Xətti cəbr.

1. $\overline{a}=(2;3;1)$ $\overline{b}=(5;7;0)$ $\overline{c}=(3;-2;4)$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini göstərin və $\overline{d}=(4;12;-3)$ vektorunu bu vektorlar üzrə xətti kombinasiyaya ayırın.

Həlli.

Xətti asılılığın tərifinə görə $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ bərabərliyi $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ olduqda ödənərsə onda $\overline{a},\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

Verilənləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=0\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases}$$ tənliklər sistemini alarıq.

Ücüncü tənlikdən $\lambda_1=-4\lambda_3$ əvəzləməsini digər iki tənlikdə nəzərə alsaq

$$\begin{cases}-8\lambda_3+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\-12\lambda_3+7\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$ olar. Buradan $$\begin{cases}5\lambda_2-5\lambda_3=0\\7\lambda_2-14\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

tərəf-tərəfə çıxcaq $\lambda_3=0$ alarıq. Deməli $\lambda_3=0$ olduğunu digər tənliklərdə nəzərə alsaq $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ alarıq.

Deməli bu vektorlar bazis əmələ gətirir.

$\overline{d}$ vektorun $\overline{a},\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorları üzrə xətti kombinasiyasını tapmaq üçün

$\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{d}$ tənliyini həll etməliyik.

Verilənləri nəzərə alsaq $$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=4\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=12\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\end{cases}$$ alarıq.

Axırıncı tənliyi olduğu kimi saxlayıb -2 –yə vurub 1-ci tənliklə, -3-ə vurub 2-ci tənliklə toplayaq. $$\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\5\lambda_2-5\lambda_3=10\\7\lambda_2-14\lambda_3=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\\lambda_2-\lambda_3=2\\\lambda_2-2\lambda_3=3\end{cases}$$

İkinci və ücüncü tənlikləri tərəf-tərəf cıxsaq $\lambda_3=-1$ alarıq.

Bu qiyməti 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq $\lambda_2+1=2\Rightarrow\lambda_2=1$ olar. $\lambda_3=-1$ olduğunu $\lambda_1+4\lambda_3=-3$ tənliyində nəzərə alsaq $\lambda_1=1$ alarıq.

Deməli yeni koordinatlar $\overline{d}(1;1;-1)$ olar. Yəni $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ xətti kombinasiya alınar.

2. $\bar{a}=(2;-2)$ və $\bar{b}=(2;-1)$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini göstərin. $\bar{c}=(2;4)$ olarsa, $p=2\bar{a}-\bar{b}+\bar{c}$ vektorunu $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları üzrə ayrılışını tapın.

Həlli.

$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini yoxlamaq üçün $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=0$ bərabərliyindən $\begin{cases} 2\lambda_1+2\lambda_2=0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2=0 \end{cases}$ sistemini alarıq.

Tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1=0$ alarıq. Yerinə yazsaq $\lambda_1=0$ olar.

Deməli, tərifə görə $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

$\bar{P}$ vektorunun koordinatlarını tapaq.

$$\bar{P}=2(2;-2)-(2;-1)+(2;4)=(4;-4)-(2;-1)+(2;4)=(4;1)$$

Xətti ayrılış üçün $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=\bar{p}$ şərti ödənməlidir.

$\begin{cases} 2\lambda_1+2\lambda_2=4 \\ -2\lambda_1-\lambda_2=1 \end{cases}$ sistemində tənlikləri tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_2=5$ alarıq. Digər tənlikdə yerinə yazsaq $2\lambda_1+2\cdot 5=4 \Rightarrow 2\lambda_1=-6 \Rightarrow \lambda_1=-3$ alarıq.

Deməli, $\bar{p}=-3\bar{a}+5\bar{b}$ alınar.

3. R^n- də xətti asılı olan vektorlar haqqında teorem və isbatı.

Həlli.

Teorem 1. $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmazsa birinin yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilməsidir.

Zərurilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ vektorları xətti asılıdır. Yəni, (2) bərabərliyi $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ ədədlərinin biri (məsələn, λ_m) sıfırdan fərqli olduqda doğrudur. Onda (2) bərabərliyinin hər tərəfini λ_m–ə bölsək $\vec{a}_m$ vektorunu digərləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$\vec{a}_m=\frac{-\lambda_1}{\lambda_m}\vec{a}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_m}\vec{a}_2-...-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\vec{a}_{m-1}. \qquad (4)$$

Burada, $\alpha_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$ $(i=\overline{1,m-1})$ kimi işarə etsək, onda (4) bərabərliyini

$$\vec{a}_m=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} \qquad (5)$$

şəklində yaza bilərik. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_m$ vektoru $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_{m-1}$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilir.

Kafilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_m$ vektorlarından biri (məsələn, $\vec{a}_m$) yerdə qalanlarının xətti kombinasiyasıdır. Yəni, (5) bərabərliyi doğrudur. Onda (5) bərabərliyini

$$\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1}+(-1)\vec{a}_m=\vec{0} \qquad (6)$$

kimi yazsaq, $\alpha_m = -1 \neq 0$ olduğundan tərifə əsasən $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olduğunu alırıq.

Qeyd edək ki, əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının heç olmazsa biri sıfır vektordursa, onda bu vektorlar xətti asılıdır. Doğrudan da fərz etsək ki, $\vec{a}_m = \vec{0}$. Onda $\lambda_m = 1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{m-1} = 0,$ götürsək, (2) bərabərliyi ödənir.

Yoxlamaq olar ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının bir neçəsi xətti asılıdırsa, onda bu vektorların hamısı xətti asılıdır.

4. Əgər $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarsa, $2A^2 - 5X + 3E = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$ tənliyindən $X = ?$

Həlli.

X-*i* tapmaq üçün A^2-ni tapaq. Bilirik ki, matrisi qüvvətə yüksəltmək üçün özünü-özünə vurmaq lazımdır.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 + 4\cdot 1 & 2\cdot 4 + 4\cdot 0 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 & 1\cdot 4 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisin və $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisini əsas tənlikdə yerinə yazaq.

$$2\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - 5X + 3\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow 5X$$

$$5X = \begin{pmatrix} 16 & 16 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow 5X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Buradan $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alarıq.

5. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ matrisindən simmetrik matris düzəldin.

Həlli.

Simmetrik matris düzəltmək üçün $S' = \left(A + A^T\right)$ düsturundan istifadə edilməlidir.

$$S' = \left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ -5 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & -5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 4 \\ -3 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Göründüyü kimi alınan matris

$$S' = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 4 \\ -3 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \text{ simmetrikdir.}$$

Çünki $a_{ij} = a_{ji}$ şərti ödənilir.

6. Əgər $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ olarsa,

$D = (AB)^T - C^2$-nı tapın.

Həlli.

Əvvəlcə $A \cdot B$ -ni tapaq.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 2\cdot 0 & 3\cdot 0 + 4\cdot 3 + 2\cdot 5 \\ 1\cdot 2 + 0\cdot 1 + 5\cdot 0 & 1\cdot 0 + 0\cdot 3 + 5\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 22 \\ 2 & 25 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 22 & 25 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+3\cdot0 & 1\cdot3+3\cdot4 \\ 0\cdot1+4\cdot0 & 0\cdot3+4\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \quad (2)$$

(1) və (2) –ni $D = (AB)^T - C^2$ bərabərliyində nəzərə alsaq

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 22 & 25 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix} \text{ alarıq.}$$

Deməli, $D = \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ 22 & 9 \end{pmatrix}$ olar.

7. Determinant anlayışı. Minor və cəbri tamamlayıcı. Determinantın əsas xassələri.

Həlli.

n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin a_{ij} elementinin yerləşdiyi i-ci sətri və j-ci sütunu şərti olaraq sildikdən sonra qalan elementlərin əmələ gətirdiyi $n-1$ tərtibli kvadrat matrisin determinantını M_{ij} ilə işarə edək. M_{ij} –yə a_{ij} elementinin minoru deyilir. Bu halda

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \quad (7)$$

cəminə n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin determinantı deyilir.

Xassə 1. Determinantın bütün sətirlərinin onun uyğun nömrəli sütunları ilə yerini dəyişdikdə determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Xassə 2. Hər hansı determinantın ixtiyari iki sətrinin (sütununun) yerini dəyişsək, onda determinantın yalnız işarəsi dəyişər. Yəni, məsələn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Xassə 3. İki sətri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 4. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vurğu olarsa, həmin vurğu determinantın işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Yəni

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & k\,a_{12} \ldots ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Xassə 4 onu göstərir ki, $k \cdot detA_{nxn}$ hasilini tapmaq üçün $detA_{nxn}$ –nin hər hansı bir sətirinin (sütununun) elementlərini həmin k ədədinə vurmaq lazımdır.

Xassə 5. Determinantın iki sətrinin (sütunun) elementləri mütənasibdirlərsə, həmin determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 6. Determinantın hər hansı sətrinin (sütunun) bütün elementləri sıfırdırsa, onda determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 7. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri iki toplananın cəmi şəklindədirsə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabərdir: 1-ci determinantda həmin sətir (sütun) elementi olaraq 1-ci toplanan, 2-ci determinantda isə həmin sətir (sütun) elementləri olaraq 2-ci toplanan götürülür. Yəni, məsələn 1-ci sətir elementləri üçün

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\dots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots\dots\dots\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots\dots\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\dots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_2} \qquad (5)$$

olur.

