## Xətti cəbr və riyazi analiz (Rus)

**1.** Показать, что вектора $\overline{a}=(2;3;1)$ $\overline{b}=(5;7;0)$ $\overline{c}=(3;-2;4)$ образуют базис вектора и разложить вектор $\overline{d}=(4;12;-3)$ на них

По определению, если равенство $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ выполняется при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис.

Учитывая данные, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=0\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases}$$

Из 3-го уравнения получаем $\lambda_1=-4\lambda_3$. Учитывая, что в 1-ом и 2-ом уравнениях, получаем

$$\begin{cases}-8\lambda_3+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\-12\lambda_3+7\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}.\quad\text{Отсюда}\quad\begin{cases}5\lambda_2-5\lambda_3=0\\7\lambda_2-14\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

Если из 1-го уравнения почленно вычесть 2-ое уравнение, получим $\lambda_3=0$. Учитывая это в других уравнениях, получаем $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, эти векторы образуют базис.

Чтобы найти разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$, надо решить уравнение $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{d}$.

Учитывая данные задачи, получим $\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=4\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=12\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\end{cases}$.

Сохраним последнее уравнение без изменений. Умножим это уравнение на 2 и прибавим к 1-ому уравнению, затем умножим на 3 и прибавим ко 2-ому уравнению. Получим $\begin{cases} \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 10 \\ 7\lambda_2 - 14\lambda_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 0\cdot\lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 3 \end{cases}$

Если из 2-го уравнения почленно вычесть последнее, получим $\lambda_3 = -1$ .

Учитывая это во втором уравнении получим $\lambda_2 + 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 1$ Учитывая $\lambda_3 = -1$ в уравнении $\lambda_1 + 4\lambda_3 = -3$ получим $\lambda_1 = 1$ .

И так , получаем новые координаты $\overline{d}(1;1;-1)$. Напишем разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a}, \overline{b}$ и $\overline{c}$ . $\overline{d} = \overline{a} + \overline{b} - \overline{c}$

**2.**Показать, что вектора $\overline{a} = (2;-2)$ və $\overline{b} = (2;-1)$ образуют базис вектора. Если $\overline{c} = (2;4)$, то написать разложение $p = 2\overline{a} - \overline{b} + \overline{c}$ на вектора $\overline{a}$ və $\overline{b}$.

Чтобы проверить образуют ли, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ базис, из равенства $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = 0$ получаем систему уравнений: $\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$

Почленно сложив эти уравнения , получим $\lambda_2 = 0$ . Учитывая это в одном из уравнений, получаем $\lambda_1 = 0$ .

Следовательно, по определению векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\overline{P}$ .

$$\overline{P} = 2(2;-2) - (2;-1) + (2;4) = (4;-4) - (2;-1) + (2;4) = (4;1)$$

Для того, чтобы написать разложения вектора $\overline{P}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ , требуется выполнение равенства $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} = \overline{p}$ .

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ Если почленно сложить эти уравнения получим

$\lambda_2 = 5$. Учитывая это в 1-ом уравнении, получим
$2\lambda_1 + 2\cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$. Итак, $\overline{p} = -3\overline{a} + 5\overline{b}$

**3.** Написать и доказать теорему о линейной зависимости векторов в $R^n$

**<u>ТЕОРЕМА 1.</u>** Если система содержит не менее двух векторов, то для линейной зависимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов системы являлся линейной комбинацией остальных векторов системы.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u> Докажем сперва необходимость.

Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ - линейно зависимые. Тогда по определению линейной зависимости векторов равенство: $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_k\overline{a}_k = 0$

Имеет место при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Допустим $\lambda_k \neq 0$. Тогда обе части равенства разделим на $\lambda_k$.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\overline{a}_2 + ... + \overline{a}_k = 0 \Rightarrow \overline{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} - ... - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\overline{a}_{k-1}$$

$$\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$$

А это разложение вектора $\overline{a}_k$ по остальным векторам этой системы.

Теперь докажем достаточность.

Пусть $\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$ Перенесем все в одну сторону, получим $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + ... + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1} - \overline{a}_k = 0$

Как видно, $\lambda_k = -1 \neq 0 \Rightarrow$ по определению линейной зависимости векторов векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, ..., \overline{a}_k$ - линейнозависимы.

Теорема доказана полностью.

**4**.Определители и правила их вычисления. Минор и алгебраическое дополнение. Основные свойства определителей.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца определителя $n$-го порядка, содержащих данный элемент, называют *минором этого элемента*.

Минор элемента $a_{ij}$ обозначают $M_{ij}$.

Например, минором элемента $a_{11}$ в определителе третьего порядка является: $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Произведение минора $M_{ij}$ на множитель $(-1)^{i+j}$ называется алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}$ и обозначается так:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

*<u>Свойство 1.</u>* Если заменить все строки столбцами (и наоборот), значение определителя не изменится. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n_1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$

Свойство устанавливает равноправность строк и столбцов.

*<u>Свойство 2.</u>* Если поменять местами две строки (столбца), полученный новый определитель будет отличаться от предыдущего только знаком *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

*Следствие.* Определитель, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю.

Действительно, при перестановке двух одинаковых строк (столбцов) определитель $\Delta$ не изменится, а согласно свойству 2 его знак изменится, т.е. получается, что $\Delta = -\Delta$ . А это возможно только если $\Delta = 0$.

*Свойство 3.* Если у элементов какой-либо строки (столба) имеется общий множитель его можно вынести за знак определителя, *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Для доказательства достаточно разложить определитель по элементам первой строки.

*Следствие 1.* Определитель, у которого одна строка (столбец) состоит только из нулей, равен нулю.

*Следствие 2. Для* умножения определителя на число, достаточно на это число умножить все элементы какой-либо строки (столбца), *Н-р*

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & ka_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & ka_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & ka_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

*Следствие 3.* Определитель, у которого две строки (столбца) пропорциональны, равен нулю.

Действительно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$

*Свойство 4.* Если все элементы, какой- либо строки (столбца) состоят из суммы двух элементов, то этот определитель равен сумме двух определителей в одном из которых за элементы той же строки (столбца) берутся первые слагаемые, а в другом – вторые слагаемые. При этом остальные строки (столбцы) остаются как в данном определителе *Н-р*.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство доказывается прямым вычислением определителей.

Следствие. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на одно и то же число и сложить или вычесть из соответствующих элементов другой строки (столбца), определитель не изменится. *Н-р*, пусть

*Свойство 5.* Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю. *Н-р*, для определителя 3-го порядка: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

**5**.Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, найти многочлен $f(A)$ соответствующий $f(x) = x^2 - 3x + 2$

$$f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & -3-6+0 & 0-3+0 \\ 0+0+3 & 0+4-3 & 0+2+2 \\ 3+0+6 & -9-6-6 & 0-3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

**6.**Если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ найти многочлен $f(A)$ соответствующий $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ .

Если $A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ и $f(x)=4x^3-2x^2+3x-2$, найти

$f(A)=4A^3-2A^2+3A-2E$.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$4\begin{pmatrix}-14-6 & 21+0\\ 4+3 & -6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-80 & 84\\ 28 & -24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$$

**7.**Напишите соответствующее свойство детерминанта $\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}$ и

решите его с помощью этого свойства.

Если все элементы какого-либо столбца представлячет собой суммы двух слагаемых , то этот определитель можно написать в виде суммы двух определителей..

$$\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+2a+1\\ b & b^2 & b^2+2b+1\\ c & c^2 & c^2+2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a+1\\ b & 1 & b^2+2b+1\\ c & 1 & c^2+2c+1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2\\ b & b^2 & b^2\\ c & c^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a+1\\ b & b^2 & 2b+1\\ c & c^2 & 2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a\\ b & 1 & b^2+2b\\ c & 1 & c^2+2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Первый и последний определители равны нулю, так как по свойству определителя, определитель с двумя одинаковыми и пропорциональными столбцами равен нулю.

