

Ehtimal Nəzəriyyəsi və Riyazi Statistika Fənni üzrə
Kollokvium Suallarının cavabları
(Rus Bölməsi)

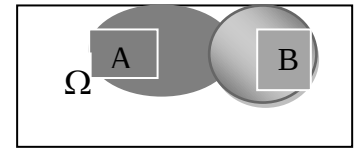
1. Вывод формулы вероятности суммы двух совместных событий
($P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$):

Теорема. Вероятность сумма двух совместимых событий А и В равно сумме их вероятностей минус вероятность их совместного происхождения

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \quad (1)$$

События $A+B$ и B можно показать как сумму несовместимых событий: $A+B = A+B \cdot \bar{A}$ и $B = AB + B\bar{A}$



Тогда по аксиоме вероятностей будем иметь $P(A+B)=P(A)+P(B \cdot \bar{A})$ и $P(B)=P(A \cdot B)+P(B \cdot \bar{A})$. Отсюда получим $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A \cdot B)$.

Более проще формулу (1) можно доказать логически. Так что если события А и В совместны, тогда они имеют пересечение и число общих членов пересечения можно принять за r тогда $P(AB) = \frac{r}{n}$. Число событий

благоприятствующих событию А примем за $m = m_1 + r$, а число благоприятствующих событий событию В примем за $k = k_1 + r$, тогда число событий благоприятствующих событию $A+B$ будет $m_1 + k_1 + r = m - r + k -$

$r + r = m + k - r$. Тогда $P(A+B) = \frac{m+k-r}{n} = \frac{m}{n} + \frac{k}{n} - \frac{r}{n} = P(A) + P(B) - P(AB)$. отсюда следует, что формула (2) верна.

Теорему сложения можно доказать аналогично и для случая конечного числа событий. Если события А, В, и С совместны тогда верно,

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C) \quad (3),$$

а если события А, В, С совместны то имеет место:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC) \quad (4)$$

Доказательство формул (1) и (2) составляют аналогию.

2. Написать формулу условной вероятности и решить данную задачу.

Задача. Из экзаменационных билетов 5 легких и 20 сложных. Найти вероятность того, что и первый студент и второй студент вытащат легкие билеты. (Рассмотрите все случаи).

Вероятность происхождения события А при условии, что событие В уже произошло характеризуется как условная вероятность и обозначается $P_A(B)$ или $P(B/A)$

Определение. Условной вероятностью называется отношение вероятности произведения этих событий на вероятность события A ($P(A) \neq 0$).

Условная вероятность события A при условии что событие B уже произошло обозначается как $P(A/B)$ и называется условной вероятностью соответствующих событий.

Если выполняются равенства $P(A/B)=P(A)$ или $P(B/A)=P(B)$ тогда события A и B независимы. Используя классическое определение вероятности для условной вероятности получим:

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1)$$

(Здесь $P(B) > 0, P(A) > 0$).

Задача: 5 из экзаменационных билетов легкие, а 20 сложные. Вычислите вероятность того, что первый и второй студент возьмет легкий билет.

Через $1a, 1r$ обозначим события I первый студент взял легкий или сложный билет, а через $2a, 2r$ события II первый студент взял легкий или сложный билет. Здесь пространство элементарных событий состоит из 4 совместных событий. Элементарные события будут $(1a, 2a), (1a, 2r), (1r, 2a), (1r, 2r)$ (Здесь a вынут легкий билет, r вынут сложный билет).

Так как $P(1a, 2a) = P(1a) P(2a/1a)$, понятно, что $P(1a) = \frac{1}{5}$ $P(2a/1a) = \frac{4}{24}$, тогда $P(1a, 2a) = \frac{4}{24} \cdot \frac{1}{5}$.

Аналогично $P(1a, 2r) = P(1a) \cdot P(2r/1a) = \frac{1}{5} \cdot \frac{20}{24}$,

$$P(1r, 2a) = P(1r) \cdot P(2a/1r) = \frac{20}{25} \cdot \frac{5}{24},$$

$$P(1r, 2r) = P(1r) \cdot P(2r/1r) = \frac{20}{25} \cdot \frac{19}{24}.$$

Вероятность вытянуть II билет легким.

$$P(2a) = P(1a \cdot 2a) + P(1r \cdot 2a) = \frac{120}{600} = \frac{1}{5}, \quad P(1a) = \frac{1}{5},$$

$$P(1a \cdot 2a) + P(1a \cdot 2r) + P(1r \cdot 2a) + P(1r \cdot 2r) = \frac{600}{600} = 1$$

3. Написать формулу вероятности появления хотя бы одного события и решить данную задачу.

Задача: Три исследователя, независимо один от другого, производят измерения некоторой физической величины. Вероятность того, что первый исследователь допустит ошибку при считывании показаний прибора, равна 0,1. Для второго и третьего исследователей эта вероятность соответственно равна 0,15 и 0,2. Найти вероятность того, что при однократном измерении хотя бы один из исследователей допустит ошибку.

Ответ: Пусть события $A_1, A_2, \dots, A_n$ независимые события. Необходимо найти вероятность того, что происхождения хотя бы одного из них (иными словами сумма этих событий).

