

Elektrik Dövrələri Nəzəriyyəsi Kollokvium
Suallarının Cavabları
(Rus Bölməsi)

1. Элементы электрических цепей.

Электромагнитные процессы, протекающие в электротехнических устройствах, как правило, достаточно сложны. Однако во многих случаях, их основные характеристики можно описать с помощью таких интегральных понятий, как: напряжение, ток, электродвижущая сила (ЭДС). При таком подходе совокупность электротехнических устройств, состоящую из соответствующим образом соединенных источников и приемников электрической энергии, предназначенных для генерации, передачи, распределения и преобразования электрической энергии и (или) информации, рассматривают как **электрическую цепь**. Электрическая цепь состоит из отдельных частей (объектов), выполняющих определенные функции и называемых **элементами цепи**. Основными элементами цепи являются источники и приемники электрической энергии (сигналов). Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются **генераторами** или **источниками электрической энергии**, а устройства, потребляющие ее – **приемниками** (потребителями) электрической энергии.

У каждого элемента цепи можно выделить определенное число зажимов (**полюсов**), с помощью которых он соединяется с другими элементами. Различают **двух** – и **многополюсные** элементы. Двухполюсники имеют два зажима. К ним относятся источники энергии (за исключением управляемых и многофазных), резисторы, катушки индуктивности, конденсаторы. Многополюсные элементы – это, например, триоды, трансформаторы, усилители и т.д.

Все элементы электрической цепи условно можно разделить на **активные** и **пассивные**. Активным называется элемент, содержащий в своей структуре источник электрической энергии. К пассивным относятся элементы, в которых рассеивается (резисторы) или накапливается (катушка индуктивности и конденсаторы) энергия. К основным характеристикам элементов цепи относятся их вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики, описываемые дифференциальными или (и) алгебраическими уравнениями. Если элементы описываются линейными дифференциальными или алгебраическими уравнениями, то они называются **линейными**, в противном случае они относятся к классу **нелинейных**. Строго говоря, все элементы являются нелинейными. Возможность рассмотрения их как линейных, что существенно упрощает математическое отношение к классу **элементов с распределенными параметрами**. Классическим примером последних является линия передачи электроэнергии (длинная линия). Цепи, содержащие только линейные элементы, называются линейными. Наличие в схеме хотя бы одного нелинейного элемента относит ее к классу нелинейных. Рассмотрим пассивные элементы цепи, их основные характеристики и параметры.

2. Резистивный элемент (резистор)

Условное графическое изображение резистора приведено на рис. 1,а. Резистор – это пассивный элемент, характеризующийся резистивным сопротивлением. Последнее определяется геометрическими размерами тела и свойствами материала: удельным сопротивлением ρ (Ом·м) или обратной величиной – удельной проводимостью $\gamma = \rho^{-1}$ (См/м).

В простейшем случае проводника длиной ℓ и сечением S его сопротивление определяется выражением

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\gamma S} \text{ (Ом)}$$

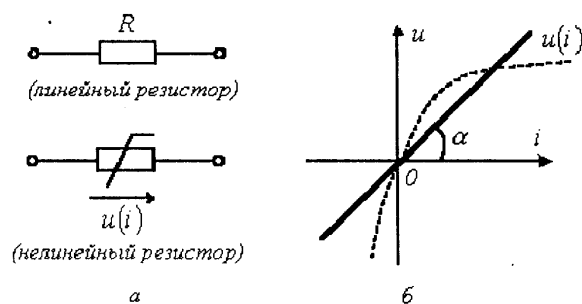


Рис.1

В общем случае определение сопротивления связано с расчетом поля в проводящей среде, разделяющей два электрода. Основной характеристикой резистивного элемента является зависимость $u(i)$ или $i(u)$ называемая вольт-амперной характеристикой (ВАХ). Если зависимость $u(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см.рис. 1,б), то резистор называется линейным и описывается соотношением

$$u = Ri = m_{Ri} \operatorname{tg} \alpha$$

или

$$i = gi,$$

где $g=R^{-1}$ - проводимость. При этом $R=\text{const}$.

Нелинейный резистивный элемент, ВАХ которого нелинейна (рис. 1,б), как будет показано далее, характеризуется несколькими параметрами. В частности безынерционному резистору ставятся в соответствие статическое и дифференциальное

$$R_{cm} = \frac{U}{I} \quad R_d = \left. \frac{du}{di} \right| \text{ сопротивления.}$$

3. Индуктивный элемент (катушка индуктивности)

Условное графическое изображение катушки индуктивности приведено на рис. 2,а. Катушка – это пассивный элемент, характеризующийся индуктивностью. Для расчета индуктивности катушки необходимо рассчитать созданное ею магнитное поле.

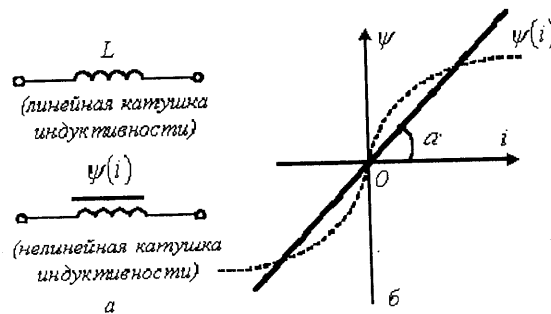


Рис.2

Индуктивность определяется отношением потокосцепления к току, протекающему по виткам катушки,

$$L = \frac{\Psi}{i} \text{ (Гн)}$$

В свою очередь потокосцепление равно сумме произведений потока,

пронизывающего витки, на число этих витков $\Psi = \sum w_k \Phi_k$, где

$$\Phi_k = \int_{S_k} \vec{B} d\vec{S}$$

Основной характеристикой катушки индуктивности является зависимость $\psi(i)$, называемая вебер-амперной характеристикой. Для линейных катушек индуктивности зависимость $\psi(i)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат (см. рис. 2,б); при этом

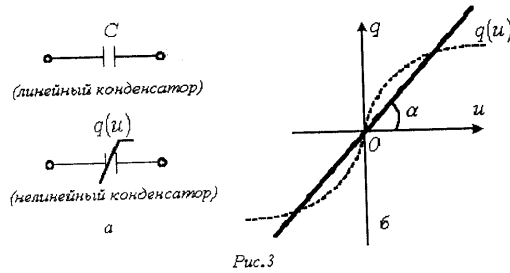
$$L = m \cdot l \cdot g \quad \alpha = \text{const}$$

Нелинейные свойства катушки индуктивности (см. кривую $\psi(i)$ на рис. 2,б) определяет наличие у нее сердечника из ферромагнитного материала, для которого зависимость $B(H) = \mu_0 \mu H$ магнитной индукции от напряженности поля нелинейна. Без учета явления магнитного гистерезиса нелинейная

катушка характеризуется статической $L_{cm} = \frac{\Psi}{I}$ и дифференциальной $L_d = \left. \frac{d\Psi}{di} \right|_I$ индуктивностями.

4. Емкостный элемент (конденсатор)

Условное графическое изображение конденсатора приведено на рис. 3,а.