Разложим оставшиеся определители

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a \\ b & b^2 & 2b \\ c & c^2 & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ b & 1 & 2b \\ c & 1 & 2c \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

**8.** Напишите соответствующее свойство детерминанта и используя это свойство докажите равенство $\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$

Доказать равенство и написать свойства определителя, которые используются в этом доказательстве.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

Если все элементы какой-либо строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, в первом, из которых элементами этой строки (столбца )будут первые слагаемые, а во втором элементами этой строки (столбца) будут вторые слагаемые. При этом остальные элементы остаются такими как в данном определителе. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Если поменять местами две строки или два столбца, то определитель поменяет знак на противоположный. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцам) равен нулю.

Используя эти свойства, напишем

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

**9.**Определить ранг матрици и наисать один базис минор

$$\text{матрици}\, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \\ & & & \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что рангом называется наивысший порядок минора, отличного от нуля. Чтобы найти ранг, воспользуемся методом окаймляющих миноров.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = 8 \neq 0$$

Следовательно ранг матрицы $r(A)=3$. Тогда

$$M_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -1\end{vmatrix}$$ является базисным минором..

**10**.Ранг матрицы и его вычисления

Пусть дана прямоугольная матрица: $$A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n}\end{vmatrix}$$

Выделим в этой матрице $k$ произвольных строк и столбцов. Определитель $k$-го порядка, составленный из элементов матрицы А, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором $k$-го порядка матрицы А.

Матрица размерности $m\times n$ имеет $C_m^k\cdot C_n^k$ миноров $k$-го порядка.

$$\left(C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!};\qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

<u>*ОПРЕДЕЛЕНИЕ.*</u> *Рангам матрицы А* называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором.*

$$0\le r(A)\le \min(m,n)$$

В матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок.

Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположен базисный минор, называется *базисными столбцами и строками.*

ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.

Базисные столбцы (строки) линейно независимы. Любая строка (или столбец) матрицы является линейной комбинацией его базисных строк (столбцов).

Если $r(A)=r(B)$, то матрицы А и В называются *эквивалентными.* В этом случае пишут $A\sim B$. Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований. Под элементарными преобразованиями понимают:

1) замену строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками.
2) перестановку строк матрицы.
3) вычеркивания строки, все элементы которой равны нулю.
4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля и прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ.

МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ.

Пусть в матрице найден минор $k$-го порядка $M_k$ отличного от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе минор $M_k \neq 0$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен $k$. Если же среди миноров $(k+1)$-го порядка окажется ненулевой минор, вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований.

Этот метод основан на том факте, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранг.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду.

Свойства:

1) $r(A+B)\le r(A)+r(B)$ 2) $r(A+B)\ge r(A)-r(B)$

3) $r(AB)\le \min(r(A),r(B))$ 4) $r(A^{\Gamma}A)=r(A)$

5) $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$

**11.** Найти обратную матрицу с помощью элементарных преобразований и проверить $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Найдем обратную матрицу А методом линейных преобразований. Для этого построим матрицу $Q = (A / E)$.

С помощью элементарных преобразований приведем её к виду $E / A$.

$$A / E = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Отметим, что мы сложили 1-ую строку со 2-ой и полученное записали во 2-ой строке, 1-ую сложили с 3-й строкой и записали в третью строку. Затем сложили 1-ую строку с 3-й строкой и записали в 1-ую строку. В итоге нашли $A^{-1}$. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**12.** При $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, найти $A^{-2}$ и проверить $A^2 \cdot A^{-2} = A^{-2} \cdot A^2 = E$ .

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Найти $A^{-2}$.

Мы знаем , что $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$.Чтобы найти $A^{-1}$ воспользуемся формулой $A^{-2}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0+2-2+4-0-12 = -8$$ ; $$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12-1 = 11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6$$ ; $$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-6 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$$ ; $$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0-4 = -4$$ ;

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2$$ ; $$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5$$ ;

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0+2) = -2$$ ; $$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0+1 = 1$$

Значит $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, тогда учитывая, что $A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}$ получим

$$A^{-2} = \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 121 -12 +35 & -22 +8 -10 & -55 +4 -5 \\ 66 -24 +14 & -12 +16 -4 & -30 +8 -2 \\ -77 +12 -7 & 14 -8 +2 & 35 -4 +1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{64}\begin{pmatrix} 144 & -24 & -56 \\ 56 & 0 & -24 \\ -72 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 18 & -3 & -7 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Покажем , что $A^2 A^{-2} = E$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$A^2A^{-2} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & -3 & -7 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 54 +35 -81 & -9 +0 +9 & -21-15+36 \\ -18 +63 -45 & 3 +0 +5 & 7-27+20 \\ 126 +63 -189 & -21 +0 +21 & -49-27+84 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

**13**.Проверить совместность системы линейных уравнений (с помощью Теоремы Кронекера Капелли) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$ Найти общее и частное решение это системы .

Напишем основную матрицу коэффициентов. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

и расширенную матрицу $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ .

По теореме Кнокера-Капелли для существования решения системы, необходимо выполнение условия $r(A) = r(A^*)$ .

Сперва найдем $r(A)$.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0 \text{ ;}$$

$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 2 + 4 - 6 + 3 - 12 = 14 \neq 0$ следовательно $r(A) = 3$ .

Теперь найдем $r(A^*)$.

Для этого найдем

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -7 & -7 & -4 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 56 - 24 - 6 \cdot 7 \cdot 4 - 8 - 0 = -80 - 168 - 8 = -256 \neq 0$$

Так как $|A^*| \neq 0$, то $r(A^*) = 4$ .

Так как $3 = r(A) \neq r(A^* = 4)$ то система не совместна.

**14.** Система уравнений, состоящая из $m$ линейных уравнений и $n$ неизвестных. Теорема Кронекера-Капелли..

Систему уравнений вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называют системой $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Коэффициенты этих уравнений можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

А называется основной матрицей системы (1); В – столбец свободных членов, составленный из чисел, стоящих в правых частях уравнений системы.

Если все свободные члены равны нулю, то есть В – нуль матрица, то система (1) называется однородной. Если же хотя бы один из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ отличен от нуля, то система (1) называется неоднородной.

Упорядоченная совокупность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (1), если каждое уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел $\alpha_i$ вместо $X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Решить систему значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то система называется *совместной.*

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Если совместная система имеет одно решение, то она называется *определенной,* если более одного решения, то – *неопределенной.*

Систему линейных уравнений (1) можно записать и в матричной форме: $A \cdot X = B$, где $A$- основная матрица, $B$ – столбец свободных членов, а $X$- матрица –столбец, составленная из неизвестных $X_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матрица, состоящая из основной матрицы с добавлением к ней столбца свободных членов системы (1), называется расширенной матрицей системы (1)

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n}b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ранг матрицы $A^*$ либо равен рангу А, либо на единицу больше. Чтобы решить систему (1), сначала надо выяснить, совместна она или несовместна.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ.

Система линейных уравнений (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы $A^*$ равен рангу матрицы А.

Причем, если 1) $r(A)=r(A^*)=n$, то система определенная (имеет одно решение).

2) $r(A^*)=r(A)<n$, то система неопределенная

( имеет множество решений).