Xassə 8. Determinantın hər hansı sətrinin (sütununun) bütün elementlərini bir ədədə vurub digər bir sətrinin (sütununun) uyğun elementlərinin üzərinə əlavə etsək determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,məsələn,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2}\dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & ka_{12}+ka_{22}\dots a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} \quad \dots \quad a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \quad \dots \quad a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Xassə 9. Determinantın hər hansı sətir (sütun) elementlərinin, digər sətirin (sütunun) uyğun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi sıfra bərabərdir.

Yəni, məsələn

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + \dots + a_{1n}A_{2n} = 0. \qquad (7)$$

8. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ olduğunu göstərin (ikitərtibli hal üçün).

Həlli.

A və B eyni tərtibli kvadrat matrislər, $\Delta(A)$, $\Delta(B)$ isə həmin matrislərin uyğun determinantları olduqda aşağıdakı teorem doğrudur.

Teorem. A və B kvadrat matrislərinin hasilinin determinantı onların determinantlarının hasilinə bərabərdir. Yəni,

$$\Delta(A \cdot B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B). \qquad (1)$$

Sadəlik üçün iki tərtibli kvadrat matrisin hasili üçün teoremi isbat edək. Tutaq ki,

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ və } B_{2x2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}. \text{ Buradan}$$

$$A_{2x2} \cdot B_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \text{ alırıq.}$$

Onda

$$\Delta(A_{2x2} \cdot B_{2x2}) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{12} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix}}_{0} + b_{11} \cdot b_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + b_{21} \cdot b_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} + b_{21} \cdot b_{22} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix}}_{0} =$$

$$= (b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta(A_{2x2}) \cdot \Delta(B_{2x2}).$$

Qeyd edək ki, eyni tərtibli A və B kvadrat matrisləri üçün

$$\Delta(A\cdot B)=\Delta(B\cdot A)=\Delta(A)\cdot\Delta(B) \qquad (2)$$

olur. (2) münasibətində $A\cdot B$ hasili $B\cdot A$ hasilinə bərabər olmaya da bilər.

9. $\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}$ determinantın uyğun xassəsini yazın və həmin xassəyə əsasən hesablayın.

Həlli.

Əgər determinantın hər hansı sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə onu iki determinantın cəmi kimi yaza bilərik.

$$\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+2a+1 \\ b & b^2 & b^2+2b+1 \\ c & c^2 & c^2+2c+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a+1 \\ b & 1 & b^2+2b+1 \\ c & 1 & c^2+2c+1 \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 \\ b & b^2 & b^2 \\ c & c^2 & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a+1 \\ b & b^2 & 2b+1 \\ c & c^2 & 2c+1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a \\ b & 1 & b^2+2b \\ c & 1 & c^2+2c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Əgər determinantın iki sütunu eyni və ya mütənasibdirsə, o determinant sıfra bərabərdir. Onda I toplanan və axırıncı toplanan sıfra bərabər olar. Digər determinantları da ayırsaq

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a \\ b & b^2 & 2b \\ c & c^2 & 2c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ b & 1 & 2b \\ c & 1 & 2c \end{vmatrix}=$$

$$=0+\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix}+0=$$

alarıq.

Buradan

$=ab^2+bc^2+ca^2-cb^2-ac^2-ba^2-\left(ab^2+bc^2+ca^2-cb^2-ac^2-ba^2\right)=0$ alarıq.

10. $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(x)=x^2-3x+2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A)=?$

Həlli.

$$f(A)=A^2-3A+2E=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&2&1\\3&-3&2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0&-3-6+0&0-3+0\\0+0+3&0+4-3&0+2+2\\3+0+6&-9-6-6&0-3+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-9&0\\0&6&3\\9&-9&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&-9&-3\\3&1&4\\9&-21&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&-9&0\\0&6&3\\9&-9&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-3\\3&-3&1\\0&-12&-3\end{pmatrix}$$

11. $A=\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}$ olarsa, $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A)=?$

Həlli.

$f(A)=4A^3-2A^2+3A-2E$ şəkildə yaza bilərik.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3&-6\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&3\\1&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7&-6\\-2&3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-14-6&21+0\\4+3&-6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&-12\\-4&6\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80&84\\28&-24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14&-12\\-4&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6&9\\3&0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102&105\\35&-32\end{pmatrix}$$

12. $A=\begin{pmatrix}1&-2&1&-1\\2&1&-1&2\\3&-2&-1&1\\ \end{pmatrix}$ matrisinin ranqını tapın və bazis minorlarından birini yazın.

Həlli.

Bilirik ki, matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək minorunun tərtibinə ranq deyilir. Ranqı tapmaq üçün haşiyələyən minorlar üsulundan istifadə edək.

$$M_2=\begin{vmatrix}1&-2\\2&1\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0\quad M_3=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-1\\3&-2&-1\end{vmatrix}=-1-4+6-3-2-4=8\neq 0$$

olduğuna görə bu matrisin ranqı $r(A)=3$ olar. Onda

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$ olduğundan həm də bazis minoru olacaqdır.

13. Matrisin ranqı və onun tapılması üsulları.

Həlli.

mxn ölçülü A_{mxn} düzbucaqlı matrisində $k\le min\{m,n\}$ şərtini ödəyən ixtiyari k sayda sətir və k sayda sütunların kəsişməsində duran elementlərdən düzəldilmiş k tərtibli A_{kxk} kvadrat matrisin determinantına k tərtibli minor deyilir və M_k ilə işarə olunur. $M_k=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\dots a_{1k}\\ a_{21} & a_{22}\dots a_{2k}\\ \dots\dots\dots\dots & \\ a_{k1} & a_{k2}\dots a_{kk}\end{vmatrix}$ kimidir.

Matrislərin ranqı üçün aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu yoxlamaq olar.

1) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$; 2) $r(A+B)\ge |r(A)-r(B)|$;

3) $r(AB)\le min\{r(A),r(B)\}$; 4) $r(A^TA)=r(A)$;

5) $r(AB)=r(A)$ əgər $detB\neq 0$ olarsa;

6) $r(AB)\ge r(A)+r(B)-n$, burada n, A matrisinin sütunlarının sayını və ya B matrisinin sətirləri sayını göstərir.

ranqın tapılması üsullar haşiyələyən minorlar və elementar çevirmələr üsuludur.

1) Haşiyələyən minorlar üsulu.

A_{mxn} matrisinin ranqını tapmaq üçün hesablamanı, onun aşağı tərtibli minorlarından başlayıb yuxarı tərtibli minorlara keçmək və bu prosesdə sıfırdan fərqli r tərtibli M_r minoruna rast gəldikdən sonra, M_r minorunu haşiyələyən (öz daxilində saxlayan) (r+1) – tərtibli minorları hesablamaq lazımdır. Əgər M_r –i $(M_r\neq 0)$ haşiyələyən (r+1) – tərtibli minorların hamısı sıfırdırsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r -dir. Yəni, $r(A_{mxn})=r$. Əgər (r+1) – tərtibli haşiyələyən minorlardan biri, məsələn, M_{r+1} sıfırdan fərqli olarsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r-dən böyük olmalıdır. Bu prosesi M_{r+1}-i haşiyələyən (r+2) – tərtibli minorları hesablamaqla davam etdirsək və M_{r+1}-i $(M_{r+1})\neq 0$ haşiyələyən bütün (r+2) – tərtibli minorlar sıfıra bərabərdirsə onda A_{mxn} matrisinin ranqı r+1-ə bərabərdir və s.

2) Elementar çevirmələr üsulu.

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Matrisin üzərində aparılan elementar çevirmələr onun ranqını dəyişmir.

Qeyd edək ki, ranqları bərabər olan matrislərə ekvivalent matrislər deyilir və $r(A)=r(B)\Leftrightarrow A\sim B$ kimi işarə olunur. Deməli, elementar çevirmələrdən sonra alınan matris, verilmiş matrisə bərabər deyildir.

Teorem (bazis minorlar haqqında teorem). Matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyildir. Matrisin ixtiyari sətri (ixtiyari sütunu) onun bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər.

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini elementar çevirmələrlə tapın və $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ olduğunu yoxlayın.

Həlli.

Bilirik ki, $Q = (A/E)$ kimi bir qoşma matrisi düzəldilir. Onu elementar çevirmələrlə E/A şəklinə gətirilir.

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, birinci sətri ikinci ilə toplayıb ikinci sütunda yazdıq, birinci ilə üçüncü sətri toplayıb üçüncü sətirdə yazdıq. Daha sonra birinci sətirlə ikinci sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Sonra birinci sətirlə üçüncü sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Nəticədə A matrisinin tərsini elementar çevirmələr yoli ilə tapmış olduq.

15. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ və $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(A)$ matrisini tapın.

Həlli.

$$f(x) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$3\begin{pmatrix} 1-4+9 & -2+8-15 & 3-2+6 \\ 2-8+3 & -4+16-5 & 6-4+2 \\ 3-10+6 & -6+20-10 & 9-5+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ -3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 18 & -27 & 21 \\ -9 & 21 & 12 \\ -3 & 12 & 24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 24 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$$

16. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ olduqda, A^{-2}-nı tapın və $A^2\cdot A^{-2}=A^{-2}\cdot A^2=E$ olduğunu yoxlayın.

Həlli.

