Xətti cəbr və riyazi analiz

1. Xətti asılılığın tərifinə görə $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ bərabərliyi $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ olduqda ödənərsə onda $\overline{a},\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

Verilənləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=0\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases}$$

tənliklər sistemini alarıq.

Ücüncü tənlikdən $\lambda_1=-4\lambda_3$ əvəzləməsini digər iki tənlikdə nəzərə alsaq

$$\begin{cases}-8\lambda_3+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\-12\lambda_3+7\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$ olar. Buradan $$\begin{cases}5\lambda_2-5\lambda_3=0\\7\lambda_2-14\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

tərəf-tərəfə çıxcaq $\lambda_3=0$ alarıq. Deməli $\lambda_3=0$ olduğunu digər tənliklərdə nəzərə alsaq $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ alarıq.

Deməli bu vektorlar bazis əmələ gətirir.

$\overline{d}$ vektorun $\overline{a},\overline{b}$ və $\overline{c}$ vektorları üzrə xətti kombinasiyasını tapmaq üçün $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{d}$ tənliyini həll etməliyik.

Verilənləri nəzərə alsaq $$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=4\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=12\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\end{cases}$$ alarıq.

Axırıncı tənliyi olduğu kimi saxlayıb -2 –yə vurub 1-ci tənliklə, -3-ə vurub 2-ci tənliklə toplayaq. $$\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\5\lambda_2-5\lambda_3=10\\7\lambda_2-14\lambda_3=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\\lambda_2-\lambda_3=2\\\lambda_2-2\lambda_3=3\end{cases}$$

İkinci və ücüncü tənlikləri tərəf-tərəf cıxsaq $\lambda_3=-1$ alarıq.

Bu qiyməti 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq $\lambda_2+1=2\Rightarrow\lambda_2=1$ olar. $\lambda_3=-1$ olduğunu $\lambda_1+4\lambda_3=-3$ tənliyində nəzərə alsaq $\lambda_1=1$ alarıq.

Deməli yeni koordinatlar $\overline{d}(1;1;-1)$ olar. Yəni $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$ xətti kombinasiya alınar.

2. $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini yoxlamaq üçün $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}=0$ bərabərliyindən $$\begin{cases}2\lambda_1+2\lambda_2=0\\-2\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}$$ sistemini alarıq.

Tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1 = 0$ alarıq. Yerinə yazsaq $\lambda_1 = 0$ olar.
Deməli, tərifə görə $\overline{a}$ və $\overline{b}$ vektorları bazis əmələ gətirir.
$\overline{P}$ vektorunun koordinatlarını tapaq.

$$\overline{P} = 2(2;-2)-(2;-1)+(2;4)=(4;-4)-(2;-1)+(2;4)=(4;1)$$

Xətti ayrılış üçün $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{p}$ şərti ödənməlidir.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ sistemində tənlikləri tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1 = 5$

alarıq. Digər tənlikdə yerinə yazsaq $2\lambda_1 + 2\cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$ alarıq.
Deməli, $\overline{p} = -3\overline{a} + 5\overline{b}$ alınar.

3. R^n - də xətti asılı olan vektorlar haqqında teorem və isbatı.

Teorem 1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmazsa birinin yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilməsidir.

Zərurilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorları xətti asılıdır. Yəni, (2) bərabərliyi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ ədədlərinin biri (məsələn, λ_m) sıfırdan fərqli olduqda doğrudur. Onda (2) bərabərliyinin hər tərəfini λ_m–ə bölsək $\vec{a}_m$ vektorunu digərləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$\vec{a}_m = \frac{-\lambda_1}{\lambda_m}\vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m}\vec{a}_2 - ... - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\vec{a}_{m-1}. \tag{4}$$

Burada, $\alpha_i = -\frac{\lambda_i}{\lambda_m}$ $(i = \overline{1, m-1})$ kimi işarə etsək, onda (4) bərabərliyini

$$\vec{a}_m = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} \tag{5}$$

şəklində yaza bilərik. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_m$ vektoru $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{m-1}$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilir.

Kafilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarından biri (məsələn, $\vec{a}_m$) yerdə qalanlarının xətti kombinasiyasıdır. Yəni, (5) bərabərliyi doğrudur. Onda (5) bərabərliyini

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_{m-1}\vec{a}_{m-1} + (-1)\vec{a}_m = \vec{0} \tag{6}$$

kimi yazsaq, $\alpha_m = -1 \neq 0$ olduğundan tərifə əsasən $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olduğunu alırıq.

Qeyd edək ki, əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının heç olmazsa biri sıfır vektordursa, onda bu vektorlar xətti asılıdır. Doğrudan da fərz etsək ki, $\vec{a}_m = \vec{0}$. Onda $\lambda_m = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_{m-1} = 0$, götürsək, (2) bərabərliyi ödənir.

Yoxlamaq olar ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_m$ vektorlarının bir neçəsi xətti asılıdırsa, onda bu vektorların hamısı xətti asılıdır.

4. Determinant anlayışı. Minor və cəbri tamamlayıcı. Determinantın əsas xassələri.

n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin a_{ij} elementinin yerləşdiyi *i*-ci sətri və *j*-ci sütunu şərti olaraq sildikdən sonra qalan elementlərin əmələ gətirdiyi $n-1$ tərtibli kvadrat matrisin determinantını M_{ij} ilə işarə edək. M_{ij} –yə a_{ij} elementinin minoru deyilir. Bu halda

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+\ldots+(-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n} \quad (7)$$

cəminə n tərtibli A_{nxn} kvadrat matrisinin determinantı deyilir.

Xassə 1. Determinantın bütün sətirlərinin onun uyğun nömrəli sütunları ilə yerini dəyişdikdə determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21}\ldots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}\ldots a_{n2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

sonrakı xassələrini ancaq sətirləri və ya ancaq sütunları üçün söyləmək kifayətdir.

Xassə 2. Hər hansı determinantın ixtiyari iki sətrinin (sütununun) yerini dəyişsək, onda determinantın yalnız işarəsi dəyişər. Yəni, məsələn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Xassə 3. İki sətri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 4. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vurğu olarsa, həmin vurğu determinantın işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Yəni

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & k\,a_{12}\ldots ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Xassə 4 onu göstərir ki, $k\cdot detA_{nxn}$ hasilini tapmaq üçün $detA_{nxn}$ –nin hər hansı bir sətirinin (sütununun) elementlərini həmin k ədədinə vurmaq lazımdır.

Xassə 5. Determinantın iki sətrinin (sütunun) elementləri mütənasibdirlərsə, həmin determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 6. Determinantın hər hansı sətrinin (sütunun) bütün elementləri sıfırdırsa, onda determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 7. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri iki toplananın cəmi şəklindədirsə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabərdir: 1-ci determinantda həmin sətir (sütun) elementi olaraq 1-ci toplanan, 2-ci determinantda isə həmin sətir (sütun) elementləri olaraq 2-ci toplanan götürülür. Yəni, məsələn 1-ci sətir elementləri üçün

$$\underbrace{\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12}\ldots a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots b_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}}_{\Delta_2} \quad (5)$$

olur.

Xassə 8. Determinantın hər hansı sətrinin (sütununun) bütün elementlərini bir ədədə vurub digər bir sətrinin (sütununun) uyğun elementlərinin üzərinə əlavə etsək determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,məsələn,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & ka_{12}+ka_{22}\ldots a_{1n}+ka_{2n} \\ a_{21} & a_{22} \;\ldots\; a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \;\ldots\; a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Xassə 9. Determinantın hər hansı sətir (sütun) elementlərinin, digər sətirin (sütunun) uyğun elementlərinin cəbri tamamlayıcılarına hasillərinin cəmi sıfra bərabərdir.

Yəni, məsələn

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+\ldots+a_{1n}A_{2n}=0. \tag{7}$$

5. $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}$ olarsa, $f(x)=x^2-3x+2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A)=?$

$$f(A)=A^2-3A+2E=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1+0+0 & -3-6+0 & 0-3+0\\ 0+0+3 & 0+4-3 & 0+2+2\\ 3+0+6 & -9-6-6 & 0-3+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -9 & 0\\ 0 & 6 & 3\\ 9 & -9 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -9 & -3\\ 3 & 1 & 4\\ 9 & -21 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -9 & 0\\ 0 & 6 & 3\\ 9 & -9 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ 3 & -3 & 1\\ 0 & -12 & -3\end{pmatrix}$$

6. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ olarsa, $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2$ çoxhədlisinə uyğun

$f(A)=4A^3-2A^2+3A-2E$ şəkildə yaza bilərik.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-14-6 & 21+0\\ 4+3 & -6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-80 & 84\\ 28 & -24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$$

7. Əgər determinantın hər hansı sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə onu iki determinantın cəmi kimi yaza bilərik.

$$\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+2a+1 \\ b & b^2 & b^2+2b+1 \\ c & c^2 & c^2+2c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a+1 \\ b & 1 & b^2+2b+1 \\ c & 1 & c^2+2c+1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 \\ b & b^2 & b^2 \\ c & c^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 2a+1 \\ b & b^2 & 2b+1 \\ c & c^2 & 2c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a \\ b & 1 & b^2+2b \\ c & 1 & c^2+2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Əgər determinantın iki sütunu eyni və ya mütənasibdirsə, o determinant sıfra bərabərdir. Onda I toplanan və axırıncı toplanan sıfra bərabər olar. Digər determinantları da ayırsaq

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a \\ b & b^2 & 2b \\ c & c^2 & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ b & 1 & 2b \\ c & 1 & 2c \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

alarıq.