Теорема. Вероятность происхождения хотя бы одного из независимых события $A_1, A_2, \dots, A_n$ равно разности между единицей и произведением вероятностей противоположных им событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$, то есть

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \dots q_n \quad (1)$$

здесь $P(\overline{A_i}) = q_i \quad (i = \overline{1, n})$

□ Вероятность того, что произойдет хотя бы одно из независимых событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ обозначим через A . Тогда $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ и события A и $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_n}$ взаимно противоположные события. Значит $P(A) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \dots \overline{A_n}) = 1$. Из этого получим $P(\overline{A_1}) = 1 - p = q, \dots, P(\overline{A_n}) = 1 - p = q$ □

Частный случай: Если $P(A_1) = p, P(A_2) = p, \dots, P(A_n) = p$, тогда если $P(\overline{A_i}) = 1 - p = q$ формула (1) примет вид: $P(A) = 1 - q^n$.

Решение задачи: Если допустить ошибку будут события A_1, A_2 и A_3 , тогда $p(\overline{A_1}) = 0,1; p(\overline{A_2}) = 0,15; p(\overline{A_3}) = 0,2$. Если учесть их в формуле получим $P(A) = 1 - p(\overline{A_1})p(\overline{A_2})p(\overline{A_3}) = 1 - 0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,2 = 1 - 0,003 = 0,997$.

4. Написать формулу полной вероятности и решить данную задачу:

Задача: В продажу поступили телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 10% телевизоров с дефектом, второго - 5% и третьего - 3%. Какова вероятность купить неисправный телевизор, если в магазин поступило 25% телевизоров с первого завода, 55% - со второго и 20% - с третьего.

Пусть событие A может произойти в результате появления одного и только одного события $H_i \quad (i = \overline{1, 2, \dots, n})$ из некоторой полной группы несовершенных событий $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$.

События этой группы называют гипотезами.

Теорема 1. Вероятность события A равна сумме парных произведений вероятностей всех гипотез, образующих полную группу, на соответствующие условные вероятности данного события A , то есть :

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P_{H_i}(A)$$

формула полной вероятности, причем здесь $\sum_{i=1}^n P(H_i) = 1$.

Решение. С рассматриваемым событием $A = \{\text{Приобретенный телевизор оказался с дефектом}\}$ связано три гипотезы: $H_1 = \{\text{телевизор выпущен первым заводом}\}$, $H_2 = \{\text{выпущен вторым заводом}\}$, $H_3 = \{\text{выпущен третьим заводом}\}$. Вероятности этих событий определяются из условия

задачи: $p(H_1) = 0,25$; $p(H_2) = 0,55$; $p(H_3) = 0,2$. Условные вероятности события A также определяются из условия задачи: $p(A/H_1) = 0,1$; $p(A/H_2) = 0,05$; $p(A/H_3) = 0,03$. Отсюда по формуле полной вероятности следует:

$$p(A) = 0,25 \cdot 0,1 + 0,55 \cdot 0,05 + 0,2 \cdot 0,03 = 0,0585.$$

5. Написать формулы Бейеса и решить данную задачу:

Используя формулу полной вероятности, решим следующие задачи.
Пусть имеем полную группу парно несовместимых гипотез

$$H_1 + H_2 + \dots + H_K$$

С происхождением одного из событий H_K происходит событие A . Следует, определить вероятность события, которая является *причиной появления события A* , то есть условную вероятность.

Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_K) = P(A)P_{H_K}(A) = P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Отсюда

$$P_{H_K}(A) = \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(A)}, \quad K = \overline{1, n}$$

Используя

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Имеем:

$$P_{H_K}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(H_K)P_{H_K}(A)}, \quad K = \overline{1, n}$$

- это уравнение называется *формулой Бейеса*.

Задача: На вход радиоприемного устройства с вероятностью 0,9 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,1 только помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то приемник с вероятностью 0,8 регистрирует наличие сигнала, если поступает только помеха, то регистрируется наличие сигнала с вероятностью 0,3. Известно, что приемник показал наличие сигнала. Какова вероятность того, что сигнал действительно пришел?

Решение. С рассматриваемым событием $A = \{\text{приемник зарегистрировал наличие сигнала}\}$ связано две гипотезы: $H_1 = \{\text{пришел сигнал и помеха}\}$, $H_2 = \{\text{пришла только помеха}\}$. Вероятности этих гипотез $p(H_1) = 0,9$; $p(H_2) = 0,1$. Условные вероятности события A по отношению к гипотезам H_1 и H_2 находим из условия задачи $p(A/H_1) = 0,8$; $p(A/H_2) = 0,3$.

Требуется определить условную вероятность гипотезы H_1 по отношению к событию A , для чего воспользуемся формулой Байеса:

$$p(H_1 / A) = \frac{p(H_1) \cdot p(A / H_1)}{p(H_1) \cdot p(A / H_1) + p(H_2) \cdot p(A / H_2)} = \frac{0,9 \cdot 0,8}{0,9 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,3} = 0,96$$

6. Напишите формула Байесса и решите заданную формулу:

Задача: фабрика производит 25% продукции на первом, 35% продукции на втором, 40% на третьем станке. Каждый станок в соответствии выпускается 5%, 4% и 2% нестандартной продукции. Найти вероятность того, что случайная взятая стандартная деталь произведена на первом, втором, третьем станке.

Используя формулу полной вероятности, решим следующие задачи.
Пусть имеем полную группу парно несовместимых гипотез

$$H_1 + H_2 + \dots + H_K$$

С происхождением одного из событий H_K происходит событие A . Следует, определить вероятность события, которая является *причиной появления события A* , то есть условную вероятность.