Bilirik ki, A^{-2}-ni tapmaq üçün -i $A^{-2}=A^{-1}A^{-1}$ hesablamaq lazımdır. A^{-1}-matrisin tərsini tapmaq üçün $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.Bu düsturu verilmiş misalla tətbiq edək.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0+2-2+4-0-12=-8 \quad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=12-1=11,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(-4-2)=6, \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(4-2)=-2, \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0-4=-4$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(0-2)=2, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(0+2)=-2, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=0+1=1$$

Deməli $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}$ olur.

$A^{-2}=A^{-1}\cdot A^{-1}$ olduğundan

$$A^{-2}=\left(-\frac{1}{8}\right)^2\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}121\ -12\ +35 & -22\ +8\ -10 & -55\ +4\ -5\\ 66\ -24\ +14 & -12\ +16\ -4 & -30\ +8\ -2\\ -77\ +12\ -7 & 14\ -8\ +2 & 35\ -4\ +1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}144 & -24 & -56\\ 56 & 0 & -24\\ -72 & 8 & 32\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}18 & -3 & -7\\ 7 & 0 & -3\\ -9 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

$A^2A^{-2}=E$ olduğunu göstərək

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&3&1\\2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&9\\-1&9&5\\7&9&21\end{pmatrix}$$

$$A^2A^{-2}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3&5&9\\-1&9&5\\7&9&21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18&-3&-7\\7&0&-3\\-9&1&4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}54\ +35\ -81&-9\ +0\ +9&-21-15+36\\-18\ +63\ -45&3\ +0\ +5&7-27+20\\126\ +63\ -189&-21\ +0\ +21&-49-27+84\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8&0&0\\0&8&0\\0&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E$$

17. Xətti tənliklər sisteminin həlli üçün Qauss üsulu.

Həlli.

Tutaq ki, n-məchullu s sayda xətti tənliklər sistemi verilmişdir:

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s\end{array}\right\}$$

Xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün istifadə edilən üsulıardan biri Qauss üsuludur. Bu üsul praktiki cəhətdən ən əlverişli üsuldur. Qauss üsulu "məchulları ardıcıl yoxetmə" üsulu da adlanır. Məchulları ardıcıl yox etmək üçün sistemdəki tənliklər üzərində elementar çevirmələr aparılır. Elementar çevirmə dedikdə aşağıdakılar nəzərdə tutulur:

1. Tənliklərin yerini dəyişmək;
2. Tənliklərdən hər hansı birinin hər iki tərəfini sıfırdan fərqli ədədə vurmaq;
3. Tənliklərdən birinin hər iki tərəfini eyni ədədə vurub digər tənliyin üzərinəəlavə etmək.

Qauss üsulunun mahiyyəti aşağıdakından ibarətdir.

I addım olaraq sistemin I tənliyindən başqa qalan tənliklərin hamısından x_1 məchulu yox edilir. Bu tənlik "aparıcı tənlik" adlanır. Bunun üçün I tənliyi $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ ədədinə vurub II tənliyin, $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ ədədinə vurub III tənliyin və s., nəhayət, $-\frac{a_{s1}}{a_{11}}$ ədədinə vurub s-ci tənliyin üzərinəəlavə etdikdə, II-dən başlayaraq sonrakı tənliklərdən x_1 məchulu yox olur.

$$\left.\begin{array}{l}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\\qquad\quad a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\qquad\quad a'_{s2}x_2+\cdots+a'_{sn}x_n=b'_s\end{array}\right\}$$

İİ addım olaraq sistemin II tənliyindən başqa qalan tənliklərin hamısından x_2 məchulu yox edilir. Növbəti addımda x_3, x_4 ,… məchulları yox edilir. Sonuncu addımda sistemdəki tənliklərin və məchulların sayından asılı olaraq ya üçbucaqşəkilli ya da trapesiyaşəkilli sistem alınır. Əgər sistemdəki tənliklərin sayı ilə məchulların sayı eynidirsə alınan sistem üçbucaqşəkilli, sistemdəki tənliklərin sayı məchulların sayından azdırsa trapesiyaşəkilli sistem alınır.

Aydındır ki, üçbucaqşəkilli sistemdə axırıncı tənlik bir məchulludur. O, asanlıqla həll edilir, tapılan məchul özündən əvvəlki iki məchullu tənlikdə nəzərə alınır. Bu qayda ilə bütün məchullar tapılmış olur.

Əgər sistem trapesiyaşəkillidirsə, onda bu sistem qeyri-müəyyəndir. Belə ki, tənliklərin sayı qədər məchul əsas götürülür, qalan qeyri-əsas məchullar onlardan asılı olaraq tapılır.

18. Bircins xətti tənliklər sistemi.

Həlli.

Məlumdur ki, n məchullu s sayda xətti tənliklər sistemi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{array}\right\}$$

kimi yazılır. Sistemdəki sərbəst hədlərin hamısı sıfır olarsa:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = 0 \end{array}\right\}$$

belə sistemə bircins xətti tənliklər sistemi deyilir.

Göründüyü kimi, bu sistem həmişə uyuşandır, çünki bunun həmişə

$x_1=0, x_2=0,\dots, x_n=0$

kimi həlli var. Buna sistemin sıfır həlli və ya trivial həlli deyilir.

İsbat edilir ki, əgər xətti tənliklər sistemində tənliklərin sayı məchulların sayından az olarsa, onda bu sistemin sıfır həllindən əlavə sonsuz həlli vardır.

Bu sistemin əsas matrisini yazaq:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

Matrisin ranqını r(A) ilə işarə edək.

TEOREM.

Bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin olmasıüçün sistemin əsas matrisinin ranqının sistemdəki məchulların sayından kiçik olması zəruri və kafi şərtdir:

$r(A) < n$.

Xüsusi halda s = n olarsa, kvadrat şəkilli xətti bircins tənliklər sistemi alınır. Belə sistemin sıfırdan fərqli həllinin olmasışərti aşağıdakı teoremlə ifadə edilir.
TEOREM.

n-məchullu *n* tənlikdən ibarət olan xətti bircins tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllərinin olmasıüçün onun determinantının sıfra bərabər olması zəruri və kafi şərtdir.

Bircins sistemin hər bir həlli $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ... , $x_n = c_n$ sətir-vektor kimi yazılır:
$c = c(c_1 , c_2 , \dots , c_n)$
Xətti bircins tənliklər sisteminin həllərinin aşağıdakı xassələri var:

1. Əgər $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ və $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ vektorları bircins sistemin həlləridirsə, $\alpha+\beta = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$ vektoru da həmin sistemin həllidir.
2. Əgər $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ vektoru bircins sistemin həllidirsə,

$\lambda\alpha = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n)$ vektoru da həmin sistemin həllidir, burada
λ- istənilən ədəddir.
Deməli, bircins xətti tənliklər sisteminin həllərinin istənilən xətti kombinasiyası da bu sistemin həllidir.
Bircins sistemin istənilən həlli, həmin sistemin xətti asılı olmayan həllər sisteminin xətti kombinasiyası olduqda ona fundamental həllər sistemi deyilir.

19. *n* məchullu *m* sayda xətti tənliklər sisteminin uyuşan olması haqqında Kroneker-Kapelli teoremi.

Həlli.
n məchullu *m* xətti tənlik sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \qquad (1)$$

(1) xətti tənliklər sistemini həll etməzdən qabaq onun həllinin olub-olmadığını müəyyən etmək lazım gəlir.

Qeyd edək ki, $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$ (2) verilən sistemin əsas matrisi,

$$A^*_{mx(n+1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & b_2 \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$ (3) verilən sistemin genişlənmiş matrisi

adlanır.

(1) sisteminin birgə (uyuşan) olub-olmamasını müəy-yənləşdirmək üçün aşağıdakı teorem mühüm rol oynayır.

Teorem (Kroneker–Kapelli). Verilmiş (1) xətti tənliklər sisteminin birgə (uyuşan) olması üçün zəruri və kafi şərt sistemin əsas matrisinin ranqının onun genişlənmiş matrisinin ranqına bərabər olmasıdır, yəni, $r(A)=r(A^*)$ olmasıdır.

20. Xətti çevirmənin matrisi. Xətti çevirmənin məsusi ədədi və məxsusi vektoru.
Həlli.
Tutaq ki, n-ölçülü R^n xətti fəzasında $e_1,e_2,...,e_n$ bazis vektorları və A xətti çevirməsi verilmişdir. Onda bu fəzadan götürülmüş $\vec{X}\in R^n$ vektorunun bazis vektorları üzrə yeganə qayda ilə

$$\vec{X}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+...+x_n\vec{e}_n \qquad (1)$$

şəklində ayrılışını yaza bilərik. A xətti çevirmə olduğu üçün bu ayrılışı $\vec{Y}=A(\vec{X})$ bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$\vec{Y}=A(\vec{X})=x_1A(\vec{e}_1)+x_2A(\vec{e}_2)+...+x_nA(\vec{e}_n) \qquad (2)$$

alarıq. Digər tərəfdən $A(\vec{e}_i)$ $(i=\overline{1;n})$ vektorları da R^n fəzasının elementləri olduğundan onların da $e_1,e_2,...,e_n$ bazis vektorları üzrə ayrılışını yazmaq olar.

$$\begin{cases} A\vec{e}_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+...+a_{n1}\vec{e}_n \\ A\vec{e}_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+...+a_{n2}\vec{e}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A\vec{e}_n=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+...+a_{nn}\vec{e}_n \end{cases}$$

(3) Bu ayrılışları (2) münasibətində nəzərə alsaq,

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n \end{cases}$$

(4) alarıq. (4) bərabərliyinin əmsallarından düzəldilmiş

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

kvadrat matrisinə $e_1,e_2,...,e_n$ bazisində A xətti çevirməsinin matrisi deyilir. Burada, $X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$-dir.