8. Determinantın uyğun xassəsini yazın və həmin xassədən istifadə edərək

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

Determinantın hər hansı sətir və sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə, onda determinant elə iki determinantın cəminə bərabərdir ki, birinci determinantda birinci toplanan, ikinci determinantda isə ikinci toplanan olmaqla qalan elementləri isə verilmiş determinantda olduğu kimi saxlanılır.
Iki sətri və ya sütunu eyni olan determinant .... bərabərdir.
Determinantın hər hansı bir sətrinin və ya sütununun bütün elementlərinin ortaq vuruğunu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Hər hansı determinantın iki sətrinin yerini dəyişsək, onda determinant yalnız işarəsini dəyişər. Determinantın mütənasib olan sətirləri və ya sütunları varsa, bu determinant sıfıra bərabərdir.
Yuxarıda qeyd etdiyimiz xassələrə əsasən verilmiş determinantı hesablayaq.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

9 . $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Bilirik ki, matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək minorunun tərtibinə ranq deyilir. Ranqı tapmaq üçün haşiyələyən minorlar üsulundan istifadə edək.

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0$ $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = 8 \neq 0$

olduğuna görə bu matrisin ranqı $r(A) = 3$ olar. Onda

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ olduğundan həm də bazis minoru olacaqdır.

10. Matrisin ranqı və onun hesablanması

mxn ölçülü A_{mxn} düzbucaqlı matrisində $k \le min\{m,n\}$ şərtini ödəyən ixtiyari k sayda sətir və k sayda sütunların kəsişməsində duran elementlərdən düzəldilmiş k tərtibli A_{kxk} kvadrat matrisin determinantına k tərtibli minor deyilir və M_k ilə işarə olunur. $M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2k} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{k1} & a_{k2} \ldots a_{kk} \end{vmatrix}$ kimidir.

Matrislərin ranqı üçün aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu yoxlamaq olar.

1) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$; 2) $r(A+B) \ge |r(A) - r(B)|$;

3) $r(AB) \le min\{r(A), r(B)\}$; 4) $r(A^T A) = r(A)$;

5) $r(AB) = r(A)$ əgər $detB \neq 0$ olarsa;

6) $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$, burada n, A matrisinin sütunlarının sayını və ya B matrisinin sətirləri sayını göstərir.

ranqın tapılması üsullar haşiyələyən minorlar və elementar çevirmələr üsuludur.

1) Haşiyələyən minorlar üsulu.

A_{mxn} matrisinin ranqını tapmaq üçün hesablamanı, onun aşağı tərtibli minorlarından başlayıb yuxarı tərtibli minorlara keçmək və bu prosesdə sıfırdan fərqli r tərtibli M_r minoruna rast gəldikdən sonra, M_r minorunu haşiyələyən (öz daxilində saxlayan) $(r+1)$ – tərtibli minorları hesablamaq lazımdır. Əgər M_r –i $(M_r \neq 0)$ haşiyələyən $(r+1)$ – tərtibli minorların hamısı sıfırdırsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r -dir. Yəni, $r(A_{mxn}) = r$. Əgər $(r+1)$ – tərtibli haşiyələyən minorlardan biri, məsələn, M_{r+1} sıfırdan fərqli olarsa, onda A_{mxn} matrisinin ranqı r-dən böyük olmalıdır. Bu prosesi M_{r+1}-i haşiyələyən $(r+2)$ – tərtibli minorları hesablamaqla davam etdirsək və M_{r+1}-i $(M_{r+1}) \neq 0$ haşiyələyən bütün $(r+2)$ – tərtibli minorlar sıfıra bərabərdirsə onda A_{mxn} matrisinin ranqı $r+1$-ə bərabərdir və s.

2) Elementar çevirmələr üsulu.

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Matrisin üzərində aparılan elementar çevirmələr onun ranqını dəyişmir.

Qeyd edək ki, ranqları bərabər olan matrislərə ekvivalent matrislər deyilir və $r(A) = r(B) \Leftrightarrow A \sim B$ kimi işarə olunur. Deməli, elementar çevirmələrdən sonra alınan matris, verilmiş matrisə bərabər deyildir.

Teorem (bazis minorlar haqqında teorem). Matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyildir. Matrisin ixtiyari sətri (ixtiyari sütunu) onun bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər.

11. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin tərsini elementar çevirmələrlə tapaq.

Bilirik ki, $Q = (A/E)$ kimi bir qoşma matrisi düzəldilir. Onu elementar çevirmələrlə E/A şəklinə gətirilir.

$$A/E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, birinci sətri ikinci ilə toplayıb ikinci sütunda yazdıq, birinci ilə üçüncü sətri toplayıb üçüncü sətirdə yazdıq. Daha sonra birinci sətirlə ikinci sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Sonra birinci sətirlə üçüncü sətri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Nəticədə A matrisinin tərsini elementar çevirmələr yoli ilə tapmış olduq.

12 . $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ olduqda A^{-2} -ni tapaq.

Bilirik ki, A^{-2}-ni tapmaq üçün -i $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$ hesablamaq lazımdır.

A^{-1}-matrisin tərsini tapmaq üçün $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.Bu düsturu verilmiş misalla tətbiq edək.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 2 + 4 - 0 - 12 = -8 \quad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

Deməli $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ olur.

$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğundan

$$A^{-2} = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 121 \; -12 \; +35 & -22 \; +8 \; -10 & -55 \; +4 \; -5 \\ 66 \; -24 \; +14 & -12 \; +16 \; -4 & -30 \; +8 \; -2 \\ -77 \; +12 \; -7 & 14 \; -8 \; +2 & 35 \; -4 \; +1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 144 & -24 & -56 \\ 56 & 0 & -24 \\ -72 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -3 & -7 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$A^2A^{-2} = E$ olduğunu göstərək

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^2A^{-2}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\\ -1 & 9 & 5\\ 7 & 9 & 21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & -3 & -7\\ 7 & 0 & -3\\ -9 & 1 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}54 \;\; +35 \;\; -81 & -9 \;\; +0 \;\; +9 & -21-15+36\\ -18 \;\; +63 \;\; -45 & 3 \;\; +0 \;\; +5 & 7-27+20\\ 126 \;\; +63 \;\; -189 & -21 \;\; +0 \;\; +21 & -49-27+84\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

13. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1-x_2+3x_3=11\\ 3x_1-4x_2-x_3=-5\end{cases}$

Bilirik ki, əsas matris dəyişənlərin əmsallarından düzəldilir.

$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & -4 & -1\end{pmatrix}$ genişləndirilmiş matris isə

$A^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 11\\ 3 & -4 & -1 & -5\end{pmatrix}$ olar.

Kroneker –Kapelli teoreminə görə sistemin həllinin varlığı üçün $r(A)=r(A^*)$ olmalıdır.

Əvvəlcə $r(A)$ -nı tapaq.

$M_2=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9-4\neq 0$; $M_3=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=27-2+4-6+3-12=14\neq 0$ olduğundan

$r(A)=3$ olur.

İndi isə A^*-un ranqını tapaq.

Bunun üçün

$$|A^*|=\begin{vmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 3 & 11\\ 3 & -4 & -1 & -5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1 & -4\\ -7 & -7 & 3 & -4\\ 6 & -2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & -4\\ -7 & -7 & -4\\ 6 & -2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=0-56-24-6\cdot 7\cdot 4-8-0=-80-168-8=-256\neq 0$$

olduğuna görə $r(A^*)=4$ olar.

Deməli $3=r(A)\neq r(A^*=4)$ olduğundan sistem uyuşan deyil.

14. . *n* məchullu *m* xətti tənlik sistemi. Кронекер-Капелли теореми

n məchullu *m* xətti tənlik sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \ . \end{cases} \qquad (1)$$

(1) xətti tənliklər sistemini həll etməzdən qabaq onun həllinin olub-olmadığını müəyyən etmək lazım gəlir.

Qeyd edək ki, $A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2}\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$ (2) verilən sistemin əsas matrisi,

$A^*_{mx(n+1)} = \begin{bmatrix} a_{11} \ a_{12}\ldots a_{1n} \ b_1 \\ a_{21} \ a_{22}\ldots a_{2n} \ b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \ a_{m2}\ldots a_{mn} \ b_m \end{bmatrix}$ (3) verilən sistemin genişlənmiş matrisi

adlanır.

(1) sisteminin birgə (uyuşan) olub-olmamasını müəy-yənləşdirmək üçün aşağıdakı

teorem mühüm rol oynayır.

<u>Teorem (Кroneker–Кapelli).</u> Verilmiş (1) xətti tənliklər sisteminin birgə (uyuşan) olması üçün zəruri və kafi şərt sistemin əsas matrisinin ranqının onun genişlənmiş matrisinin ranqına bərabər olmasıdır, yəni, $r(A) = r(A^*)$ olmasıdır.

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + \qquad x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$

Birinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək. Digər dəyişənləri toplama üsulu ilə “yox” edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

Indi isə ikinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək və toplama üsulu ilə digər dəyişənləri ardıcıl yox edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ \qquad 12x_3 - 6x_4 = 36 \ \big| 5 \\ \qquad 18x_3 - 10x_4 = 56 \ \big| -3 \end{cases} \Rightarrow \quad 60x_3 - 54x_3 - 30x_4 + 30x_4 = 180 - 168$$

$$6x_3 = 12$$

$$x_3 = 2$$

$x_3 = 2$ qiymətini $12x_3 - 6x_4 = 36$ tənliyində yerinə yazsaq

$$24 - 6x_4 = 36 \qquad 2x_2 - 4 - 12 = -14 \qquad x_1 + 2 - 6 - 8 = -13$$

$$6x_4 = -12 \qquad 2x_2 = 2 \qquad x_1 = -1$$

$$x_4 = -2 \qquad x_2 = 1$$

Deməli, tənliyin ümumi və xüsusi həlləri eynidir.