**15.**Решить систему уравнений методом Гаусса $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ -x_1+\quad x_3+2x_4=-1 \\ 3x_1+4x_2+5x_3=11 \\ 5x_1+6x_2+7x_3-2x_4=19 \end{cases}$

Первое уравнение примем за ведущее. Сохранив $x_1$ в первом уравнении, исключим ее из остальных уравнений методом сложения .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

Теперь за ведущее уравнение примем второе уравнение и исключим остальные неизвестные методом сложения.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ \qquad 12x_3 - 6x_4 = 36 \ \big|5 \\ \qquad 18x_3 - 10x_4 = 56 \ \big|-3 \end{cases} \Rightarrow 60x_3 - 54x_3 - 30x_4 + 30x_4 = 180 - 168 \ ;$$

$6x_3 = 12$

$x_3 = 2$

Подставив $x_3 = 2$ в $12x_3 - 6x_4 = 36$ получим $24 - 6x_4 = 36;$ $6x_4 = -12;$ $x_4 = -2$

$2x_2 - 4 - 12 = -14$ $\quad x_1 + 2 - 6 - 8 = -13$

$2x_2 = 2$ $\quad x_1 = -1$

$x_2 = 1$

Значит общее и частные решения совпадают: $\{-1;1;2;-2\}$ .

**16**. При каком значении а система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ Имеет бесконечное количество решений? Найти это решение..

Мы знаем, что для существования отличного от нуля решения системы линейных однородных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы детерминант основной матрицы коэффициентов был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 12a + 7 + 3 - 14a - 8 = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow$$ если $a = -1$ , то

система имеет множество решений. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Третье уравнения примем за ведущее . $\Rightarrow\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3x_2$

Пусть $x_2 = C \in R$ тогда получаем $x_3 = 3C$ и $x_1 - C + 6C = 0; \quad x_1 = -5C$ .

Тогда $\{-5C; C; 3C\}$ - общее решение системы.

**17**. Найти матрицу и сумму собственных чисел линейного преобразования $AX = (x_1 + x_2 + 8x_2; 2x_2; x_1 - x_3)$

$$Ax = (x_1 + x_2 + 8x_3; 2x_2; x_1 - x_3)$$

Матрица этого преобразования составляется из коэффициентов

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти собственные числа надо решить уравнение

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 8(2-\lambda)0 - 0 = 0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - 8) = 0; \qquad \lambda_1 = 2, \ -(1-\lambda^2) - 8 = 0; \ \lambda^2 = 9; \ \lambda_2 = 3; \lambda_3 = -3$$

Сумма их будет $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (-3) = 2$

**18**. Для преобразований $\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 2y - z \\ z' = z - x \end{cases}$ (A) və $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + z \\ z' = -x - y \end{cases}$ (B) найти преобразование $AB - BA$ .

По коэффициентам данных преобразований составим матрицы A и B

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\qquad AB=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}\quad AB-BA=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&4\\3&-6&1\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Тогда преобразование АВ-ВА будет $\begin{cases}x''=5x-y+4z\\y''=3x-6y+z\\z''=3y\end{cases}$

**19.** Найти собственные числа и собственные вектора матрицы $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

**.** Мы знаем, что собственные числа находятся из уравнения $|A-\lambda E|=0$.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+0+0-0-4(2-\lambda)+4\lambda0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=0\ ;-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8\lambda-8=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8(\lambda-1)=0;\ (\lambda-1)(\lambda(2-\lambda)+8)=0$$

$$\lambda_1=1\quad 2\lambda-\lambda^2+8=0\ ;\quad \lambda^2-2\lambda-8=0;\quad \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\lambda_3=-2$.

Пусть $\lambda_1=1$, тогда $\begin{cases}(2-\lambda)x_1-2x_2+0=0\\-2x_1+(1-\lambda)x_2-2x_3=0\\0\cdot x_1-2x_2-\lambda x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-2x_2=0\\-2x_1-2x_3=0\\-2x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_1=x_3\\x_3=-2x_2\end{cases}$

Пусть $x_2=C_1$ $(0\neq C_1\in R)$, тогда собственный вектор будет $\{-2C_1;C_1;-2C_1\}$

Пусть $\lambda_2 = 4$ , тогда

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = C_2 \neq 0 \\ x_2 = -2C_2 \\ x_1 = 2C_2 \end{cases}.$$

Получаем собственный вектор $\{2C_2; -2C_2; C_2\}$ .

Пусть $\lambda_3 = -2$ тогда.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_3 \\ x_2 = 2C_3 \\ x_3 = 2C_3 \end{cases}$$

Получаем собственный вектор $\{C_3; 2C_3; 2C_3\}$.

**20.** Найти отношение собственных чисел и собственные вектора матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ .

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

По равенству

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

запишем характеристическое уравнение матрицы в виде

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

Корни характеристического уравнения будут $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 7$ .

При $\lambda_1 = -2$ по уравнению

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3+2)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2+2)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4c_1 \\ x_2 = 5c_1 \end{cases} \ (0 \neq c_1 \in R).$$

Значит собственный вектор соответствующий собственному числу $\lambda_1 = -2$ имеет вид $X = \{-4c_1; 5c_1\}$. Поскольку $c_1 \in R$ придавая различные значения можем найти собственные векторы..

Таким же образом при $\lambda_2 = 7$ соответствующее однородное уравнение

$$\begin{cases} (3-\lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2-7)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = c_2 \neq 0; c_2 \in R.$$

Значит собственный вектор соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 7$ имеет вид $X = \{c_2;\ c_2\}$ .

**21.** Матрица линейного преобразования. Собственное число и собственный вектор линейного преобразования

Пусть в $R^n$ с фиксированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ задано линейное преобразование А. Каждый вектор пространства $R^n$ можно разложить по базисным векторам. Для $\overline{X} \in R^n$:

$$\overline{X} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n \overline{e}_n$$

Координаты $\overline{X}$ запишем в столбец $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Так как преобразование А – линейное, то

$$A\overline{X} = x_1 A\overline{e}_1 + x_2 A e_2 + \cdots + x_n A\overline{e}_n \qquad (1)$$

С другой стороны векторы $Ae_i\,(i = 1, \ldots, n)$ являются элементами $R_n$ и поэтому и их можно разложить по векторам базиса $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$:

$$Ae_i = a_{1i}\overline{e}_1 + a_{2i}\overline{e}_2 + \ldots + a_{ni}\overline{e}_n \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

А именно $\begin{matrix} A\overline{e}_1 = a_{11}\overline{e}_1 + a_{21}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n \\ A\overline{e}_2 = a_{12}\overline{e}_2 + a_{22}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n2}\overline{e}_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ A\overline{e}_n = a_{1n}\overline{e}_1 + a_{2n}\overline{e}_2 + \ldots + a_{n_n}\overline{e}_n \end{matrix}$

Учитывая эти равенства в равенстве (1), получим:

$$\begin{aligned} A\overline{X} &= \left(a_{11}\overline{e}_1 x_1 + a_{21}\overline{e}_2 x_1 + \ldots + a_{n1}\overline{e}_n x_1\right) + \\ &+ \left(a_{12}\overline{e}_1 x_2 + a_{22}\overline{e}_2 x_2 + \ldots + a_{n_2}\overline{e}_n x_2\right) + \ldots + \\ &+ \left(a_{1n}\overline{e}_1 x_n + a_{2n}\overline{e}_2 x_n + \ldots + a_{nn}\overline{e}_n x_n\right) = \\ &= \left(a_{11}x_1 + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1}\right)\overline{e}_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \right. \\ &\left. + a_{2n}x_n\right)\overline{e}_2 + \ldots + \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right)\overline{e}_n \end{aligned} \qquad (2)$$

Т.е. $A\overline{X} = y_1\overline{e}_1 + y_2\overline{e}_2 + \ldots + y_n\overline{e}_n$ , где

$$\left.\begin{matrix} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{matrix}\right\} \text{ или } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей преобразования А в данном базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$.

Из соотношения (3) видно, что для того, чтобы получить координаты преобразованного вектора $\overline{Y}$ надо матрицу линейного преобразования умножить на столбец координат вектора $\overline{X}$ .