Bu çevirməni qısa olaraq $Y_{n\times 1}=A_{n\times n}X_{n\times 1}$ kimi yazmaq olar.
Tutaq ki, A operatoru R^n-dən R^n-ə təsir edən xətti çevirmədir.
Tərif. R^n-dən götürülmüş sıfırdan fərqli hər hansı X vektoru üçün

$$AX=\lambda X \quad (0\neq X\in R^n) \qquad (5)$$

bərabərliyini ödəyən λ ədədinə A operatorunun məxsusi ədədi, ona uyğun tapılan X vektoruna isə məxsusi vektor deyilir.
Bəzən məxsusi ədəd əvəzinə məxsusi qiymət də işlədilir.

(5) bərabərliyini açıq şəkildə yazsaq

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \quad (6)$$

şəklində bircins xətti tənliklər sistemi alarıq. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt onun məchullarının əmsallarından düzəldilmiş determinantın sıfra bərabər olmasıdır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

(7) bərabərliyini qısa olaraq $|A - \lambda E| = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyin sol tərəfi həm də λ-dan asılı n-dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədliyə xarakteristik çoxhədli deyilir. Xarakteristik çoxhədlinin kökləri A xətti çevirməsinin məxsusi ədədləridir.

(7) xarakteristik tənliyini həll edərək $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ məxsusi ədədlərini tapırıq və bu məxsusi ədədləri ayrı-ayrılıqda (6) bircins xətti tənliklər sistemində yerinə yazaraq sıfırdan fərqli X həllini (vektorunu) tapırıq. Həmin bu X vektoru uyğun məxsusi vektor olacaqdır.

21. n-məchullu n xətti tənliklər sistemi. Kramer düsturları.

Həlli.

Xətti tənliklər sistemində xüsusi halda $n = m$ olduqda alınan

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

sisteminə kvadrat şəkilli xətti tənliklər sistemi deyilir. Dəyişənin əmsallarından və sərbəst hədlərdən aşağıdakı kimi determinantlar düzəldək:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Bu determinantlardan asılı olaraq aşağıdakı hallar ola bilər:

1) Əgər, bu sistemin əsas matrisinin determinantı sıfırdan fərqlidirsə, yəni $\det A = |A| \neq 0$ onda bu sistemin yeganə həlli var və bu həll

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

düsturları ilə tapılır. Burada $\Delta_i \left(i=\overline{1;n}\right)$ n-tərtibli determinantı əsas matrisin determinantında uyğun i-ci sütunun sərbəst hədlər sütunu ilə əvəz edilməsindən alınır.

2) Əgər $\Delta = 0$ olarsa və Δ_i-dən heç olmazsa biri $\Delta_i \neq 0 \left(i=\overline{1;n}\right)$ sıfırdan fərqli olarsa, onda (1) sistemi uyuşan sistem deyildir.

3) Əgər $\Delta = 0$ və $\Delta_i = 0$ olarsa, onda (1) sistemi uyuşan ola da bilər olmaya da bilər.

(1) sisteminin həlli üçün Kroneker-Kapelli teoremindən aşağıdakı nəticələr alınır.

Əgər (1) xətti tənliklər sistemi uyuşandırsa, onda aşağıdakı nəticələr doğrudur:

1. Əgər $r(A) = n$, yəni, sistemin əsas matrisinin ranqı dəyişənlərin sayına bərabər olarsa, sistemin əsas matrisinin determinantı $|A| \neq 0$ olur. Bu halda sistem müəyyən sistemdir, yəni sistemin yeganə həlli var.

2. Əgər $r(A) < n$ olarsa, onda sistem qeyri-müəyyəndir. Yəni, sistemin sonsuz sayda həlli var.

22. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$ xətti tənliklər sisteminin uyuşan olub olmadığını (Kroneker-Kapelli teoremi vasitəsilə) yoxlayın, sistemin ümumi və xüsusi həllini tapın.

Həlli.

Bilirik ki, əsas matris dəyişənlərin əmsallarından düzəldilir.

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ genişləndirilmiş matris isə

$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ olar.

Kroneker –Kapelli teoreminə görə sistemin həllinin varlığı üçün $r(A) = r(A^*)$ olmalıdır.

Əvvəlcə $r(A)$ -nı tapaq.

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0$; $M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 2 + 4 - 6 - 3 - 12 = 12 \neq 0$ olduğundan $r(A) = 3$ olur.

İndi isə A^*-un ranqını tapaq.

Bunun üçün

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 7 & 5 & 0 & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 4 \\ 6 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 24 + 168 - 120 - 24 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow r(A^*) = 3$

Deməli $r(A) = r(A^*) = 3$ olduğundan sistem uyuşandır.

23. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + \quad x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$ xətti tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edin.

Həlli.

Birinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək. Digər dəyişənləri toplama üsulu ilə "yox" edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

Indi isə ikinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək və toplama üsulu ilə digər dəyişənləri ardıcıl yox edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ 12x_3 - 6x_4 = 36 \quad |5 \\ 18x_3 - 10x_4 = 56 \quad |-3 \end{cases} \Rightarrow \quad 60x_3 - 54x_3 - 30x_4 + 30x_4 = 180 - 168$$

$$6x_3 = 12$$

$$x_3 = 2$$

$x_3 = 2$ qiymətini $12x_3 - 6x_4 = 36$ tənliyində yerinə yazsaq

$24 - 6x_4 = 36$

$6x_4 = -12$

$x_4 = -2$

$2x_2 - 4 - 12 = -14$

$2x_2 = 2$

$x_2 = 1$

$x_1 + 2 - 6 - 8 = -13$

$x_1 = -1$

Deməli, tənliyin ümumi və xüsusi həlləri eynidir.

$\{-1;1;2;-2\}$ olur.

24. a-nın hansı qiymətində $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ xətti tənliklər sisteminin həlli sonsuz saydadır? Bu həlli tapın.

Həlli.
Bilirik ki, bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas matrisin determinantı sıfra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 12a + 7 + 3 - 14a - 8 = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

olarsa, sistemin sonsuz sayda həlli var.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

üçüncü tənliyi aparıcı tənlik kimi saxlayaq.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3x_2 \text{ alarıq.}$$

$x_2 = C \in R$ qəbul etsək~

$x_3 = 3C$ və $\begin{matrix} x_1 - C + 6C = 0 \\ x_1 = -5C \end{matrix}$ alarıq.

Onda sistemin ümumi həlli $\{-5C; C; 3C\}$ olar.

25. $AX = (x_1 + x_2 + 8x_2; 2x_2; x_1 - x_3)$ xətti çevirməsinin matrisini və məxsusi ədədlərinin cəmini tapın.

Həlli.
$Ax = (x_1 + x_2 + 8x_3; 2x_2; x_1 - x_3\ )$ Bu çevirmənin matrisi əmsalardan düzəldilir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Məxsusi ədədi tapmaq üçün

$|A - \lambda E| = 0$ tənliyini həll etmək lazımdır.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 8(2-\lambda)0 - 0 = 0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - 8) = 0$$

$$-\left(1-\lambda^2\right)-8=0$$

$$\lambda_1=2, \quad \lambda^2=9$$

$$\lambda_2=3$$

$$\lambda_3=-3$$

Onların cəmi $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(-3)=2$ olar

26. $\begin{cases} x'=x+3y \\ y'=2y-z \\ z'=z-x \end{cases}$ (A) və $\begin{cases} x'=y-z \\ y'=2x+z \\ z'=-x-y \end{cases}$ (B) çevirmələri üşün $AB-BA$ çevirməsini tapın.

Həlli.

Verilən çevirmələrin əmsallarından A və B matrislərini düzəldək

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Onda AB-BA çevirməsi $\begin{cases} x''=5x-y+4z \\ y''=3x-6y+z \\ z''=3y \end{cases}$

27. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin məxsusi ədədlərinin nisbətini və məxsusi vektorlarını tapın.

Həlli. $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$ bərabərliyinə əsasən verilmiş matrisin xarakteristik tənliyini

$$|A-E\lambda|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-20=\lambda^2-5\lambda-14=0$$

şəklində yaza bilərik. Bu xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_1=-2$ və $\lambda_2=7$ olar.
$\lambda_1=-2$ olduqda tənliyinə görə

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3+2)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2+2)x_2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2=0\\ 5x_1+4x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4c_1\\ x_2=5c_1\end{cases}\quad(0\neq c_1\in R).$$

Deməli, $\lambda_1=-2$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru $X=\{-4c_1;5c_1\}$ şəklindədir. $c_1\in R$ olduğundan istənilən qiymətlər verməklə verilən çevirmənin məxsusi vektorlarını tapa bilərik.
Eyni qayda ilə $\lambda_2=7$ olduqda uyğun bircins tənlik

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3-7)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-7)x_2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-4x_1+4x_2=0\\ 5x_1-5x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=c_2\neq 0; c_2\in R.$$

Deməli, $\lambda_2=7$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor $X=\{c_2;\ c_2\}$ kimidir.

