overline{x_c}$, тогда получим $\lambda = \overline{x_c}$.

Тогда получим

$$\lambda = x_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{132 \cdot 0 + 1 \cdot 43 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{200} = \frac{57}{200} = 0{,}285$$

45. Метод моментов точечной оценки (краткая информация)

Решить задачу.

Методом моментов найти точечную оценку параметров a и b равномерного распределения, с плотностью $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ по выборке $x_1, x_2, ... x_n$

Решение: Имеется выборка объёма n из некоторой генеральной совокупности $F(X,\theta)$.

$$X_1, X_2, ..., X_n$$

Имеются некоторые методы оценки параметров распределения генеральной совокупности. *Метод моментов*. Оценка одного параметра θ в $F(X,\theta)$, которая $f(x,\theta)$ есть *плотность распределения*.

В этом случае для одного параметра достаточно иметь одно уравнение относительно этого параметра.

$$\gamma_1 = \int Xf(x,\theta)dx = \varphi(\theta), \quad \gamma_1' = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} X_i - \overline{X}_b \quad \varphi(\theta) = \overline{X}_b$$

Находим оценки $\theta_n^* = \theta_n(x_1, x_2, ..., x_n)$

Решение: Так как имеем два параметра для их определения имеем**:**

$$\begin{cases} M[x] = \overline{x_c} \\ D[x] = D_c = \sigma^2 \end{cases}$$

Используем уравнения системы .

Так как равномерное распределение имеем: $M[x] = \dfrac{a+b}{2}; D(x) = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Отсюда $\begin{cases} \frac{a+b}{2} = \overline{x_c} \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = \sqrt{D_c} \end{cases}$

Из системы уравнений имеем:

$a = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c}$

$b = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c}$

Значит:

$a^* = \overline{x_c} - \sqrt{3D_c}$, $b^* = \overline{x_c} + \sqrt{3D_c}$.

46. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения.

Для оценки параметров распределения находим такой интервал в котором удовлетворяется условие $P(\left|\theta - \theta^2\right| < \delta) = \gamma$. Здесь γ вероятность достоверности, θ-параметр оценки, θ^* его приблизительное значение. Определяется δ .

Так как распределение имеющая нормальное распределение δ неизвестна, для нахождения параметра а интервал достоверности имеет вид

Nобьем выборки, σ -среднее квадратическое отклонение.

t находим из равенства $\phi = \frac{\gamma}{2}$.

γ -вероятность достоверности и функция Лапласа.

Используя исправную дисперсию интервал достоверности параметра σ примет вид:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \qquad (если \quad q < 1)$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \qquad (если \quad q > 1)$$

Если n и γ заданы то для нахождения q есть таблица. Параметр А можно оценить с помощью параметра S.

$$\overline{x}_c - t\frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_c + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

47. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения (краткая информация)

Решить задачу.

Вместимость конденсатора $\overline{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$, $\gamma = 0{,}99$

Найти доверительный интервал $\left(\Phi(t) = 0{,}495; t = 2{,}58\right)$

Задача: при объеме конденсатора $\overline{x} = 20MF$, $n = 16$, $\sigma = 4$ найти интервал достоверности $0{,}99$. $\left(если\, \phi(t) = 0{,}495, тогда \quad t = 2{,}58\right)$

Решение: Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой генеральной совокупности. При выборке малого объёма n точечная оценка приводит к грубым ошибкам. Поэтому следует пользоваться интервальными оценками, которые определяются двумя числами – концами интервала. Будем считать θ постоянным числом (по Нейману).

Точечная оценка θ^* будет служить оценкой θ неизвестного параметра (θ^* обладает с хорошими характеристиками: несмещенная, эффективная и т.д.)

Доверительным интервалом $\left[\underline{\theta^*}, \overline{\theta^*}\right]$ для параметра θ называется такой интервал, относительно которого можно с заранее определенной, близкой к единице вероятностью γ утверждать, что он содержит неизвестное нам значение параметра.

Если $\delta > 0$ и $\left|\theta^* - \theta\right| < \delta$, то тем оценка точнее. Можно лишь говорить о вероятности

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (*)$$

γ - называют надёжностью (доверительной вероятностью). Обычно $\gamma = 0{,}99;\ 0{,}999$ и т.д. берут приближенное к единице.

(*) можно написать так:

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$$

Доверительным называют интервал $\left(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta\right)$, где $\underline{\theta^*} = \theta^* - \delta$, $\overline{\theta^*} = \theta^* + \delta$, который покрывает θ с заданной надежностью. Заметим, что концы интервала случайные числа.

Решение : $\gamma = 0{,}99$,из таблицы функции Лапласа получим $t = 2{,}58$.

Заданные учитывая в формуле

$$\bar{x}_s - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_s + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Получим:

$$20 - 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}} < a < 2 + 2{,}58\frac{4}{\sqrt{16}}$$

$$20 - 2{,}58 < a < 2 + 2{,}58$$

$$17{,}42 < a < 22{,}58$$

48. Доверительные интервалы для оценки параметров распределения (краткая информация)

Решить задачу.