Если в $n$ - мерном линейном пространстве задан базис $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$, то каждому линейному преобразованию соответствует квадратная матрица порядка $n$ , и наоборот.

Чтобы найти матрицу линейного преобразования, надо:

1) подвергнуть его действию базисные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$

2) полученные векторы $Ae_i \quad (i=1,\dots,n)$ разложить в этом базисе

$$\left.\begin{array}{l} Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ Ae_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{n_n}e_n \end{array}\right\} \qquad (4)$$

3) коэффициент разложения (4) записать в виде матрицы А, помещая коэффициент строк в соответствующие столбцы матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Ненулевой вектор $\overline{X} \in R_n$ называется собственным вектором линейного преобразования А, если найдется такое число $\lambda$, что

$$A\overline{X} = \lambda\overline{X} \qquad \left(\overline{X} \neq 0\right)$$

Само число $\lambda$ называется характеристическим числом линейного преобразования А, соответствующим вектору $\overline{X}$.

Если линейное преобразование А в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то уравнение $A\overline{X} = \lambda\overline{X}$ в координатной форме имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}\lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Известно, что для существования отличного от нуля решения системы однородных уравнений, необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя основной матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Если вычислим этот определитель, то получим многочлен $n$-й степени по отношению к $\lambda$. Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного преобразования, а (6) называется характеристическим уравнением.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются собственными числами линейного преобразования.

Подставив найденные числа $\lambda_i$ в систему (5) и решив эту систему относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найдем координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу $\lambda$.

22. Предел функции Правый и левый пределы. Некоторые предельные формулы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ $1^*$ (предел функции по Коши).

Число $b$ называется пределом функции $y = f(x)$ в точке $a$ ( или при $x \to a$), если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists b > 0$ такой, что $\forall x : 0 < |x - a| < b$

Справедливо неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$

Обозначается: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

**Определение** (нахождение предела функции слева).

Число *B* называется пределом функции *f(x)* слева при $x \to a$, если для любой сходящейся к *a*последовательности аргументов функции $x_n$, значения которых остаются меньше *a* ($x_n < a$), последовательность значений этой функции сходится к *B*.

Обозначается $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = B$.

**Определение** (нахождение предела функции справа).

Число *B* называется пределом функции *f(x)* справа при $x \to a$, если для любой сходящейся к *a*последовательности аргументов функции $x_n$, значения которых остаются больше *a* ($x_n > a$), последовательность значений этой функции сходится к *B*.

Обозначается $\lim_{x \to a+0} f(x) = B$.

**Определение** (существование предела функции в точке).

Предел функции *f(x)* в точке *a* существует, если существуют пределы слева и справа *a* и они равны между собой.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = B$$

**<u>ТЕОРЕМА.</u>** Пусть функции $f(x), g(x)$ определены на множестве X, а точка $x_0$ является предельной точкой этого множества и $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = B$. Тогда при $x \to x_0$ функции $(f(x) \pm g(x)), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (B \neq 0)$ тоже имеют предел и верны следующие равенства:

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A + B$

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$

**23**. Вычислить предел $\lim_{x \to 1} (1 - x) tg \frac{\pi x}{2}$.

Известно что $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1-x}{ctg\frac{\pi x}{2}}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-1)'}{\left(ctg\frac{\pi x}{2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

**24**. Определить какого рода точки разрыва функции $f(x)=2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$

**<u>Решение</u> .** Известно, что если выполняется равенство

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \qquad (1)$$

То, функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0$. Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то точка называется точкой разрыва.

Если в точке $x_0$ существуют односторонние пределы *f(x₀-0), f(x₀+0)*, то $x_0$ называется точкой разрыва 1-го рода.

Если же в точке $x_0$ не существует, по крайней мере, одного из односторонних пределов, или, по крайней мере, одним из пределов является бесконечностью, то точка $x_0$ называется точкой разрыва П –го рода.

Если в точке разрыва 1-го рода выполняется равенство $f(x_0-0) = f(x_0+0)$, то точка $x_0$ называется устранимой точкой разрыва.

Точка $x=1$ является точкой разрыва. Определим какого она рода. Сперва найдем предел функции в точке $x=1$ слева.

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{1-(1-\alpha)}}}\right)=\lim_{\alpha\to+0}\left(2+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right)=2$$

Так как $\lim_{\alpha\to+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}=0$ .

Следовательно $f(1-0)=2$.

Теперь найдем предел функции в точке $x=1$ справа.

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{\alpha\to +0}\left(2+\frac{1}{1+2^{1-(1+\alpha)}}\right) = \lim_{\alpha\to +0}\left(2+\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{\alpha}}}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to +0}\left(2+\frac{1}{1+\frac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}}}\right) = \lim_{\alpha\to +0}\left(2+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = \lim_{\alpha\to +0}\left(2+\frac{2^{\frac{1}{\alpha}}+1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}-\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) =$$

$$= \lim_{\alpha\to +0}\left(3-\frac{1}{1+2^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = 3$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to +0}\dfrac{1}{2^{\frac{1}{\alpha}}+1} = 0$

Следовательно $f(1+0)=3$

Итак, $f(1-0)\neq f(1+0)$. Следовательно $x=1$ является точкой разрыва первого рода.

**25**. Найти производную 5-го порядка от функции $y = x^2\cdot\sin 2x$

**Решение:По формуле Лейбница**:

$$[uv]^{(5)} = u^{(5)}v + 5u^{(4)}v' + \frac{5\cdot 4}{2!}u'''v'' + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}u''v''' + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}u'v^{(4)} + uv^{(5)}$$

$$\left[x^2\sin 2x\right]^{(5)} = \left(x^2\right)^{(5)}\sin 2x + 5\left(x^2\right)^{(4)}(\sin 2x)' + \frac{5\cdot 4}{2!}\left(x^2\right)^{(3)}(\sin 2x)'' +$$

$$+\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}\left(x^2\right)''(\sin 2x)^{(3)} + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{4!}\left(x^2\right)'(\sin 2x)^{(4)} + \left(x^2\right)(\sin 2x)^{(5)} =$$

$$= 0+0+0+10\cdot 2(-8)\cos 2x + 5\cdot 2x\cdot 16\sin 2x + x^2\cdot 32\cos 2x =$$

$$= -160\cos 2x + 160x\sin 2x + 32x^2\cos 2x$$

**26**.Написать теорему Ролля. Проверить, применима ли эта теорема к функции $f(x)=\ln\sin x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right]$

**Теорема.** Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и $f(a)=f(b)$, то существует по крайней мере одна точка ***c*** на интервале (a,b), в которой $f'(c)=0$

$f'(c)=0$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{5\pi}{6}=\ln\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\ln\sin\frac{\pi}{6}=\ln\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$f'(x)=(\ln\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=ctgx=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\qquad x\in\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right)$$

26. Написать теорему Лагранжа. Проверить, применима ли эта теорема к функции $f(x)=\sqrt{x}$ на отрезке $[1;4]$

**Теорема.** Если функция $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ непрерывна на отрезке $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отреза, то внутри отрезка $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ найдется , по крайней мере одна точка $\mathrm{x}=\mathrm{c}$, $(\mathrm{a}<\mathrm{c}<\mathrm{b})$, в которой выполняется $\mathrm{f}(\mathrm{b})-\mathrm{f}(\mathrm{a})=\mathrm{f}'(\mathrm{c})(\mathrm{b}-\mathrm{a})$ (L)

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$
$$f(4)-f(1)=f'(c)\cdot(4-1)$$
$$\sqrt{4}-\sqrt{1}=3f'(c)$$
$$3f'(c)=1 \qquad f'(c)=\frac{1}{3} \qquad f'(c)=\left(\sqrt{x}\right)'\Big|_{x=c}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=c}\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{c}}=\frac{1}{3} \qquad 2\sqrt{c}=3;\quad 4c=9$$
$$c=\frac{9}{4}=2{,}25\in[1;4]$$
$$c=2{,}25$$