Конденсатор – это пассивный элемент, характеризующийся емкостью. Для расчета последней необходимо рассчитать электрическое поле в конденсаторе. Емкость определяется отношением заряда q на обкладках конденсатора к напряжению u между ними

$$C = \frac{q}{u} (\Phi)$$

и зависит от геометрии обкладок и свойств диэлектрика, находящегося между ними. Большинство диэлектриков, используемых на практике, линейны, т.е. у них относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \text{const}$. В этом случае зависимость $q(u)$ представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат, (см. рис. 3,б) и

$$C = m \text{tg } \alpha = \text{const}$$

У нелинейных диэлектриков (сегнетоэлектриков) диэлектрическая проницаемость является функцией напряженности поля, что обуславливает нелинейность зависимости $q(u)$ (рис. 3,б). В этом случае без учета явления электрического гистерезиса нелинейный конденсатор характеризуется

статической $C_{ст} = \frac{q}{U}$ и дифференциальной $C_d = \left. \frac{dq}{du} \right|_U$ емкостями.

5. Источники электрической энергии.

При расчете режима электрической цепи она представляется некоторой условной схемой или схемой замещения, состоящей из комбинации идеальных схемных элементов. Каждый идеальный схемный элемент отображает на схеме один из физических процессов. Таких схемных элементов всего 5.

1) Идеальный источник напряжения (ЭДС) E – это схемный элемент, который генерирует на своих выводах постоянную по величине ЭДС ($E = \text{const}$), не зависящую от тока, имеет символическое обозначение, показанное на рис. 5а, характеризуется напряжением [В].

2) Идеальный источник тока J – это схемный элемент, который генерирует в цепи постоянный по величине ток ($J=const$), не зависящий от напряжения на его зажимах, имеет символическое обозначение, показанное на рис. 5б, характеризуется током [А].

3) Идеальный резистор R – это схемный элемент, в котором происходит только процесс преобразования электрической энергии в другие виды, имеет символическое обозначение, показанное на рис. 5в, характеризуется сопротивлением [Ом].

4) Идеальная катушка индуктивности L – это схемный элемент, в котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в магнитном поле ($W_M=Li^2/2$), имеет символическое обозначение, показанное на рис. 5г, характеризуется индуктивностью [Гн].

5) Идеальный конденсатор C – это схемный элемент, в котором происходит только процесс накопления (или возврата) энергии в электрическом поле ($W_Э=Cu^2/2$), имеет символическое обозначение, показанное на рис. 5д, характеризуется емкостью [Ф].

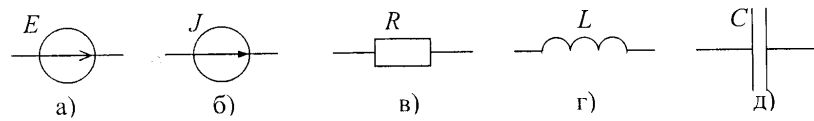


Рис. 5

Каждый элемент электрической цепи на схеме замещения представляется одним или комбинацией из нескольких идеальных схемных элементов в зависимости от необходимости учета тех физических процессов, которые в нем протекают. Например, лампа накаливания представляется на схеме только одним схемным элементом – резистором R , так как тепловая и световая энергия многократно больше энергии электромагнитного поля (рис. 6а), обмотка электромагнитного реле представляется на схеме комбинацией из двух элементов – R и L (рис. 6б), а протяжённая двухпроводная линия – комбинацией из 6-и схемных элементов, которые комплексно учитывают физические процессы в ней (рис. 6в).

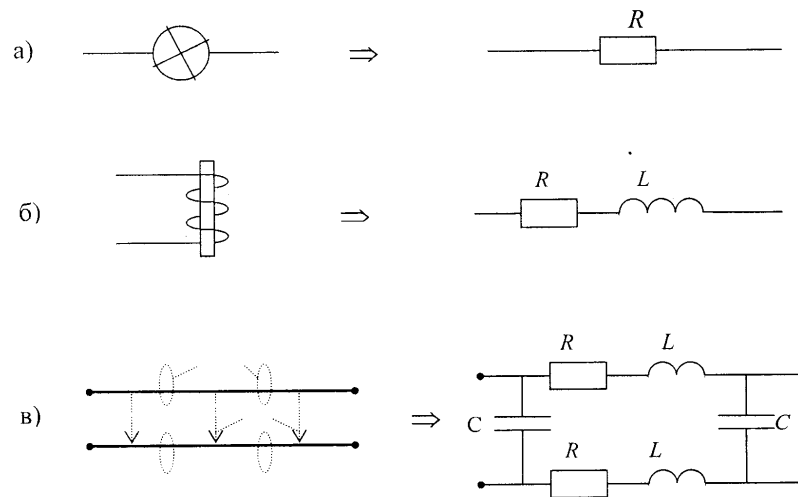


Рис. 6

При составлении схемы замещения электрической цепи всегда пренебрегают второстепенными физическими процессами и явлениями, не оказывающими существенного влияния на точность технического расчета режима. Поэтому любая схема замещения реальной цепи отображает физические процессы в ней с некоторой степенью приближения.

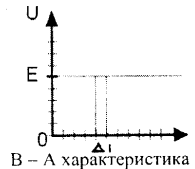
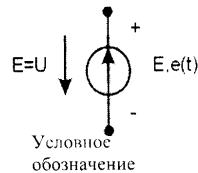
Энергия от источника переносится приемнику электромагнитным полем со скоростью распространения волны. Для воздушных линий электропередачи эта скорость близка к скорости света $c=300000$ км/с, для кабельных линий она чуть меньше $\left(v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}}\right)$. Таким образом, электромагнитная волна за единицу времени (1 сек) многократно пробегает путь от источника энергии до приемника.

Согласно закону сохранения энергии в любой электрической цепи за любой промежуток времени T должен выполняться баланс между генерируемой и потребляемой энергией: $\sum W_{\text{ист}} = \sum W_{\text{пр}}$. Количество энергии, за единицу времени (1сек), называется мощностью, следовательно, в любой цепи существует баланс между мощностью источников и приемников: $\sum P_{\text{ист}} = \sum P_{\text{пр}}$.

6. Идеализированные активные элементы

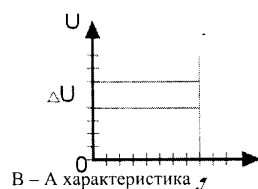
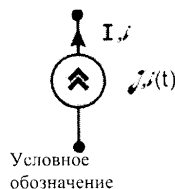
К активным элементам относятся **управляемые и неуправляемые источники электрической энергии.**

Идеальный источник ЭДС – это источник электрической энергии, напряжение на зажимах которого не зависит от величины протекающего тока. Это может быть только в том случае, если внутреннее сопротивление равно нулю



$$R_{BH} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = 0$$

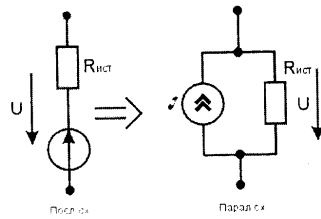
Идеальный источник тока – это источник электрической энергии, величина тока через который не зависит от напряжения на его зажимах. Внутреннее сопротивление источника равно бесконечности.



$$R_{BH} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \infty$$

7. Реальные неуправляемые электрические источники

Реальный источник обладает конечным внутренним сопротивлением. Его можно учесть с помощью идеального сопротивления, представив две схемы. Схему с источником ЭДС называют последовательной схемой. Схему с источником тока – параллельной.

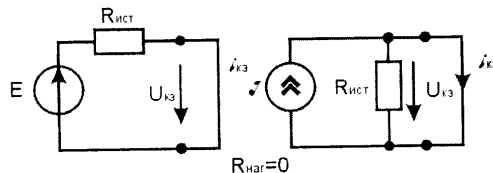


Эти схемы являются эквивалентными. Это можно доказать, если рассмотреть вольтамперную характеристику (ВАХ) двух схем. Так как элементы в схемах линейные, то и ВАХ будет линейной. Её можно построить по двум точкам, реализовав два режима: режим короткого замыкания и режим холостого хода.