Из теоремы умножения имеем

$$P(AH_K) = P(A)P_{H_K}(A) = P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Отсюда

$$P_{H_K}(A) = \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(A)}, \quad K = \overline{1, n}$$

Используя

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_K)P_{H_K}(A)$$

Имеем:

$$P_{H_K}(A) = \sum_{i=1}^n \frac{P(H_K)P_{H_K}(A)}{P(H_K)P_{H_K}(A)}, \quad K = \overline{1, n}$$

- это уравнение называется *формулой Байеса*.

Решение: Взятая деталь нестандартна это событие A . Здесь может быть три гипотез: Взятая нестандартная деталь произведена первым станком (событие B_1), взятая нестандартная деталь произведена вторым станком (событие B_2), , взятая нестандартная деталь произведена третьим станком (событие B_3). Тогда основываясь на заданных получим:

$$P(B_1) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}; P(B_2) = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}; P(B_3) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}.$$

Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на первом станке равна $P_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$;

Тогда вероятность изготовления нестандартной детали на втором станке равна $P_{B_2}(A) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$;

а на третьем 3-ем станке равна $P_{B_3}(A) = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ olar.

Тогда основываясь на формуле полной вероятности вероятность того, что случайно взятая деталь будет нестандартной равна:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{20} + \frac{7}{20} \cdot \frac{1}{25} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{50} = 0,0345$$

Надо вычислить $P_A(B_1)$:

Так как $P(B_1) = \frac{25}{100} = 0,25$; $P_{B_1}(A) = \frac{5}{100} = 0,05$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$

Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,25 \cdot 0,05}{0,0345} = \frac{0,0125}{0,0345} = \frac{25}{69}$$

Надо вычислить $P_A(B_2)$:

Так как $P(B_2) = 0,35$; $P_{B_2}(A) = 0,04$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$

Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,04}{0,0345} = \frac{28}{69}$$

Основываясь на условиях:

Так как $P(B_3)=0,4$; $P_{B_3}(A)=0,02$; $P(A) = \sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A) = 0,0345$

Применим формулу Байесса получим:

$$P_A(B_3) = \frac{P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)}{\sum_{k=1}^3 P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0,4 \cdot 0,02}{0,0345} = \frac{80}{345} = \frac{16}{69}$$

7. Независимые испытания. Вывод формулы Бернулли (некоторые случаи).

НЕЗАВИСИМЫЕ ПОВТОРНЫЕ ИСПЫТАНИЯ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ.

События A называются *независимыми* в данном испытании, если вероятность этого события в каждом из них не зависит от исходов других испытаний. Серия повторных независимых испытаний, в каждом из которых данное событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, не зависящую от номера испытания, называется *схемой Бернулли*.

Пусть проведены n независимых испытаний. В результате этих испытаний событие A должно произойти ровно m раз и вероятность этого обозначим $P_n(m)$.

В проведенных n независимых испытаниях последовательность происхождения события A m раз и противоположного события $\bar{A}_{(n-m)}$ раз может быть различной.

Запишем одну из них $B = \underbrace{A \cdot A \dots A}_m \cdot \underbrace{\overline{A} \cdot \overline{A} \dots \overline{A}}_{n-m}$. Тогда число таких последовательностей равно C_n^m .

Вероятность события A , то есть $P(A) = p$, а события $\overline{A}$, то есть $P(\overline{A}) = q$.
Используя теорему умножения независимых событий, получим:

$$P(B) = P(AA \dots A \overline{A} \overline{A} \dots \overline{A}) = \underbrace{P(A)P(A) \dots P(A)}_m \underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A}) \dots P(\overline{A})}_{n-m} = p^m q^{n-m}$$

Так как число таких последовательностей равно C_n^m , тогда вероятность происхождения события A в n испытаниях ровно m раз на основе теоремы сложения равно сумме всех комбинаций

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \text{ - формула Бернулли.}$$

Эта формула также называется *биномиальной*, то есть её правая часть представляет собой $(m+1)$ -ый член бинома Ньютона:

$$(q + p)^n = C_n^0 q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + C_n^n p^n$$

8. Написать формулу нахождения наивероятнейшего числа и решить данную задачу.

Задача. Вероятность выпуска стандартной детали равна 0,8. Найти вероятность наивероятнейшего числа нестандартных деталей из 5 выпущенных.

Решение. Вероятность выпуска нестандартной продукции равна $p = 1 - 0,8 = 0,2$. Вычислим все варианты по формуле Бернулли ($n=5$, $q=0,8, k=0,1,2,3,4,5$).

$$\begin{aligned} P_5(0) &= C_5^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^5 = 0,32768; & P_5(1) &= C_5^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^4 = 0,4096; & 0 \\ P_5(2) &= C_5^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^3 = 0,2048; & P_5(3) &= C_5^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^2 = 0,0512; \\ P_5(4) &= C_5^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^1 = 0,0064; & P_5(5) &= C_5^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^0 = 0,00032 \end{aligned}$$

Если полученные вероятности отметим на графике то можем увидеть, что $m_0=1$. Значит если в серии из n независимых испытаний вероятность $P_n(m_0)$ не меньше вероятностей остальных событий тогда, m_0 называется наивероятнейшее число. Для нахождения m_0 используем формулу

$$\begin{cases} P_m(m_0) \geq P_n(m_0 + 1) \\ P_n(m_0) \geq P_n(m_0 - 1) \end{cases} \quad (6)$$