**27**. Написать теорему Коши. Проверить справедливость этой теоремы для функций $f(x)=2x^3+5x+1$, $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$. Если теорема Коши справедлива для данных функций, найти число **С.**

Написать теорему Коши. Проверить справедливость этой теоремы для функций $f(x)=2x^3+5x+1$, $g(x)=x^2+4$ на отрезке $[0;2]$. Если теорема Коши справедлива для данных функций, найти число **С.**

Если $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ и $\varphi(\mathrm{x})$-две функции, непрерывные на отрезке $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ и дифференцируемые внутри него, причем $\varphi'(\mathrm{x})$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ найдется точка $\mathrm{x}=\mathrm{c}$, $\mathrm{a}<\mathrm{c}<\mathrm{b}$, в которой выполняется : $\dfrac{\mathrm{f}(\mathrm{b})-\mathrm{f}(\mathrm{a})}{\varphi(\mathrm{b})-\varphi(\mathrm{a})}=\dfrac{\mathrm{f}'(\mathrm{c})}{\varphi'(\mathrm{c})}$

Эта формула называется формулой Коши.

$$f(2)=2\cdot 2^3+5\cdot 2+1=27,\ \ f(0)=1$$
$$g(2)=2^2+4=8,\ g(0)=4$$

$$\frac{f(2)-f(0)}{g(2)-g(0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad \frac{27-1}{8-4}=\frac{6c^2+5}{2c}; \ \frac{6c^2+5}{2c}=\frac{13}{2}$$

$6c^2-13c+5=0$

$c_1=\frac{1}{2}; \ c_2=\frac{5}{3}$ .

**28**. На кривой $y=2x-x^2$ между точками A(1;1) и B(3;-3) дуги AB. Найти точку M, в которой касательная, проведенная к кривой, будет параллельна хорде AB.

По теореме Лагранжа $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

$$y(3)-y(1)=y'(c)(3-1) \qquad (1)$$

$y(3)=-3, \qquad y'(x)=2-2x$

$y(1)=1$

$-3-1=(2-2c)\cdot 2$ c=2 y(2) =0

M(2;0)

**29**. Экстремум функции. Необходимые условия для существования экстремума

Говорят, что функция $f(x)$ в точке $x_1$ имеет локальный максимум ($\max$), если значение функции $f(x)$ в точке $x_1$ больше, чем её значения во всех точках некоторого интервала, содержащего т. $x_1$. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет в точке $x_2$ локальный минимум ($\min$), если значение функции в точке $x_2$ меньше, чем её значения во всех точках некоторого интервала, содержащего т. $x_2$.

## НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЛОКАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_2$ локальный экстремум, то её производная обращается в нуль в этой точке, т.е. $f'(x_0) = 0$.

**Замечание.** Условие $f'(x_0) = 0$ является необходимым, но не является достаточным условием существования локального экстремума.

## ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМА.

***Теорема 1.*** Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x_0$ и дифференцируема во всех точках этого интервала ( кроме, быть может, самой точки $x_0$).

а) Если при переходе слева направо через эту точку производная меняет знак с плюса на минус, то при $x = x_0$ функция имеет локальный максимум. То есть, если

$$f'(x) > 0 \quad \text{при} \quad x < x_0$$

и

$$f'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x$$

то в точке $x_0$ функция имеет локальный $\max$.

б) Если при переходе через точку $x_0$, слева направо производная меняет знак с минуса на плюс, то функция имеет в этой точке локальный минимум.

То есть, если:

$$f'(x) < 0 \qquad \text{при} \quad x < x_0$$

$$f'(x) > 0 \qquad \text{при} \quad x_0 < x$$

то в точке $x_0$ существует локальный минимум.

***Теорема 2.*** Пусть при $x = x_0$ $f'(x) = 0$. Кроме того существует $f''(x)$ и она непрерывна в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда при $x = x_0$ функция имеет локальный максимум, если $f''(x_0) < 0$ и локальный минимум, если $f''(x_0) > 0$.

***Теорема 3.*** Пусть в критической точке $x_0$ функция $y = f(x)$ существуют непрерывные производные до $n$-го порядка включительно, причем

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Тогда:

1) если $n$ - четное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке $x_0$ существует локальный максимум.

2) если $n$ - четное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в точке $x_0$ существует локальный минимум.

3) если $n$ - нечетное , то в точке $x_0$ не существует экстремума.

**30**.Выпуклые и вогнутые кривые. Точка перегиба кривой.

ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ КРИВОЙ.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вверх на интервале $(a,b)$, если все точки кривой лежат ниже любой её касательной на этом интервале.

Говорят, что кривая обращена выпуклостью вниз на $(b,c)$, если все точки кривой лежат выше любой её касательной на этом интервале.

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, называют выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз – вогнутой.

**<u>Теорема.</u>** а) если вот всех точках интервала $(a,b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т.е. $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вверх (кривая выпуклая);

б) если во всех точках интервала $(b,c)$ вторая производная функции $f(x)$ положительна, т.е. $f''(x)>0$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале обращена выпуклостью вниз (кривая вогнутая).

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба кривой*.

Очевидно, что в точке перегиба касательная, если она существует, пересекает кривую, так как с одной стороны от этой точки кривая лежит под касательной, а с другой стороны – над нею.

**<u>Теорема.</u>** (условие существования точки перегиба)

Если в точке $x=x_0$ существует вторая производная функции $y=f(x)$ и точка $M(x_0;f(x_0))$ кривой $y=f(x)$ является точкой перегиба, то в точке $x=x_0$ вторая производная обращается в нуль, т.е.

$$f''(x_0)=0$$

**<u>Теорема</u>**. (достаточное условие существования точки перегиба)

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x=x_0$ и $f''(x_0)=0$ или $f''(x_0)$ не существует, а при переходе через точку $x=x_0$ производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M(x_0;f(x_0))$ кривой $y=f(x)$ является точкой перегиба.

31.Асимптоты кривой. Найти наклонную асимптоту кривой $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x-1}$.

$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ və $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ x=$x_0$ является вертикальной асимптотой.

y=kx+b является наклонной асимптотой, если

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-x}=\frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+2-2x^2+x}{2(2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{4x-2}=\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$$

**32**.Найти локальные экстремумы функции

$f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+12$.

$$f'(x)=4x^3-24x^2+44x-24=4\left(x^3-6x^2+11x-6\right)=4\left[\left(x^3-x^2\right)-\left(5x^2-5x\right)+\left(6x-6\right)\right]=4\left[x^2(x-1)-\right.$$
$$\left.-5x(x-1)+6(x-1)\right]=4\left[(x-1)\left(x^2-5x+6\right)\right]=4\left[(x-1)(x-2)(x-3)\right]=0\Rightarrow x_1=1; x_2=2; x_3=3.$$

**Тогда,** $f''(x)=12x^2-48x+44$ **и** $f''(1)=12-48+44=8>0$**. Из этого следует, что в точке** $x=1$ **существует локальный минимум.**

$f_{min}(1)=1-8\cdot1+22\cdot1-24+12=3$.

$f''(2)=12\cdot4-48\cdot2+44=-4<0$

**Из этого следует, что в точке** $x=2$ **существует локальный максимум.**

$f_{max}(2)=4\cdot2^3-24\cdot2^2+44\cdot2-24=4$.

$f'''(3) = 12 \cdot 9 - 48 \cdot 3 + 44 = 8 > 0$

**Из этого следует, что в точке $x = 3$ существует локальный минимум.**

$f_{min}(3) = 3$.