28. Qaus üsulu ilə sistemi həll etməli:

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12\\ 3x_1-5x_2+7x_3-x_4=0\\ 5x_1-7x_2+x_3-3x_4=4\\ 7x_1-x_2+3x_3-5x_4=16\end{cases}$$

Həlli.

Həlli. Sistemdə birinci tənliyi aparıcı tənlik x_1 məchulunu aparıcı məchul kimi qəbul edək və 3-ə vurub ikincidən, 5-ə vurub üçüncüdən, 7-ə vurub dördüncüdən çıxaq. Onda

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12\\ 3x_1-5x_2+7x_3-x_4=0\\ 5x_1-7x_2+x_3-3x_4=4\\ 7x_1-x_2+3x_3-5x_4=16\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12\\ 4x_2-8x_3+20x_4=-36\\ 8x_2-24x_3+32x_4=-56\\ 20x_2-32x_3+44x_4=-68\end{cases}$$

alarıq. Alınmış tənliklər ixtisar olunan əmsalları ixtisar etdikdən sonra ikinci tənliyi aparıcı tənlik və x_2 məchulunu aparıcı məchul kimi qəbul edək. Daha sonra alınmış sistemdə ikincidən üçüncünü, ikinci tənliyi 5-ə vurub dördüncünü çıxaq. Onda,

$$\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12\\ x_2-2x_3+5x_4=-9\\ x_2-3x_3+4x_4=-7\\ 5x_2-8x_3+11x_4=-17\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3-7x_4=12\\ x_2-2x_3+5x_4=-9\\ x_3+x_4=-2\\ 2x_3-14x_4=28\end{cases}$$

alarıq. Yenidən üçüncü tənliyi aparıcı tənlik x_3 məchulunu isə aparıcı məchul kimi qəbul edib üçüncü tənliyi 2-ə ixtisar etdikdən sonra üçüncü tənlikdən dördüncü tənliyi çıxaq. Daha sonra isə məchulları ardıcıl olaraq tapa bilərik. Onda

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_3 - 7x_4 = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ 8x_4 = -16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ x_3 + x_4 = -2 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ x_3 + (-2) = -2 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -9 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 12 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -2 \end{cases}$$ alarıq.

29. Tənliklər sisteminin həllini tapın.

$$\left.\begin{aligned} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + 4z = 2 \end{aligned}\right\}$$

Həlli.

Sistemin əsas determinantını hesablayaq. Deteminantın xassəsinəəsasən, determinantın iki sətri və ya iki sütunu mütənasibdirsə onun qiyməti sıfra bərabərdir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Siatemin əsas matrisini: A və genişlənmiş matrislni: B yazaq:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 21 \\ 2 & 2 & 42 \end{Vmatrix} .$$

Bu matrislərin ranqlarını hesablayaq.

$$M_1(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad ; \quad M_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 .$$

Deməli, rang(A) = 2.

$$M_1(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \quad ; \quad M_2(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 .$$

B matrisinin bütün üçtərtibli minorları sıfra bərabərdir. Deməli,

rang(B) = 2.

Beləliklə, A və B-nin ranqları bərabər olduğuna görə Kroneker-Kapelli teoreminə görəsistemin həlli var. Ranq 2-yə bərabər olduğuna görəsistemdəki tənliklərdən yalnız ikisini saxlayırıq.Elə tənlikləri seçmək lazımdır ki, onların əmsallarından düzəldilmiş matrisin ranqı 2-yə bərabər olsun:

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{matrix}\right\}$$

Bu sistemi aşağıdakışəkildə yazaq:

$$\left.\begin{matrix} x+z=1-y \\ x+2z=1-y \end{matrix}\right\}.$$

Onun başdeterminantı:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad ,$$

deməli, sağ tərəfin istənilən qiymətindəbu sistemin yeganə həlli var. Kramer düsturlarına görə:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-y & 1 \\ 1-y & 2 \end{vmatrix}}{\Delta} = 1-y \quad ; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-y \\ 1 & 1-y \end{vmatrix}}{\Delta} = 0 \ .$$

Nəticədə sistemin həllini yazaq: $(1-y, y, 0)$, $y \in (-\infty, \infty)$.

30. Tənliklər sistemini Qauss üsulu ilə həll edin:

$$\begin{cases} x_1+5x_2+4x_3+3x_4=1 \\ 2x_1-x_2+2x_3-x_4=0 \\ 5x_1+3x_2+8x_3+x_4=1 \end{cases}$$

Həlli.

Sistemin genişlənmiş matrisini yazaq və onun üzərində elementar çevirmələr aparaq. Birinci sətri saxlayaraq, onu (–2)-yə vurub ikinci sətirlə, sonra (–5)-ə vurub üçüncü sətirlə toplayaq:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{pmatrix} \sim .$$

İkinci sətri (–1)-ə vuraq:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{pmatrix} \sim \ ,$$

Sonra ikinci sətri üçüncü sətirlə toplayaq:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

İkinci sətri (–1)-ə vurub üçüncü sətirlə toplayaq:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

Üçüncü sətir sıfırlardan ibarət olduğu üçün onu ataq:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} .$$

Buradan məlum olur ki, sistemin matrisi ilə genişlənmiş matrisin ranqı eynidir:

$$r(A) = r(B) = 2.$$

Sistemdəki məchulların sayı 4-dür. Məlum teoremə görə sistemin sonsuz sayda həlli var. Elementar çevirmələr nəticəsində alınmış son matris

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad 11x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}$$

sisteminin genişlənmiş matrisidir.Əgər bazis məchulları olaraq məsələn, x_1 və x_2 məchullarını seçsək, onda x_3 və x_4 məchulları sərbəst məchullar olacaq. Bu halda axırıncı sistemi

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ \quad 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4 \end{cases}$$

kimi yazmaq olar. Bu sistemə Qauss üsulunu tətbiq edək. İkinci tənlikdən x_1 məchulunu yox etmək üçün birinci tənliyi (-2)-yə vurub ikinci tənliklə toplayaq:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ -11x_2 = -2 + 6x_3 + 7x_4 \end{cases}.$$

Buradan isə elementar çevirmələr nəticəsindəaşağıdakı həlli tapırıq:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{2}{11} - \frac{5}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \end{cases}.$$

Bu ümumi həlldə, məsələn, $x_3 = 1$, $x_4 = 1$ götürsək, onda $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ xüsusi həllini tapmış olarıq.

31. Bircins xətti tənliklər sisteminin ümumi və fundamental həllərini tapın.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Həlli.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 8x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \\ 10x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

32. $\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = -x + y + z \\ z' = x - y + z \end{cases} (A)$ və $\begin{cases} x' = x - y + z \\ y' = x + y - z \\ z' = -x + y + z \end{cases} (B)$ şəklində çevirmələr verildikdə AB və BA çevirmələrini tapın.

Həlli.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

33. $A\bar{x} = (x_1 - 3x_2 + 4x_3 ,\ 4x_1 - 7x_2 + 8x_3 ,\ 6x_1 - 7x_2 + 7x_3)$ xətti çevirməsi verilmişdir. Burada x_1 , x_2 , x_3 - $\bar{x}$ vektorunun $\bar{e_1} = (1,0,0)$, $\bar{e_1} = (0,1,0)$, $\bar{e_1} = (0,0,1)$ bazisində koordinatlarıdır. Bu çevirmənin məxsusi ədədlərini və məxsusi vektorlarını tapın.

Həlli.

Aydındır ki, A operatoru üçün

$$A\bar{e_1} = (1 , 4 , 6)$$
$$A\bar{e_2} = (-3 , -7 , -7)$$
$$A\bar{e_3} = (4 , 8 , 7)$$

yazmaq olar. Bu operatorun matrisini quraq:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$$

Məxsusi vektorları tapmaq üçün aşağıdakı sistemi yazaq:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - (7+\lambda)x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + (7-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Xarakteristik tənliyi yazaq:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (1-\lambda)(-7-\lambda)(7-\lambda) + (-3)\cdot 8\cdot 6 + 4\cdot(-7)\cdot 4 - 4\cdot(-7-\lambda)\cdot 6 - 8\cdot(-7)\cdot(1-\lambda) - 4\cdot(-3)\cdot(7-\lambda) = = (\lambda+1)^2 (\lambda-3) = 0$.

Buradan məxsusi ədədləri tapırıq: $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda = 3$. $\lambda = -1$ məxsusi ədədini (*) tənliklər sistemində yerinə yazaq:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemin birinci və ikinci tənlikləri eyni olduğundan onlardan birini saxlayırıq:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}.$$

Sistemin matrisinin:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

ranqı 2-yə bərabərdir, onda onun həlli

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = x_1 \end{cases}$$

kimidir.. Bu halda məxsusi vektor (C , 2C , C) şəklində olacaq.

$\lambda = 3$ məxsusi ədədini (*) tənliklər sistemində yerinə yazaq:

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 10x_2 + 8x_3 = 0 \\ 6x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -16x_2 + 16x_3 = 0 \\ -16x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -16x_2 + 16x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_3 \ , \ x_2 = 2x_1 \ .$$

Onda uyğun məxsusi vektor (C , 2C , 2C) şəklində olacaq.

34. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ tənliklər sisteminin həllinin olub-olmadığını araşdırın.

Həlli.

