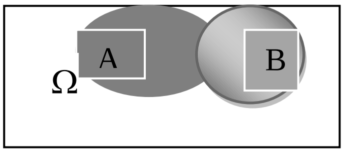
## *Ehtimal Nəzəriyyəsi və Riyazi Statistika Fənni Üzrə Kollokvium Suallarının Cavabları*

**1. İki uyuşan hadisələrin cəminin ehtimalı düsturunun cıxarılışı ($P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$):**

**Teorem.** Birgə olan iki A və B hadisələrinin cəminin ehtimalı onların ehtimalları cəmi ilə hasilin ehtimalı fərqinə bərabərdir.




$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (1)$$

Göstərmək olar ki, A+B və B hadisələrini birgə olmayan hadisələrin cəmi kimi $A+B=A+B\cdot\overline{A}$; $B=AB+B\overline{A}$ yazmaq olar. Onda ehtimalın aksiomlarına görə $P(A+B)=P(A)+P(B\cdot\overline{A})$ və $P(B)=P(A\cdot B)+P(B\cdot\overline{A})$ alarıq. Buradan isə $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$ olduğunu alarıq.

(1) düsturunu başqa şəkildə asanlıqla məntiqi isbat etmək olar. Belə ki, *A* və *B* hadisələri birgədirsə, yəni uyuşandırsa onların kəsişməsi var və bu kəsişmədə olan ortaq elementləri *r* sayda götürsək $P(AB)=\frac{r}{n}$ olar. *A* hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı $m=m_1+r$, *B* hadisəsi üçün isə $k=k_1+r$ qəbul etsək, *A*+*B* hadisəsi üçün əlverişli hallar sayı $m_1+k_1+r=m-r+k-r+r=m+k-r$ olar. Onda $P(A+B)=\frac{m+k-r}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{r}{n}=P(A)+P(B)-P(AB)$ olar. Deməli, (1) düsturu doğrudur.

Toplama teoremlərini sonlu sayda hadisələr üçün də analoji isbat etmək olar. Əgər *A,B* və *C* cüt-cüt uyuşmayan hadisələr olarsa, onda

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C) \qquad (2)$$

uyuşan hadisələr olduqda isə

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \quad (4)$$

düsturları alınar. Bu düsturların isbatları (1) və (2) düsturlarının isbatları ilə eynilik təşkil edir.

**2. Şərti ehtimal düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin:**

**Məsələ:** İmtahan biletlərinin 5-i asan 20 dənəsi isə çətindir. Birinci bilet götürən tələbə ilə ikinci bilet götürənin asan bilet götürmələri ehtimalını hesablamalı(Bütün hallara baxın).

*A* hadisəsinin baş verməsi şərt ilə *B* hadisəsi baş verirsə, onda bu hadisənin ehtimalı şərti ehtimal kimi xarakterizə olunur. və $P_A(B)$ və ya $P(B/A)$ kimi işarə olunur. Şərti ehtimal bu hadisələrin hasilin ehtimalının *A* hadisəsinin ($P(A)\neq 0$) ehtimalına nisbətinə deyilir.

*B* hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində *A* hadisəsinin şərti ehtimalı *P(A/B)* kimi işarə olunur və uyğun hadisələrin şərti ehtimalları adlanır.

Əgər $P(A/B)=P(A)$ və ya $P(B/A)=P(B)$ ödənilərsə $A$ və $B$ asılı olmayan hadisələr olur. Ehtimalın klassik tərifindən istifadə edərək şərti ehtimal üçün

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (1)$$

düsturlarını ala bilərik (burada $P(B)>0, P(A)>0$ qəbul olunub).

**Məsələnin həlli:** *1a, 1r-* I tələbənin asan və ya çətin bilet götürmələri hadisəsini *2a, 2r* isə uyğun olaraq II-nin asan və ya çətin bilet götürmələri hadisəsini işarə edək. Burada elementar hadisələr fəzası 4 uyuşmayan hadisədən ibarət olacaqdər. Elementar hadisələr *(1a,2a), (1a,2r), (1r,2a), (1r,2r)* olacaq (burada *a*-asan bilet, *r* isə çətin bilet düşməsi hadisəsini ifadə edir).

$P(1a,2a)=P(1a)\ \ P(2a/1a)$, aydındır ki, $P(1a)=\frac{1}{5}$ $P(2a/1a)=\frac{4}{24}$, onda $P(1a,2a)=\frac{4}{24}\cdot\frac{1}{5}$.

Eyni qayda ilə $P(1a,2r)=P(1a)\cdot P(2r/1a)=\frac{1}{5}\cdot\frac{20}{24}$,

$$P(1r,2a)=P(1r)\cdot P(2a/1r)=\frac{20}{25}\cdot\frac{5}{24},$$

$$P(1r,2r)=P(1r)\cdot P(2r/1r)=\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}.$$

II-yə asan bilet düşməsi ehtimalı

$$P(2a)=P(1a\cdot 2a)+P(1r\cdot 2a)=\frac{120}{600}=\frac{1}{5},\ P(1a)=\frac{1}{5},$$

$$P(1a\cdot 2a)+P(1a\cdot 2r)+P(1r\cdot 2a)+P(1r\cdot 2r)=\frac{600}{600}=1$$

**3. Ən azı bir hadisənin baş vermə ehtimalı düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin:**

**Məsələ:** Üç tədqiqatçı bir-birindən asılı olmayaraq müəyyən bir fiziki kəmiyyəti ölçürlər. Ölçmə zamanı tədqiqatçıların səhv buraxması ehtimalları uyğun olaraq 0,1;0,15 və 0,2–ə bərabərdir. Bir ölçmə zamanı tədqiqatçılardan heç olmazsa birinin səhv buraxma ehtimalını tapın.

**Cavab:** Tutaq ki, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisələri bütövlükdə asılı olmayan hadisələrdir. Onda bu hadisələrdən heç olmasa birinin baş verməsi (başqa sözlə, bu hadisələrin cəminin) ehtimalını tapmaq tələb olunur.

**<u>Teorem.</u>** Bütövlükdə asılı olmayan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi, vahidlə, bu hadisələrlə qarşılıqlı əks olan $\overline{A_1},\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$ hadisələrinin ehtimalları hasillərinin fərqinə bərabərdir, yəni

$$P(A)=1-q_1\cdot q_2\ldots q_n \qquad (1)$$

olur. Burada $P\left(\overline{A_i}\right)=q_i \quad \left(i=\overline{1,n}\right)$ işarə olunmuşdur.

□ Bütövlükdə asılı olmayan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisələrindən heç olmasa birinin baş verməsi ilə baş verən hadisəni $A$ ilə işarə edək. Onda $A=A_1+A_2+\ldots+A_n$ olur və $A$ və $\overline{A_1},\overline{A_2},\ldots,\overline{A_n}$ hadisələri qarşılıqlı əks hadisələrdir. Yəni $P(A)+P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}...\overline{A_n}\right)=1$ olur. Buradan $P(A)=1-P\left(\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}...\overline{A_n}\right)=1-P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot...\cdot P\left(\overline{A_n}\right)=1-q_1\cdot q_2\cdot...\cdot q_n$ olur. □

Xüsusi halda $P(A_1)=p,\ P(A_2)=p,...,P(A_n)=p$ olarsa, onda $P\left(\overline{A_1}\right)=1-p=q$, $P\left(\overline{A_2}\right)=1-p=q,\ldots,\ P\left(\overline{A_n}\right)=1-p=q$ olar və bu halda (1) düstürü

$$P(A)=1-q^n \tag{2}$$

olur.