$\{-1;1;2;-2\}$ olur.

16. Bilirik ki, bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas matrisin determinantı sıfra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 12a + 7 + 3 - 14a - 8 = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

olarsa, sistemin sonsuz sayda həlli var.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

üçüncü tənliyi aparıcı tənlik kimi saxlayaq.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \\ \quad 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3x_2 \text{ alarıq.}$$

$x_2 = C \in R$ qəbul etsək~

$$x_3 = 3C \text{ və } \quad \begin{matrix} x_1 - C + 6C = 0 \\ x_1 = -5C \end{matrix} \quad \text{alarıq.}$$

Onda sistemin ümumi həlli $\{-5C; C; 3C\}$ olar.

17. $Ax = (x_1 + x_2 + 8x_3; 2x_2; x_1 - x_3)$ Bu çevirmənin matrisi əmsalardan düzəldilir.

$$Ax=\begin{pmatrix}1&1&8\\0&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

Məxsusi ədədi tapmaq üçün

$|A-\lambda E|=0$ tənliyini həll etmək lazımdır.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&1&8\\0&2-\lambda&0\\1&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+0+0-8(2-\lambda)0-0=0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)-8)=0$$

$$-(1-\lambda^2)-8=0$$

$$\lambda^2=9$$

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=3$$

$$\lambda_3=-3$$

Onların cəmi $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(-3)=2$ olar

18. Verilən çevirmələrin əmsallarından A və B matrislərini düzəldək

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}$$

$$AB-BA=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&4\\3&-6&1\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Onda AB-BA çevirməsi $\begin{cases}x''=5x-y+4z\\y''=3x-6y+z\\z''=3y\end{cases}$

19. Bilirik ki, məxsusi ədəd $|A-\lambda E|=0$ tənliyindən tapılır.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+0+0-0-4(2-\lambda)+4\lambda 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8\lambda-8=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8(\lambda-1)=0$$

$$(\lambda-1)(\lambda(2-\lambda)+8)=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad 2\lambda-\lambda^2+8=0$$

$$\lambda^2-2\lambda-8=0$$

$$\lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

Hər bir məxsusi ədədə uyğun məxsusi vektorları tapaq.

$\lambda_1=1$ olduğunu nəzərə alaq.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1-2x_2+0=0 \\ -2x_1+(1-\lambda)x_2-2x_3=0 \\ 0\cdot x_1-2x_2-\lambda x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1-2x_2=0 \\ -2x_1-2x_3=0 \\ -2x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2x_2 \\ x_1=x_3 \\ x_3=-2x_2 \end{cases}$$

$x_2=C_1$ qəbul etsək $0\neq C_1\in R$ olmalıdır.

Onda məxsusi vektor $\{-2C_1;C_1;-2C_1\}$ olar.

2) $\lambda_2=4$-ə uyğun sistem

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2=0 \\ 2x_1-3x_2-2x_3=0 \\ -2x_2-4x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-x_2 \\ 2x_1-3x_2-2x_3=0 \\ x_2=-2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3=C_2\neq 0 \\ x_2=-2C_2 \\ x_1=2C_2 \end{cases} \text{ alarıq.}$$

Məxsusi vektor $\{2C_2;-2C_2;C_2\}$ alınar.

3) $\lambda_3=-2$-yə uyğun məxsusi vektor.

$$\begin{cases} 4x_1-2x_2=0 \\ -2x_1+3x_2-2x_3=0 \\ -2x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=2x_1 \\ -2x_1+3x_2-2x_3=0 \\ x_2=x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=C_3 \\ x_2=2C_3 \\ x_3=2C_3 \end{cases}$$

$\{C_3;2C_3;2C_3\}$ alınar.

20 Verilmiş $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin xətti çevirməsinin məxsusi ədədini və məxsusi vektorunu tapın.

Həlli. $\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$ bərabərliyinə əsasən verilmiş matrisin xarakteristik tənliyini

$$|A-E\lambda|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 4\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(3-\lambda)(2-\lambda)-20=\lambda^2-5\lambda-14=0$$

şəklində yaza bilərik. Bu xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_1=-2$ və $\lambda_2=7$ olar.

$\lambda_1=-2$ olduqda tənliyinə görə

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3+2)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2+2)x_2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2=0\\ 5x_1+4x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4c_1\\ x_2=5c_1\end{cases}\quad(0\neq c_1\in R).$$

Deməli, $\lambda_1=-2$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru $X=\{-4c_1;5c_1\}$ şəklindədir. $c_1\in R$ olduğundan istənilən qiymətlər verməklə verilən çevirmənin məxsusi vektorlarını tapa bilərik.

Eyni qayda ilə $\lambda_2=7$ olduqda uyğun bircins tənlik

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(3-7)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-7)x_2=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-4x_1+4x_2=0\\ 5x_1-5x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases}\Rightarrow x_1=x_2=c_2\neq 0; c_2\in R.$$

Deməli, $\lambda_2=7$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor $X=\{c_2;\ c_2\}$ kimidir.

21. Xətti çevirmənin matrisi , məxsusi ədədi və məxsusi vektoru

Tutaq ki, n-ölçülü R^n xətti fəzasında $e_1,e_2,\dots,e_n$ bazis vektorları və A xətti çevirməsi verilmişdir. Onda bu fəzadan götürülmüş $\vec{X}\in R^n$ vektorunun bazis vektorları üzrə yeganə qayda ilə

$$\vec{X}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n \qquad (1)$$

şəklində ayrılışını yaza bilərik. A xətti çevirmə olduğu üçün bu ayrılışı $\vec{Y}=A(\vec{X})$ bərabərliyində nəzərə alsaq,

$$\vec{Y}=A(\vec{X})=x_1A(\vec{e}_1)+x_2A(\vec{e}_2)+\dots+x_nA(\vec{e}_n) \qquad (2)$$

alarıq. Digər tərəfdən $A(\vec{e}_i)$ $(i=\overline{1;n})$ vektorları da R^n fəzasının elementləri olduğundan onların da $e_1,e_2,\dots,e_n$ bazis vektorları üzrə ayrılışını yazmaq olar.

$$\begin{cases}A\vec{e}_1=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2+\dots+a_{n1}\vec{e}_n\\ A\vec{e}_2=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2+\dots+a_{n2}\vec{e}_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ A\vec{e}_n=a_{1n}\vec{e}_1+a_{2n}\vec{e}_2+\dots+a_{nn}\vec{e}_n\end{cases}$$ (3) Bu ayrılışları (2) münasibətində nəzərə alsaq,

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ y_n=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n\end{cases}$$ (4) alarıq. (4) bərabərliyinin əmsallarından düzəldilmiş

$A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ kvadrat matrisinə $e_1, e_2, ..., e_n$ bazisində A xətti çevirməsinin matrisi deyilir. Burada, $X_{n\times 1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$-dir.

Bu çevirməni qısa olaraq $Y_{n\times 1} = A_{n\times n} X_{n\times 1}$ kimi yazmaq olar.

Tutaq ki, A operatoru R^n-dən R^n-ə təsir edən xətti çevirmədir.

Tərif. R^n-dən götürülmüş sıfırdan fərqli hər hansı X vektoru üçün

$$AX = \lambda X \quad \left(0 \neq X \in R^n\right) \qquad (5)$$

bərabərliyini ödəyən λ ədədinə A operatorunun məxsusi ədədi, ona uyğun tapılan X vektoruna isə məxsusi vektor deyilir.

Bəzən məxsusi ədəd əvəzinə məxsusi qiymət də işlədilir.

(5) bərabərliyini açıq şəkildə yazsaq

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

şəklində bircins xətti tənliklər sistemi alarıq. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt onun məchullarının əmsallarından düzəldilmiş determinantın sıfra bərabər olmasıdır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

(7) bərabərliyini qısa olaraq $|A - \lambda E| = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyin sol tərəfi həm də λ-dan asılı n-dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədliyə xarakteristik çoxhədli deyilir. Xarakteristik çoxhədlinin kökləri A xətti çevirməsinin məxsusi ədədləridir.

(7) xarakteristik tənliyini həll edərək $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ məxsusi ədədlərini tapırıq və bu məxsusi ədədləri ayrı-ayrılıqda (6) bircins xətti tənliklər sistemində yerinə yazaraq sıfırdan fərqli X həllini (vektorunu) tapırıq. Həmin bu X vektoru uyğun məxsusi vektor olacaqdır.

22/ Funksiyanin limiti. Sag və sol limitlər. Bəzi limit düsturları.

Tərif 1. Sonlu a və A ədədləri və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi var ki, x-in X çoxluğundan götürülmüş və $0 < |x - a| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün qiymətlərində $|f(x) - A| < \varepsilon$ münasibəti ödənir. Onda A ədədinə $x \to a$ şərtində $f(x)$ funksiyasının limiti deyilir və $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ kimi yazılır. X çoxluğu olaraq a nöqtəsinin müəyyən ətrafı başa düşülür.