Короткое замыкание.

$$U_{кз} = 0, I_{кз} = \frac{E}{R_{ист}} \text{ - в последовательной схеме,}$$

$$U_{кз} = 0, I_{кз} = J \text{ - в параллельной схеме.}$$



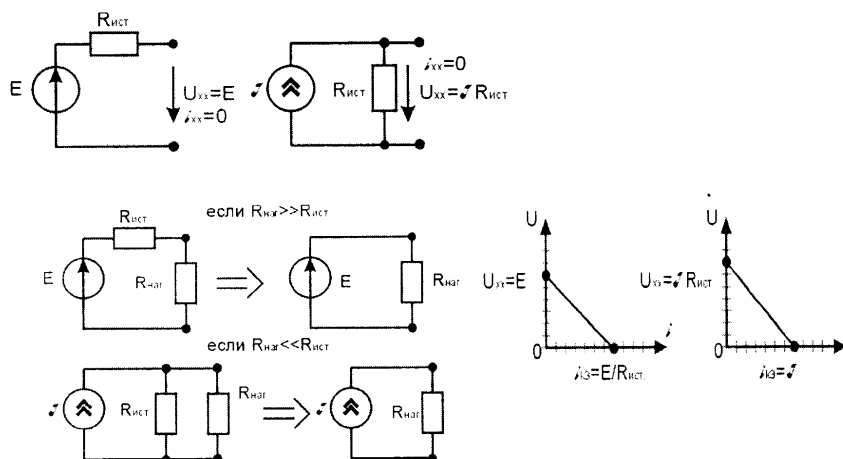
Холостой ход.

$$I_{х.х} = 0, U_{х.х} = E \text{ - в последовательной схеме,}$$

$$I_{х.х} = 0, U_{х.х} = J \cdot R_{ист} \text{ - в параллельной схеме.}$$

Построим В – А характеристики по точкам с координатами величин для режимов короткого замыкания и холостого хода. Характеристики двух схем будут одинаковыми, если координаты будут равны. В этом случае схемы называются **эквивалентными**. Можно записать условие эквивалентности этих схем:

$$E = J \cdot R_{ист}; \quad J = \frac{E}{R_{ист}}.$$



При определённых условиях реальный источник может быть представлен идеальным источником тока, либо ЭДС.

8. Управляемые идеальные источники

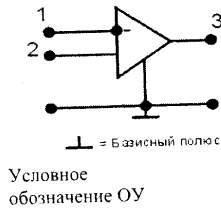
Управляемым (зависимым) источником называется такой источник электрической энергии, основной параметр которого зависит от внешнего электрического режима.

Название	Источник напряжения управляемый напряжением (ИНУН)	Источник напряжения управляемый током (ИНУТ)	Источник тока управляемый напряжением (ИТУН)	Источник тока управляемый током (ИТУТ)
Условные обозначения				
Основное уравнение источника	$U_2 = K_U \cdot U_1$ K _U -коэф. преобразования.	$U_2 = K_R \cdot i_1$ K _R -коэф. преобразования.	$i_2 = K_G \cdot U_1$ K _G -коэф. преобразования.	$i_2 = K_I \cdot i_1$ K _I -коэф. преобразования.
Входное и выходное сопротивления.	$R_{вх} = \infty$ $R_{вых} = 0$	$R_{вх} = 0$ $R_{вых} = 0$	$R_{вх} = \infty$ $R_{вых} = \infty$	$R_{вх} = 0$ $R_{вых} = \infty$

Схемы реальных управляемых источников, отличаются от приведённых здесь входными и выходными сопротивлениями.

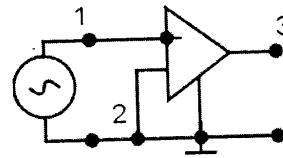
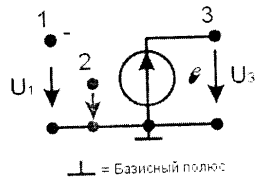
9. Операционный усилитель - (ОУ)

Операционным усилителем называется источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН), у которого коэффициент преобразования $K_U = \infty$.



Полюса (1) и (2) называются **входными полюсами**, к ним подключают источник входного сигнала - **воздействие**.

Первый полюс (1) называется **инвертируемый**, он обозначен знаком «минус» (-). Сигнал, проходя по этому входу через усилитель, изменяется по фазе на 180 градусов. Второго полюс (2) - **не инвертируемый**. Третий полюс (3) - **выходной**, на нём образуется выходной сигнал - **отклик**. К нему подключается нагрузка. Общий полюс (базисный) имеет потенциал $\varphi = 0$.



Так как операционный усилитель является ИНУНом, то его схема замещения имеет соответствующий вид.

Выражение, связывающее выходное напряжение с входным, называется основным уравнением ОУ

$$U_3 = K_U \cdot (U_2 - U_1), \text{ где } K_U = \infty$$

Так как коэффициент преобразования $K_U = \infty$, то при конечном значении U_3 ОУ обладает важным свойством:

$$(U_2 - U_1) = 0 \text{ т.е. } \varphi_1 = \varphi_2 \text{ и } U_1 = U_2$$

В некоторых случаях ОУ включается только с одним входом:

$$U_3 = K_U \cdot (-U_1) \text{ При } K_U = \infty \text{ } U_1 = 0.$$

10. Потенциальная диаграмма для цепей постоянного тока

Потенциальная диаграмма применяется при анализе цепей постоянного тока. Она представляет собой график распределения потенциала вдоль участка цепи или контура, при этом по оси абсцисс откладываются сопротивления резистивных элементов, встречающихся на пути обхода ветви или контура, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек. Таким образом, каждой точке рассматриваемого участка или контура соответствует точка на потенциальной диаграмме. Рассмотрим построение потенциальной диаграммы на примере схемы на рис. 3.

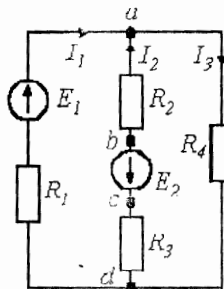


Рис.3

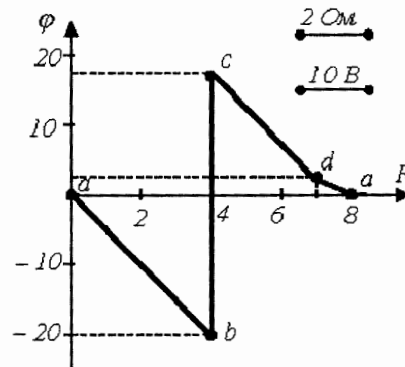


Рис.4

При параметрах схемы $E_1 = 48 \text{ В}$, $E_2 = 37 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 3 \text{ Ом}$ и $R_4 = 1 \text{ Ом}$ токи в ветвях схемы равны: $I_1 = 10 \text{ А}$, $I_2 = -5 \text{ А}$, $I_3 = -2 \text{ А}$. Построим потенциальную диаграмму для контура $abcda$. Для выбора масштаба по оси абсцисс просуммируем сопротивления резисторов вдоль рассматриваемого контура: $R_{\Sigma} = R_2 + R_3 + R_4 = 4 + 3 + 1 = 8 \text{ Ом}$, после чего определим потенциалы точек контура относительно потенциала произвольно выбранной точки a , потенциал которой принят за нуль:

$$\varphi_b = \varphi_a + I_2 R_2 = 0 - 5 \cdot 4 = -20 \text{ В};$$

$$\varphi_c = \varphi_b + E_2 = -20 + 37 = 17 \text{ В};$$

$$\varphi_d = \varphi_c + I_2 R_3 = 17 - 5 \cdot 3 = 2 \text{ В}.$$

Таким образом, координаты точек потенциальной диаграммы: $a(0;0)$; $b(4;-20)$; $c(4;17)$; $d(7;2)$. С учетом выбранных масштабов на рис. 4 построена потенциальная диаграмма для выбранного контура.