**Məsələnin həlli:** Səhv buraxmama hadisələri uygun olaraq *$A_1$, $A_2$, və $A_3$* olarsa, onda səhv buraxma hadisələri də $\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ olar. Şərtə görə $p\left(\overline{A_1}\right)=0{,}1;\ p\left(\overline{A_2}\right)=0{,}15;\ p\left(\overline{A_3}\right)=0{,}2.$ olar. Düsturda bunları nəzərə alsaq $P(A)=1-p\left(\overline{A_1}\right)p\left(\overline{A_2}\right)p\left(\overline{A_3}\right)=1-0{,}1\cdot0{,}15\cdot0{,}2=1-0{,}003=0{,}997$ alarıq.

**4. Tam ehtimal düsturunu yazin və verilən məsələni həll edin:**

$A$ hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2,...A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verirsə, $A$ hadisəsinin ehtimalına tam ehtimal deyilir və aşağıdakı kimi tapılır.

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\cdot P\left(A/A_k\right)$$

**Məsələ**. Satışa üç zavoddan televizorlar gətirildi. Birirnci zavodun məhsulunun 10% - i defektdir, ikincinin 5% -i və üçüncünün isə 3% - i defektdir. Əgər maqazinə gətirilmiş televizorların 25% - i birinci , 55% - i ikinci , 20% - i isə üçüncü zavoddan gətirilmişdirsə,onda defektli televizor almaq ehtimalını tapın.

**<u>Həlli:</u>** Nəzərdən keçirilən A = { alınmış televizor defektlidir } hadisəsi üç hipotezlə bağlıdır : $H_1$={ televizor birinci zavodun istehsalıdır },
$H_2$= { ikinci zavodun istehsalıdır }, $H_3$={ üçüncü zavodun istehsalıdır}.
Bu hadisələrin ehtimalları məsələnin şərtindən təyin olunur:
$p(H_1)=0{,}25;\ p(H_2)=0{,}55;\ p(H_3)=0{,}2.$
A hadisəsinin şərti ehtimalları da məsələnin şərtlərindən təyin olunur:
$p(A/H_1)=0{,}1;\ p(A/H_2)=0{,}05;\ p(A/H_3)=0{,}03.$
Buradan tam ehtimal düsturuna əsasən alınır:
$p(A)=0{,}25\cdot0{,}1+0{,}55\cdot0{,}05+0{,}2\cdot0{,}03=0{,}0585$

**5. Bayes düsturlarını yazin və verilən məsələni həll edin:**

$A$ hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2,...A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verir. $A$ hadisəsi artıq baş vermirsə onun baş verməsinə səbəb olan $A_k$ hadisəsinin ehtimalı

$$P\left(\frac{A_k}{A}\right)=\frac{P(A_k)\cdot P\left(\frac{A}{A_k}\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_2)\cdot P\left(\frac{A_k}{A_i}\right)} \qquad (1)$$

**Məslə.** Radiyoqəbuledici qurğuya 0,9 ehtimalla sərfəli siqnal yığımı daxil olur və 0,1 ehtimalla yalnız küylü siqnal daxil olur. Əgər sərfəli, küylü siqnal qəbulediciyə daxil olursa 0,08 ehtimalla siqnalı verə bilir. Əgər küylü siqnal daxil olursa o siqnalı 0,3 ehtimalla verə bilir. Məlumdur ki, qəbuledici siqnalı vermişdir. Hansı ehtimalla siqnal qəbulrdiciyə gəlmişdir.

**Həlli:** A = { ilə qəbuledicinin siqnalı alması } hadisəsini qəbul edək.

İki fərziyə var: $H_1$={ siqnal küylü gəlməlidir },

$H_2$= { ancaq küylü gəlməlidir }. Bu hadisənin ehtimalları uyğun olaraq $p(H_1)=0{,}9;\ p(H_2)=0{,}1$. A hadisəsinin $H_1$ və $H_2$ -dən olan şərti ehtimalları məsələnin şərtindən $p(A/H_1)=0{,}8;\ p(A/H_2)=0{,}3$ olur. $H_1$ hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalını tapmaq tələb edilir və Bayes düsturu ilə aşağıdakı kimi hesablanır.

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)\cdot p(A/H_1)}{p(H_1)\cdot p(A/H_1)+p(H_2)\cdot(A/H_2)}=\frac{0{,}9\cdot 0{,}8}{0{,}9\cdot 0{,}8+0{,}1\cdot 0{,}3}=0{,}96$$

## 6. Bayes düsturlarını yazin və verilən məsələni həll edin:

$A$ hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan tam qrupun təşkil edən $A_1, A_2, \ldots A_n$ hadisələrindən birinin baş verməsi ilə baş verir. $A$ hadisəsi artıq baş vermirsə onun baş verməsinə səbəb olan $A_k$ hadisəsinin ehtimalı

$$P\left(\frac{A_k}{A}\right)=\frac{P(A_k)\cdot P\left(\frac{A}{A_k}\right)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_2)\cdot P\left(\frac{A_k}{A_i}\right)} \qquad (1)$$

**Məsələ** . Fabrikdə məmulatın 25%-i birinci, 35%-i ikinci və 40%-i üçüncü maşında hazırlanır.Birinci,ikinci,üçüncü maşınların buraxdığı məmulatların uyğun olaraq 5%,4% və 2%-i yararsız olur.Təsadüfi götürülən hər hansı bir məmulatın yararsız olması hadisəsinin ehtimalını tapın Bu şərtləri saxlayaraq yararsız məmulatın 1-ci, 2-ci və 3-cü maşının hazırladığı məmulat olması ehtimalını tapın.

**Həlli:** Götürülən məmulatın yararsız olması hadisəsini A ilə işarə edək.Burada üç fərziyyə ola bilər: Götürülən yararsız məhsul 1-ci maşında ( $B_1$ hadisəsi ),2-ci maşında ( $B_2$ hadisəsi ),3-cü maşında ( $B_3$ hadisəsi ) hazırlana bilər.Onda verilənlərə əsasən

$P(B_1)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$; $P(B_2)=\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$; $P(B_3)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ olar.

Götürülən yararsız məmulat 1-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_1}(A)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$;

2-ci maşında buraxılıbsa $P_{B_2}(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$; 3-cü maşında buraxılıbsa $P_{B_3}(A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ olar.

Onda tam ehtimal düüsturuna əsasən məmulatın yararsız olması hadisəsinin ehtimalı

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{20} + \frac{7}{20}\cdot\frac{1}{25} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{50} = 0{,}0345$$

$P_A(B_1)$ tapmaq lazımdır.

$P(B_1) = \frac{25}{100} = 0{,}25$; $P_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05$; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$ olduğundan,Bayes düsturunu tətbiq etməklə

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{0{,}0345} = \frac{0{,}0125}{0{,}0345} = \frac{25}{69}$$

$P_A(B_2)$ -tapmaq lazımdır.