Функсийанын сол вя саь лимитляри

A ядяди $x = a$ нюгтясиндя $f(x)$ функсийасынын лимитидирся, онда x-ин a-йа йахын вя онун истянилян тяряфиндя (сол вя йа саь тяряфиндя) йерляшян бцтцн гиймятляриндя

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{1}$$

бярабярсизлийи юдянилир. $x = a$ нюгтясиндя $f(x)$ функсийасынын лимити олмадыгда онда (1) бярабярсизлийи x-ин a-нын мцяййян тяряфиндя (мясялян, сол вя йа да саь) тяряфиндя йерляшян гиймятляриндя юдяниля биляр. Беля олдугда $f(x)$ функсийасынын a нюгтясиндя сол лимитиндян вя саь лимитиндян данышмаг олар.

Тутаг ки, $f(x)$ функсийасы a нюгтясинин сол тяряфиндя тяйин олунмушдур.

Тяриф . Сонлу A вя a ядядляри верилдикдя $\forall\varepsilon > 0$ ядяди цчцн еля $\delta > 0$ ядяди вар ки, x-ин a-дан кичик олан вя

$$0 < a - x < \delta \tag{2}$$

бярабярсизлийини юдяйян бцтцн гиймятляриндя

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

бярабярсизлийи юдянилир. Онда А ядядиня $x \to a$ шяртиндя (вя йа $x = a$ нюгтясиндя) $f(x)$ функсийасынын сол лимити дейилир вя

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x<a)}} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) \tag{4}$$

кими ишаря олунур.

Тяриф. Сонлу A вя a ядядляри верилдикдя $\forall\varepsilon > 0$ ядяди цчцн еля $\delta > 0$ ядяди вар ки, x-ин a-дан бюйцк олан вя

$$0 < x - a < \delta \tag{5}$$

бярабярсизлийини юдяйян бцтцн гиймятляриндя

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

бярабярсизлийи юдянир. Онда А ядядиня $x \to a$ шяртиндя (вя йа $x = a$ нюгтясиндя) $f(x)$ функсийасынын саь лимити дейилир вя

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x>a)}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) \tag{6}$$

кими ишаря олунур.

Демяли, $x = a$ нюгтясиндя $y = f(x)$ функсийасынын лимитинин олмасы цчцн

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a-0) = f(a+0)$$

şərti ödənilməlidir.

23. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\dfrac{\pi x}{2}$ limitini hesablayın.

Həlli: Verilmiş ifadə $0\cdot\infty$ şəklində qeyrimüəyyənlikdir. Bu ifadəni $\frac{0}{0}$-kimi qeyri müəyyənlik şəklinə gətirək, $(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\frac{(1-x)}{ctg\frac{\pi x}{2}}$

Bundan sonra Lopital qaydasını tətbiq edək

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}:$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-1)'}{\left(ctg\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

24. $y=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ funksiyasının kəsilmə nöqtəsinin təsnifatını verin.

Həlli: $\frac{1}{1-x}$ funksiyası $x=1$-də kəsiləndir. Əvvəlcə sol limiti tapaq. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}}\right)=\lim\limits_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2$

olur. Çünki, $\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}=0$ olur. Deməli $f(1-0)=2$.

İndi sağ limiti tapaq.

$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{1-(1+\alpha)}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}-\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to+0}\left(3-\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=3$$

Çünki, $\lim\limits_{\alpha\to+0}\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}=0$. Deməli, $f(1+0)=3$

Yəni, $f(1-0) \neq f(1+0)$ olur. Bu isə $x=1$ nöqtəsinin birinci növ kəsilmə nöqtəsi olduğunu göstərir.

25. $y = x^2 \sin 2x$ funksiyasının funksiyasının beşinci tərtib törəməsini tapın.

Həlli: Leybins düsturunu tətbiq etsək alarıq:

$$[uv]^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v' + \frac{5\cdot 4}{2!}u'''v'' + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}u''v''' + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}u'v^{(4)} + uv^{(5)}$$

$$\left[x^2 \sin 2x\right]^{(5)} = \left(x^2\right)^{(5)} \sin 2x + 5\left(x^2\right)^{(4)}\left(\sin 2x\right)' + \frac{5\cdot 4}{2!}\left(x^2\right)^{(3)}\left(\sin 2x\right)'' +$$

$$+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}\left(x^2\right)''\left(\sin 2x\right)^{(3)} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}\left(x^2\right)'\left(\sin 2x\right)^{(4)} + \left(x^2\right)\left(\sin 2x\right)^{(5)} =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 10\cdot 2(-8)\cos 2x + 5\cdot 2x\cdot 16\sin 2x + x^2\cdot 32\cos 2x =$$

$$= -160\cos 2x + 160x\sin 2x + 32x^2\cos 2x$$

26. . Roll teoremini yazin və yoxlayın ki, $f(x) = \ln\sin x$ funksiyasına $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$ parçasında Roll teoremini tətbiq etmək olarmı?

<u>Teorem</u>. (Roll teoremi) $[a;b]$ parçasında kəsilməyən, (a,b) intervalında diferensiallanan və həmin parçanın üç nöqtələrində bərabər $f(a) = f(b)$ qiymətləri alan $y = f(x)$ funksiyası üçün (a,b) intervalında yerləşən heç olmasa elə bir c nöqtəsi var ki, bu nöqtədə $f'(x)$ törəməsi sıfıra bərabərdir, yəni $f'(c) = 0$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\sin\frac{\pi}{6} = \ln\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln\sin\frac{5\pi}{6} = \ln\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \ln\sin\frac{\pi}{6} = \ln\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f'(x) = (\ln\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$$

intervalında sonlu törəmə var. Deməli, Roll teoremini tətbiq etmək olar.

27. Koşi teoremi yazin və $[0;2]$ parçasında f(x)=2x^3+5x+1 və g(x)=x^2+4 funksiyaları üçün Koşi teoreminin doğruluğunu yoxlayın. Əgər ödəyərsə c aralıq qiymətini tapın.

Teorem: Əgər f(x) və g(x) fumksiyaları $[a;b]$ parçasında kəsilməyən , (a,b) intervalında diferensiallanan və bu intervalda $g'(x) \neq 0$ şərtini ödəyən funksiyalardırsa onda (a,b) intervalında yerləşən elə bir c nöqtəsi vardır ki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ düsturu doğrudur.

$f(x)=2x^3+5x+1$ və $g(x)=x^2+4$ funksiyaları $[0;2]$ parçasında Koşi teoremini şərtlərini ödəyir.

$$f(2) = 2\cdot 2^3 + 5\cdot 2 + 1 = 27, \ f(0) = 1$$

$$g(2) = 2^2 + 4 = 8, \ g(0) = 4$$

Olduğundan

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{27-1}{8-4} = \frac{6c^2+5}{2c}; \ \frac{6c^2+5}{2c} = \frac{13}{2}$$

Burada $6c^2-13c+5=0$ buradan isə

$$c_1 = \frac{1}{2}; \ c_2 = \frac{5}{3}$$ olur.

28. $y = 2x - x^2$ əyrinin A(1;1) və B(3;-3) nöqtələri arasında yerləşən AB qövsu üzərində elə M nöqtəsini tapın ki, həmin nöqtədən cəkilən toxunan AB vətərinə paralel olsun.

Həlli: $y=2x-x^2$ funksiyası x- in bütün qiymətlərində kəsilməz və diferensiallanan funksiyadır. Odur ki, bu funksiya $[1;3]$ parçasında Laqranj teoreminin şərtlərini ödəyir. Laqrang düsturuna əsasən

$$y(3) - y(1) = y'(c)(3-1) \qquad (1)$$

$$y(3) = -3, \qquad y'(x) = 2 - 2x$$

$y(1) = 1$ olmasını (1)-də nəzərə alsaq

$-3-1 = (2-2c)\cdot 2$ buradan c=2 y(2) =0 olduğu üçün M nöqtəsinin koordinatları (2;0) olur.

29.Mürəkkəb funksiyanın *törəməsi* düsturunun çıxarılışı.

Fərz edək ki, $y = f(x)$ və $x = \varphi(t)$ funksiyaları və həmin funksiyalardan düzəldilmiş $y = f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası verilmişdir.

Teorem. $x=\varphi(t)$ funksiyası t_0 nöqtəsində və $y=f(x)$ funksiyası uyğun $x_0=\varphi(t_0)$ nöqtəsində diferensiallanan olduqda $y=-f(\varphi(t))$ mürəkkəb funksiyası t_0 nöqtəsində diferensiallanandır və onun törəməsi

$$\left(f(\varphi(t_0))\right)'=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0) \qquad (1)$$

dusturu ilə hesablanır.

İsbatı. Törəmənin tərifinə əsasən

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}=\varphi'(t_0)+\alpha(t) \qquad \lim_{t\to t_0}\alpha(t)=0$$

və ya

$$x-x_0=\varphi(t)-\varphi(t_0)=(t-t_0)(\varphi'(t_0)+\alpha(t)) \qquad (2)$$

bərabərliyini yazmaq olar. Bu bərabərliyi $f(x)$ funksiyası üçün də yazaq:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)(f'(x_0)+\beta(x)) \qquad \lim_{x\to x_0}\beta(x)=0 \qquad (3)$$

(2) və (3) bərabərliklərini nəzərə alsaq:

$$f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))=f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\ f'(x_0)+\beta(x)=$$
$$=(t-t_0)(\varphi'(t_0)+\alpha(t))(f'(x_0)+\beta(x))$$

$x=\varphi(t)$ funksiyası t_0 nöqtəsində diferensiallanan olduğundan həmin nöqtədə kəsilməyəndir. Buna görə də $t\to t_0$ şərtində $x\to x_0$ və $\lim\limits_{t\to t_0}\beta(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$ bunları nəzərə alaraq

$$\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=(\varphi'(t_0)+\alpha(t))(f'(x_0)+\beta(x))$$

bərabərliyində $t\to t_0$ şərtində limitə keçsək

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(\varphi(t))-f(\varphi(t_0))}{t-t_0}=\varphi'(t_0)\cdot f'(x_0)$$

münasibətini alarıq, bu da (1) bərabərliyinin doğru olduğunu göstərir (1) bərabərliyini bəzən

$$y'_t=y'_x\cdot x'_t \qquad (4)$$

şəklində yazırlar.