**33**.Функция многих переменных и её предел. Двойные и повторные пределы.

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, определенная в некоторой области $G$ плоскости **ОХУ** и пусть точка $M_0$ - предельная точка области $G$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **А** называется пределом функции $f(x, y)$ при стремлении точки $M(x, y)$ к точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists r > 0$, что для всех точек $M(x, y)$, для которых выполняется неравенство $MM_0 < r$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Обозначение:

$$\lim_{M - M_0} f(x, y) = A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Говорят, что функция $f(x, y)$ имеет предел число **А** при стремлении переменных $x, y$ соответственно к $x_0, y_0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такой, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

лишь только выполнить: $|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < 0$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **A** называется пределом функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для $\forall$ сходящейся к $M_0$ последовательности $\{M^k\}_{k=1}^{\infty}$ такой, что $\{M^k\} \subset G(M^k \neq M^0)$ соответствующая последовательность значений функции $\{f(M^k)\}$ сходится к А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Число **A** называется пределом функции $z = f(x,y)$ при $x, y \to +\infty(-\infty)$, если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ такой, что $|f(x,y) - A| < \varepsilon$ лишь только $x > \delta, y > \delta$ (или $x < -\delta,\ y < -\delta$).

Обозначается следующим образом:

$$A = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} f(x,y) \qquad \left( A = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} f(x,y) \right)$$

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в прямоугольнике

$\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| < \delta_1,\ |y - y_0| < \delta_2\}$, кроме быть может отрезков прямых $x = x_0$ и $y = y_0$.

При фиксированном значении $y$ функция $z = f(x,y)$ становится функцией от одной переменной $x$.

Пусть для любого фиксированного значения $y$, удовлетворяющего условию: $0 < |y - y_0| < \delta_2$, существует предел функции $f(x,y)$ при $x \to x_0$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ |y - y_0| < \delta_2}} f(x,y) = \varphi(y)$$

Пусть далее предел функции $\varphi(y)$, при $y \to y_0$, существует и равен $b$:

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = b$$

Тогда говорят, что в точке $(x_0, y_0)$ существует повторный предел функции $f(x,y)$ и пишут:

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=b$$

При этом $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ |y-y_0|<\delta_2}} f(x,y)$ называется внутренним пределом в повторном. Аналогично определяется другой повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, в котором внутренним является $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ |x-x_0|<\delta_1}} f(x,y)$

***<u>Замечание.</u>*** Повторные пределы не всегда равны.

## **34.** Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал.

Пусть $M_0(x_0,y_0)$- внутренняя точка области определения функции $z=f(x,y)$.

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по аргументу X в точке $M_0(x_0,y_0)$ называется $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует.

Обозначается следующим образом $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, либо $Z'_x(M_0)$.

Частной производной функции $z=f(x,y)$ по аргументу $y$ называется $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, если он существует. Обозначается следующим образом $\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)$, либо $Z'_y(M_0)$. Если от функции $z=f(x,y)$ берется производная $\frac{\partial z}{\partial x}$, то аргумент $y$ считается постоянным, и наоборот, если берется производная $\frac{\partial z}{\partial y}$, то аргумент X считается постоянным.

Для функции $Z=f(x,y)$ полное приращения определяется следующим образом

$$\Delta Z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y + 0\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right) \qquad (2)$$

Дифференциалом $dz$ дифференцируемой в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $Z = f(x, y)$, называется *линейная,* относительно приращений аргументов, *часть*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \Delta y \qquad (3)$$

По дифференциалам независимой переменной $dx(dy)$ понимается любое, независимое от $x(y)$, число.

Если $z = x$, то получим $dx = \Delta x$

Если $z = y$, то получим $dy = \Delta y$

Тогда : $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x} dx + \dfrac{\partial z}{\partial y} dy$ (D)

По формуле (D) вычисляется полный дифференциал функции $Z = f(x, y)$.

В случае функции $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n} dx_n$$

35. Найти двойные и повторные пределы функции $f(x; y) = \dfrac{x - 2y}{x + 3y}$ в точке (0;0).

Решение . Сначала найдем двойной предел **:** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x - 2y}{x + 3y}$ .

Пусть точка , $M(x, y)$ приближается к точке 0(0;0) не произвольно, а по некоторой прямой $y=kx$ $(k \neq 0)$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2kx}{x+3kx} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1-2k)}{x(1+3k)} = \frac{1-2k}{1+3k}$$

Как видно, результат меняется в зависимости от выбора **К** (т.е. предельное значение не единственное) Следовательно, при $M(x, y) \to 0(0;0)$ предел не существует. Теперь найдем повторные пределы.

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} \frac{x-2y}{x+2y} = \lim_{x \to 0} \frac{x-2 \cdot 0}{x+3 \cdot 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x-2y}{x+3y} = \lim_{y = 0} \frac{0-2y}{0+3y} = -\frac{2}{3}$$

**36**. Найти полный дифференциал функции $u = arctg\,\frac{xy}{z^2}$

Известно что, полный деференциал находится по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \,. \qquad (1)$$

Вычислим частные производные.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2 y^2}{z^4}} \cdot \frac{y}{z^2} = \frac{z^4}{z^4 + x^2 y^2} \cdot \frac{y}{z^2} = \frac{yz^2}{x^4 + x^2 \cdot y^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2 y^2}{z^4}} \cdot \frac{x}{z^2} = \frac{xz^2}{z^4 + x^2 y^2} \qquad (3)$$

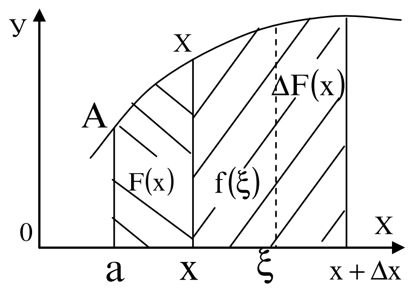
$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+\frac{x^2y^2}{z^4}}\cdot\left(-\frac{2xy}{z^3}\right)=\frac{z^4}{z^4+x^2y^2}\cdot\frac{2xy}{z^3}=-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2} \qquad (4)$$

Принимая во внимание (2), (3) и (4) (1) получим :

$$du=\frac{yz^2}{z^4+x^2y^2}dx+\frac{xz^2}{z^4+x^2y^2}dy-\frac{2xyz}{z^4+x^2y^2}dz$$

**37**. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула для вычисления определенных интегралов (формула Ньютона-Лейбница).

Пусть функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a,b]$. Тогда она интегрируема и в промежутке $[a,x]$, где $a\le x\le b$, т.е. для любого $x\in[a,b]$ имеет смысл интеграл $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ (1)




При постоянном *a* этот интеграл Будет представлять собой функцию верхнего предела *x*.

Если $f(t)$-неотрицательная функция, то $F(x)$-численно равна площади криволинейной трапеции $aAXx$.

Очевидно, что эта площадь изменяется в зависимости от изменения X. Найдем производной от $F(x)$ по x.

Теорема 1. Если $f(t)$- непрерывная функция в точке $t=x$, то в этой точке имеет место равенство $F'(x)=f(x)$.

Иными словами производная от определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подинтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлена значение верхнего предела (при условии, что подинтегральная функция непрерывна).

*Замечание.* Из этой теоремы следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную. Примером является определенный интеграл (1) с переменным верхним пределом, так как $F'(x)=f(x)$.

<u>*Теорема 2.*</u> Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) \qquad (2)$$

Эта формула называется формулой Ньютона-Лейбница.