$P(B_2) = 0{,}35$ ; $P_{B_2}(A) = 0{,}04$ ; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$ olduğundan , Bayes düsturunu tətbiq etsək,

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}35\cdot 0{,}04}{0{,}0345} = \frac{28}{69}$$

şərtə əsasən

$P(B_3)=0{,}4$ ; $P_{B_3}(A)=0{,}02$ ; $P(A) = \sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A) = 0{,}0345$ olduğundan Bayes düsturuna əsasən

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3)\cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^{3} P(B_k)\cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}02}{0{,}0345} = \frac{80}{345} = \frac{16}{69}$$

## 7. Asılı olmayan sınaqlar. Bernulli düsturunun cıxarılışı(bəzi hallar).

Fərz edək ki, $a_1, a_2, a_3 \ldots a_n$ kimi $k$ sayda müxtəlif element verilmişdir. $a_1$ elementi $n_1$ dəfə , $a_2$ elementi $n_2$ dəfə və s. $a_k$ elementinin $n_k$ dəfə təkrar olunması şərti ilə düzəldilən $(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n)$ şəkilli qruplara təkrarlı permutasionlar deyilir və onların sayı $P_n(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k)$ ilə işarə edilir. Burada $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$ bərabərliyi doğrudur.

Teorem 1. $P_n(n_1, n_2, n_3 \ldots n_k) = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

bərabərliyi doğrudur.

Teprem 2. $n$ asılı olmayan sınağın hər birində hadisənin baş verməsi ehtimalı $p$-yə $0 < p < 1$ bərabərdirsə, hadisənin $m$ dəfə baş verməsi (hansı ardıcıllıqla fərqi yoxdur) ehtimalı

$$P_n(m) = C_n^m p^m \cdot q^{n-m} \qquad (1)$$

ədədinə bərabərdir.

**İsbatı:** Fərz edək ki, ardıcıl olaraq birinci, ikinci və s. $m$-ci sınaqda $A$ hadisəsi baş vermiş, sonrakı $n-m$ sınaqda baş verməmişdir, yəni

$$\underbrace{A\cdot A\cdot A...A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdot\overline{A}...\overline{A}}_{n-m}$$

baş vermişdir. Sınaqlar asılı olmadığından bu kombinasiyanın ehtimalı

$$P\left(A\cdot A\cdot A...A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}...\overline{A}\right)=P^{m}(A)\cdot P^{n-m}\left(\overline{A}\right)=p^{m}\cdot q^{n-m}$$

olar. Bütün digər kombinasiyalarında ehtimalları $p^{m}\cdot q^{n-m}$ bərabər olması aydındır. Bu kombinasiyalardan heç olmasa biri baş verərsə, $A$ hadisəsi düz $m$ dəfə baş verər. Onda uyuşmayan hadisələr üçün toplama teoreminə görə

$$P_n(m)=P\left(AA...A\overline{A}\overline{A}...\overline{A}\right)+P\left(A\overline{A}A\overline{A}...A\right)+...+P\left(\overline{A}\overline{A}...\overline{A}AA\overline{A}...A\right)$$ olar.

Baxılan kombinasiyaların sayını tapaq. Hər qrupda $n$ element var, birinci element $m$ dəfə,ikinci element $n-m$ dəfə təkrar olunur. Deməli kombinasiyaların sayı təkrarlı permutasiyonların sayıdır.

$$P_n(m;n-m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^m$$ olur.

Beləliklə aldıq ki,

$$P_n(m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m}$$

olması alınır. Sonuncu düstura Bernulli düsturu deyilir.

$n$ sayda asılı olmayan Bernulli sınaqlarında $A$ hadisəsinin: a) $m$- dən az, b) $m$- dən çox, v) ən azı $m$ dəfə, y) ən çoxu $m$ dəfə baş verməsi ehtimalları uyğun olaraq aşağıdakı düsturlarla tapılır.

$$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)+...+P_n(m-1),\qquad P_n(m+1)+P_n(m+2)+...+P_n(n),$$
$$P_n(m)+P_n(m+1)+...+P_n(n),\qquad P_n(0)+P_n(1)+...+P_n(m).$$

**8. Ən böyük ehtimallı ədədin tapılma düsturunu yazın və məsələni həll edin.**

$n$ sayda asılı olmayan sınaqlar seriyasında $P_n(m_o)$ ehtimalı digər hadisələrin ehtimallarından kiçik deyilsə, onda $m_0$-a **ən böyük ehtimallı ədəd** deyilir. $m_0$ tapmaq üçün

$$\begin{cases} P_m(m_0) \geq P_n(m_0+1) \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1) \end{cases} \tag{1}$$

düsturundan istifadə olunur.
Sistemin birinci və ikinci bərabərsizliyini açıq yazaraq həll etsək və bu bərabərsizliklərin hər ikisini birləşdirsək

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \tag{2}$$

alarıq. Bu bərabərzik vasitəsilə ən böyük ehtimallı ədəd tapılır.

**Məsələ.** İstehsal dəzgahını standart məhsul buraxması ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. 5 məhsulun istehsalı zamanı standart olmayan məhsulların mümkün ehtimalların tapın.

**Həlli.** Standart olmayan məhsul istehsal ehtimalı $p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ olar. Bernulli düsturuna görə bütün variantları hesablayaq (n=5, q=0,8,k=0,1,2,3,4,5).

$P_5(0) = C_5^0 \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^5 = 0{,}32768;$ $\quad P_5(1) = C_5^1 \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096;$

$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048;$ $\quad P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^1 = 0{,}0064;$ $\quad P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}2^5 \cdot 0{,}8^0 = 0{,}00032$

Aldığımız ehtimalları qrafik şəklində qeyd etsək ən böyük ehtimala malik ədədin $m_0 = 1$ olduğunu görərik.
Yuxarıda həll etdiyimiz məsələyə uyğun olaraq
$5 \cdot 0{,}2 - 0{,}8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \Rightarrow 0{,}2 \leq m_o \leq 1{,}2 \Rightarrow m_0 = 1$
olmalıdır. Yəni, 1 məhsulun standart olmaması ehtimalı daha çoxdur və $P_5(1) = C_5^1 pq^4 = 5 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$ -dır.

**9. Ən böyük ehtimallı ədədin tapılma düsturunu yazın və məsələni həll edin.**

**Məsələ.** İlkin elan olunan qiymətlərlə səhmlərin orta hesabla 20%-i səhm bazarında satılır. İlkin elan olunmuş qiymətlərlə 9 səhm paketindən:

1) 5 paketin satılması;
2) a) 2-dən az; b) 2-dən çox olmayan; c) heç olmasa 2 səhm paketinin satılması üçün ən böyük ehtimallı
ədədin ehtimalını tapın.

*n* sayda asılı olmayan sınaqlar seriyasında $P_n(m_o)$ ehtimalı digər hadisələrin ehtimallarından kiçik deyilsə, onda $m_0$-a **ən böyük ehtimallı ədəd** deyilir. $m_0$ tapmaq üçün

$$\begin{cases} P_m(m_0) \geq P_n(m_0+1) \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0-1) \end{cases}$$

düsturundan istifadə olunur.
Sistemin birinci və ikinci bərabərsizliyini açıq yazaraq həll etsək və bu bərabərsizliklərin hər ikisini birləşdirsək

$$np - q \leq m_0 \leq np + p \tag{1}$$

alarıq. Bu bərabərzik vasitəsilə ən böyük ehtimallı ədəd tapılır.