30. Funksiyanın ekstemumu. Ekstemumun varlığı üçün zəruri şərtlər

Fərz edək ki, $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin olunmuşdur və $x_0\in\,]a;b[$-dir.

Яэяр $x=x_0$ нюгтясинин щяр щансы $]x_0-\delta;x_0+\delta[$ $(\delta>0)$ ятрафында йерляшян бцтцн *x* нюгтяляриндя

$$f(x)\le f(x_0),\ (f(x)\ge f(x_0)) \qquad (1)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində lokal maksimumu (minimumu) var. $f(x_0)$ ədədinə funksiyanın lokal maksimum (minimum) qiyməti deyilir. Funksiyanın lokal maksimumuna və lokal minimumuna birlikdə funksiyanın lokal ekstemumu deyilir.

Teorem (Lokal ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt). Яэяр диференсиаллана билян $y = f(x)$ функсийасынын $x = x_0$ нюгтясиндя локал екстемуму варса, онда онун тюрямяси щямин нюгтядя сыфра бярабярдир, йяни $f'(x_0) = 0$.

Müəyyən olmaq üçün $x = x_0$ nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının lokal maksimum qiymət aldığını fərz edək. Onda ixtiyarı kiçik Δx artımı üçün

$$f(x_0 + \Delta x) \le f(x_0) \Leftrightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$$

Buradan isə $\Delta x > 0$ olduqda $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$ alırıq.

$\Delta x < 0$ olduqda $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$ alırıq. Bu bəbərsizliklərdə $\Delta x \to 0$ şərtində limitə keçsək alarıq:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \le 0, \qquad (2)$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) \ge 0, \qquad (3)$$

(2) və (3) bərabərsizlikləri birlikdə yalnız $f'(x_0) = 0$ olduqda doğrudur.

Верилмиш функсийанын бющран нюгтясиндя локал екстемумун гиймятинин олдуьуну йохламаг цчцн кафи шяртляр веряк

I-kafi şərt: $y = f(x)$ funksiyası $x = x_0$ böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməyən və həmin ətrafda (x_0- nöqtəsi müstəsna ola da bilər) diferensiallanandırsa, onda:

1. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ olduqda $f'(x) > 0$ və $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) < 0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal maksimumu var;

2. funksiyanın $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ olduqda $f'(x) < 0$ və $x > x_0$ olduqda isə $f'(x) > 0$ olarsa, həmin nöqtədə funksiyanın lokal minimumu var;

3. Əgər $f'(x)$ törəməsi $x < x_0$ və $x > x_0$ olduqda işarəsini dəyişmirsə, onda x_0 nöqtəsində funksiyanın lokal ekstemumu yoxdur.

II Kafi şərt: Əgər x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş $y = f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi varsa və $f'(x_0) = 0$ və $f''(x_0) \ne 0$-dırsa, onda:

1. $f''(x_0) < 0$ олдугда функсийанын x_0 нюгтясиндя локал максимуму вардыр;

2. $f''(x_0) > 0$ олдугда функсийанын x_0 нюгтясиндя локал минимуму вардыр.

III Kafi şərt. Əgər $y = f(x)$ funksiyasının x_0 böhran nöqtəsində n-ci tərtibə qədər kəsilməyən və $\begin{matrix} f'(x_0) = f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \\ f^{(n)}(x_0) \ne 0 \end{matrix}$ (5) şərtlərini ödəyən törəmələri varsa, onda:

1. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0) < 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal maksimumu var;

2. n cüt ədəd və $f^{(n)}(x_0) > 0$ olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal minimumu var;

3. n tək ədəd olduqda funksiyanın x_0 nöqtəsində lokal ekstemumu yoxdur.

31. Əyrinin asimptotları . $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$ funksiyasının maili asimpitotunu tapın.

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ və $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ şərtlərindən heç olmasa biri ödənirsə $x=x_0$ şaquli asimpitotdur. y=kx+b maili asimpitotdur.

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\qquad\qquad$ $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$ funksiyasının maili asimpitotunu tapın.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2-2x^2+x}{2(2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{4x-2}=\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

32. $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$ funksiyasının lokal ekstremumlarını tapın.

$$f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24=4\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=4\left[\left(x^3-x^2\right)-\left(5x^2-5x\right)+\left(6x-6\right)\right]=4\left[x^2(x-1)-\right.$$
$$\left.-5x(x-1)+6(x-1)\right]=4\left[(x-1)\left(x^2-5x+6\right)\right]=4\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]=0\Rightarrow x_1=1;x_2=2;x_3=3.$$

$f''(x)=12x^2-48x+44$ **олур вя бурадан** $f''(1)=12-48+44=8>0$ **олдуьундан** $f(x)$ **функси-йасыны** $x=1$ **нюгтясиндя локал минимум гиймят алыр:** $f_{min}(1)=1-8\cdot1+22\cdot1-24+12=3$.

$f''(2)=12\cdot4-48\cdot2+44=-4<0$ олдуьундан $f(x)$ функсийасы $x=2$ нюгтясиндя локал максимум гиймят алыр: $f_{max}(2)=4\cdot2^3-24\cdot2^2+44\cdot2-24=4$.

$f''(3)=12\cdot9-48\cdot3+44=8>0$ олдуьундан $f(x)$ функсийасы $x=3$ нюгтясиндя локал минимум гиймят алыр: $f_{min}(3)=3$.

33. Çoxdəyişənli funksiya və onun limiti. Təkrar və ikiqat limitlər.

Tutaq ki, G çoxluğu xy müstəvisinin nöqtələr çoxluğu və həqiqi z ədədlərin F çoxluğu verilmişdir.

Tərif1. G çoxluğunun hər bir $M(x,y)$ nöqtəsinə F çoxluğundan müəyyən $z=f(x,y)$ ədədini qarşı qoyan f uyğunluğuna G çoxluğunda təyin olunmuş və qiymətləri F çoxluğuna daxil olan funksiya deyilir

Tərif Tutaq ki, sonlu A ədədi $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsi və istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə δ ədədi var ki, G çoxluğnun

$$0 < \rho(M, M_0) < \delta \quad (1)$$

Bərabərsizliyini ödəyən bütün $M = (x, y) \in G$ nöqtələrində

$$|f(M) - A| < \varepsilon \quad (4)$$

Münasibəti ödənilir.Onda A ədədinə $M \to M_0$ şərtində G çoxluğu üzrə f funksiyasının limiti deyilir.A ədədinin G çoxluğu üzrə $M \to M_0$ şərtində f funksiyasının limiti olmasını

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A \quad (2)$$ kimi yazılır.

Tərifdəki $0 < \rho(M, M_0) < \delta$ əvəzinə $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ və yaxud $|x - x_0| < \delta$ $|y - y_0 < \delta|$ bərabərsizliklərinin yazmaq olar.

İkidəyişənli funksiyaların x və y arqumentləri növbə ilə x_0, y_0 ədədlərinə yaxınlaşdıqda da limitindən danışmaq olar. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ limitinə funksiyanın təkrar limiti deyilir.Sonuncu ifadədə limitlərin yerini dəyişməklə müxtəlif təkrar limitlər almaq olar. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$

<u>Teorem</u> 1 $C = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ Ikiqat limiti varsa, ***y***-in qeyd olunmuş qiymətində ***x*** dəyişəninə nəzərən $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ limiti varsa, onda $A = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ təkrarlanan limitidə var və ikiqat C limitinə bərabərdir.

Ümumiyyətlə G oblastında təyin olunmuş $f(x, y)$ funksiyasının $M_0(x_0, y_0)$ limit nöqtəsində $C = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x : y)$ ikiqat limiti varsa ***x*** və ***y*** –in qeyd olunmuş qiymətlərində, uyğun olaraq $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ və $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ limitləri varsa, onda $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ bərabərliyi doğrudur.

34. Xüsusi törəmələr. Tam artım və tam diferensial.

$U = f(x,y,z)$ funksiyasının təyin oblastına daxil olan ixtiyari bir $M(x,y,z)$ nöqtəsini götürək və x,y,z arqumentlərinə uygun olaraq elə $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$, $\Delta z \neq 0$ artımlarını verək ki, $N(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ nöqtəsi də $u = f(x,y,z)$ funksiya sının təyin oblastına daxil olsun. Onda

$$\Delta_x u = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z), \tag{1}$$

$$\Delta_y u = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z), \tag{2}$$

$$\Delta_z u = f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z), \tag{3}$$

ifadələri $u = f(x,y,z)$ funksiyasının uygun olaraq, x,y,z arqumentlərinə nəzərən xüsusi artımları adlanır. $\frac{\Delta_x u}{\Delta x}$ nisbətinin $\Delta x \to 0$-da sonlu limiti varsa, bu limitə $u = f(x,y,z)$ funksiyasının M nöqtəsində x arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi deyilir və $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, u'_x, f'_x$ simvollarından biri ilə işarə olunur. Tərifə əsasən

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x,\ y,z) - f(x,y,z)}{\Delta x} \text{ olur.}$$

Eyni qayda ilə $u = f(x,y,z)$ funksiyasının y arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y,\ z) - f(x,y,z)}{\Delta y} \text{ və}$$

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının z arqumentinə nəzərən birinci tərtib xüsusi törəməsi

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}$$

şəklində yazılır.