В 300 независимых испытаниях события A с одинаковой вероятностью наступает 250 раз. Найти доверительные интервалы для оценки вероятности p , если задана надежность $\gamma = 0{,}95 \quad \left(\Phi(t) = 0{,}475; t = 1{,}96\right)$

Решение: Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из некоторой генеральной совокупности. При выборке малого объёма n точечная оценка приводит к грубым ошибкам. Поэтому следует пользоваться интервальными оценками, которые определяются двумя числами – концами интервала. Будем считать θ постоянным числом (по Нейману).

Точечная оценка θ^* будет служить оценкой θ неизвестного параметра (θ^* обладает с хорошими характеристиками: несмещенная, эффективная и т.д.)

Доверительным интервалом $\left[\underline{\theta^*}, \overline{\theta^*}\right]$ для параметра θ называется такой интервал, относительно которого можно с заранее определенной, близкой к единице вероятностью γ утверждать, что он содержит неизвестное нам значение параметра.

Если $\delta > 0$ и $\left|\theta^* - \theta\right| < \delta$, то тем оценка точнее. Можно лишь говорить о вероятности

$$P\left(\left|\theta^* - \theta\right| < \delta\right) = \gamma \qquad (*)$$

γ - называют надёжностью (доверительной вероятностью). Обычно $\gamma = 0{,}99;\ 0{,}999$ и т.д. берут приближенное к единице.

(*) можно написать так:

$$P\left(\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\right) = \gamma$$

Доверительным называют интервал $\left(\theta^* - \delta,\ \theta^* + \delta\right)$, где $\underline{\theta^*} = \theta^* - \delta,$ $\overline{\theta^*} = \theta^* + \delta$, который покрывает θ с заданной надежностью. Заметим, что концы интервала случайные числа.

Решение: Частота того, что в 300 независимых испытаниях событие А происходит 250 раз будет:

$$\omega = \frac{250}{300} = \frac{5}{6};\ \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}\quad \Phi(t) = \frac{0{,}95}{2} = 0{,}475$$

Значение функции Лапласа находим из таблицы, т.е t=1,96.

$$P_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}} \qquad P_1 < P < P_2$$

Используя формулы

$$P_1 = \frac{5}{6} - 1{,}96\sqrt{\frac{5}{300\cdot 36}} \approx 0{,}79$$

$$P_1 = \frac{5}{6} + 1{,}96\sqrt{\frac{5}{300\cdot 36}} \approx 0{,}88$$

Тогда получим $0{,}79 < P < 0{,}88$.

49. Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функия распределения

Эмперической функцией распределения называют функцию $F^x(x)$ определяющую для каждого значения x относительную частоту события X< x:

$$F^x(x) = \frac{n_x}{n}$$

где n_x - число вариант меньше x, n - объем выборки

Задача 1**.** Найти эмпирическую функцию по данному распределению выборки

x_i	4	7	10
n_i	16	24	40

Решение: Найдем объем выборки: n=16+24+40=80.

Наименьшая варианта равно 4, поэтому при $x \le 4$. $F^x(x)=0$.Значение $x<7$ наблюдалось 16 раз, следовательно $F^x(x)=\dfrac{16}{80}=0{,}2$ при $4<x\le 7$.

Значения $x<10$, а именно x_1=4 и x_2=7 наблюдались 16+24=40 раз, следовательно $F^x(x)=\dfrac{40}{80}=0{,}5$ при $7<x\le 10$. Так как x=10 наибольшая варианта, то $F^x(x)=1$ при $x>10$.

Искомая эмпирическая функция:

$$F^x(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le 4\\ 0{,}2 & при \quad 4<x\le 7\\ 0{,}5 & при \quad 7<x\le 10\\ 1 & при \quad x>10\end{cases}$$

50. Генеральная дисперсия

Задача . Генеральная совокупность задана таблицей распределения:

x_i	8	3	5
n_i	4	6	10

Найти генеральную дисперсию.

Имеется выборка $x_1, x_2, \ldots x_n$ объёма n частоты $n_i=1$.

1. *Выборочной средней.*

Выборочной средней называют среднее арифметическое значение выборки, и обозначается :

$$\overline{X}_b=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\,,$$

где n - объём выборки.

2. *Отклонение выборки.*

Отклонением выборки называют разность между индивидуумами и средней выборки.

$$X_i-\overline{X}_b$$

Теорема. Сумма всех отклонений выборки равно нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\left[X_i-\overline{X}_b\right]=\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_b=n\overline{X}_b-n\overline{X}_b=0$$

3. *Дисперсия выборки.*

Дисперсией выборки называется среднее квадрата отклонений и обозначим D_b.

$$D_b = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_b\right)^2$$

Это можно написать так:

$$D_b = \overline{X}^2 - \overline{X}_b^2,$$

где: $\overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Решение: Найдем генеральную среднюю $\overline{x}_Г = \frac{8 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 10}{20} = 5$

Найдем генеральную дисперсию

$$D_Г = \frac{4 \cdot (8-5)^2 + 6(3-5)^2 + 10(5-5)^2}{4+6+10} = \frac{36+24+0}{20} = \frac{60}{20} = 3$$

.