**38**. Найти дифференциал функции $u = x^{y^2 z}$

Известно, что дифференциал функции находится по формуле данной функции по каждому из аргументов: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$

Найдем частные производные :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z \cdot x^{y^2 z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \cdot 2yz \cdot \ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \cdot y^2 \cdot \ln x$$

Подставляем найденные частные производственные в формулу полного дифференциала:

$$du = y^2 z \cdot x^{y^2 z-1}dx + x^{y^2 z} \cdot 2y\,z \cdot \ln x\,d\,y + x^{y^2 z} \cdot y^2 \ln x\;d\,z$$

**39**. Найти дифференциал второго порядка функции. $u = arctg\frac{x+y}{1-xy}$

Напишем формулу для дифференциала второго порядка:

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\cdot dxdy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2$$

Найдем частные производные первого порядка по $\boldsymbol{x}$ и по $\boldsymbol{y}$::

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+(x+y)y}{(1-xy)^2}=$$

$$=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy+xy+y^2}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+y^2+2xy}=\frac{1+y^2}{(1+x^2)+(x^2+1)y^2}=$$

$$=\frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)^2}\cdot\frac{1-xy+(x+y)x}{(1-xy)^2}=\frac{1}{1+y^2}$$

Найдем вторые производные:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[(1+x^2)^{-1}\right]_x'=-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{-2y}{(1+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=0$$

Подставим эти частные производные в формулу:

$$d^2u=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}dx^2-\frac{2y}{(1+y^2)^2}dy^2$$

**40**. Экстремумы функций многих переменных. Необходимые условия для существования экстремума.

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена на множество $G\subset R_2$.

Точка $M_o(x^0,y^0)$ называется точкой локального максимума (минимума), если существует такая окрестность точки $M_o(x^0,y^0)$, что для всех точек $M(x,y)$ этой окрестности выполняется неравентсво.

$$f(M)\le f(M_0)\qquad\qquad (f(M)\ge f(M_0))$$

В случае $f(M)<f(M_0)$ $\quad (f(M)>f(M_0))$, точка $M_0$ называется точкой строго локального максимума (минимума).

Точки максимума и минимума называются точками экстремума.

Из определения следует, что если функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум в точке $M_0$, то $\Delta z=f(M)-f(M_0)$ в этой точке $M_0$ удовлетворяет одному из следующих условий.

1) если $M_0$ - точка локального максимума, то $\Delta z\le 0$

2) если $M_0$ - точка локального минимума, то $\Delta z\ge 0$

3) если $M_0$ - точка строгого локального максимума, то $\Delta z<0$

4) если $M_0$ - точка строгого локального минимума, то $\Delta z>0$.

**ТЕОРЕМА** ( необходимое условие существования экстремума).

Если функция $z=f(x,y)$ определена в окрестности точки экстремума $X^0\left(x^0,y^0\right)$ и в этой точке существуют частные производные первого порядка, то в этой точке они равны нулю, т.е.

$$f'_x\left(x^0,y^0\right)=f'_y\left(x^0,y^0\right)=0 \qquad (1)$$

*ЗАМЕЧАНИЕ.* Условие (1) является необходимым условием, но не достаточным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Точка $M_0$, в которой все частные производные существуют и равны нулю, называется стационарной точкой.

Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

**41**.. Найти экстремумы функции. $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$

Найдём частные производные функции**.**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}y+(-1)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)+(47-x-y)\cdot\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}x+(-1)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)+(47-x-y)\cdot\frac{1}{4}$$

Для нахождения критических точек, решить систему.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}y-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{47}{3}-\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{3}y=0\\ \dfrac{1}{2}x-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}+\dfrac{47}{4}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{4}y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{6}-\dfrac{y}{4}-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{47}{3}=0\\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{2}y+\dfrac{47}{4}=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2y-3y-8x+188=0\\2x-3x-6y+141=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y-8x+188=0\\-x-6y+141=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=188-8x\\-x-1128+48x+141=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 47x=987\Rightarrow x=21;\qquad y=188-168=20$$

Найдем частные производные второго порядка в стационарной точке M(21;20) :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{3};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{2};\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{12};$$

$$\Delta=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_M-\left[\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_M\right]^2=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{144}=\frac{1}{3}-\frac{1}{144}=\frac{47}{144}>0$$

Если $\Delta>0;\ \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_M<0$, тогда точка M(21;20) – точка максимума.

$$Z_{\max}=\frac{1}{2}\cdot 21\cdot 20+(47-21-20)\left(\frac{21}{3}+\frac{20}{4}\right)=210+6(7+5)=210+72=282.$$

**42**. Найти экстремумы функции $z=2x^3+2y^3-36xy+430$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=6x^2-36y=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=6y^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x^2-36y=0\\6y^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{6}x^2\\ 6\left(\dfrac{x^2}{6}\right)^2-36x=0\end{cases}\Rightarrow\ \Rightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{6}x^2\\ x(x^3-216)=0\end{cases}\qquad(1)$$

Сначала найдем корни уравнения $x(x^3-216)=0$ : получим

$x(x-6)(x^2+6x+36)=0\Rightarrow x_1=0;x_2=6$ поскольку $x^2+6x+36=0\Rightarrow D=b^2-4ac=9-36=-27<0$

корни уравнения $x^2+6x+36=0$ комплексное Учитывая действительные корни $x_1=0;x_2=6$ в уравнении $y=\dfrac{1}{6}x^2$, получим. $y_1=0;y_2=\dfrac{1}{6}\cdot 6^2=6$. Значит $M_0(0;0)$ и $M_1(6;6)$ (1) являются решением системы (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(6x^2 - 36y\right)'_x = 12x \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0} = 12 \cdot 0 = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 12 \cdot 6 = 72$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -36 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{M_0} = -36; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{M_1} = -36,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(6y^2 - 36x\right)'_y = 12y \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_0} = 0; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_1} = 12 \cdot 6 = 72$$

На основе этого $\Delta\big|_{M_0} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_0} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{M_0} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2_{M_0} =$

$= 0 \cdot 0 - (-36)^2 = -1296 < 0$ значит в точке $M_0(0;0)$ экстремум функции нет.

Если $\Delta\big|_{M_1} = 72 \cdot 72 - (-36)^2 = 3888 > 0$ в точке $M_1(6;6)$ функция $u(x;y)$ имеет экстремум и поскольку $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 72 > 0$ функция $u(x;y)$ имеет экстремум в точке $M_1(6;6)$ получает значение минимум .

$$u(x;y)\big|_{min}(M_1) = 2 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^3 - 36 \cdot 6 \cdot 6 + 430 = -2.$$

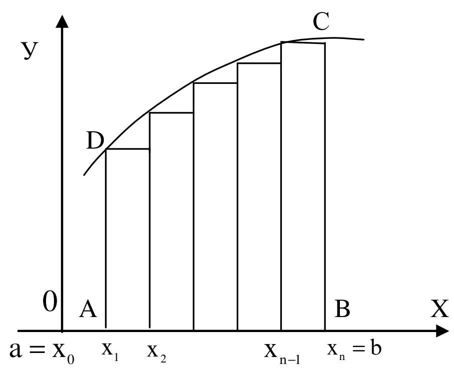
Замечание: $\Delta > 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\bigg|_M \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\bigg|_M - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\bigg|_M > 0 \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\bigg|_M \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\bigg|_M > \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\bigg|_M \qquad (2)$$

Из соотношения (2) получается, что если $u(x;y)$ имеет экстремум,то $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\bigg|_M \wedge \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\bigg|_M$ имеют одинаковые знаки..

## **43**.Определение и свойства определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на $[a,b]$ Разобъём отрезок $[a,b]$ на $n$ частей. $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На каждом



частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ выберем произвольную точку $\xi$. Длина каждого отрезка $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

*<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>* Интегральной суммой для функции $y = f(x)$ на $[a,b]$ называется сумма вида $S_n = \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k$ (1)

Сумма $S_n$ зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек $\xi_k$.

Рассмотрим различные разбиения отрезка $[a,b]$ на отрезки $[x_{k-1}, x_k]$такие, что $\max \Delta X_k \to 0$. Тогда при этом число отрезков $n$ разбиения стремятся к бесконечности.