Если первое неравенство системы раскроем то, получим:

$$\frac{n!}{m_0!(n-m_0)!} p^{m_0} \cdot q^{n-m_0} \geq \frac{n!}{(m_0+1)!(n-m_0-1)!} p^{m_0+1} \cdot q^{n-m_0-1}$$

Учитывая, что здесь $(m_0+1)! = m_0!(m_0+1)$, $(n-m_0)! = (n-m_0-1)!(n-m_0)$, получим

$$\frac{1}{(n-m_0)} q \geq \frac{1}{m_0+1} \cdot p \quad . \quad \text{Отсюда} \quad \text{можем} \quad \text{получить}$$

$(m_0+1)q \geq (n-m_0)p \Rightarrow m_0(p+q) \geq np - q \Rightarrow m_0 \geq np - q$. Если аналогично раскроем второе

неравенство системы (6) получим $m_0 < np + q$. Если соединить оба неравенства получим:

$$np - q < m_0 < np + p \quad (7).$$

С помощью этой формулы можно вычислить наиболее вероятное число. Тогда решение вышеуказанной задачи будет иметь вид:
 $5 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 5 \cdot 0,2 + 0,2 \Rightarrow 0,2 \leq m_0 \leq 1,2 \Rightarrow m_0 = 1$.

Значит наиболее вероятное число нестандартных деталей равно единице. Значит вероятность того, что 1 деталь окажется нестандартной больше и равна $P_5(1) = C_5^1 p q^4 = 5 \cdot 0,2 \cdot 0,8^4 = 0,4096$.

9. Написать формулу нахождения наиболее вероятного числа и решить данную задачу.

Задача. В среднем 20 % акций продано на бирже акций по первоначально объявленной цене. Найти вероятность того, что для продажи из 9 акционерных пакетов по первоначально объявленной цене продано 1) только 5, 2) а) меньше 2-х; б) не более 2-х; в) найти вероятность наиболее вероятного числа для продажи хотя бы 2 акционерных пакетов.

Решение: 1) по условию задачи вероятность продажи акций по первоначально объявленной цене равно $p=0,2$, тогда $q=1-p=1-0,2=0,8$. По теореме Бернулли получим $P_9(5) = C_9^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^4 = 0,0165$.

а) по условию $n=0,2$, $z=0,8$

$$P_9(m < 2) = P_9(0) + P_9(1) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^8 = 0,436$$

$$\text{В) } P_9(m \leq 2) = P_9(0) + P_9(1) + P_9(2) = C_9^0 \cdot 0,2^0 \cdot 0,8^9 + C_9^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^8 + C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 = 0,738.$$

с) Для вычисления $P_9(m \geq 2) = P_9(2) + P_9(3) + \dots + P_9(9)$. Получим $P_9(m \geq 2) = 1 - P_9(m < 2) = 1 - 0,436 = 0,564$.

Наиболее вероятное число находится по формуле $np - q \leq m_0 \leq np + p$ тогда используя формулу вычислим $9 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 9 \cdot 0,2 + 0,2 \Rightarrow 1 \leq m_0 \leq 2$. Значит наиболее вероятные числа будут $m_0 = 1$, $m_0 = 2$. А вероятность равна $P_{\text{явбюйцк}} = P_9(1) + P_9(2) = C_9^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^8 + C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 = 0,604$.

с) так как наиболее вероятное число находится по формуле $np - q < m_0 < np + p$, то получим $9 \cdot 0,2 - 0,8 < m_0 < 9 \cdot 0,2 + 0,2 \rightarrow 1 < m_0 < 2$. Отсюда следует, что наиболее вероятные числа $m_0 = 1$, $m_0 = 2$. Тогда вероятность $P_{\text{явбюйцк}} = P_9(1) + P_9(2) = C_9^1 \cdot 0,2 \cdot 0,8^8 + C_9^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^7 = 0,604$ олар.

10. Написать локальную формулу Муавра-Лапласа и решить данную задачу.

Теорема Лапласа. Пусть $p = P(A)$ - вероятность события A причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что в условиях системы Бернулли событие A при n испытаниях появится точно m раз, выражается приближенной формулой Лапласа.

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (1)$$

Где: $q = 1 - p$ и $t = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$

Вводя функцию $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ формулу (1) перепишем так

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Задача. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико используем локальную теорему Лапласа:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0,6}{\sqrt{2400 \cdot 0,6 \cdot 0,4}} = -\frac{40}{24} = -1,67$$

Так как $\varphi(x)$ четная функция тогда $\varphi(-1,67) = \varphi(1,67)$ из 1-ой таблицы получим $\varphi(1,67) = 0,0989$.

Тогда вероятность равна $P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} 0,0989 = 0,0041$.

11. Написать интегральную формулу Муавра-Лапласа и решить данную задачу.

Теорема. Пусть $p = P(A)$ вероятность события A , причем $0 < p < 1$. Тогда вероятность того, что при n испытаниях происхождение события A попадет в интервал (m_1, m_2) равна следующему:

$$P_n(m_1 < n < m_2) = P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (1)$$

Где $x' = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ - функция Лапласа.}$$

Задача. По данным проверки налоговой инспекции, приблизительно, каждый из двух малых предприятий нарушает норму. Найти вероятность того, что из 1000 малых предприятий: а) 480 предприятий; б) наимвероятнейшее число предприятий; в) не менее 480 предприятий; д) не менее 480 и не более 520 – предприятий нарушают норму.