**Həlli.** 1) Şərtə görə ilkin elan olunan qiymətlərlə səhmlərin satılması ehtimalı $p=0,2$ satılmaması ehtimalı isə $q=1-p=1-0,2=0,8$ olar. Bernulli teoreminə görə: $P_9(5)=C_9^5\cdot 0,2^5\cdot 0,8^4=0,0165$ alarıq.

a) Şərtə görə $p$=0,2, $q$=0,8

$P_9(m<2)=P_9(0)+P_9(1)=C_9^0\cdot 0,2^0\cdot 0,8^9+C_9^1 0,2\cdot 0,8^8=0,436$

b) $P_9(m\le 2)=P_9(0)+P_9(1)+P_9(2)=C_9^0\cdot 0,2^0\cdot 0,8^9+$

$+C_9^1\cdot 0,2\cdot 0,8^8+C_9^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^7=0,738$.

c) $P_9(m\ge 2)=P_9(2)+P_9(3)+...+P_9(9)$-u hesablamaq üçün: $P_9(m\ge 2)=1-P_9(m<2)=1-0,436=0,564$ alarıq.

ç) ən böyük ehtimallı ədəd $np-q\le m_0\le np+p$ düsturuna görə tapıldığından $9\cdot 0,2-0,8\le m_0\le 9\cdot 0,2+0,2\Rightarrow \quad \Rightarrow 1\le m_0\le 2$ alarıq. Deməli, ən böyük ehtimallı ədəd $m_0=1,\ m_0^1=2$ olur. Onda ehtimal $P_{\text{ənböyük}}=P_9(1)+P_9(2)=$ $=C_9^1\cdot 0,2\cdot 0,8^8+C_9^2\cdot 0,2^2\cdot 0,8^7=0,604$ olar.

## 10. Muavr-Laplasın lokal düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

**Teorem.** $n$ asılı olmayan sınağın hər birində $A$ hadisəsinin baş verməsi ehtimalı sabit $p$ – yə $(0<p<1)$ bərabərdirsə, hadisənin $m$ dəfə baş verməsi ehtimalı($n$-nin lazımı böyük qiymətində ) təqribən

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{2}$$

bərabərliyi ilə təyin olunur.

Burada $x=\dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}$ işarə olunmuşdur.

(2) düsturuna Muavır-Laplasın lokal düsturu və ya binomial paylanmanın normal yaxınlaşması deyilir. (2) düsturunda

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} \tag{3}$$

işarə etsək $P_n(m)\approx\dfrac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$ alarıq.

**Məsələ.** Hər sınaqda $A$ hadisəsinin baş verməsi eh-timalı 0,6 bərabərdirsə, 2400 sınaqda $A$ hadisəsinin 1400 dəfə baş verməsi ehtimalını tapın.

**Həlli.** $n$ böyük olduğundan, Laplas lokal teoremindən istifadə edək: $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}=\dfrac{1400-2400\cdot 0,6}{\sqrt{2400\cdot 0,6\cdot 0,4}}=-\dfrac{40}{24}=-1,67$

$\varphi(x)$ funksiyası cüt olduğuna görə $\varphi(-1,67)=\varphi(1,67)$ 1-ci əlavədəki cədvələ görə $\varphi(1,67)=0,0989$ tapırıq.

Axtarılan ehtimal $P_{2400}(1400)=\dfrac{1}{24}0,0989=0,0041$ olar.

## 11. Muavr-Laplasın inteqral düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

**Teorem.** n sayda Bernulli sınaqlarında $0<P(A)=p<1$ olduqda $A$ hadisəsinin $m_1$-dən $m_2$-yə qədər baş verməsi ehtimalı $P_n(m_1;m_2)$, $x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}$ olduqda $n$-nin böyük qiymətlərində

$$P_n(m_1;m_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1) \qquad (1)$$

düsturu ilə tapılır. (2) düsturuna Muavir-Laplasın <u>inteqral düsturu deyilir.</u> (1) –bərabərliyinin sağ tərəfindəki inteqral Laplas funksiyası adlanan

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2/2}dt \qquad (2)$$

funksiyası ilə bağlıdır

**Məsələ.** Vergi təlimatçısının yoxlamasına görə orta hesabla hər iki kiçik müəsisədən biri maliyyə intizamını pozur. 1000 qeydiyyatdan keçmiş kiçik müəssisənin: a) 480 müəssisənin; b) müəssisənin ən böyük ehtimallı ədədini; c) 480-dan az olmayan; ç) 480-dan 520-yə kimi müəssisələrin maliyyə intizamını pozması ehtimallarını tapın.

**Həlli.** a) Şərtə görə $p=0{,}5,\ n=1000$ m=480 $(npq=1000\cdot 0{,}5\cdot(1-0{,}5)=250>20)$ olduğundan Muavr-Laplasın lokal düsturunu tətbiq edə bilərik.

Əvvəlcə $x=\frac{480-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=-1{,}265$ hesablayaq.

$P_{1000}(480)=\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}\cdot\varphi(-1{,}265)=\frac{0{,}1792}{\sqrt{250}}=0{,}0113\cdot$

b) ən böyük ehtimallı ədədin tapılması düsturuna əsasən $-0{,}5\le m_0\le 1000\cdot 0{,}5+0{,}5\Rightarrow 499{,}5\le m_0\le 500{,}5$ və $m_0$=500 alarıq. $X=\frac{500-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=0, P_{1000}(500)=\frac{\varphi(0)}{\sqrt{250}}=\frac{0{,}3989}{\sqrt{250}}=0{,}0252$

c) $P_{1000}(m\ge 480)=P_{1000}(480\le m\le 1000)$ tapmaq lazımdır. Muavr-Laplasın inteqral teoremini tətbiq etsək:

$X_1=\frac{480-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=-1{,}265,\ X_2=\frac{1000-1000\cdot 0{,}5}{\sqrt{1000\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=31{,}6$ alarıq.

Onda $P_{1000}(480\le m\le 1000)\approx\Phi(31{,}6)-\Phi(-1{,}265)\approx 0{,}897$ olar.

ç) $P_{1000}(480\le m\le 520)$ ehtimalını Muavr-Laplas düsturu vasitəsilə hesablaya bilərik. Bu bərabırsizliyi simmetrik yazsaq: $P_{1000}(480\le m\le 520)==P_{1000}(|m-500|\le 20)\approx\Phi\left(\frac{20}{\sqrt{250}}\right)=$

$=\Phi(1{,}265)=0{,}794$ ala bilərik.

**12. Verilən məsələni həll edin.**

**Məsələ 5. 1.** Eyni bir xətdən rəqiblər hər birinin hədəfə dəyməsi ehtimalı 0,6 olan 5 atəş açırlar. X hədəfin vurulması təsadüfi kəmiyyəti üçün paylanma qanununu və paylanma funksiyasını təyin edin.