*<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u>* Если при любых разбиениях отрезка $[a,b]$ таких, что $\max \Delta X_k \to 0$ и при любом выборе точек $\xi_k$ сумма $S_n = \sum_{k-1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k$

стремится к пределу $\mathrm{I}$, то говорят, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Предел $\mathrm{I}$ называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b f(x)dx$

$$\mathrm{I} = \lim_{\max \Delta X_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta X_k \qquad (2)$$

Число $a$ называется нижним пределом, число $b$ - верхним пределом.

При определении определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предположили, что $a < b$. Если же $a > b$, то все $\Delta x_k$ будут иметь отрицательный знак

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

И ещё заметим, что $\int_a^a f(x)dx = 0.$

Действительно, в этом случае все отрезки разбиения являются точками, а их длины $\Delta x_k = 0 \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow \mathrm{I} = 0$.

*<u>Свойство1</u>* Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\mathrm{k}$- постоянная , тогда функция $kf(x)$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

*<u>Свойство 2.</u>* Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то их сумма также интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$

То есть, интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых.

*<u>Свойство 3</u>*. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и интегрируема на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

*<u>Следствие 1.</u>* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

*<u>Следствие 2.</u>* $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

*<u>Свойство 4.</u>* Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [a,b]$

То $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

*<u>Свойство 5</u>*. (теорема о среднем). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка С, что справедливо следующее равенство $\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$

<u>Замечание.</u> Число $f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением функции $f(x)$, непрерывной на $[a,b]$.

*<u>Свойство 6.</u>* Пусть $a < c < b$, Если функция $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то функция $f(x)$ интегрируема и на отрезке $[a,b]$ и справедливо равенство $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

*Следствие*. Если $c$ лежит вне промежутка $(a,b)$ (например $a<b<c$) и в этом случае верно равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

**44**.Несобственные интегралы первого и второго рода.

Мы до сих пор рассматривали интеграл $\int_a^b f(x)dx$/, где функция $f(x)$ - непрерывна $[a,b]$, а $[a,b]$- конечен. Такой определенный интеграл называется «собственным». Если же нарушается хотя бы одно из этих условий, то определенный интеграл называется *несобственным интегралом*.

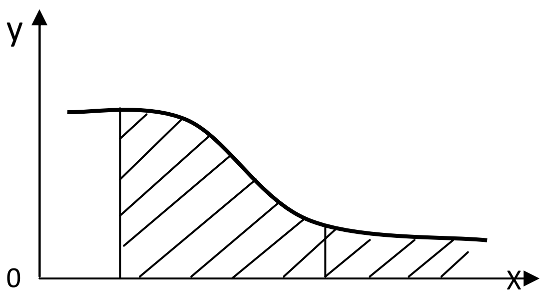
Несобственные интегралы бывают I и II рода: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от разрывных функций.

1) *интегралы с бесконечными пределами.*

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при всех значениях x таких, что $a \le x < +\infty$.

Рассмотрим интеграл: I (b) $=\int_a^b f(x)dx$

При изменении b, этот интеграл является функцией b. Рассмотрим вопрос о поведении этого интеграла при $b \to +\infty$




*Определение:* Если существует конечный предел то этот предел называют *несобственным интегралом* от функции $f(x)$

на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают

так $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, и так по определению имеем $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$.

Говорят, что в этом случае несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ существует или <u>сходится .</u> Если $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не имеет конечного предела, то говорят, что $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ не существует или <u>расходится.</u>

Если $f(x) \geq 0$, то несобственныи интеграл I –го рода имеет следующий геометричес-кий смысл: если $\int_{a}^{b} f(x)dx$ выражает площадь области, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x = a$, $x = b$, то естественно считать, что несобственный интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ выражает площадь ограниченной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы и для других бесконечных интервалов: $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_{\alpha}^{a} f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim\limits_{\varphi \to -\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim\limits_{b \to +\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$

## 2) ИНТЕГРАЛЫ ОТ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ.

***<u>Определение.</u>*** Если функция $f(x)$ либо не определена, либо терпит бесконечный разрыв в точке $x = c$, принадлежащий отрезку [a;b] и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то полагают

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$$

Где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ изменяются независимо друг от друга, если в правой части этого равенства существуют конечные пределы, то несобственный интеграл II рода сходится, в противном случае – расходится.

При $c = a$ или $c = b$ имеем

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Если функция $f(x)$, определенная на [a;b], имеет внутри этого отрезка конечное число точек разрыва $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то интеграл от функции $f(x)$ на [a;b] определяется следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a_1} f(x)dx + \int_a^{a_2} f(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^b f(x)dx$$

Если хотя бы один из интегралов правой части расходится, то и $\int_a^b f(x)dx$ называется расходящимся.

**45**.Вычислить интеграл $J = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$$I = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t \Rightarrow dx = 2\cos t dt \\ t_1 = 0, \quad t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{matrix} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t)^2 \sqrt{4 - 4\sin^2 t} \cdot$$

$$\cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{0}} 4\sin^2 t \cdot 2\cos t \cdot 2\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{0}} 16\sin^2 t\cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 16\frac{(1-\cos 2t)}{2} \cdot$$

.

$$\cdot \frac{(1+\cos 2t)}{2}dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 2t)tdt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 4t}{2}dt = 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t dt = 4\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - 2 \cdot \frac{1}{4}\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi - \pi -$$

$$-\frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0) = \pi$$

**46**.Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{x^2}dx$

$$\int_1^{+\infty} \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \int_1^{\infty} arctgx \quad d(arctgx) = \lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b arctgx \quad d(arctgx)\right) =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{arctg^2 x}{2}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{arctg^2 b}{2} - \frac{arctg^2 1}{2}\right) = \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{32}\right) =$$

$$= \frac{4\pi^2 - \pi^2}{32} = \frac{3\pi^2}{32}$$

**47**.Вычислить интеграл $J = \int\limits_{3}^{10} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x+6}}$

Сделаем замену**:**

$$\sqrt{x+6} = t \Rightarrow x+6 = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt$$

Таким образом $x - 1 = t^2 - 7$

При этом поменяются и пределы интегрирования

$$x_1 = 3; \qquad t_1 = \sqrt{3+6} = 3$$
$$x_2 = 10 \qquad t_2 = \sqrt{10+6} = 4$$

$$\int\limits_{3}^{4} \frac{2tdt}{\left(t^2-7\right)\cdot t} = \int\limits_{3}^{4} \frac{2dt}{t^2-7} = \frac{2}{2\sqrt{7}} \ln\left|\frac{t-\sqrt{7}}{t+\sqrt{7}}\right|\Bigg|_3^4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\ln\left|\frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}\right| - \ln\left|\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}\right|\right]$$

**48**.Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot (-1)^{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + (-1)^{n-1} U_n + \ldots \qquad (1)$$

Или

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} U_n = -U_1 + U_2 - U_3 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots \qquad (1')$$

Где $U_k > 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots)$ называется знакочередующимся.

*<u>ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА.</u>* Если члены знакочередующегося ряда (1) по абсолютной величине монотонно убывают, при возрастании их номера, т.е.

$U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$, то такой ряд сходится, сумма его положительна и не превышает первый член.

**49**.Показать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}+\ldots$$ и найти сумму этого ряда.

Р е ш е н и е $U_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n(n+2)}=$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

$$U_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right),\qquad U_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right),$$

$$U_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}\right),\quad U_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}\right),\ldots$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n-1}-\frac{2}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right).$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Ряд сходящегося и его сумма $S=\frac{1}{4}$

**50**. Показать абсолютную сходимость ряда $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots$

$$a_n=\frac{1}{n!}\qquad\qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

$$D=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$