Решение: а) по условию $p = 0,5$, $n = 1000$ поэтому можем использовать формулу Муавра –Лапласа ($npq = 1000 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,5) = 250 > 20$) .

$$\text{Сначала вычисляем } x = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265 .$$

$$\text{Затем } P_{1000}(480) = \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \cdot \varphi(-1,265) = \frac{0,1792}{\sqrt{250}} = 0,0113 .$$

б) используя формулу наивероятнейшего числа находим и

$$m_0 = 500. X = \frac{500 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0, P_{1000}(500) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{250}} = \frac{0,3989}{\sqrt{250}} = 0,0252$$

в) Надо вычислить $P_{1000}(m \geq 480) = P_{1000}(480 \leq m \leq 1000)$. Применив интегральную теорему Муавра –Лапласа получим:

$$\text{Сначала вычислим } X_1 = \frac{480 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -1,265, X_2 = \frac{1000 - 1000 \cdot 0,5}{\sqrt{1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 31,6 .$$

$$\text{Тогда получим } P_{1000}(480 \leq m \leq 1000) \approx \Phi(31,6) - \Phi(-1,265) \approx 0,897 .$$

ч) Вероятность $P_{1000}(480 \leq m \leq 520)$ можно вычислить с помощью формулы Муавра- Лапласа. Если это неравенство написать симметрично получим:

$$P_{1000}(480 \leq m \leq 520) = P_{1000}(|m - 500| \leq 20) \approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{250}}\right) = \\ = \Phi(1,265) = 0,794 .$$

12. Решить данную задачу.

Пример 5.1. По одной и той же стартовой позиции противника производится пуск из пяти ракет, причем вероятность попадания в цель при каждом пуске одной ракеты равна 0,6. Число попаданий в цель – случайная величина X. Определить ряд распределения и функцию распределения величины X.

Решение. Случайная величина X может принимать следующие значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдем вероятность принятия величиной X этих значений, используя формулу Бернулли:

$$P\{X = 0\} = (1 - p)^5 = 0,4^5 = 0,01024,$$

$$P\{X = 1\} = C_5^1 p(1 - p)^4 = 5 \cdot 0,6 \cdot 0,4^4 = 0,0768,$$

$$P\{X = 2\} = C_5^2 p^2(1 - p)^3 = 10 \cdot 0,6^2 \cdot 0,4^3 = 0,2304,$$

$$P\{X = 3\} = C_5^3 p^3(1 - p)^2 = 10 \cdot 0,6^3 \cdot 0,4^2 = 0,3456,$$

$$P\{X = 4\} = C_5^4 p^4(1 - p) = 5 \cdot 0,6^4 \cdot 0,4 = 0,2592,$$

$$P\{X = 5\} = p^5 = 0,6^5 = 0,07776.$$

Ряд распределения имеет вид

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

1. Функцию распределения определим по формуле (5. для переменных:

$$x \leq 0 \quad F(x) = 0,$$

$$0 < x \leq 1 \quad F(x) = p_0 = 0,01024,$$

$$1 < x \leq 2 \quad F(x) = p_0 + p_1 = 0,08704,$$

$$2 < x \leq 3 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 = 0,31744,$$

$$3 < x \leq 4 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 0,66304,$$

$$4 < x \leq 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0,92224,$$

$$x > 5 \quad F(x) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$$

x	≤ 0	[0;1]	[1;2]	[2;3]	[3;4]	[4;5]	>5
F(x)	0	0,01024	0,08704	0,31744	0,66304	0,92224	1

13. Законы распределений дискретных случайных величин (Бинаминальное, геометрическое и Пуассона).

Рассмотрим следующие распределения:

1. Бинаминальное распределение.

Вероятность этого распределения находим по формуле:

$$P_n(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (1)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, n$) получим распределение:

X	0	1	2	...	k	...	n
P_i	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

(2)

Распределение (2) называется биномиальным распределением дискретной случайной величины X. Для этого распределения имеем

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1.$$

2. Геометрическое распределение.

Для этого распределения вероятность находим по формуле

$$P(X = k) = p \cdot q^k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (3)$$

$$(0 < p < 1, \quad 0 < q < 1, \quad q = 1 - p).$$

Распределение имеет вид:

X	0	1	2	...	k	...
P_i	p	pq	pq ²	...	pq ^k	...

(4)

(5) называется геометрическое распределение дискретной величины X. Здесь

$$p + pq + pq^2 + \dots + pq^k + \dots = p \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots + q^k + \dots)}_{\frac{1}{1-q} \text{ (olduhundan)}} = p \cdot \frac{1}{1-q} = p \cdot \frac{1}{p} = 1.$$

3. Распределение Пуассона .

Вероятность этого распределения находится по формуле

$$P_n(X = k) = P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots \quad \lambda > 0 \quad (5)$$

Получаем асимптотические формулы Пуассона:

X	0	1	2	...	n	...
n	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$	...

(6)

(7) называется распределение Пуассона дискретной величины X.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

14. Написать свойства функции плотности и решить данную задачу..

Задача . Случайная величина X распределена по закону, определяемому плотностью вероятности вида

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x, & -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ 0, & |x| > \pi/2 \end{cases}$$

Найти константу **c**, функцию распределения **F(x)** и вычислить $P\{|x| < \pi/4\}$.