11. Последовательное преобразования электрических схем.

Если схема электрической цепи содержит только один источник энергии (E или J), то пассивная часть схемы может быть преобразована (свернута) к одному эквивалентному элементу R_3 (рис. 7).

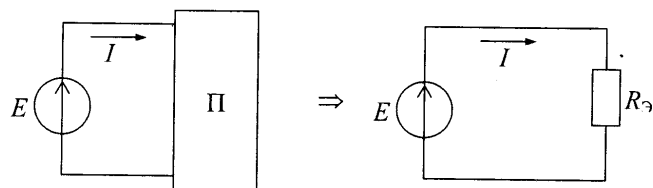


Рис. 7

Свертка схемы начинается с самых удаленных от источника ветвей, проводится в несколько этапов до достижения полной свертки. После полной свертки схемы определяется ток источника по закону Ома: $I = \frac{E}{R_3}$. Токи в остальных элементах исходной схемы находятся в процессе обратной развертки схемы. Такой метод расчета токов получил название метода последовательного преобразования (свертки) схемы.

При применении данного метода возможны следующие виды преобразований.

1) **Последовательное преобразование** заключается в замене нескольких элементов, включенных последовательно, одним эквивалентным (рис. 8). Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$R_3 = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad \text{и} \quad U_1 : U_2 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : \dots : R_n$$

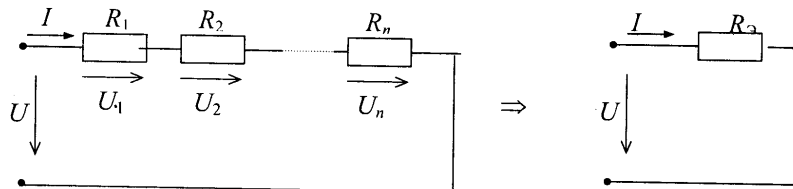


Рис. 8

12. Параллельное преобразования электрических схем

2) **Параллельное преобразование** состоит в замене нескольких элементов, включенных параллельно, одним эквивалентным (рис. 9). Несложно доказать, что при этом справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad \text{и} \quad I_1 : I_2 : \dots : I_n = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \dots : \frac{1}{R_n}$$

Для двух элементов: $R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ и $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$

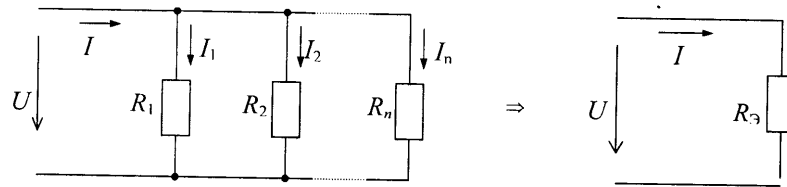


Рис. 9

13. Замена параллельных ветвей эквивалентной ветвью

4) Замена параллельных ветвей эквивалентной ветвью (рис. 12) осуществляется согласно теореме об эквивалентном генераторе.

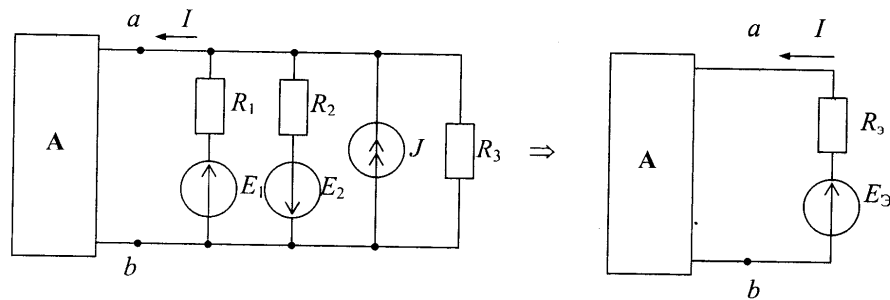


Рис. 12

Напряжение холостого хода $U_{xab} = E_3$ определяется по методу двух узлов:

$$U_{xab} = E_3 = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2} + J}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Эквивалентное входное сопротивление находится методом свертки схемы:

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

14. Перенос источника ЭДС через узел схемы

5) **Перенос источника ЭДС через узел схемы:** источник ЭДС E можно перенести через узел во все ветви, отходящие от узла (рис. 13а, б):

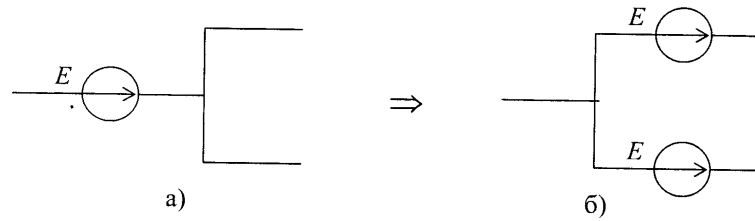


Рис. 13

15. Привязка источника тока

б) **Привязка источника тока к произвольному узлу** согласно схеме (рис. 14а, б):

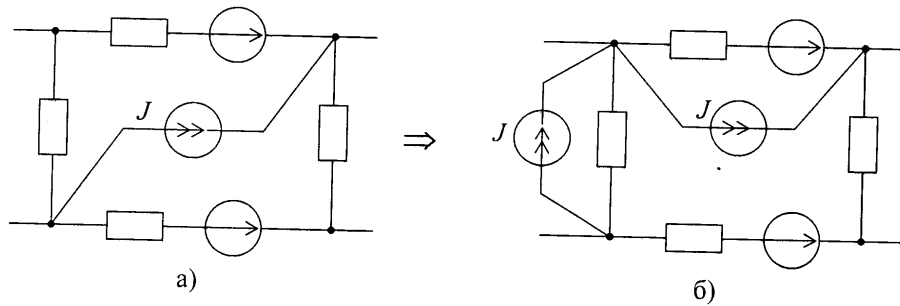


Рис. 14

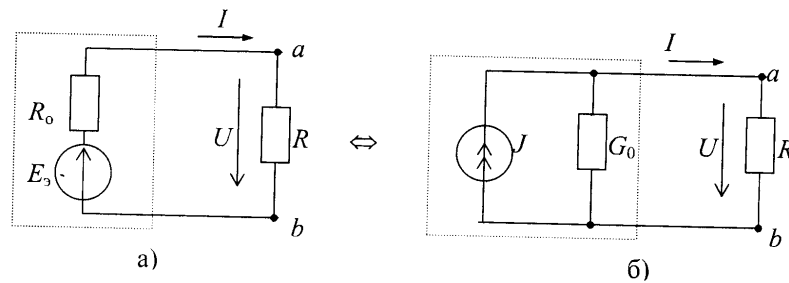


Рис. 15

16. Взаимное преобразование схем

7) **Взаимное преобразование схем с источником напряжения и с источником тока** согласно схеме (рис. 15а, б). Схемы эквивалентны при равенстве для обеих напряжений U и токов I на нагрузке:

$$U = E - IR_0 = I_0 R_0 = (J - I) \cdot \frac{1}{G_0} = \frac{J}{G_0} - \frac{I}{G_0}.$$

Сравнивая левые и правые части равенства, получим соотношения между параметрами эквивалентных схем:

$$R_0 = \frac{1}{G_0}; \quad E = \frac{J}{G_0}; \quad G_0 = \frac{1}{R_0}; \quad J = \frac{E}{R_0}.$$

17. Взаимное преобразование схем звезда-треугольник

3) **Взаимное преобразование схем звезда–треугольник** (рис. 10) возникает при свертке сложных схем.