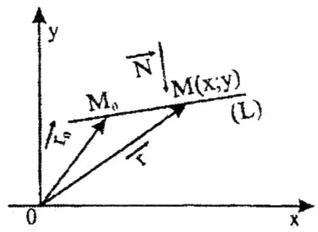
$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 1 \\ 5 & 7 & -4 \end{vmatrix} = 48 - 25 + 96 + 40 - 21 - 140 = -4 + 2 = -2 \neq 0$$

Sistemin həlli var.

35. Müstəvidə düz xəttin ümumi tənliyi və onun tədqiqi.

Həlli.

Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi və bu sistemdə ixtiyari L düz xətti götürək



Şəkil 1

L düz xəttinə perpendikulyar olan $\vec{N}\{A;B\}$ vektoruna L düz xəttinin normal vektoru deyilir. L düz xətti üzərində ixtiyari $M(x;y)$ nöqtəsini götürək. L düz xətti üzərində $M(x;y)$ nöqtəsindən fərqli olan qeyd olunmuş məlum koordinatlı $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsini də götürək və $\overrightarrow{M_0M}$ vektorunu çəkək. Koordinat başlanğıcından $\overrightarrow{OM_0} = \vec{r}_0$ və $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ vektorlarınıda çəkək. Onda şəkildən $\vec{r} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0M}$ və yaxud $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$ olur.

$\vec{N}\{A;B\}$ normal vektoru L düz xəttinə perpendikulyar olduğundan L düz xətti üzərində yerləşən $\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}$ vektorunada perpendikulyardır. Yəni bu vektorların skalyar hasili sıfıra bərabərdir.

$$\left(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{N}\right) = 0 \qquad (1)$$

Bu skalyar hasili koordinatlarla yazsaq

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0 \qquad (2)$$

alırıq. Burada $C = -(Ax_0 + By_0)$ işarə olunmuşdur. (2) tənliyinə düz xəttin müstəvi üzərində ümumi tənliyi deyilir.

Deməli, müstəvi üzərində yerləşən düzbucaqlı koordinat sistemində L düz xəttinin ümumi tənliyini yazmaq üçün L düz xəttinin normal $\vec{N}\{A;B\}$

vektorunun koordinatlarının və onun üzərində qeyd olunmuş $M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinin koordinatlarının verilməsi kifayətdir.

1) Tutaq ki, $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0$-dir. Onda (2) tənliyini $y = -\frac{A}{B}x - \frac{c}{B}$ şəklində yazmaq olar. Burada $k = -\frac{A}{B}$ və $b = -\frac{C}{B}$ işarə ktsək, onda $y = kx + b$

(3)

alarıq. (3) tənliyi düz xəttin bucaq əmsallı tənliyi adlanır. Bu tənlikdə k ədədi düz xəttin bucaq əmsalı adlanır və $k = tg\varphi$-dir. b isə həmin düz xəttin OY oxu boyunca koordinat başlanğıcından ayrıldığı parçanın uzunluğunu göstərir. L düz xətti ilə absis oxunun müsbət istiqaməti arasında qalan φ bucağı düz xəttin meyil bucağı adlanır $(0 \leq \varphi \leq \pi)$.

2) Tutaq ki, $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$-dir. Onda (2) tənliyi $x = -\frac{c}{A}$ şəklinə düşür. Bu isə oy oxuna paralel olan düz xəttin tənliyidir.

3) Tutaq ki, $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$-dir. Onda (2) tənliyi $y = -\frac{c}{A}$ şəklinə düşər. Bu isə ox oxuna paralel olan düz xəttin tənliyidir.

4) Tutaq ki, $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$-dir. Onda (2) tənliyi $y = -\frac{A}{B}x$ şəklinə düşər. Bu tənlik bucaq əmsalı $K = -\frac{A}{B}$ olan koordinat başlanğıcından keçən düz xəttin tənliyidir.

5) Tutaq ki, $A = 0, B \neq 0, C = 0$-dir. Onda (2) tənliyi $y = 0$ şəklinə düşər ki, bu da ox oxunun tənliyidir.

6)Tutaq ki, $A \neq 0,\ B = 0,\ \ C = 0$-dir. Onda (2) tənliyi $x = 0$ şəklinə düşər ki, bu da oy oxunun tənliyidir. Deməli, (2) tənliyi düz xəttin bütün mümkün hallarını əhatə edir.

36. Bucaq əmsalı vasitəsilə müstəvi üzərində iki düz xətt arasındakı bucağın tapılması. İki düz xəttin paralellik və perpendikulyarlıq şərti.

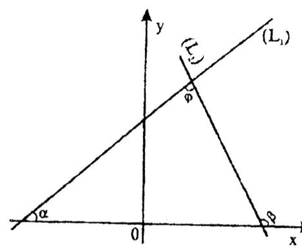
Həlli.

Düz xəttin $y = k_1x + b_1$ (L_1) və $y = k_2x + b_2$ (L_2) tənliklərindən $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\beta$ olduğundan (şəkil 1).

$$tg\varphi = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\beta \cdot tg\alpha} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

olur.

Bu düsturla kəsişən L_1 və L_2 düz xətləri arasında qalan bucaq hesablanır.



Şəkil 2

Əgər $\varphi = 0$ olarsa $tg0 = 0$ olur. Yəni $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$ olur. Buradan $k_1 = k_2$ iki düz xəttin paralellik şərti alınır. Əgər $\varphi = \frac{\pi}{2}$ olarsa, onda

$tg\frac{\pi}{2}=\infty$ olur, yəni $\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}=\infty$ olur. Buradan $1+k_1\cdot k_2=0$ və yaxud $k_1\cdot k_2=-1$ iki düz xəttin perpendikulyarlıq şərti alınır.

37. Müstəvinin ümumi tənliyi və onun tədqiqi.

Həlli.

Tutaq ki, fəzada düzbucaqlı koordinat sistemində Q müstəvisi və $M_0(x_o;y_o;z_o)\in Q$ nöqtəsi, Q müstəvisinə perpendikulyar olan $\vec{N}\{A;B;C\}$ vektoru verilmişdir (şəkil 1).

$\vec{N}\{A;B;C\}\perp Q$ vektoruna müstəvinin normal vektoru deyilir. Şəkil 1-ə görə

$$\overrightarrow{M_oM}=\vec{r}-\vec{r}_0=\{x-x_0;y-y_0,\ z-z_0\}.$$

$\vec{N}$ vektoru Q müstəvisinə perpendikulyar olduğundan, Q müstəvisi üzərində yerləşən $\overrightarrow{M_0M}$ vektoruna da perpendikulyardır. Yəni $\vec{N}\perp\overrightarrow{M_0M}$ olur. Buradan

$$\left(\vec{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right)=0 \tag{1}$$

alırıq. (1) tənliyinin koordinatlarla yazsaq

$$\begin{gathered}A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\Rightarrow\\ Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0\end{gathered} \tag{2}$$

alırıq. $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ işarə etsək (2) tənliyi

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{3}$$

şəklində olar. (3) tənliyi müstəvinin ümumi tənliyi adlanır.

$D\neq 0$ olduqda (3) tənliyinin hər tərəfini $(-D)$-yə bölsək

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \tag{4}$$

alarıq. Burada $A=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ işarə olunmuşdur. (4) tənliyinə müstəvinin parçalarla tənliyi deyilir.

<u>Xüsusi hallar</u>:

1). $D=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$ olarsa $Ax+By+Cz=0$ tənliyi koordinat başlanğıcından keçən müstəvinin tənliyidir.

2). $A=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$ olarsa, $By+Cz+D=0$ tənliyi ox oxuna paralel olan müstəvinin tənliyidir. Yəni bu müstəvinin normal vektoru $\vec{N}\{0;B;C\}$ ox oxuna perpendikulyardır.

3). $A=0$, $B=0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$ olarsa, $Cz+D=0$ tənliyi xoy koordinat müstəvisinə paralel olan müstəvinin tənliyidir. Bu müstəvi ox və oy oxlarına paraleldir.

4). $A=0$, $B=0$, $D=0$, $C\neq 0$ olarsa $Cz=0$ tənliyi xoy müstəvisinin tənliyidir.

38. İkitərtibli əyrilər. Ellips.

Həlli.

İkitərtibli əyrilər aşağıdakı ikidərəcəli tənliklə ifadə edilirlər:

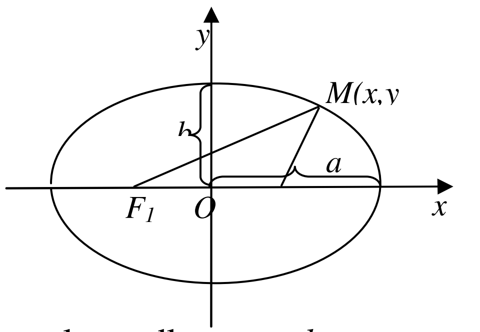
$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0\ ,\quad A^2+B^2+C^2\neq 0\ .$$

Çevrə, ellips, hiperbola, parabola – ikitərtibli əyrilərdir.