Решение. Константу **c** вычислим исходя из условия нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} c \cos x dx = c \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = c + c = 2c = 1$$

Откуда **c** = 0,5

Так как плотность вероятности задана различными формулами на разных интервалах, то и функцию распределения будем искать для каждого интервала в отдельности :

$$\text{Для } x < -\pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \int_{-\infty}^x 0 dy = 0$$

$$\text{Для } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^x \frac{\cos y}{2} dy = \frac{\sin y}{2} \Big|_{-\pi/2}^x = \frac{1 + \sin x}{2}$$

$$\text{Для } x > \pi/2 \quad F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/2} 0 dy + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos y}{2} dy + \int_{\pi/2}^x 0 dy = 1$$

Окончательно имеем

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/2, \\ (1 + \sin x)/2 & |x| \leq \pi/2, \\ 1, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Вероятность $P\{|x| < \pi/4\} = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

15. Написать свойства функции плотности непрерывной случайной величины и решить данную задачу.

Задача. Для случайной величины X плотность вероятности $f(x) = ax$ при $x \in [0; 2]$, $f(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > 2$. Найти коэффициент a , функцию распределения $F(x)$, вероятность попадания на отрезок $[1; 2]$

Так как $f(x) = ax$ $x \in [0, 2]$ для нахождения параметра a

воспользуемся формулой $\int_a^b f(x) dx = 1$.

$$\int_a^b ax dx = 1 \Rightarrow \left. \frac{ax^2}{2} \right|_0^2 = 1 \Rightarrow \frac{a \cdot 4}{2} = 0,5$$

Используя формулу $f(x) = F'(x)$ найдем функцию распределения $F(x)$.

Зная, что $f(x) = 0,5x$ то тогда $F(x) = 0,25x^2$. Найдем вероятность того, что функция $F(x)$ примет значение на отрезке $[1, 2]$, воспользуемся

формулой $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,25x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Надо воспользоваться формулой

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = 0,25x^2 \Big|_{x=2} - 0,25x^2 \Big|_{x=1} = 0,25 \cdot 4 - 0,25 = 0,75$$

16. Решить данную задачу.

Из десяти транзисторов, среди которых два бракованные, случайным образом выбраны два транзистора для проверки их параметров. Определить и построить: а) ряд распределения случайного числа X бракованных

транзисторов в выборке; б) функцию распределения $F(x)$ величины X ; в) вычислить $p\{X \geq 0,5\}, p\{X < 1,5\}$

Həlli: а) Verilənlərə görə yazı bilərik.

1) $k=0$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 0 + 2 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^0 \cdot C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{7 \cdot 8}{2}}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{28}{45}$$

x_i	0	1	2
p_i	28/45	16/45	1/45

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$P_{10} 2 = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} = \frac{2 \cdot 8}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{16}{45}$$

$$\begin{cases} 10 = 2 + 8 \\ 2 = 2 + 0 \end{cases}$$

$$P_{10}(2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^0}{C_{10}^2} = \frac{1}{\frac{9 \cdot 10}{2}} = \frac{1}{45}$$

b)

x	≤ 0	$[0;1]$	$[1; 2]$	> 2
$F(x)$	0	28/45	44/45	1

v) $p\{x \geq 0,5\} = 17/45, \quad p\{X < 1,5\} = 44/45$

17. Математическое ожидание и свойства (свойство $M(XY)=M(X) \cdot M(Y)$ с доказательством)

Определение 1. Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма парных произведений всех возможных её значений на их вероятности.

Если $X_1, X_2, \dots, X_n$ есть (полный) набор всех значений дискретной случайной величины X и $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ - соответствующие им вероятности, то, обозначая буквой M математическое ожидание будет иметь:

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

где: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Математическое ожидание $M(X)$ случайной величины есть величина постоянная и поэтому представляет числовую характеристику случайной величины X .

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной, т.е. если C - *постоянная величина*, то

$$M(C) = C$$

Теорема 2. Математическое ожидание суммы двух (или нескольких) случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин, т.е. если X и Y случайные величины, то

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y)$$

Теорема 3. Математическое ожидание произведения двух независимых величин равно произведению их математических ожиданий, т.е.

$$M(XY) = M(X)M(Y) \quad (2)$$

Где X и Y – независимые случайные величины.

Доказательство. Пусть $(X_i, P_i) (i = 1, 2, \dots, n)$ и $(Y_j, P_j) (j = 1, 2, \dots, m)$ -законы распределения соответственно случайных величин X и Y .

Так как X и Y независимы, то полный набор значений случайной величины XY состоит из всех произведений вида $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ причем вероятности этих значений по теореме умножения для независимых событий равны

$$P_i P_j$$

Имеем:

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum \sum X_i Y_j P_i P_j = \sum_{i=1}^n X_i P_i \sum_{j=1}^m Y_j P_j = \\ &= \sum_{i=1}^n X_i P_i M(Y) = M(X)M(Y) \end{aligned} \quad (3)$$

что и требовалось доказать.

Следствие Математическое ожидание произведения нескольких взаимно независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Действительно, например, для 3-х взаимно независимых случайных величин X, Y, Z имеем

$$M(XYZ) = M[(XY)Z] = M(XY)M(Z) = M(X)M(Y)M(Z)$$

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

Если C - постоянная и X - независимая случайная величина, то учитывая, что C и X независимы, на основании теоремы 1 получим:

$$M(CX) = M(C)M(X) = CM(X)$$

Следствие Математическое ожидание разности независимых двух случайных величин X и Y равно разности математических ожиданий этих величин, т.е.