Условием эквивалентности двух схем являются равенства для них токов (I_1, I_2, I_3), напряжений (U_{12}, U_{23}, U_{31}) и входных сопротивлений (R_{12}, R_{23}, R_{31}) и соответственно входных проводимостей (G_{12}, G_{23}, G_{31}).

Приравняем входные сопротивления для обеих схем со стороны двух произвольных ветвей при отключенной третьей (рис. 10):

$$R_{\text{вх}1-2} = R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{31} + R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1)$$

$$R_{\text{вх}2-3} = R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31} + R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (2)$$

$$R_{\text{вх}3-1} = R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot R_{12} + R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (3)$$

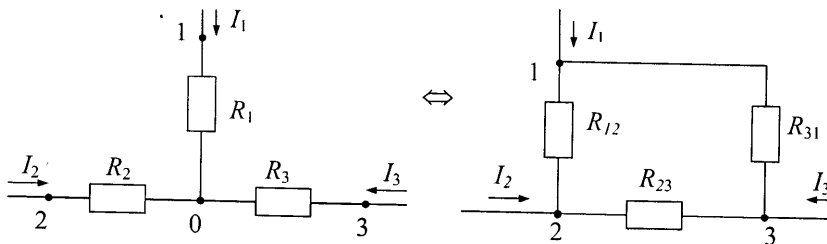


Рис. 10

Сложим почленно уравнения (1) и (3) и вычтем из суммы уравнение (2), получим:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \text{ по аналогии: } R_2 = \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Приравняем входные проводимости для обеих схем со стороны произвольной вершины и двух других вершин, замкнутых накоротко (рис. 11):

$$G_{\text{вх}1-23} = \frac{G_1 G_2 + G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{12} + G_{31} \quad (4)$$

$$G_{\text{вх}2-31} = \frac{G_1 G_2 + G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{23} + G_{12} \quad (5)$$

$$G_{\text{вх}3-12} = \frac{G_3 G_1 + G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = G_{31} + G_{23} \quad (6)$$

Сложим почленно уравнения (4) и (5) и вычтем уравнение (6), получим:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}, \text{ по аналогии: } G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}, \quad G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

В последних уравнениях заменим проводимости на соответствующие им сопротивления $R = \frac{1}{G}$, получим:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2}.$$

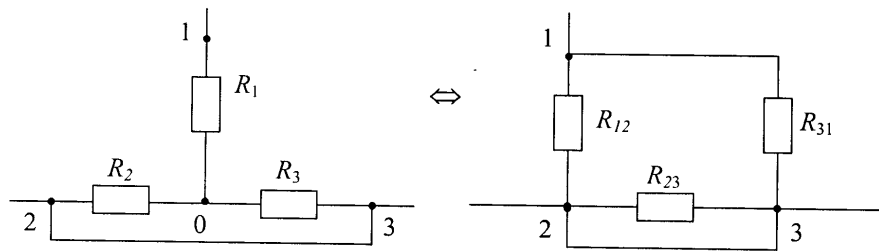


Рис. 11

При наличии полной симметрии соотношение между параметрами эквивалентных схем составляет: $R_{\Delta} = 3R_{\perp}$.

18. Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС

Закон Ома для участка цепи с источником ЭДС. Методы расчета цепей.



Рис. 1

Возьмем два участка цепи $a-b$ и $c-d$ (см. рис. 1) и составим для них уравнения в комплексной форме с учетом указанных на рис. 1 положительных направлений напряжений и токов.

$$\begin{aligned} \phi_a &= \phi_b + \dot{E}_1 - \dot{I}_1 Z_1; & \phi_c &= \phi_d + \dot{E}_2 + \dot{I}_2 Z_2; \\ \dot{U}_{ab} &= \phi_a - \phi_b = \dot{E}_1 - \dot{I}_1 Z_1; & \dot{U}_{cd} &= \phi_c - \phi_d = \dot{E}_2 + \dot{I}_2 Z_2; \\ \dot{I}_1 &= \frac{\dot{E}_1 - \dot{U}_{ab}}{Z_1}. & \dot{I}_2 &= \frac{-\dot{E}_2 + \dot{U}_{cd}}{Z_2}. \end{aligned}$$

Объединяя оба случая, получим

$$\dot{I} = \frac{\pm \dot{E} \mp \dot{U}}{Z} \quad (1)$$

или для постоянного тока

$$I = \frac{\pm E \mp U}{R} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) являются **аналитическим выражением закона Ома для участка цепи с источником ЭДС**, согласно которому ток на участке цепи с источником ЭДС равен алгебраической сумме напряжения на зажимах участка цепи и ЭДС, деленной на сопротивление участка. В случае переменного тока все указанные величины суть комплексы. При этом ЭДС и напряжение берут со знаком "+", если их направление совпадает с выбранным направлением тока, и со знаком "-", если их направление противоположно направлению тока.

19. Электрический ток проводимости. Ток переноса

Электрическим током **проводимости** называется направленное движение свободных зарядов $q_{св}$, какими являются электроны в металлах, положительные и отрицательные ионы в электролитах:

$$i_{np} = -\frac{dq_{св}}{dt} \quad \text{— ток проводимости [A];}$$

$$\bar{\delta}_{np} = \frac{di_{np}}{ds_n} \quad \text{— плотность тока проводимости [A/м}^2\text{].}$$

Ток проводимости связан с плотностью тока уравнением:

$$i_{np} = \int_S \bar{\delta}_{np} \cdot d\vec{s}$$

Ток проводимости возникает в проводящей среде под воздействием электрического поля: $\bar{\delta}_{np} = \gamma \bar{E}$, где γ — удельная проводимость среды [См/м].

Электрическим током **переноса** называется направленное движение заряженных частиц $q_{зч}$, движущихся в свободном пространстве. Математически ток переноса описывается аналогичными с током проводимости уравнениями:

$$i_{nep} = -\frac{dq_{зч}}{dt}; \quad \bar{\delta}_{nep} = \frac{di_{nep}}{ds_n}; \quad i_{nep} = \int_S \bar{\delta}_{nep} \cdot d\vec{s}.$$

20. Электрический ток смещения. 1-й закон Кирхгофа

Электрическим током **смещения** называется явление направленного движения связанных зарядов в результате поляризации диэлектрика и явление изменения во времени электрического поля:

$$\bar{\delta}_{см} = \frac{d\bar{D}}{dt} = \frac{d(\epsilon_0 \bar{E} + \bar{P})}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt} + \frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{\delta}_{см0} + \bar{\delta}_{смн},$$

$$i_{см} = \int_S \bar{\delta}_{см} \cdot d\vec{s}.$$

Ток смещения может существовать в пустоте ($\bar{\delta}_{см0}$). Рассмотрим некоторую замкнутую поверхность S , внутри которой втекают ток проводимости i_{np} и ток переноса i_{nep} (рис. 1).