***Həlli:*** X təsadüfi kəmiyyəti 0,1,2,3,4,5 qiymətləri alır.

$P\{X=0\}=(1-p)^5=0,4^5=0,01024,$

$P\{X=1\}=C_5^1 p(1-p)^4=5\cdot 0,6\cdot 0,4^4=0,0768,$

$P\{X=2\}=C_5^2 p^2(1-p)^3=10\cdot 0,6^2\cdot 0,4^3=0,2304,$

$P\{X=3\}=C_5^3 p^3(1-p)^2=10\cdot 0,6^3\cdot 0,4^2=0,3456,$

$P\{X=4\}=C_5^4 p^4(1-p)=5\cdot 0,6^4\cdot 0,4=0,2592,$

$P\{X=5\}=p^5=0,6^5=0,07776.$

Paylanma qanunu aşağıdakı kimi olar:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,01024 | 0,0768 | 0,2304 | 0,3456 | 0,2592 | 0,07776 |

1.Paylanma funksiyasını (5)düsturu ilə təyin edək. Dəyişənlər üçün :

$x\le 0 \quad F(x)=0,$

$0<x\le 1 \quad F(x)=p_0=0,01024,$

$1<x\le 2 \quad F(x)=p_0+p_1=0,08704,$

$2<x\le 3 \quad F(x)=p_0+p_1+p_2=0,31744,$

$3<x\le 4 \quad F(x)=p_0+p_1+p_2+p_3=0,66304,$

$4<x\le 5 \quad F(x)=p_0+p_1+p_2+p_3+p_4=0,92224,$

$x>5 \quad F(x)=p_0+p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$

| x | $\le 0$ | [0;1] | [ 1;2] | [2;3 ] | [3;4] | [4;5] | >5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F(x) | 0 | 0,01024 | 0,08704 | 0,31744 | 0,66304 | 0,92224 | 1 |
| | | | | | | | |

**13. Diskret təsadüfi kəmiyyətlərin paylanma qanunları (Binomial, Həndəsi və Puasson) .**

Aşağıdakı diskret paylanmalara baxaq:

**<u>1. BİNOMİNAL PAYLANMA</u>.** Bu paylanma

$$P_n(X=k)=P_n(k)=c_n^k p^k q^{n-k} \qquad (1)$$

$(k=0,1,2,...,n)$ düsturundan alınır

| X | 0 | 1 | 2 | … | к | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $q^n$ | $c_n^1 pq^{n-1}$ | $c_n^2 p^2 q^{n-2}$ | … | $c_n^k p^k q^{n-k}$ | … | $p^n$ |

(2)

(3) diskret təsadüfi $X$ kəmiyyətinin binomial paylanma qanunu adlanır. Bu paylanma üçün $\sum_{k=0}^{n} c_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$ olur.

**<u>2. HƏNDƏSİ PAYLANMA</u>.** Bu paylanma

$$P(X=k)=p\cdot q^k \qquad (k=0,1,2,...) \qquad (3)$$

$(0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad q = 1 - p)$ düsturundan alınır

| X | 0 | 1 | 2 | … | k | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_i$ | $p$ | $pq$ | $pq^2$ | … | $pq^k$ | … |

(4)

(5) diskret təsadüfi $X$ kəmiyyətinin həndəsi paylanma qanunudur.
Burada $p + pq + pq^2 + ... + pq^k + ... = p\underbrace{(1 + q + q^2 + ... + q^k + ...)}_{\frac{1}{1-q}(0<q<1 \text{ olduhundan})} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1$ olur.

## 3. PUASSON PAYLANMASI.

Bu paylanma

$$P_n(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, ...n, ... \quad \lambda > 0 \tag{5}$$

Puassonun asimptotik düsturundan alınır:

| X | 0 | 1 | 2 | … | $n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $e^{-\lambda}$ | $\lambda e^{-\lambda}$ | $\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$ | … | $\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$ | … |

(6)

(7) diskret $X$ təsadüfi kəmiyyətin Puasson paylanması adlanır. Burada

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$$ olur.

## 14. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının xassələrini yazin və verilən məsələni həll edin.

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsinə onun <u>sıxlıq funksiyası deyilir</u> və $f(x)$ - ilə işarə olunur:

$$f(x) = F'(x) \tag{1}$$

Sıxlıq funksiyası məlum olduqda paylanma funksiyası

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2}$$

düsturu ilə tapılır. (2) –dən $F'(x) = \left( \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \right)' = f(x)$ olur.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

<u>**1 xassə**</u>. Sıxlıq funksiyası mənfi deyildir, yəni $f(x) \ge 0$ .

□ $f(x) = F'(x) \ge 0$ ($F(x)$ paylanma funksiyası azalmayan funksiya olduğundan $F'(x) \ge 0$) olur. □

<u>**2 xassə.**</u> $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$. □(8)–dən $\underbrace{\lim_{x \to +\infty} F(x)}_{F(+\infty)=1} = \lim_{x \to +\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.□

**Məsələ** Təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x, & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0, & |x|. > \pi/2 \end{cases}$$

verilmişdir. C sabitini tapın və $p\{|x| < \pi/4\}$. ehtimalını hesablayın.

***Həlli:* c** sabitini xassəyə əsasən $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-n/2}^{n/2} c \ \cos x dx = c\sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1$

c = 0,5.

Belə ki, sıxlıq funksiyası iki intervalda verildiyindən ,Paylanma funksiyasını da hər bir intervalda ayrılıqda təyin edək.

$$x < -\pi/2 \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dy = 0$$

$$-\pi/2 \le x \le \pi/2 \quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int\limits_{-\pi/2}^{x} \frac{\cos y}{2}dy = \frac{\sin y}{2}\Big|_{-\pi/2} = \frac{1+\sin x}{2}$$

$$x > \pi/2 \qquad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/2} 0dy + \int\limits_{-\pi/2}^{n/2} \frac{\cos y}{2}dy + \int\limits_{\pi/2}^{x} 0dy = 1$$

Beləliklə ,alarıq:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1+\sin x)/2 & |x| \le \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

$$p\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**15. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin sıxlıq funksiyasının xassələrini yazin və verilən məsələni həll edin.**

Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyasının birinci tərtib törəməsinə onun sıxlıq funksiyası deyilir və $f(x)$ - ilə işarə olunur:

$$f(x) = F'(x) \qquad (1)$$

Sıxlıq funksiyası məlum olduqda paylanma funksiyası

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (2)$$

düsturu ilə tapılır. $F'(x) = \left(\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$ olur.

Sıxlıq funksiyasının aşağıdakı xassələri vardır:

**1 xassə**. Sıxlıq funksiyası mənfi deyildir, yəni $f(x) \ge 0$ .

□ $f(x) = F'(x) \ge 0$ ( $F(x)$ paylanma funksiyası azalmayan funksiya olduğundan $F'(x) \ge 0$) olur. □

**2 xassə.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

**Məsələ .** Təsadüfi X kəsilməz kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 2 \\ ax & x \in [0;2] \end{cases}$$

X təsadüfi kəmiyyətinin $[1;2]$ parçasında qiymət alması ehtimalını tapın.

**Həlli:** $f(x) = ax \quad x \in [0,2]$ olduqda a parametrini tapmaq üçün

$\int_a^b f(x)dx = 1$ düsturundan istifadə etmək lazımdır.

$$\int_a^b axdx = 1 \Rightarrow \qquad \left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^2 = 1 \Rightarrow \qquad \frac{a \cdot 4}{2} = 0,5$$

$f(x) = F'(x)$ düsturundan istifadə edərək $F(x)$ paylanma funksiyasını tapaq.

$f(x) = 0,5x$ olduğundan $F(x) = 0,25x^2$ olur.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,25x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, x > 2 \end{cases}$$

$[1,2]$ parçasında $F(x)$ funksiyasının qiymət alması ehtimalını tapaq.

$P(a < x < b) = F(b) - F(a)$ düsturundan istifadə edək.