Tərifdən aydındır ki, $u = f(x,y,z)$ funksiyasının bir arqumentinə nəzərən xüsusi törəməsini hesabladıqda onun yerdə qalan arqumentlərini sabit hesab etmək lazımdır. Buna görə də çoxdəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrini hesabladıqda birdəyişənli funksiya törəməsinin hesablanma qaydalarından və düsturlarından bilavasitə istifadə olunur.

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının $M(x,y,z)$ nöqtəsində tam artımı

$$\Delta u = f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \tag{4}$$

şəklindədir.

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının tam artımını $M(x,y,z)$ nöqtəsində

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \alpha\Delta x + \beta\Delta y + \gamma\Delta z \tag{5}$$

şəklində göstərmək mümkün olduqda ona $M(x,y,z)$ nöqtəsində diferensiallana bilən funksiya deyilir.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\Delta z, \tag{6}$$

$u = f(x,y,z)$ funksiyasının $M(x,y,z)$ nöqtəsində tam diferensialı adlanır.

$dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$; $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$ olduğundan (3)-dən alarıq:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot dz. \tag{7}$$

35. $f(x,y)=\dfrac{x-2y}{x+3y}$ funksiyasının $(0,0)$ nöqtəsində, təkrar və ikiqat limitini tapın.

. əvvəlcə $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-2y}{x+3y}$ ikiqat limitini tapaq:

Fərz edək ki, $M(x,y)$ nöqtəsi 0(0;0) nöqtəsinə yaxınlaşır. Onda x və y –in $y=kx$ düz xətti üzrə dəyişməsinə baxaq $(k\neq 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x-2y}{x+3y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2kx}{x+3kx}=\lim_{x\to 0}\frac{x(1-2k)}{x(1+3k)}=\frac{1-2k}{1+3k}$$

Göründüyü kimi, nəticə k-nın seçilməsindən asılı olaraq, dəyişir (yəni limit yeganə deyildir). Deməli, $M(x,y)\to 0(0;0)$ -da baxılan limit yoxdur.

Təkrar limitləri tapaq.

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-2y}{x+2y}=\lim_{x\to 0}\frac{x-2\cdot 0}{x+3\cdot 0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0}1=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-2y}{x+3y}=\lim_{y=0}\frac{0-2y}{0+3y}=-\frac{2}{3}$$

36. $u=arctg\dfrac{xy}{z^2}$ funksiyasının tam diferensialını tapın.

Həlli. $du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz$ (1)

düsturu ilə hesablanır.

Xüsusi törəmələri hesablayaq.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{y}{z^2}=\frac{yz^2}{x^4+x^2\cdot y^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\frac{x}{z^2}=\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\left(-\frac{2xy}{z^3}\right)=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{2xy}{z^3}=-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2} \quad (4)$$

(2), (3) və (4) –ü (1) –də nəzərə alarıq.

$$du = \frac{yz^2}{z^4 + x^2y^2}dx + \frac{xz^2}{z^4 + x^2y^2}dy - \frac{2xyz}{z^4 + x^2y^2}dz$$

37. Yuxarı sərhəddi dəyişən oIan müəyyən inteqral. Nyuton-Leybnis düsturu.

Tutaq ki, $\int_a^b f(t)\,dt$ inteqralının yuxarı sərhəddi b dəyişir. $b = x$ işarə edək. Onda $\int_a^x f(t)\,dt$ inteqralı x-in funksiyası olur. Yəni $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ olur.

Teorem. Müəyyən inteqralın yuxarı sərhəddə nəzərən törəməsi inteqralaltı funksiyanın yuxarı sərhəddi yazdıqdan sonra alınan funksiyaya bərabərdir. Yəni $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ olur.

Müəyyən cəhətdən əlverişli olan Nyuton-Leybnis düsturunu verək.

Теорем. [*а*, *б*] парчасында кясилмяйян $f(x)$ функсийасынын ибтидаи функсийасı $F(x)$-дирся, онда $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ (1)

дцстуру доьрудур. (1) дцстуруна Нйутон-Лейбнис дцстуру дейилир.

Bilirik ki, $\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$. Buradan aydındır ki, $\int_a^x f(t)\,dt$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Digər tərəfdən teoremin şərtinə əsasən $F(x)$ də $[a,b]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Buna görə də $f(x)$ funksiyasının iki ibtidai funksiyası olan $\int_a^x f(t)\,dt$ funksiyası ilə $F(x)$ funksiyası bir-birindən sabit toplananla fərqlənir, yəni $\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c$ (2) olur. (2)-də $x = a$ yazsaq, $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ olur və (2)-dən $F(a) + c = 0 \Rightarrow c = -F(a)$ alırıq. $c = -F(a)$-nı (2)-də nəzərə alsaq, (2)-dən

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a) \qquad (3)$$

alırıq. (3)-də x yerinə b yazsaq

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \qquad (4)$$

alarıq. (4)-də t yerinə x yazsaq

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (5)$$

alınır.

38. $u = x^{y^2 z}$ funksiyasının diferensialını tapın.

Məlumdur ki, funksiyanın diferensialı $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

düsturu ilə tapılır. Xüsusi törəmələri tapaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z - 1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot 2yz \cdot \ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot y^2 \cdot \ln x$$

Tapdığımız xüsusi törəmələri tam diferensial düsturunda yerinə yazaq:

$$du = y^2 z \cdot x^{y^2 z-1} dx + x^{y^2 z} \cdot 2yz \cdot \ln x\, dy + x^{y^2 z} \cdot y^2 \ln x\, dz$$

39 . $u = arctg\frac{x+y}{1-xy}$ **funksiyasının ikinci tərtib differensialını tapın.**

İkidəyişənli funksiyanın tam diferensial düsturu aşağıdaki kimidir:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

Bu düstura əsasən funksiyanın xüsusi törəmələrini yazaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(arctg \frac{x+y}{1-xy} \right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x = \frac{1}{\frac{(1-xy)^2 + (x+y)^2}{(1-xy)^2}} \cdot \frac{(1-xy)-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2} =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(arctg \frac{x+y}{1-xy} \right)'_y = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y =$$

$$= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2 + (x+y)^2} \cdot \frac{1-xy-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}$$

Bunları düsturda yerinə yazsaq alarıq:

$$du = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2} dx + \frac{1+x^2}{(1-xy)^2+(x+y)} dy$$

$$du = \frac{1}{(1-xy)^2+(x+y)^2} \left[\left(1+y^2\right)dx + \left(1+x^2\right) \right]$$

40. Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu. Ekstremum üçün zəruri şərt.

$M_0(x_0; y_0)$ nöqtəsinə kafi yaxın və ondan fərqli olan $M(x,y)$ nöqtələri üçün $f(x;y) < f(x_0;y_0)$ $\left(f(x;y) > f(x_0;y_0)\right)$ olduqda $z = f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində maksimumu (minimumu) var deyirik. $z = f(x;y)$ funksiyasının maksimum və minimumuna birlikdə onun ekstemumu deyilir.

$$f(x;y) < f(x_0;y_0) \Rightarrow f(x;y) - f(x_0;y_0) < 0 . \qquad (1)$$

Burada $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ işarə etsək (1)-dən alarıq:

$$f\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0; y_0\right)<0 \text{ və yaxud } \Delta f<0$$

Yəni, x və y arqumentlərinin bütün kafi kiçik $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ artımı üçün $\Delta f<0$ olarsa, onda $z=f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində maksimumu var.

$$f(x;y)>f\left(x_0;y_0\right) \Rightarrow f(x;y)-f\left(x_0;y_0\right)>0 \Rightarrow f\left(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0;y_0\right)>0$$

və yaxud $\Delta f>0.$

Yəni, x və y arqumentlərinin bütün kafi kiçik $\Delta x \neq 0$, $\Delta y \neq 0$ artımı üçün $\Delta f>0$ olarsa, onda $z=f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində minimumu var.

Funksiyanın verilmiş oblasta (təyin oblastında) bir neçə maksimum və minimumu ola da bilər və maksimum, minimumu olmaya da bilər.

Teorem (ekstemumun varlığı üçün zəruri şərt).

Diferensiallanan $z=f(x;y)$ funksiyası $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində ekstemuma malikdirsə, onda $z=f(x;y)$funksiyasının birinci tərtib xüsusi törəmələri $M_0(x_0;y_0)$nöqtəsində sıfra bərabərdir. Yəni

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial y}=0. \qquad (2)$$

. y dəyişəninə y_0 qiymətini versək, onda $f(x;y)$ bir x dəyişəninin funksiyası olur. Bu funksiyanın $x=x_0$ nöqtəsində ekstemumu olduğu üçün onun $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ var və sıfra bərabərdir. Eyni qayda ilə $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}$ törəməsinin sıfra bərabər olduğunu göstərmək olar.

(2) bərabərlikləri ekstemumun zəruri şərtini ifadə edirlər. (2) sistemini ödəyən nöqtələrə stasionar nöqtələr deyilir. Funksiya ekstemum qiymətini xüsusi törəmələrinin biri və ya hər ikisi olmadığı nöqtələrdə də ala bilər.

7) Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumu. Ekstremum üçün kafi şərt.

Kafi şərt. Fərz edək ki, $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ böhran nöqtəsinin müəyyən ətrafında bütün ikitərtibli xüsusi törəmələri var və bu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ xüsusi törəmələr həmin nöqtədə kəsilməyəndir və $\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)=0$ -dır.

$$\Delta=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)-\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)\right]^2 \qquad (5)$$

işarə edək.

Onda $\Delta>0$ olduqda $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində ekstemumu vardır. $\Delta<0$ olduqda $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində $f(x;y)$ funksiyasının ekstemumu yoxdur.

1) $\Delta>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)<0$ olduqda $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində maksimumu var.

2) $\Delta>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M)>0$ olduqda $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində minimumu var.

3) $\Delta=0$ olduqda $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində ekstemumu ola da bilər, olmaya da bilər.

Qeyd:

$$\Delta>0\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg|_{M_0}>0\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{M_0}\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{M_0}>\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg|_{M_0} \quad (6)$$

(6)-dən alınır ki, əgər $f(x;y)$ funksiyasının $M_0(x_0;y_0)$ nöqtəsində ekstemumu varsa, onda $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\Big|_{M_0}$ və $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\Big|_{M_0}$ hər ikisi eyni işarə lidir.

ikitərtibli tam diferensialı $d^2u\big|_{M_0}>0$ olduqda M_0 nöqtəsində $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$ funksiyasının aldığı qiymət minimumdur. $d^2u\big|_{M_0}<0$ olduqda $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$ funksiyanın M_0 nöqtəsində aldığı qiymət maksimumdur.

41 $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$ funksiyasının ekstremumunu tapın.

Həlli: Verilmiş funksiyanın xüsusi törəmələrini tapaq.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}y+(-1)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)+(47-x-y)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}x+(-1)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)+(47-x-y)\cdot\frac{1}{4}$$

Funksiyanın böhran nöqtələrini tapmaq üçün aşağıdakı sistemi birgə həll edək

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=0\\ \frac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}y-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{47}{3}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}y=0\\ \frac{1}{2}x-\frac{x}{3}-\frac{y}{4}+\frac{47}{4}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y}{6}-\frac{y}{4}-\frac{2}{3}x+\frac{47}{3}=0\\ \frac{x}{6}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y+\frac{47}{4}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2y-3y-8x+188=0\\ 2x-3x-6y+141=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y-8x+188=0\\ -x-6y+141=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=188-8x\\ -x-1128+48x+141=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 47x=987\Rightarrow x=21;\qquad y=188-168=20$$

M(21;20) böhran nöqtəsidi verilmiş funksiyanın II tərtib xüsusi törəmələrini yazaq:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12};$$

$$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Bigg|_M\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Bigg|_M-\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Bigg|_M\right]^2=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{144}=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}=\frac{47}{144}>0$$

$\Delta>0;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_M<0$ olduğu üçün M(21;20) – nöqtəsi maksimum nöqtədir.

$$Z_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=210+6(7+5)=210+72=282.$$

42. $z=2x^3+2y^3-36xy+430$ **funksiyasının ekstremumunu tapın.**

Щялли. $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2-36y=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}=6y^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x^2-36y=0\\ 6y^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{6}x^2\\ 6\left(\frac{x^2}{6}\right)^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\ \Rightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{6}x^2\\ x\left(x^3-216\right)=0\end{cases}$ (1)

Яввялжя $x\left(x^3-216\right)=0$ тянлийинин кюклярини тапаг:

$x(x-6)\left(x^2+6x+36\right)=0\Rightarrow x_1=0; x_2=6$ алырыг.

$x^2+6x+36=0\Rightarrow D=b^2-4ac=9-36=-27<0$ олдуьундан $x^2+6x+36=0$ тянлийинин комплекс кюкляри вардыр. $x_1=0; x_2=6$ щягиги кюклярини $y=\frac{1}{6}x^2$ тянлийиндя нязяря алсаг

$y_1=0; y_2=\frac{1}{6}\cdot 6^2=6$ аларыг. Демяли, $M_0(0;0)\wedge M_1(6;6)$ (1) системинин щяллидир.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(6x^2-36y\right)'_x=12x\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0}=12\cdot 0=0$; $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_1}=12\cdot 6=72$ олар.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-36\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{M_0}=-36;\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_{M_1}=-36$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(6y^2-36x\right)'_y=12y\Rightarrow\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_0}=0;\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_1}=12\cdot 6=72$ Бунлара ясасян

$\Delta|_{M_0}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0}\cdot\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_0}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2_{M_0}=$

$=0\cdot 0-(-36)^2=-1296<0$ олдуьундан верилян функсийанын $M_0(0;0)$ нюгтясиндя екстремуму йохдур.

$\Delta|_{M_1}=72\cdot 72-(-36)^2=3888>0$ олдуьундан $u(x;y)$ функсийасынын $M_1(6;6)$ нюгтясиндя екстремуму вардыр вя $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_1}=72>0$ олдуьундан $u(x;y)$ функсийасынын $M_1(6;6)$ нюгтясиндя алдыьы гиймят минимумдур.

$u(x;y)|_{min}(M_1)=2\cdot 6^3+2\cdot 6^3-36\cdot 6\cdot 6+430=-2$.

Гейд: $\Delta>0\Rightarrow\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_M\cdot\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_M-\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right|_M>0\Rightarrow$

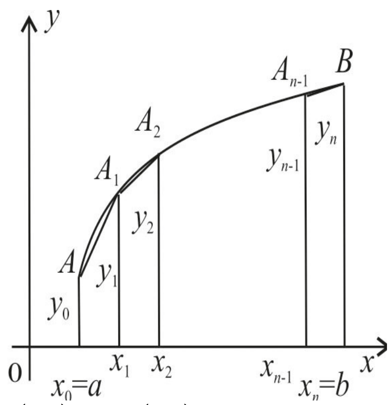
$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_M\cdot\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_M>\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2\right|_M \qquad (2)$$

(2)-дян алыныр ки, яэяр $u(x;y)$ функсийасынын екстремуму варса, онда $\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right|_M\wedge\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right|_M$ щяр икиси ейни ишарялидир.

43 Müəyyən inteqral və onun xassələri.

Сонлу $[a,b]$ парчасында кясилмяйян $f(x)$ функсийасы верилсин. $[a,b]$ парчасыны $a=x_0,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n=b$ нюгтяляри иля *н* щиссяйя бюляк (бурада

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ олдуьу фярз олунур). Бу щалда $[a,b]$ парчасы кичик $[x_{k-1}, x_k]$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ щиссяляриня бюлцнцр. $[x_{k-1}, x_k]$ парчасынын узунлуьуну Δx_k иля ишаря едяк:



$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \left(k=\overline{1,n}\right).$$

$$\alpha_1 \in [x_0, x_1], \alpha_2 \in [x_1, x_2], \ldots, \alpha_k \in [x_{k-1}, x_k], \ldots,$$

$\alpha_n \in [x_{n-1}, x_n]$ ixtiyari nöqtələrini götürək $\left(x_{k-1} < \alpha_k < x_k,\ k=\overline{1,n}\right)$ və bu nöqtələrin hər birində funksiyanın qiymətlərini uyğun olaraq $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots,$ $f(\alpha_k), \ldots, f(\alpha_n)$ işarə edərək

$$\dot{I}(x_k, \alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\, \Delta x_k \qquad (1)$$

cəmini düzəldək. (1) cəminə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasında inteqral cəmi deyilir. Bu cəmin qiyməti $[a,b]$ parçasının kiçik parçalara bölgü qaydasından, həm də bu kiçik parçalarda α_k nöqtələrinin seçilməsindən asılıdır. $\lambda = max\Delta x_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ işarə edək.

<u>Tərif.</u> $[a,b]$ parçasının kiçik parçalara bölünmə qaydasından və bu kiçik parçalarda α_k nöqtələrinin seçilmə üsulundan asılı olmayaraq $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə (1) inteqral cəminin $\lambda \to 0$ şərtində sonlu limiti varsa, onda bu limitə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçası üzrə müəyyən inteqralı deyilir və $\int_a^b f(x)\,dx$ kimi işarə olunur. Tərifə əsasən yaza bilərik: $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$. (2)

Бурада $f(x)$-я интегралалты функсийа, $f(x) \cdot dx$-я интегралалты ифадя, *а* вя *б* ядядляри уйьун олараг мцяййян интегралын ашаьы вя йухары сярщядляри, *х* дяйишяни ися интеграллама дяйишяни адланыр. $[a,b]$ парчасы интеграллама парчасы адланыр. Мцяййян интегралын щяндяси мянасыны веряк. Бунун цчцн яввялжя (1) интеграл жяминин щяндяси изащыны эюстяряк.