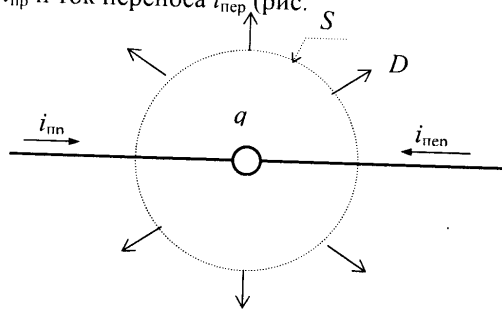


Рис. 1

При увеличении заряда внутри объема $q=q_{св}+q_{зч}$ будет усиливаться электрическое поле на поверхности S . По теореме Гаусса:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} = \sum q = q_{св} + q_{зч}$$

Продифференцируем обе части этого уравнения по переменной t :

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_S \vec{D} \cdot \vec{ds} \right) = \oint_S \frac{d\vec{D}}{dt} \cdot \vec{ds} = \oint_S \vec{\delta}_{см} \cdot \vec{ds} = i_{см};$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq_{св}}{dt} + \frac{dq_{зч}}{dt} = -i_{пр} - i_{пер},$$

откуда следует вывод, что $i_{см} = -i_{пр} - i_{пер}$ или $i_{пр} + i_{пер} + i_{см} = 0$.

Сумма токов всех родов, протекающих сквозь любую замкнутую поверхность, равна нулю. Если замкнутую поверхность S разбить на отдельные участки S_1, S_2, \dots, S_n , то

$S = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ и соответственно $i = i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$.

Рассмотрим узел электрической цепи, т. е. точку, в которой сходятся не менее трех проводов (ветвей) этой цепи (рис. 2). Окружим узел замкнутой поверхностью S . Токи, протекающие по проводникам (i_1, i_2, i_3), называются токами проводимости. Через свободную поверхность диэлектрика будет протекать ток смещения $i_{см} = \int_S \vec{\delta}_{см} \cdot \vec{ds}$. На промышленной частоте 50 Гц ток

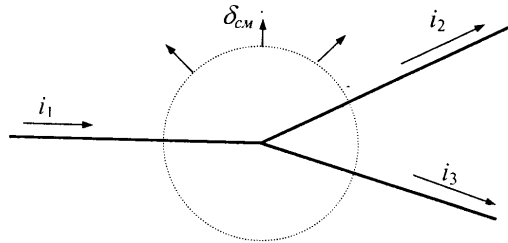


Рис. 2

смещения несоизмеримо меньше тока проводимости ($i_{см} \ll i_{пр}$) и в инженерных расчетах им можно пренебречь. Таким образом, можно считать, что алгебраическая сумма токов проводимости в узле электрической цепи равна нулю:

$$\sum i = i_1 - i_2 - i_3 = 0.$$

Указанное положение в электротехнике получило название 1-го закона Кирхгофа.

21. Электрическое напряжение . 2-ой закон Кирхгофа

Пусть в электрическом поле \vec{E} заряд q перемещается из точки "а" в точку "b" по некоторой произвольной траектории (рис. 3). Работа сил по перемещению заряда q из точки "а" в точку "b":

$$A = q \int_a^b \vec{E} \cdot \vec{dl},$$

где \vec{E} – напряженность электрического поля [В/м].

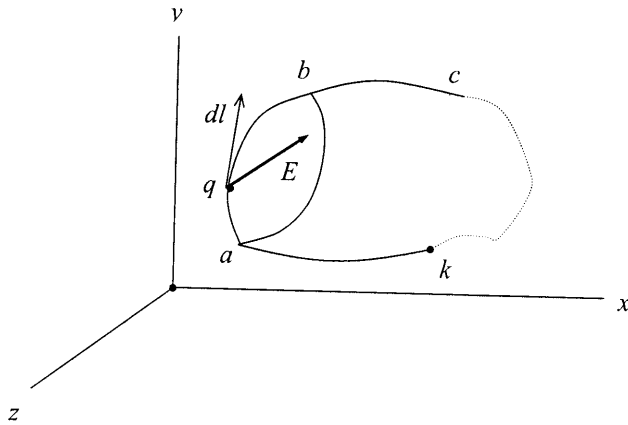


Рис. 3

Электрическим напряжением называется физическая величина, равная отношению работы по перемещению заряда из одной точки (а) в другую (b) к величине этого заряда:

$$U_{ab} = \frac{A}{q} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Из закона сохранения энергии следует, что при перемещении заряда по произвольному замкнутому контуру, произведенная работа будет равна нулю т.е.

$$A = q \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0.$$

Из этого уравнения вытекают два важных следствия.

1-е следствие: сумма падений напряжений на отдельных участках замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E} \cdot d\vec{l} + \dots + \int_k^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{ab} + U_{bc} + \dots + U_{ka} = 0$$

2-ое следствие: напряжение между двумя произвольными точками не зависит от пути интегрирования:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = U_{ab} + U_{ba} = 0,$$

откуда следует, что $U_{ab} = -U_{ba}$.

Независимость напряжения между двумя точками от выбора пути интегрирования позволяет характеризовать электрическое поле некоторой математической функцией $\varphi(x, y, z)$, называемой потенциалом, разность значений которой в рассматриваемых точках численно равна напряжению между ними:

$$\varphi_a - \varphi_b = U_{ab} = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Если положение и потенциал точки "а" заданы, а точка "b" является текущей – "b"(x,y,z), то получим:

$$\varphi_b = \varphi(x, y, z) = - \int_a^{x,y,z} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \varphi_a = - \int_a^{x,y,z} \vec{E} \cdot d\vec{l} + C.$$

Таким образом, значение потенциала φ_b в произвольной точке "b"(x,y,z) зависит от выбора значения потенциала опорной точки φ_a . В электротехнике принято придавать нулевое значение потенциала точке, связанной с землей.

Рассмотрим замкнутый контур некоторой электрической цепи (рис. 4), при этом путь интегрирования выберем вдоль ветвей контура.

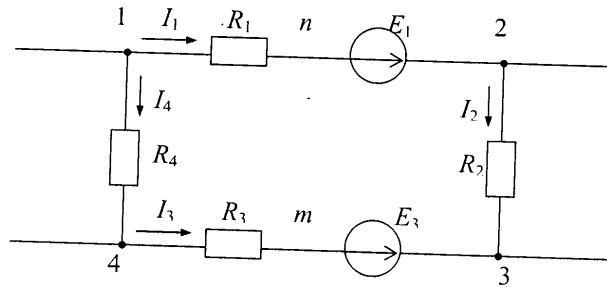


Рис. 4

Для 1-й ветви:

$$U_{1n} = \varphi_1 - \varphi_n = I_1 R_1 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_n + I_1 R_1,$$

$$U_{2n} = \varphi_2 - \varphi_n = E_1 \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_n + E_1,$$

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi_n + I_1 R_1 - \varphi_n - E_1 = I_1 R_1 - E_1.$$

По аналогии для других ветвей:

$$U_{23} = \varphi_2 - \varphi_3 = I_2 R_2,$$

$$U_{34} = \varphi_3 - \varphi_4 = -I_3 R_3 + E_3,$$

$$U_{41} = \varphi_4 - \varphi_1 = -I_4 R_4.$$

Сумма всех напряжений по замкнутому контуру:

$$\sum U = U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{41} = 0, \text{ откуда следует, что } I_1 R_1 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_4 R_4 = E_1 - E_3,$$

или

$$\sum IR = \sum E \quad \text{— 2-ой закон Кирхгофа.}$$

Формулировка 2-го закона Кирхгофа: в замкнутом контуре электрической цепи или схемы алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах контура ($\sum IR$) равна алгебраической сумме ЭДС ($\sum E$). Отдельные слагаемые в эти суммы входят со знаком "+", если их действие совпадает с направлением обхода контура, и со знаком "-", если не совпадает.