Müstəvi üzərində fokus adlanan iki nöqtədən məsafələrinin cəmi sabit olan nöqtələrin həndəsi yerinə ellips deyilir. Fokusları F_1 və F_2 ilə işarə edək. Koordinat sistemi götürək və koordinat başlanğıcını F_1F_2 parçasının ortasında qeyd edək. Aydındır ki, F_1 və F_2 üst-üstə düşərsə ellips çevrə olar. $F_1F_2 = 2c$ fokus məsafəsidir. Onda fokusların koordinatlarını $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ kimi yazmaq olar. Ellipsin tərifindəki sabiti $2a$ işarə edək. Aydındır ki, $2a>2c$, onda $a>c$. Fərz edək ki, $M(x,y)$ verilmişdir. $MF_1 \sim r_1$, $MF_2 \sim r_2$ işarə edək. Əgər M ellipsin nöqtəsidirsə, onda $r_1 + r_2 = 2a$. İki nöqtə arasında məsafə düsturuna əsasən:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad ; \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad r_1 + r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$



Radikalları yox edib $b^2 = a^2 - c^2$ əvəzləmləsi aparıb aşağıdakını alarıq:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

Bu, ellipsin kanonik tənliyi adlanır.
a və b kəmiyyətləri ellipsin böyük və kiçik yarımoxları adlanır: $a>b$.
Əgər $a = b$ olarsa, ellips radiusu $R=a=b$ olan çevrə olur.

Fokus məsafəsinin böyük oxa olan nisbətinə ellipsin ekssentrisiteti deyilir və e ilə işarə edilir:

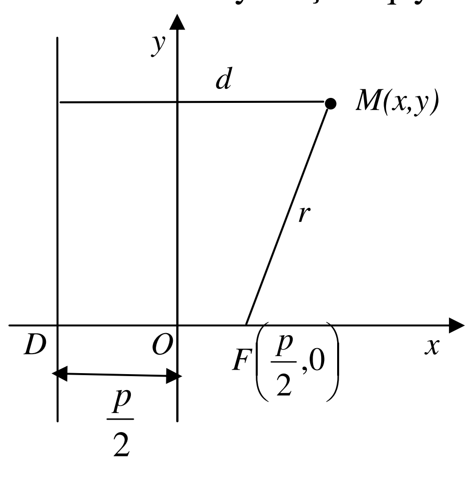
$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad e<1.$$

Əgər $e=0$, yəni $a=b$ olarsa, ellips çevrəyə çevrilir.
Ellipsin fokus nöqtələrinin yerləşdiyi simmetriya oxuna onun fokal oxu deyilir. Fokal oxa perpendikulyar olan $x = \pm \frac{a}{e}$ düz xətləri ellipsin direktrisləri adlanır.

39. İkitərtibli əyrilər. Parabola, onun kanonik tənliyinin çıxarılışı.

Həlli.

Müstəvinin qeyd olunmuş F nöqtəsindən və həmin müstəvidə yerləşən qeyd olunmuş düz xətdən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrin həndəsi yerinə parabola deyilir. Qeyd olunmuş nöqtə parabolanın fokusu, qeyd olunmuş düz xətt isə parabolanın direktrisi adlanır. Kanonik tənliyin çıxarılışı üçün koordinat başlanğıcını FD - nin ortasında yerləşdirək. $FD - F$ nöqtəsindən direktrisə endirilən perpendikulyardır. Fərz edək ki, FD-nin uzunluğu p – r, onda F nöqtəsinin koordinatları: $\left(\frac{p}{2},0\right)$ olar. $M(x,y)$ nöqtəsinin



koordinatlarını (x,y) götürək. MF məsafəsi r olsun, d isə M nöqtəsindən direktrisə qədər olan məsafədir. $r=d$. Onda

$$r=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} \quad , \quad d=\frac{p}{2}+x \ .$$

Buradan

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x \quad \Rightarrow \quad y^2=2px \, .$$

Bu, parabolanın kanonik tənliyi adlanır. p – parabolanın parametri adlanır.

40. ABC üçbucağının tərəflərinin tənlikləri verilmişdir: 3x – 4y + 24 = 0 (AB) , 4x + 3y + 32 = 0 (BC) , 2x – y – 4 = 0 (AC). B təpə nöqtəsindən çəkilmiş hündürlüyün tənliyini yazın və onun uzunluğunu tapın.

Həlli.

Üçbucağın təpə nöqtələrinin koordinatlarını tapmaq üçün uyğun tərəflərin tənliklərini sistem şəklində həll etmək lazımdır. Belə ki, B təpə nöqtəsinin koordinatlarını tapaq. Bunun üçün AB və BC tərəflərinin tənliklərini birgə həll edək:

$$\begin{cases} 3x-4y+24=0 \\ 4x+3y+32=0 \end{cases} ,$$

Buradan x = –8 , y = 0, yəni B(–8 , 0).

B(–8 , 0) nöqtəsindən keçən düz xətlərin tənliyi

$$y = к(x + 8)$$

kimidir. AC tərəfinin tənliyindən onun bucaq əmslını yaza bilərik: $к_{AC}$ = 2.

İki düz xəttin perpendikulyarlıq şərtinə görə

$$k_{BD}=\frac{-1}{k_{AC}}=-\frac{1}{2} \, .$$

BD hündürlüyünün tənliyi

$$y=-\frac{1}{2}(x+8) \quad \text{və ya} \quad x+2y+8=0$$

olacaq.

BD hündürlüyünün uzunluğu kimi, B(–8 , 0) nöqtəsindən 2x – y – 4 = 0 (AC) düz xəttinə qədər məsafəni tapa bilərik:

$$d_{BD}=\frac{|2(-8)+(-1)\cdot 0-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=4\sqrt{5} \, .$$

41. Düz bucağı C(– 1 , 3) nöqtəsi olmaqla ABC bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaq verilmişdir. Hipotenuzun tənliyi: 3x – 4y – 12 = 0 kimidir. Katetlərin tənliklərini yazın.

Həlli.

Hipotenuzun tənliyini y-ə nəzərən həll edərək onun bucaq əmsalını tapaq:

$$y=\frac{3}{4}x-3, \quad к_1=\frac{3}{4} \, .$$

Bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqda katetlərlə hipotenuz arasındakı bucaq 45° -dir.

θ = 45° və $к_1=\frac{3}{4}$ qiymətlərini:

$$tg\,\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right| ,$$

düsturunda nəzərə alsaq, katetlərin bucaq əmsallarını tapmaq üçün tənlk alarıq:

$$tg\,45° = \left|\frac{k_2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4}k_2}\right| \;\Rightarrow\; 1 = \left|\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2}\right| \;,\;\; \pm 1 = \frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2} \;.$$

Bu bərabəlikdən aşağıdakıları yazmaq olar:

$$\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2} = 1 \;\Rightarrow\; 4k_2 - 3 = 4 + 3k_2 \;\Rightarrow\; k_2' = 7.$$

$$\frac{4k_2 - 3}{4 + 3k_2} = -1 \;\Rightarrow\; 4k_2 - 3 = -4 - 3k_2 \;\Rightarrow\; k_2'' = -\frac{1}{7}.$$

C(−1 , 3) nöqtəsinin katetlər üzərində yerləşdiyini bilərək və

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

düsturundan istifadə edərək katetlərin tənliklərini yaza bilərik:

$$y - 3 = 7(x + 1) \quad и \quad y - 3 = -\frac{1}{7}(x + 1).$$

Tənlikləri sadələşdirərək:

$$7x - y + 10 = 0 \quad и \quad x + 7y - 20 = 0$$

alarıq.

42. $2x + y - 2 = 0$ və $2x + y - 5 = 0$ düz xətlərinə paralel olan, onlar arasındakı məsafəni 1 : 5 nisbətində bölən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli.

Birinci düz xətt üzərində absisi, məsələn 0-a bərabər olan A nöqtəsi götürək. Onda düz xəttin tənliyindən tapırıq ki, A nöqtəsinin ordinatı 2-dir, yəni A(0 , 2). Bu nöqtədən ikinci düz xətti B nöqtəsində kəsənədək perpendikulyar çəkək.

Birinci düz xəttin bucaq əmsalı $\kappa = -2$ olduğundan, perpendikulyar düz xəttin bucaq əmsalı $\kappa_{AB} = \frac{1}{2}$ olacaq. Bunu və nöqtənin koordinatlarını

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (*)$$

tənliyində yerinə yazaraq perpendikulyarın tənliyini tapırıq:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 0) \quad \text{və ya} \quad x - 2y + 4 = 0.$$

Perpendikulyarın tənliyini ilə ikinci tənliyi birgə həll edərək

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + y - 5 = 0 \end{cases},$$

onların kəsişmə nöqtəsini tapmış oluruq: $B\left(\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$.

Tutaq ki, C nöqtəsi AB parçasını $\lambda = \frac{1}{5}$ nisbətində bölür. Onda bu nöqtənin koordinatları

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{0 + \frac{1}{5}\cdot\frac{6}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = 0{,}2 \quad ; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{13}{5}}{1 + \frac{1}{5}} = 2{,}1$$

kimi olacaq.