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y)$$

Используя теорему о сумме математических ожиданий, получим:

$$\begin{aligned} M(X - Y) &= M[X + (-Y)] = M(X) + M(-Y) = \\ &= M(X) + (-1)M(Y) = M(X) - M(Y) \end{aligned}$$

18. Дисперсия и ее свойства (свойство $D(X+Y) = D(X)+D(Y)$ с доказательством).

Определение. Дисперсией дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(x) = M[X - M(X)]^2$$

Теорема. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

Свойство 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю.

$$D(C) = 0$$

Действительно, $D(C) = M[C - M(C)]^2 = M[C - C]^2 = 0$

Свойство 2. Постоянный множитель можно вынести за знак дисперсии, возводя его в квадрат

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D(CX) &= M[CX - M(CX)]^2 = M[CX - CM(x)] = \\ &= M[C^2 (X - M(x))^2] = C^2 M[X - M(x)]^2 = C^2 D(X) \end{aligned}$$

Свойство 3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумма дисперсий этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Действительно,

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= M[(X + Y)^2] - [M(X + Y)]^2 = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] + [M(X) + M(Y)]^2 = \\ &= M[X^2 + 2XY + Y^2] - M^2(X) - 2M(X)M(Y) - M^2(Y) = \\ &= M^2(X^2) + 2M(X) \cdot M(Y) + M(Y^2) - M^2(X) - 2M(X) \cdot M(Y) - \\ &- M^2(Y) = M(X^2) + M(Y^2) - M^2(X) - M^2(Y) = \\ &= [M(X^2) - (M(X))^2] + [M(Y^2) - (M(Y))^2] = D(X) + D(Y) \end{aligned}$$

Следствие 1. $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$

Следствие 2. $D(C + X) = D(C) + D(X) = 0 + D(X) = D(X)$

Свойство 4.

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} D(X - Y) &= D(X) + D(Y) = D(X) + (-1)^2 D(Y) = \\ &= D(X) + D(Y) \end{aligned}$$

19. Моменты дискретной случайной величины. Найти центральный момент 2-го порядка распределения .

x	1	2	4
p	0,1	0,3	p_3

Для распределения 2-го порядка найти центральные моменты

Для нахождения центральных моментов 2-го порядка воспользуемся формулой

$$\mu_2 = M[X - M(x)]^2 = D(x)$$

Чтобы найти центральные моменты, целесообразно воспользоваться формулами связи центральных моментов с начальными

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2$$

$$\nu_1 = M(x)$$

$$\nu_2 = M(x^2)$$

Так как $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ то $p_3 = 0,6$

$$\nu_1 = M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,6 = 3,1$$

$$\nu_2 = M(x^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$M(x^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 1 \cdot 0,2 + 2^2 \cdot 0,3 + 4^2 \cdot 0,6 = 10,9$$

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - (3,1)^2 = 1,29$$

20. Задача. Рабочий наблюдает за 4 станками. Вероятность того, что за время работы станку понадобится ремонт соответственно равны 0,9; 0,8; 0,75; 0,7. Написать закон распределения X случайной величины показывающее число отремонтированных станков.

Решение: эту задачу можно решить несколькими способами.

I метод. Через A_k обозначим событие показывающее то, что k -ому станку понадобился ремонт. Тогда ясно, что

$$P(x=0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = (1-0,9)(1-0,8)(1-0,75)(1-0,7) = 0,0015;$$

$$P(x=1) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = \\ = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,25 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,75 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,25 \cdot 0,7 = 0,0275$$

Аналогично, что

$$P(x=2) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 \bar{A}_4 + A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 A_4 + \\ + \bar{A}_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3 A_4) = 0,1685$$

$$P(x=3) = P(A_1 A_2 A_3 \bar{A}_4 + A_1 A_2 \bar{A}_3 A_4 + A_1 \bar{A}_2 A_3 A_4 + \bar{A}_1 A_2 A_3 A_4) = 0,4245;$$

$$P(x=4) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = 0,378$$

Напишем закон распределения величины X :

x_k	0	1	2	3	4
p_k	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

21. Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины и решить задачу.

Задача. Непрерывная случайная величина X в интервале $(0, \pi)$ задана дифференциальной функцией $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$. Вне этого интервала $f(x) = 0$.

Найти дисперсию случайной величины X .

Решение: дисперсию вчислим по формуле:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2$$

$M(X) = \frac{\pi}{2}$ (кривая симметрична относительно прямой $x = \pi/2$), если принять

$a = 0, b = \pi, f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ получим:

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \sin x dx - \left[\frac{\pi}{2} \right]^2 \quad (*)$$

Дважды проинтегрировав по частям получим:

$$\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4 \quad (**)$$

Если (**)учесть в (*)получим: $D(X) = \frac{\pi^2 - 8}{4}$.

22 . Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины X и решить данную задачу.