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0,25x^2\Big|_{x=2} - 0,25x^2\Big|_{x=1} = 0,25 \cdot 4 - 0,25 =$$
$$= 0,25(4-1) = 0,75$$

**16. Verilən məsələni həll edin**.

**Məsələ .** Aralarında ikisi xarab olan 10 qəbuledicidən parametrlərini yoxlamaq üçün təsadüfi olaraq iki qəbuledici götürülür. Tapın:

a) Seçmədə iki xarab qəbuledicinin olmasının paylanmasını ;

b) F(x) paylanma funksiyasını

v) $p\{X \ge 0,5\}, p\{X < 1,5\}$ ehtimallarını hesablayın.

**Həlli:** a) Verilənlərə görə yaza bilərik.

1) k=0

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 0 + 2 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^0 \cdot C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{7 \cdot 8}{2}}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{28}{45}$$

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $p_i$ | 28/45 | 16/45 | 1/45 |

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$P_{10}2 = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{2 \cdot 8}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{16}{45}$$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 2 + 0 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{1}{45}$$

b)

| x | $\le 0$ | $[0;1]$ | $[1;2]$ | $> 2$ |
|---|---|---|---|---|
| F(x) | 0 | 28/45 | 44/45 | 1 |

v) $p\{x \ge 0{,}5\} = 17/45, \quad p\{X < 1{,}5\} = 44/45$

## 17. Riyazi gözləmə və xassələri (M(XУ)=M(X) M(У) xəssəsi isbatı ilə)

Tutaq ki, diskret *X* təsadüfi kəmiyyəti aşağıdaki paylanma qanunu ilə verilmişdir:

| X | $x_1$ | $x_2$ | … | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | … | $p_n$ |

(1)

Diskret *X* təsadüfi kəmiyyətinin mümkün qiymətlərinin uyğun ehtimallarına hasillərinin cəminə onun riyazi gözləməsi deyilir və *M(X)* və ya *MX* – lə işarə olunur. Tərifə əsasən (1) cədvəlindən

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad (2)$$

## Riyazi gözləmənin xassələri

Burada diskret təsadüfi kəmiyyətlər üçün riyazi gözləmənin bir sıra xassələri isbat olunur.

**1 xassə.** Sabitin riyazi gözləməsi özünə bərabərdir:

$$M(C) = C \qquad (3)$$

**2 xassə.** Sabit vurğu riyazi gözləmə işarəsi xaricinə çixarmaq olar:

$$M(CX) = CM(X) \qquad (4)$$

**3 xassə.** İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$M(X+У) = M(X) + M(У). \qquad (5)$$

**Tərif.** İki X və У diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin birinin paylanma qanunu digərinin alabiləcəyi mümkün qiymətlərdən asılı deyilsə, onda *X* və *У* təsadüfi kəmiyyətlərinə asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər deyilir.

**4 xassə**. Asılı olmayan iki *X* və *У* təsadüfi kəmiyyətinin hasilinin riyazi gözləməsi, riyazi gözləmələrinin hasilinə bərabərdir:

$$M(X \cdot У) = MX \cdot MУ \; . \qquad (6)$$

□ Sadəlik üçün *X* və *У* diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma qanunlarını uyğun olaraq

| X | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| P | $P_1$ | $P_2$ |

вя

| $У$ | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $\overline{P}$ | $\overline{P}_1$ | $\overline{P}_2$ |

(7)

kimi götürək.
*X* və *У* diskret təsadüfi kəmiyyətlərinin (7) şəklində verilmiş paylanma qanunundan *X У* təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu

| $X \cdot У$ | $x_1 \cdot y_1$ | $x_1 y_2$ | $x_2 y_1$ | $x_2\ y_2$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $P_1\overline{P}_1$ | $P_1\overline{P}_2$ | $P_2\overline{P}_1$ | $P_2\overline{P}_2$ |

(8)

kimi olar. Burada *X* və *У* asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər olduğundan $\{X = x_1\}$ və $\{У = y_1\}$ hadisələri asılı olmayandır. Yəni $P(X \cdot У = x_1 \cdot y_1) = P[(X = x_1)\cdot(У = y_1)] = P(X = x_1)\cdot P(У = y_1) = P_1 \cdot \overline{P}_1$ (9)
olur. Eyni qayda ilə $P_1\overline{P}_2$, $P_2\overline{P}_1$, $P_2\overline{P}_2$ üçün uyğun bərabərlikləri yazmaq olar.

Riyazi gözləmənin tərifinə əsasən (13) –dən

$$M(X \cdot У) = x_1y_1p_1\overline{p}_1 + x_1y_2p_1\overline{p}_2 + x_2y_1p_2\overline{p}_1 + x_2y_2p_2\overline{p}_2 = (y_1\overline{p}_1 + y_2\overline{p}_2)x_1p_1 + (y_1\overline{p}_1 + y_2\overline{p}_2)x_2p_2 = (x_1p_1 + x_2p_2)(y_1\overline{p}_1 + y_2\overline{p}_2) = MXMУ \quad \square$$

## 18. Dispersiya və onun xassələri (D(X+У)= D(X)+D(У) isbatı ilə)

Diskret *X* təsadüfi kəmiyyətinin sonlu $M(X)$ riyazi gözləməsi varsa, onda $M[X - M(X)]^2$ ifadəsinə *X* təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və *D(X)* kimi işarə olunur:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \ . \qquad (1)$$

Dispersiyanı hesablamaq üçün daha əlverişli düstur çıxaraq:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2 = M(X^2 - 2X \cdot MX + M^2X) = MX^2 - M\Big(2X \cdot \underbrace{MX}_{sabitdir}\Big) + M\Big(\underbrace{M^2X}_{sabitdir}\Big) =$$

$$= MX^2 - 2MX \cdot MX + M^2X = MX^2 - M^2X$$

Deməli dispersiyanı

$$DX = MX^2 - M^2X \qquad (2)$$

düsturu ilə hesablamaq bəzən əlverişli olur. Burada $MX^2$ və $M^2X$ sabit ədədlər olduğundan dispersiyada, yəni *DX*–də sabit ədədir.

**Dispersiyanın xassələri**

**1 xassə.** Sabitin dispersiyası sıfıra bərabərdir.

□ (1) düsturunda *X=C* yazsaq $D(C) = M\Big(C - \underbrace{M(C)}_{C}\Big)^2 = M(C - C)^2 = \underset{"0"}{M\,0} = 0$ □

**2 xassə.** Sabit vurğu kvadratı ilə dispersiya işarəsi xaricinə çıxarmaq olar

□ $D(CX) = M\Big(CX - \underbrace{M(CX)}_{CMX}\Big)^2 = C^2M(X - MX)^2 = C^2DX$ □

**3 xassə.** Asılı olmayan iki təsadüfi kəmiyyətin cəminin dispersiyası, onların dispersiyalarının cəminə bərabərdir:

$$D(X + У) = DX + D(У) \qquad (3)$$

□ (3)-da *X* yerinə *X+У* yazsaq

$$D(X + У) = M(X + У)^2 - \Big[\underbrace{M(X + У)}_{MX + MУ}\Big]^2 = M(X^2 + 2X \cdot У + У^2) - (M^2X + 2MX \cdot MУ + M^2У) =$$

$$= Mx^2 - 2\underbrace{M(X \cdot У)}_{MX \cdot MУ} + MУ^2 - M^2X - 2MX \cdot MУ - M^2У = (MX^2 - M^2X) + (MУ^2 - M^2У) = DX + DУ \quad \blacksquare$$

▪ Burada $X \wedge Y$ asılı olmadığından $M(X \cdot Y) = MX \cdot MY$ olur.