Axtarılan düz xətt verilən düz xətlərə paralel olduğundan onun bucaq əmsalı $\kappa = -2$ olacaq. Bunu və C nöqtəsinin koordinatlarını (*) tənliyində yerinə yazaraq axtarılan tənliyi yazmış oluruq:

$$y - 2{,}1 = 2\,(x - 0{,}2) \quad \text{və ya} \quad 2x + y - 2{,}5 = 0.$$

43. F(0 , –3) nöqtəsindən və $y + 5 = 0$ düz xəttindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrin həndəsi yerini təyin edən əyrini müəyyən edib onun tənliyini yazın.
Həlli.
Axtarılan əyri üzərində götürülmüş ixtiyari nöqtəni M(x , y) ilə işarə edək. Onun F nöqtəsindən olan məsafəsi: d_1 verilən düz xəttə qədər məsafəyə: d_2 bərabərdir, yəni $d_1 = d_2$:

$$\sqrt{x^2 + (y+3)^2} = y + 5 \ ,$$

buradan

$$x^2 + (y+3)^2 = (y+5)^2$$

olur və mötərizələri açaraq

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 4$$

alırıq. Bu tənliklə ifadə edilən parabolanın simmetriya oxu Oy koordinat oxudur. Onun qolları Oy koordinat oxunun müsbət istiqamətindədir, belə ki, a əmsalı üçün $a = \frac{1}{4} > 0$.
Parabolanın təpə nöqtəsini və onun Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapaq.
Əgər $x = 0$ olsa, $y = -4$ olur, yəni parabolanın təpəsi A(0 , –4) nöqtəsindədir.
Əgər $y = 0$ olsa, $\frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$ və ya $x^2 - 16 = 0$ olur, buradan $x_1 = 4$, $x_2 = -4$. Beləliklə, parabolanın Ox oxu ilə kəsişmə nöqtələri: B(4 , 0) , C(– 4 , 0) olur.

44. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ tənliyi ilə verilən hiperbola üzərində $MF_1 = 2MF_2$ bərabərliyini ödəyən M nöqtəsini tapın. Hiperbolanın asimptotlarının tənliyini yazın.
Həlli.
Hiperbolanın tənliyindən

$$a = 4 \ , \ b = 3 \ , \ c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25 \ , \ c = 5$$

alırıq.
$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$ olduğunu bilərək və $r_1 = |a + \varepsilon x|$, $r_2 = |a - \varepsilon x|$ düsturlarını nəzərə alaraq axtarılan M(x , y) nöqtəsini $r_1 = 2r_2$ bərabərliyindən tapaq:

$$\left|4 + \frac{5}{4}x\right| = 2\left|4 - \frac{5}{4}x\right| \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4 + \frac{5}{4}x = 2\left(4 - \frac{5}{4}x\right) \\ 4 + \frac{5}{4}x = -2\left(4 - \frac{5}{4}x\right) \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 16 + 5x = 32 - 10x \\ 16 + 5x = -32 + 10x \end{array}\right. \Rightarrow \quad x = \frac{16}{15} \ \text{ və } \ x = \frac{48}{5} \ .$$

M(x , y) nöqtəsi $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ hiperbolası üzərində yerləşdiyi üçün uyğun nöqtələrin ordinatlarını tapmaq üçün x-in tapdığımız qiymətlərini yerinə yazaq.

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$$

tənliyində $x = \frac{48}{5}$ yazsaq, onda

$$y = \pm\frac{3}{4}\sqrt{\left(\frac{48}{5}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{5}\sqrt{119}$$

olur. $x = \frac{16}{15}$ yazsaq, onda

$$y = \pm\frac{3}{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{16}{15}\right)^2 - 16} = \pm\frac{3}{4}\cdot\sqrt{-\frac{3344}{225}}$$

tapırıq. Bu qiymət bizə lazım olan mənada mövcud deyil.
Beləliklə, verilən şərtləri ödəyən 2 nöqtə tapdıq:

$$M_1\left(\frac{48}{5}, \frac{3}{5}\sqrt{119}\right), \quad M_2\left(\frac{48}{5}, -\frac{3}{5}\sqrt{119}\right).$$

Asimptotların tənlikləri aşağıdakı kimidir.

$$y = \pm\frac{b}{a}x \;; \quad y = \pm\frac{3}{4}x.$$

45. Koordinat oxlarına nəzərən simmetrik olan, $M(5, -2)$ və $N(3\sqrt{2}, \sqrt{2})$ nöqtələrindən keçən hiperbolanın tənliyini yazın. Hiperbolanın ekssentrisitetini tapın.

Həlli.

M və N nöqtələrinin koordinatları hiperbolanın kanonik tənliyini:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ödəməlidir. Onları bu tənlikdə yerinə yazaraq aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \\ \frac{18}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Tənliklər sistemini $\frac{1}{a^2}$ və $\frac{1}{b^2}$ ifadələrinə nəzərən həll edərək

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{11} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{7}{22} \end{cases} \Rightarrow a^2 = 11, \quad b^2 = \frac{22}{7}$$

tapırıq. Hiperbolanın tənliyini yazaq:

$$\frac{x^2}{11} - \frac{7y^2}{22} = 1.$$

Hiperbola üçün c-nin ifadəsi $c^2 = a^2 + b^2$ kimidir, onda $c^2 = 11 + \frac{22}{7} = \frac{99}{7}$.

Bu halda ekssentrisitet $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{99}{7\cdot 11}} = 3\frac{\sqrt{7}}{7}$ olacaq.

Direktrislərin tənlikləri aşağıdakı kimi olacaq:

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{77}}{3}$$

46. $A(0;3)$ və $B(2;0)$ nöqtələrindən bərabər məsafədə yerləşən nöqtələrin həndəsi yerinin tənliyini yazın.

Həlli.

Tutaq ki, $K(x;y)$ nöqtəsi axtarılan düz xəttin üzərində yerləşir. Onda məsələnin şərtinə görə $|AK| = |BK|$ olmalıdır. Buradan

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow$$

$x^2 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 \Rightarrow 4x - 6y + 5 = 0$ alarıq.

47. ABC üçbucağının $A(1;2)$ təpə nöqtəsi və iki hündürlüyünün tənlikləri $x+y-2=0$, $9x-3y-4=0$ verilmişdir. Onun tərəflərinin tənliklərini tapın.

Həlli.

Verilən təpə nöqtəsinin koordinatları hündürlük tənliklərini ödəmədiyi üçün onlar üzərində yerləşmir. Tutaq ki, $9x-3y-4=0$ BK-nın, $x+y-2=0$ isə CN-in hündürlüyünün tənliyidir. AC tərəfinin $A(1;2)$ nöqtəsindən keçdiyini, BK (bucaq əmsalı $k_{BK}=3$) hündürlüyünün ona perpendikulyar olduğunu və bucaq əmsalı $k_{AC}=-\frac{1}{3}$ olduğunu nəzərə alsaq, onda AC tərəfinin tənliyi $y-2=-\frac{1}{3}(x-1)\Rightarrow x+3y-7=0$ olacaqdır.

Analoji olaraq, $k_{CN}=-1\Rightarrow k_{AB}=1$ olduğundan AB tərəfinin tənliyi $y-2=x-1\Rightarrow x-y+1=0$ olacaqdır.

$\begin{cases} AB: x-y+1=0 \\ BK: 9x-3y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{7}{6}; \ y=\frac{13}{6} \end{cases}$ və

$\begin{cases} AC: x+3y-7=0 \\ CN: x+y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{9}{2}; y=\frac{5}{2} \end{cases}$ tapa bilərik. İki nöqtədən keçən düz xətt tənliyi düsturuna əsasən

$$BC: \frac{x-\frac{9}{2}}{\frac{7}{6}-\frac{9}{2}} = \frac{y-\frac{5}{2}}{\frac{13}{6}-\frac{5}{2}} \Rightarrow 2x-20y+41=0$$

alarıq. Deməli,

$AB: x-y+1=0$, $AC: x+3y-7=0$, $BC: 2x-20y+41=0$-dir.

48. Normalının uzunluğu 3 olan və OX oxunun müsbət istiqaməti ilə 60^0-li bucaq əmələ gətirən düz xəttin tənliyini yazın.

Həlli.

Düz xəttin normal tənliyində $\rho=3$ və $\varphi=60^0$ olduğunu nəzərə alsaq:

$x\cos 60^0 + y\sin 60^0 - 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y-3=0$ alarıq.

49. Koordinat başlanğıcından $\sqrt{17}$ və $A(-1;3)$, $B(2;7)$ nöqtələrindən eyni məsafədə yerləşən nöqtələrin koordinatlarını tapın.

Həlli.

Tutaq ki, tələb olunan nöqtə $K(x;y)$-dir. Onda şərtə görə

$$\begin{cases} |OK|=\sqrt{17} \\ |AK|=|BK| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{17} \\ \sqrt{(x-(-1))^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-7)^2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=17 \\ (x+1)^2+(y-3)^2=(x-2)^2+(y-7)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=17 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow (1;4)$$

və $(4;1)$.

50. $A(4;-5)$ və $B(-3;2)$ nöqtələrindən keçən düz xətlə $2x-3y+6=0$ düzxətti arasındakı bucağı tapın.

Həlli.

Məlumdur ki, $A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

Odur ki, $\dfrac{x-4}{-3-4}=\dfrac{y+5}{2+5}$

$$-x+4=y+5$$

$$y=-x-1$$

$y=-x-1$ düz xətt ilə $2x-3y+6=0$ düz xətti arasındakı bucağı tapmaq üçün həmin tənliyi $y=\dfrac{2}{3}x+2$ şəklində yazaq.

Burada $K_1=\dfrac{2}{3}$ $\quad K_2=-1$ $\quad tg\varphi=\left|\dfrac{K_2-K_1}{1+K_1K_2}\right|$

$$tg\varphi=\left|\frac{-1-\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right|=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}=5$$

$tg\varphi=5$ $\qquad \varphi=arctg5$.