22. Методы расчета электрических цепей. Метод законов Кирхгофа.

Теоретическая база метода: 1-й и 2-й законы Кирхгофа.

1-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма токов ветвей в узле схемы равна нулю ($\sum I = 0$).

2-й закон Кирхгофа: алгебраическая сумма падений напряжений в произвольном контуре схемы равна алгебраической сумме ЭДС ($\sum IR = \sum E$).

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме (рис. 16) и определить токи в ветвях, напряжения на отдельных элементах, мощности источников и приемников энергии. Задана схема цепи и параметры ее отдельных элементов ($E_1, E_2, J_1, J_2, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5$).

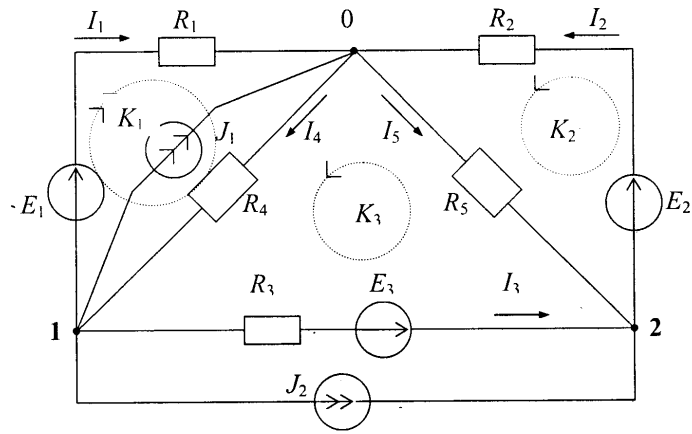


Рис. 16

Анализируем структуру схемы: схема содержит $n=3$ (0, 1, 2) узлов и $m=5$ ветвей с неопределенными токами. В ветвях с источниками тока J токи определены источниками. Общее число уравнений должно быть равно числу определяемых токов " m ".

Последовательность (алгоритм) расчета.

- 1) Задаются (произвольно) положительными направлениями токов в ветвях схемы (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5).
- 2) Составляется $(n-1)$ уравнений для узлов по первому закону Кирхгофа. Уравнение для последнего n -го узла является зависимым (оно может быть получено путем сложения первых $(n-1)$ уравнений).
- 3) Недостающие $m-(n-1)$ уравнений составляются по 2-му закону Кирхгофа. Правило выбора контуров для составления уравнений: каждый последующий контур должен включать в себя хотя бы одну новую ветвь, не

охваченную предыдущими уравнениями. Число независимых контуров для схемы любой сложности не может быть больше числа $m-(n-1)$.

Ниже приведена система уравнений Кирхгофа для схемы рис. 16, состоящая из $m=5$ уравнений, из которых $n-1=2$ составлены для узлов 1 и 2 по 1-му закону Кирхгофа и $m-(n-1)=3$ составлены для контуров K_1, K_2, K_3 по 2-му закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} -I_1 - I_3 + I_4 - J_1 - J_2 = 0 & \text{— узел 1,} \\ -I_2 + I_3 + I_5 + J_2 = 0 & \text{— узел 2,} \\ I_1 R_1 + I_4 R_4 = E_1 & \text{— контур } K_1, \\ I_2 R_2 + I_5 R_5 = E_2 & \text{— контур } K_2, \\ I_3 R_3 + I_4 R_4 - I_5 R_5 = E_3 & \text{— контур } K_3. \end{cases}$$

4) Система уравнений приводится к матричной форме, составляются матрицы коэффициентов:

$$[R] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ R_1 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & R_5 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & -R_5 \end{bmatrix}; \quad [E, J] = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 \\ -J_2 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}$$

5) Система уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в результате чего определяются неизвестные токи I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 . Отрицательные результаты, получаемые для некоторых токов, означают, что их действительные (физические) направления не соответствуют направлениям, принятым в начале расчета.

6) Определяются напряжения на отдельных элементах схемы ($U_k = I_k R_k$), мощности источников ЭДС ($P_{Ek} = E_k I_k$), источников тока ($P_{Jk} = U_k I_k$) и приемников ($P_k = I_k^2 R_k$). При этом мощности приемников энергии всегда положительны, а мощности источников энергии могут быть отрицательными, если множители в произведениях $E_k I_k$ и $U_k I_k$ не совпадают по направлению.

23. Методы расчета электрических цепей. Метод контурных токов.

Теоретическая база метода контурных токов – 2-ой закон Кирхгофа в сочетании с принципом наложения. Предполагают, что в каждом элементарном контуре-ячейке схемы протекает «свой» контурный ток I_k , а действительные токи ветвей получаются по принципу наложения контурных токов как их алгебраические суммы. В качестве неизвестных величин,

подлежащих определению, в данном методе выступают контурные токи. Общее число неизвестных составляет $m-(n-1)$.

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме рис. 17. Параметры отдельных элементов схемы заданы.

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Задаются (произвольно) положительными направлениями контурных токов в контурах-ячейках схемы (I_{k1}, I_{k2}, I_{k3}). Контурные-ячейки следует выбирать так, чтобы они не включали в себя ветви с источниками тока. Ветви с источниками тока J образуют свои контуры с заданными токами (J_1, J_2).

2) Составляются $m-(n-1)$ уравнений по 2-му закону Кирхгофа для выбранных контуров-ячеек с контурными токами I_{k1}, I_{k2}, I_{k3} . В уравнениях учитываются падения напряжений как от собственного контурного тока, так и от смежных контурных токов.

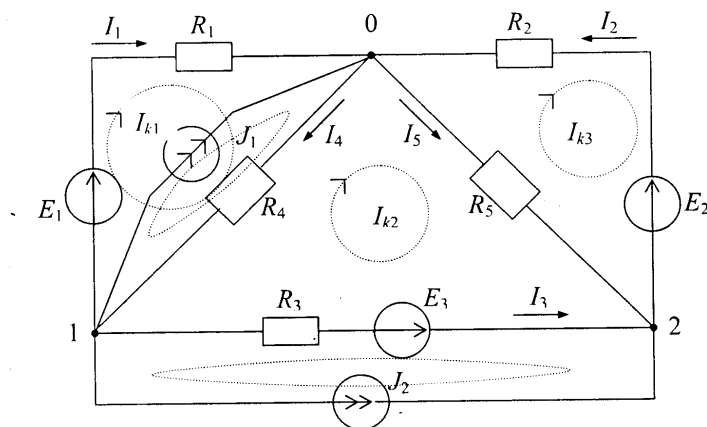


Рис. 17

Ниже приведена система контурных уравнений для схемы рис. 17:

$$\begin{cases} I_{k1}(R_1 + R_4) - I_{k3}R_4 - J_1R_4 = E_1 \\ I_{k2}(R_3 + R_4 + R_5) - I_{k1}R_4 - I_{k3}R_5 = -E_3 \\ I_{k3}(R_2 + R_5) - I_{k2}R_5 = -E_2 \end{cases}$$

В обобщенной форме система контурных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} I_{k1}R_{11} + I_{k2}R_{12} + I_{k3}R_{13} + \dots + I_{kn}R_{1n} = E_{11} \\ I_{k1}R_{21} + I_{k2}R_{22} + I_{k3}R_{23} + \dots + I_{kn}R_{2n} = E_{22} \\ I_{k1}R_{31} + I_{k2}R_{32} + I_{k3}R_{33} + \dots + I_{kn}R_{3n} = E_{33} \\ \dots \\ I_{k1}R_{n1} + I_{k2}R_{n2} + I_{k3}R_{n3} + \dots + I_{kn}R_{nn} = E_{nn} \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$R_{11} = R_1 + R_4$; $R_{22} = R_3 + R_4 + R_5$ и т. д. – собственные сопротивления контуров, равные сумме сопротивлений всех элементов контура;

$R_{12} = R_{21} = -R_4$; $R_{23} = R_{32} = -R_5$ и т. д. – взаимные сопротивления между двумя смежными контурами, они положительны – если контурные токи в ветви совпадают, и отрицательны – если контурные токи в ветви направлены встречно, и всегда отрицательны – если все контурные токи ориентированы одинаково (например, по часовой стрелке), равны нулю – если контуры не имеют общей ветви, например, $R_{13} = R_{31} = 0$;

$E_{11} = E_1 + J_1R_4$, $E_{22} = -E_2$, $E_{33} = -E_3 + J_2R_3$ и т. д. – контурные ЭДС, равные алгебраической сумме слагаемых $E_{nn} = \sum E + \sum JR$ от всех источников контура.