**4 xassə.** X və У asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərinin fərqinin dispersiyası, onların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$D(X - Y) = DX + DY \qquad (4)$$

▪ $D(X-Y) = D(X+(-1)Y) = DX + D((-1)Y) = DX + (-1)^2 DY = DX + DY$

## 19. Diskret təsadüfi kəmiyyətin momentləri . Verilən paylanmanın 2-ci tərtib mərkəzi momenti tapın.

| x | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| p | 0,1 | 0,3 | $p_3$ |

Diskret təsadüfi *X* kəmiyyətinin *K* tərtibli momenti $(X-a)^k$ təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsinə deyilir

$$\nu_k(a) = M(X-a)^k \qquad (1)$$

kimi işarə olunur. $a = 0$ olduqda (1) –dən alınan

$$\alpha_k = \nu_k(0) = MX^k \qquad (2)$$

- ya *k* tərtibli başlanğıc moment deyilir. (2) –dən *k* = 0,1,2,3,4,... qiymətlərinə uyğun

$\alpha_0 = MX^0 = M1 = 1$

$\alpha_1 = MX$, (bir tərtibli başlanğıc moment riyazi gözləməyə bərabərdir)

$\alpha_2 = MX^2$, $\alpha_3 = MX^3$, $\alpha_4 = MX^4$... alırıq.

(1)– də $a = MX$ yazsaq, alınan $\beta_k = \nu_k(MX) = M\left[X - M(X)\right]^k \qquad (3)$

ifadəsinə *k* tərtibli mərkəzi moment deyilir. (3) –dən *k* = 0.1,2,3,4,... qiymətlərinə uyğun

$\beta_0 = M(X - MX)^0 = M1 = 1,$

$\beta_1 = M(X - MX) = MX - \underbrace{M(MX)}_{MX} = MX - MX = 0,$

$\beta_2 = M(X-MX)^2 = DX$ , (iki tərtibli mərkəzi moment dispersiyaya bərabərdir)

$\beta_3 = M(X-MX)^3 = MX^3 - 3MX^2 \cdot MX + 2M^3X$

$\beta_4 = MX^4 - 4MX^3 \cdot MX + 6MX^2 \cdot M^2X - 3M^4X$, və s. alarıq. Onda mərkəzi momentlərlə, başlanğıc momentlər arasında aşağıdakı münasibətləri ararıq

$\beta_0 = 1,\quad \beta_1 = 0,\quad \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2,\quad \beta_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3,\quad \beta_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4,\ \beta_5 = ...$

.......................................

Paylanmasının 2-ci tərtib mərkəzi momentini tapaq.

2-ci tərtib mərkəzi momentinitapmaq üçün

$$\beta_2 = M\left[X - M(x)\right]^2 = D(x)$$

Mərkəzi momentləri, başlanğıc və mərkəzi momentlərin əlaqə düsturundan istifadə etməklə hesablamaq məqsədəuyğundur.

$$\beta_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2$$

$$\upsilon_1 = M(x)$$

$$\upsilon_2 = M(x^2)$$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ olduğundan $p_3 = 0,6$

$$\upsilon_1 = M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}6 = 3{,}1$$

$$\upsilon_2 = M(x^2) = x_1^{\ 2} p_1 + x_2^{\ 2} p_2 + x_3^{\ 2} p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9$$

$$M(x^2) = x_1^{\ 2} p_1 + x_2^{\ 2} p_2 + x_3^{\ 2} p_3 = 1 \cdot 0{,}2 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 4^2 \cdot 0{,}6 = 10{,}9$$

$$\beta_2 = \upsilon_2 - \upsilon_1^2 = 10{,}9 - (3{,}1)^2 = 1{,}29$$

**20. Məsələ.** İşçi 4 dəzgaha nəzarət edir. Eyni zaman ərzində dəzgahların nəzarət tələb etməməsi hadisələrinin ehtimalları uyğun olaraq 0,9, 0,8,0,75 və 0,7-ə bərabərdir. Dəzgahların *X*-sayı üçün diqqət tələb etməməsinin paylanma qanununu tərtib edin.

**Həlli**. Bu məsələni bir neçə üsulla həll etmək olar.

**1-ci üsul.** $A_k$-ilə *k*-cı dəzgahın cari müddəti diqqət tələb etməməsi hadisəsini (uyğun olaraq tələb etməsi hadisəsini) işarə edək. Onda aydındır ki,

$P(x=0) = p\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3 A_4}\right) = (1-0{,}9)(1-0{,}8)(1-0{,}75)(1-0{,}7) = 0{,}0015$;

$P(x=1) = P\left(A_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\right) + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A_4}\Big) + \overline{A}_1 \overline{A}_2 A_3 \overline{A}_4\Big) + \overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4\Big) =$

$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}3 + \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}0275$ analoji olaraq:

$P(x=2) = P\left(A_1 A_2 \overline{A}_3 \overline{A}_4\right) + A_1 \overline{A_2} A_3 \overline{A_4} + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} A_4 +$

$+ \overline{A_1} A_2 A_3 \overline{A_4} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} A_4 + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3 A_4\Big) = 0{,}1685$

$P(x=3) = P\left(A_1 A_2 \overline{A_3}\,\overline{A_4} + A_1 A_2 \overline{A_3} A_4 + A_1 \overline{A_2} A_3 A_4 + \overline{A_1} A_2 A_3 A_4\right) = 0{,}4245;$

$P(x=4) = P\left(A_1 A_2 A_3 A_4\right) = 0{,}378$

təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qanunu:

| *X*: | $x_k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_k$ | 0,0015 | 0,0275 | 0,1685 | 0,4245 | 0,378 |

**21. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.**

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[x - M(X)\right]^2 f(x)\, dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən *X* təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və *DX* kimi işarə olunur:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\, dx \qquad (1)$$

(1) –dən $DX = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - 2M(X) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx}_{MX} + M^2 X \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx}_{1} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - M^2 X$.

Yəni

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx\right)^2 \qquad (2)$$

alırıq.

Əgər *X* kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(\int_a^b x f(x)dx\right)^2 \qquad (3)$$

olur.

**Misal.** $X$ təsadüfi kəmiyyəti $(0,\pi)$ intervalında $f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir; bu interval xaricində $f(x)$=0. X-ın dispersiyasını tapın.

**Həlli.** Dispersiyanı aşağıdakı düsturla tapaq:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[M(X)\right]^2$$

$M(X)=\frac{\pi}{2}$(paylanmanın əyrisi $x=\pi/2$ düz xəttinə nəzərən simmetrikdir), $a=0,\ b=\pi,\ \ f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ götürsək, alarıq:

$$D(X)=\frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\sin x dx-\left[\frac{\pi}{2}\right]^2 \qquad (*)$$

İki dəfə hissə-hissə inteqrallanmanı yerin yetirsək:

$$\int_0^\pi x^2\sin x\, dx=\pi^2-4 \qquad (**)$$

(**)–nu (*)–da nəzərə alsaq, nəticədə alırıq: $D(X)=\frac{\pi^2-8}{4}$.

**22 . Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.**

$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)\,dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən $X$ təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və $DX$ kimi işarə olunur:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \qquad (1)$$

(1) –dən $DX=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-2M(X)\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}_{MX}+M^2X\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}_{1}=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2X$.

Yəni

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x f(x)dx\right)^2 \qquad (2)$$

alırıq.

Əgər $X$ kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left(\int_a^b x f(x)dx\right)^2 \qquad (3)$$

olur.