Задача. Непрерывная случайная величина X в интервале (2,4) задана дифференциальной функцией $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - 6$ вне этого $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

$$M(x) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right) dx = \left(-\frac{3}{4} \frac{x^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} \right) \Bigg|_2^4 = \\ &= \left(-\frac{3}{4} \frac{4^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{4^3}{3} - \frac{6 \cdot 4^2}{2} \right) - \left(-\frac{3}{4} \frac{2^4}{4} + \frac{9}{2} \frac{2^3}{3} - \frac{6 \cdot 2^2}{2} \right) = 3 \end{aligned}$$

$$D(x) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(x))^2.$$

Воспользуемся формулой

найдем дисперсию.

$$\begin{aligned} D(x) &= \int_2^4 x^2 \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 6x \right) dx - (M(x))^2 = \\ &= \int_2^4 \left(-\frac{3}{4}x^5 + \frac{9}{2}x^4 - 6x^3 \right) dx - (M(x))^2 = \\ &= \left(-\frac{3}{4} \frac{x^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} \right) \Bigg|_2^4 - 3^2 = \left(-\frac{3}{4} \frac{4^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{4^4}{4} - \frac{6 \cdot 4^3}{3} \right) - \\ &- \left(-\frac{3}{4} \frac{2^5}{5} + \frac{9}{2} \frac{2^4}{4} - \frac{6 \cdot 2^3}{3} \right) - 9 = 141 \end{aligned}$$

23. Равномерное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Если все свои значения X непрерывная величина на интервале (a,b) равна постоянной $f(x) = \frac{1}{b-a}$, а вне этого интервала $f(x) = 0$, тогда эта непрерывная случайная величина называется равномерно распределенной на интервале (a,b). Из определения следует, что

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{(b-a)} \cdot (b-a) = 1$. Значит $f(x)$ действительно является функцией плотности. Найдем функцию распределения X:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^a f(t)dt}_0 + \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \frac{dt}{b-a} = \frac{t}{b-a} \Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a} \text{ олур.}$$

То есть

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} \text{ олурса, олур.}$$

Математическое ожидание равномерно распределенной величины равно:

$$MX = \int_a^b x \cdot \frac{dx}{b-a} = \frac{x^2}{2(b-a)} \Big|_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \text{ олур.}$$

Дисперсия равномерно распределенной величины равно:

$$\begin{aligned} DX &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \cdot \frac{dx}{b-a} = \int_a^b \left[x^2 - (a+b)x + \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \right] \cdot \frac{dx}{b-a} = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} - \frac{x^2(a+b)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{1}{b-a} x \right] \Big|_a^b = \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)(b^2 - a^2)}{2(b-a)} + \frac{(a+b)^2}{4} \cdot \frac{b-a}{b-a} = \frac{a^2 - ab + b^2}{3} - \frac{a^3 + 2ab + b^2}{2} + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned}$$

Вероятность попадания в произвольный интервал (α, β) расномерно распределенной на интервале (a, b) случайной величины X (находим по формуле: $P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b-a} = \frac{x}{b-a} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$).

24. Показательное распределение и ее числовые характеристики (математическое ожидание и дисперсия)

Непрерывная случайная величина имеющая функцию плотности

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ олдуqда,} \quad (1)$$

называется показательно распределенной с параметром $\lambda (\lambda > 0)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \underbrace{\int_{-\infty}^0 f(t)dt}_0 + \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = -e^{-\lambda t} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$$

то есть

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \text{ олдуqда.} \quad (2)$$

Вероятность того, что показательно распределенная случайная величина примет значение на интервале (α, β) вычислим по формуле:

$$P(\alpha < x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = 1 - e^{-\lambda \beta} - (1 - e^{-\lambda \alpha}) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta} \quad (3)$$

Математическое показательно распределенной величины находим по формуле: $MX = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx = \underbrace{-xe^{-\lambda x}}_{\text{"0"}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$.

То есть математическое ожидание показательно распределенной случайной величины равно обратному значению λ :

$$MX = \frac{1}{\lambda} \quad (4)$$

Дисперсия показательно распределенной случайной величины равно:

$$DX = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \underbrace{-x^2 \cdot e^{-\lambda x}}_{=0} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}_{\frac{1}{\lambda}} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

То есть:

$$DX = \frac{1}{\lambda^2}. \quad (5)$$

Тогда $\sigma(X) = \sqrt{DX} = \frac{1}{\lambda}$. Отсюда следует, что

$$M(X) = \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} - \text{дыр}. \quad (6)$$

Отношения средне квадратического отклонения непрерывной величины X на математическое ожидание этой величины называется коэффициентом вариации обозначается через V :

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \quad (7)$$

Для показательного распределения $V = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda}} = 1$.

25. Написать формулу дисперсии непрерывной случайной величины и решить данную задачу.

Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x + x^2}{12}, & 0 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание и вероятность того, что функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x + x^2}{12}, & 0 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases} \text{ получит значение на интервале } (1;2)$$

$$M(x) = \int_a^b x f(x) dx \quad \text{так как}$$

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \frac{x}{6} + \frac{1}{12}$$

$$M(x) = \int_0^3 x \left(\frac{x}{6} + \frac{1}{12} \right) dx = \int_0^3 \left(\frac{x^2}{6} + \frac{x}{12} \right) dx = \left(\frac{x^3}{18} + \frac{x^2}{24} \right) \Big|_0^3 =$$

$$= \frac{27}{18} + \frac{9}{24} = 1\frac{7}{8}$$

Воспользуемся формулой $P(a < x < b) = F(b) - F(a)$

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = \frac{x + x^2}{12} \Big|_{x=2} - \frac{x + x^2}{12} \Big|_{x=1} = \frac{6}{12} - \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$