Система контурных уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & \dots & R_{2n} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & \dots & R_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & R_{n3} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ I_{k3} \\ \dots \\ I_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ \dots \\ E_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или в сокращенно } [R_k] \times [I_k] = [E_k],$$

где $[R_k]$ – матрица контурных сопротивлений, $[I_k]$ – матрица контурных токов, $[E_k]$ – матрица контурных ЭДС.

3) Система контурных уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами (SU1), в результате чего определяются неизвестные контурные токи I_{k1} , I_{k2} , I_{k3} .

4) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы (рис. 1) (I_1, I_2, I_3, I_4, I_5). Токи ветвей определяются по принципу наложения как алгебраические суммы контурных токов, протекающих в данной ветви.

$$I_1 = I_{k1}; \quad I_2 = -I_{k3}; \quad I_3 = -I_{k2} - J_2; \quad I_4 = I_{k1} - I_{k2} + J_1; \quad I_5 = I_{k2} - I_{k3}.$$

5) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ($U_k = I_k R_k$), мощности источников энергии ($P_{Ek} = E_k I_k$, $P_{Jk} = U_k J_k$) и мощности приемников энергии ($P_k = I_k^2 \cdot R_k$).

24. Методы расчета электрических цепей. Метод узловых потенциалов

Теоретическая база метода узловых потенциалов – 1-ый закон Кирхгофа в сочетании с потенциальными уравнениями ветвей. В этом методе потенциал одного из узлов схемы принимают равным нулю, а потенциалы остальных $(n-1)$ узлов считают неизвестными, подлежащими определению. Общее число неизвестных составляет $(n-1)$.

Рассмотрим обобщенную ветвь некоторой сложной схемы (рис. 18).

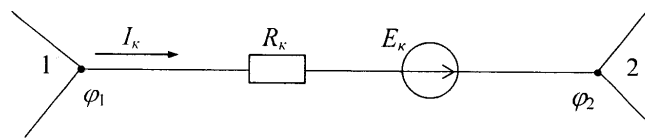


Рис. 18

Свяжем потенциалы концов ветви (узлов) между собой через падения напряжений на отдельных участках:

$$\varphi_1 - I_k R_k + E_k = \varphi_2 \quad \text{или} \quad \varphi_2 - E_k + I_k R_k = \varphi_1$$

Уравнение, связывающее потенциалы конечных точек ветви через падения напряжений на ее отдельных участках, называется потенциальным уравнением ветви. Из потенциального уравнения ветви могут быть определены ток ветви и напряжение на резисторе:

$$I_k = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E_k}{R_k}, \quad U_k = I_k R_k = \varphi_1 - \varphi_2 + E_k.$$

Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной сложной схеме рис. 19. Параметры отдельных элементов схемы заданы.

Принимаем потенциал узла 0 равным нулю ($\varphi_0 = 0$), а потенциалы узлов 1 и 2 (φ_1 и φ_2) будем считать неизвестными, подлежащими определению.

Зададимся положительными направлениями токов в ветвях схемы I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 . Составим потенциальные уравнения ветвей и выразим из них токи ветвей:

$$\begin{aligned} I_1 &= (\varphi_1 - \varphi_0 + E_1) / R_1 \\ I_2 &= (\varphi_2 - \varphi_0 + E_2) / R_2 \\ I_3 &= (\varphi_1 - \varphi_0 + E_3) / R_3 \\ I_4 &= (\varphi_0 - \varphi_1) / R_4 \\ I_5 &= (\varphi_0 - \varphi_2) / R_5 \end{aligned}$$

Система узловых уравнений в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & \dots & G_{2n} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & \dots & G_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & G_{n2} & G_{n3} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \dots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ \dots \\ J_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{или сокращенно}$$

$$[G_y] \times [\varphi_y] = [J_y],$$

где $[G_y]$ – матрица узловых проводимостей, $[\varphi_y]$ – матрица узловых потенциалов, $[J_y]$ – матрица узловых токов.

Последовательность (алгоритм) расчета.

1) Принимают потенциал одного из узлов схемы равным нулю, а потенциалы остальных $(n-1)$ узла считают неизвестными, подлежащими определению.

2) Руководствуясь обобщенной формой, составляют $(n-1)$ уравнение для узлов с неизвестными потенциалами.

3) Определяются коэффициенты узловых уравнений и составляются их матрицы.

4) Система узловых уравнений решается на ЭВМ по стандартной программе для решения систем линейных алгебраических уравнений с вещественными коэффициентами, в результате чего определяются неизвестные потенциалы узлов $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

5) Выбираются положительные направления токов в ветвях исходной схемы I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 . Токи ветвей определяются из потенциальных уравнений ветвей через потенциалы узлов $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

6) При необходимости определяются напряжения на отдельных элементах ($U_k = I_k R_k$), мощности источников энергии ($P_{Ek} = E_k I_k$, $P_{Jk} = U_k J_k$) и приемников энергии ($P_k = I_k^2 \cdot R_k$).

25. Методы расчета электрических цепей. Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем метода узловых потенциалов при числе узлов в схеме $n = 2$. Пусть требуется выполнить расчет режима в заданной схеме (рис. 20).

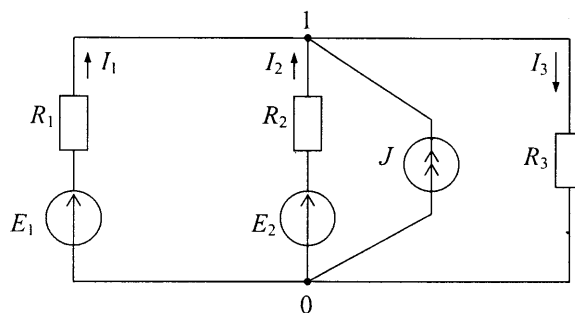


Рис. 20

Принимаем $\varphi_0 = 0$, тогда уравнение для узла 1 по методу узловых потенциалов будет иметь вид: $\varphi_1 G_{11} = J_{11}$, откуда следует непосредственное определение напряжения между узлами схемы:

$$U_{10} = \varphi_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{\sum J + \sum E/R}{\sum 1/R} \quad \text{– уравнение метода двух узлов.}$$

Применительно к схеме рис. 20 данное уравнение примет конкретную форму:

$$U_{10} = \varphi_1 = \frac{J_{11}}{G_{11}} = \frac{J + E_1 / R_1 + E_2 / R_2}{1 / R_1 + 1 / R_2 + 1 / R_3}.$$

Токи в ветвях схемы определяются из потенциальных уравнений:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{10}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{E_2 - U_{10}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{10}}{R_3}.$$