**Məsələ.** $X$ təsadüfi kəmiyyəti (2,4) intervalında $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$ sıxlıq funksiyası ilə verilmişdir; bu interval xaricində $f(x)=0$. X kəmiyyətinin modasını, riyazi gözləməsini, dispersiyasını və medianını tapın.

**Həlli.** $(2,4)$ intervalında $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-6$ sıxlıq funksiyasının riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq.

$M(x)=\int_a^b xf(x)dx$ düsturundan istifadə edək.

$$M(x)=\int_2^4\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right)dx=\left(-\frac{3}{4}\frac{x^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}\frac{4^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{4^3}{3}-\frac{6\cdot4^2}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^4}{4}+\frac{9}{2}\frac{2^3}{3}-\frac{6\cdot2^2}{2}\right)=3$$

$D(x)=\int_a^b x^2f(x)dx-(M(x))^2$ düsturundan istifadə edərək dispersiyanı tapaq.

$$D(x)=\int_2^4 x^2\left(-\frac{3}{4}x^3+\frac{9}{2}x^2-6x\right)dx-(M(x))^2=$$

$$=\int_2^4\left(-\frac{3}{4}x^4+\frac{9}{2}x^3-6x^2\right)dx-(M(x))^2=$$

$$=\left(-\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{6x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4-3^2=\left(-\frac{3}{4}\frac{4^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{4^4}{4}-\frac{6\cdot4^3}{3}\right)-$$

$$-\left(-\frac{3}{4}\frac{2^5}{5}+\frac{9}{2}\frac{2^4}{4}-\frac{6\cdot2^3}{3}\right)-9=141$$

**23. Müntəzəm paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları( riyazi gözləmə və dispersiyası).**

Bütün mümkün qiymətləri $(a,b)$ intervalına daxil olan kəsilməz $X$ təsadüfi kəmiyyətinin sıxlıq funksiyası həmin intervalda sabit

$f(x)=\frac{1}{b-a}$ qiymətini, bu intervalın xaricində isə $f(x)=0$ qiymətini alırsa, onda $x$ kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinə $(a,b)$ intervalında <u>müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət deyilir</u>. Tərifdən aydındır ki, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{(b-a)}\cdot(b-a)=1$ olur. Yəni müntəzəm paylanmadakı $f(x)$ funksiyası doğrudan da sıxlıq funksiyasıdır. $X$ –in paylanma funksiyasını yəni $F(x)$ funksiyasını tapaq.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{a} f(t)dt}_{0}+\int_{a}^{x} f(t)dt=\int_{a}^{x}\frac{dt}{b-a}=\frac{t}{b-a}\Big|_a^x=\frac{x-a}{b-a}$$ olar.

Yəni
$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a \quad olarsa,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b \quad olarsa,\\ 1, & x>b \quad olarsa,\end{cases}$$ olur.

Müntəzəm paylanmanın riyazi gözləməsi $MX=\int_a^b x\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$ olar.

Müntəzəm paylanmanın dispersiyası

$$DX=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\int_a^b\left[x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{dx}{b-a}=\left[\frac{x^3}{3(b-a)}-\frac{x^2(a+b)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{1}{b-a}x\right]\Big|_a^b=$$ olar.

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2}{4}\cdot\frac{b-a}{b-a}=\frac{a^2-ab+b^2}{3}-\frac{a^3+2ab+b^2}{2}+\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

(a,b) intervalında müntəzəm paylanmış $X$ kəsilməyən təsadüfi kəmiyyətinin bu intervalın ixtiyarı $(\alpha,\beta)$ hissəsinə düşməsi ehtimalı $P(\alpha<x<\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\beta\frac{dx}{b-a}=\frac{x}{b-a}\Big|_\alpha^\beta=\frac{\beta-\alpha}{b-a}$ olar.

## 24. Üstlü paylanma qanunu və ədədi xarakteristikaları( riyazi gözləmə və dispersiyası).

Kəsilməyən $X$ təsadüfi kəmiyyəti

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda,\\ 0 \quad , & x\le 0 \quad olduqda,\end{cases} \tag{1}$$

sıxlıq funksiyasına malikdirsə, onda onun paylanmasına $\lambda(\lambda>0)$ parametrli <u>üstlü paylanma deyilir</u>. Üstlü paylanmanın paylanma funksiyası

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\underbrace{\int_{-\infty}^{0} f(t)dt}_{0}+\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\lambda e^{-\lambda t}dt=-e^{-\lambda t}\Big|_0^x=1-e^{-\lambda x}$ olur. Yəni

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0 \quad olduqda,\\ 0 \quad , & x\le 0 \quad olduqda.\end{cases} \tag{2}$$

Üstlü paylanmada $X$ təsadüfi kəmiyyətinin $(\alpha,\beta)$ intervalındakı qiymətləri alması ehtimalı

$$P(\alpha<x<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=1-e^{-\lambda\beta}-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta} \tag{3}$$

düsturu ilə tapılır.

Üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi $MX=\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\underbrace{-xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$ olur.

Yəni üstlü paylanmanın riyazi gözləməsi $\lambda$ parametrinin tərs qiymətinə bərabərdir:

$$MX=\frac{1}{\lambda} \tag{4}$$

Üstlü paylanmanın dispersiyası

$$DX=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=\underbrace{-x^2\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}}_{"0"}+2\int_0^{\infty}xe^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=2\cdot\frac{1}{\lambda}\underbrace{\int_0^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx}_{\frac{1}{\lambda}}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

olur. Yəni,

$$DX=\frac{1}{\lambda^2}. \tag{5}$$

Onda $\sigma(X)=\sqrt{DX}=\frac{1}{\lambda}$ olur. Deməli üstlü paylanmada

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}\text{ - dır.} \tag{6}$$

*X* kəsilməz təsadüfi kəmiyyətinin orta kvadratik meylinin onun riyazi gözləməsinə olan nisbətinə təsadüfi *X* kəmiyyətinin variasiya əmsalı deyilir və V –ilə işarə olunur:

$$V=\frac{\sigma(X)}{M(X)} \tag{7}$$

Üstlü paylanma üçün $V=\frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}}=1$ olar.

## 25. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası düsturunu yazın və verilən məsələni həll edin.

$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[x-M(X)\right]^2 f(x)\,dx$ inteqralı mütləq yığılandırsa bu inteqrala kəsilməyən *X* təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyası deyilir və *DX* kimi işarə olunur:

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)^2 f(x)dx \tag{1}$$

(1) –dən $DX=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-2M(X)\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}_{MX}+M^2X\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx}_{1}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-M^2X$.

Yəni

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)dx\right)^2 \tag{2}$$

alırıq.

Əgər *X* kəsilməyən təsadüfi kəmiyyəti [a,b] parçasında qiymətlər alarsa, onda

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b}x^2 f(x)dx-\left(\int\limits_{a}^{b}x\,f(x)dx\right)^2 \tag{3}$$

olur.

$X$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası verilmişdir:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x+x^2}{12}, & 0<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

$X$ təsadüfi kəmiyyətin (1;2) –dən qiymət alması ehtimalını tapın.

**Həlli:** $P(a<x<b)=F(b)-F(a)=F(2)-F(1)=\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=2}-\left.\frac{x+x^2}{12}\right|_{x=1}=$

$=\frac{2+4}{12}-\frac{1+1}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ **alarıq.**