Yuxarıdan $y = f(x)$ $(f(x) > 0)$ funksiyasının əyrisi ilə, yanlardan $x = a$ və $x = b$ düz xətləri ilə, aşağıdan absis oxu ilə əhatə olunmuş əyri xətli trapesi çəkək .
Şəkildən görünür ki, f(x) funksiyasının inteqral cəmi oturacağı Δx_k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ hündürlüyü $f(\alpha_k)$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$, sahəsi $f(\alpha_k) \cdot \Delta x_k$ $\left(k=\overline{1,n}\right)$ olan ştrixlənmış düzbucaqlıların sahələrinin cəmidir Onda $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\alpha_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$

inteqralı həndəsi olaraq $f(x) \geq 0$ olduqda şəkildəki *a A B b* əyrixətli trapesin sahəsini verir. Qeyd edək ki, müəyyən inteqral yalnız $f(x)$ funksiyasının təbiətindən və inteqralın sərhədlərindən asılı olur, inteqral dəyişənindən asılı olmur, ona görə inteqrallama dəyişəninin istənilən dəyişən ilə işarə etmək olar. Yəni $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(z)\,dz$

Мцяййян интеграл анлайышыны веряркян биз $a < b$ олдуьуну фярз етмишдик. $b < a$ олдугда

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

olduğunu qəbul edək. $a=b$ olduqda yenə də qəbul edək ki, $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Müəyyən inteqralın əsas xassələri

<u>Xassə 1.</u> $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, $k\cdot f(x)$ funksiyası da $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır və $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ olur.

<u>Xassə 2.</u> $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda бир нечя функсийанын жяминин мцяййян интегралы, топлананларын мцяййян интегралларынын сяминя бярабярдир. $\int_a^b [f(x)\pm\varphi(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx$ olur.

<u>Хасся 3.</u> $f(x)$ функсийасы [а,с] вя [с,б] парчаларында интегралланандырса, онда $f(x)$ функсийасы [а,б] парчасында интегралланандыр вя $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ олур.

<u>Xassə 4.</u> $[a,b]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ və $\varphi(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasının bütün nöqtələrində $f(x)\le\varphi(x)$ şərtini ödəyirsə, onda

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (2)$$

<u>Xassə 5.</u> m və M ədədləri $[a,\ b]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ funksiyasının ən kiçik və ən böyük qiymətləridirsə və $a<b$-dirsə, onda

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \qquad (4)$$ олур.

<u>Xassə 6 (orta qiymət teoremi).</u> $f(x)$ funksiyası $[a,\ b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda elə $c\in\,]a,b[$, $(a<c<b)$ nöqtəsi vardır ki,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot f(c) \qquad (6)$$ olur.

44. Birinci və ikinci növ qeyriməxsusi inteqrallar.

<u>Ы нюв гейри-мяхсуси интеграллар:</u>

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,+\infty[$ intervalında kəsilməyəndirsə, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$ limiti vardırsa və sonludursa onda bu limitə $f(x)$ funksiyasının $[a,+\infty[$ intervalında birinci növ qeyri-məxsusi (sonsuz sərhədli) inteqralı deyilir və $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ kimi işarə olunur. Tərifə əsasən $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx.$ (2)

Bu halda deyirlər ki, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ inteqralı vardır və yaxud yığılandır.

Əgər $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ limiti yoxdursa və yaxud sonsuzluqdursa, onda deyirlər ki, birinci növ qeyri-məxsusi inteqralı yoxdur və yaxud dağılır. Əgər $f(x)$ funksiyası $]-\infty,a]$ intervalında kəsilməyəndirsə, $\lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_N^a f(x)\,dx$ limiti vardırsa və sonludursa, onda $\int\limits_{-\infty}^a f(x)\,dx$ inteqralı yığılan, əks halda dağılan adlanır.

Əgər $f(x)$ funksiyası $]-\infty,+\infty[$ intervalında kəsilməyəndirsə,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \quad (3)$$

bərabərsizliyinin sağ tərəfindəki

$\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ və $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ inteqralları yığılandırsa, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ I növ qeyri-məxsusi inteqralı yığılan, $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ və $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ inteqrallarından heç olmazsa biri dağılandırsa, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ inteqralı dağılan olur.

II növ qeyri-məxsusi inteqrallar

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b[$ intervalında təyin olunub və kəsilməzdir. Lakin $x=b$ nöqtəsində kəsiləndir. Onda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ limiti varsa və sonludursa, bu limitə II növ qeyri-məxsusi inteqral deyilir və $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ (4) şəklində yazılır. Bu halda inteqral vardır və ya yığılandır deyirlər.

Əgər $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ limiti yoxdursa və yaxud sonsuzluqdursa, onda $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ yoxdur və ya dağılandır deyirlər.

Əgər $y=f(x)$ funksiyası $]a,b]$ intervalında təyin olunmuş və kəsilməyəndirsə, $x=a$ nöqtəsində kəsiləndirsə, onda $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ limiti varsa və sonludursa bu limitə $]a,b]$ intervalında II növ qeyri-məxsusi inteqral deyilir və

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \quad (5)$$

kimi yazılır. Bu halda da $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ yığılan adlanır.

Əgər $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ limiti yoxdursa, yaxud sonsuzluqdursa, onda $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ inteqralı dığılan adlanır.

Яэяр [*а*,*б*] парчасынын бир $x=c$ нюгтясиндя $f(x)$ функсийасы кясиляндирся вя [*а*,*ж*[,]*ж*,*б*] интервалларында тяйин олунмуш вя кясилмяйяндирся, онда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\,. \qquad (6)$$

(6) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limitlərin hər biri vardırsa və sonludursa, $\int_a^b f(x)\,dx$ inteqralı yığılan adlanır.

(6) bərabərliyinin sağ tərəfindəki limitlərin heç olmazsa biri yoxdursa yaxud sonsuzluqdursa onda (6)-ün sol tərəfindəki $\int_a^b f(x)\,dx$ inteqralı dağılan adlanır.

45. $J = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ **inteqralını hesablayın.**

Həlli:

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt \\ t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t)^2\sqrt{4-4\sin^2 t}\,\cdot$$

$$\cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{0}} 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{0}} 16\sin^2 t\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\frac{(1-\cos 2t)}{2}$$

.

$$\cdot\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2 2t\right)dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 4t}{2}dt = 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t dt = 4\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) - 2\cdot\frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \pi -$$

$$-\frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = \pi$$

46 $\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$ **qeyriməxsusi inteqralını hesablayın.**

Həlli:

$$\int_1^{+\infty}\frac{arctgx}{1+x^2}dx = \int_1^{\infty} arctgx d(arctgx) = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b arctgx(arctgx)\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{arctg^2 x}{2}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{arctg^2 b}{2} - \frac{arctg^2 1}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32}\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2 - \pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$$

Olduğundan inteqral yığılandır.

47. $J=\int_3^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$ **inteqralını hesablayın.**

Həlli: $J=\int_3^{10}\frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$ aşağidaki əvəzləməni aparaq:

$\sqrt{x+6}=t \Rightarrow x+6=t^2 \Rightarrow dx=2tdt$

eyni qayda ilə $x-1=t^2-7$

Dəyişəni əvəz etdiyimizdən inteqralın sərhəddidə dəyişər

$x_1=3; \qquad t_1=\sqrt{3+6}=3$

$x_2=10 \qquad t_2=\sqrt{10+6}=4$

$$\int_3^4\frac{2tdt}{(t^2-7)t}=\int_3^4\frac{2dt}{t^2-7}=\frac{2}{2\sqrt7}\ln\frac{t-\sqrt7}{t+\sqrt7}\Bigg|_3^4=\frac{1}{\sqrt7}\left[\ln\left|\frac{4-\sqrt7}{4+\sqrt7}\right|-\ln\left|\frac{3-\sqrt7}{3+\sqrt7}\right|\right]$$

48. İşarələrini növbə ilə dəyişən sıralar. Leybnis əlaməti.

$a_n>0,\ (n=1,2,3,...)$ olduqda $a_1-a_2+a_3-a_4+...+(-1)^{n+1}a_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ (1)

sırasına işarəsini növbə ilə dəyişən sıra deyilir.

(1) sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (2) sırasına baxaq.

(2) sırası yığılan olduqda (1) sırasına mütləq yığılan sıra deyilir.
(2) sırası daığılan, (1) sırası yığılan olduqda (1) sırasına şərti yığılan sıra deyilir.
İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların yığılması üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.
Teorem. (Leybinis əlaməti) İşarəsini növbə ilə dəyişən (1) sırasının hədləri üçün

1) $a_1\ge a_2\ge a_3\ge ...$ (3)

2) $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ (4)

Şərtləri ödəndikdə həmin sıra yığılandır. Onun cəmi müsbət ədəddir və bu cəm sıranın birinci həddindən (yəni a_1-dən) böyük deyildir.

49. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}+\ldots$ **sırasının yığılan olmasını göstərin və bu sıranın cəmini tapın.**

Həlli:

$$a_4=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+2)}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$a_1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right); \qquad a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right);$$

$$a_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right); \qquad a_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right);$$

$$a_5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right); \qquad a_6 = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right), \ldots\ldots$$

Bunun əsasında

$$S_u = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right) =$$

$$= \left[1 - \frac{1}{n+2}\right] - \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right] = \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}\right] =$$

$$= 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n=2)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4} - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{4}$$

Ona görə sıra yığılır və səranın cəmi $\frac{1}{4}$

$$\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

50. $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \cdots$ **sırasının mütləq yığılan olmasını göstərin.**

Həlli: **Dalamver əlaməti.**

Müsbəthədli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasında (n+1)-ci həddin n-ci həddə nisbətinin $n \to \infty$ şərtində sonlu limiti $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ (5) varsa, onda

1) $D < 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır.

2) $D > 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası dağılır.

3) $D = 1$ olduqda sıra yığıla da bilər, dağıla da bilər.

Bu əlaməti istifadə etsək $a_n = \frac{1}{n!}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ oldugundan

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

olar . Deməli sıra yığılandır.