

Физика -1

1. Механическое движение. Материальная точка. Путь. Перемещение.

Механика — часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. Механическое движение — это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Основные законы механики установлены Г. Галилеем и окончательно сформулированы И. Ньютоном. Механика Галилея—Ньютона называется классической механикой. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью c , изучаются релятивистской механикой, основанной на специальной теории относительности, сформулированной А. Эйнштейном.

Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *физические модели*. Простейшей моделью является материальная точка — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки — абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем переходят к изучению движения системы материальных точек.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому телом отсчета. С ним связывается система отсчета — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки A в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами x, y, z или радиусом-вектором r , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются.

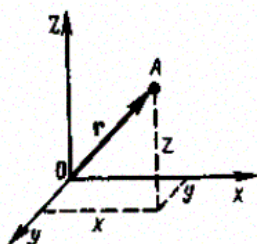
В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями .

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1)(2)$$

Уравнения (1) и соответственно (2) называются кинематическими уравнениями движения материальной точки.



- Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
- Что такое система отсчета?
- Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
- Какое движение называется поступательным? вращательным?

Рис. 1

Исключая t в уравнениях (1) и (2), получим уравнение траектории движения материальной точки. Траектория движения материальной точки — линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рис. 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении A . Длина участка траектории AB , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется длиной пути и является *скалярной функцией* времени: $\Delta s = \Delta s(t)$. Вектор $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется перемещением.

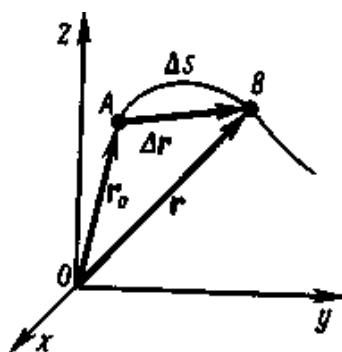


Рис. 2

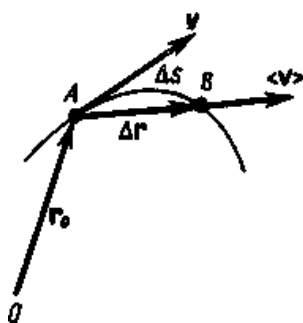
При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta r|$ равен пройденному пути Δs .

2. Прямолинейное равномерное и неравномерное движение

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина — скорость, которой определяется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени t ей соответствует радиус-вектор r_0 (рис. 1). В течение малого промежутка времени Δt точка пройдет путь Δs и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение Δr .

Вектором средней скорости $\langle v \rangle$ называется отношение приращения Δr радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt :



$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t} \quad (1)$$

Рис. 1

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением Δr . При неограниченном уменьшении Δt средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется мгновенной скоростью v :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Мгновенная скорость v , таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая совпадает с касательной, то вектор скорости v направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 1). По мере уменьшения Δt путь Δs все больше будет приближаться к $|\Delta r|$, поэтому модуль

мгновенной скорости

$$v = |v| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta r|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2)$$

производной пути по времени:

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной $\langle v \rangle$ — средней скоростью неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рис. 1 вытекает, что $\langle v \rangle > |\langle v \rangle|$, так как $\Delta s > |\Delta r|$, и только в случае прямолинейного движения $\Delta s = |\Delta r|$.

Если выражение $ds = v dt$ проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt.$$

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является ускорение.

Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Δv к интервалу времени Δt :

Мгновенным ускорением a (ускорением) материальной точки в момент времени t будет предел среднего ускорения:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, ускорение a есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени.

3. Скорость и ускорение в криволинейном движении

Отсюда следует, что вектор ускорения \mathbf{a} лежит в плоскости векторов \mathbf{s} и \mathbf{n} , т. е. в соприкасающейся плоскости; вектор \mathbf{a} не имеет составляющей по бинормали к траектории. В общем случае ускорение \mathbf{a} направлено под углом к траектории. Первое слагаемое в формуле (4.11)

$$\mathbf{a}_t = \frac{dv}{dt} \mathbf{s} \quad (4.12)$$

есть вектор, направленный по касательной к траектории. Этот вектор называется *касательным* или *тангенциальным ускорением*. Второе слагаемое

$$\mathbf{a}_n = \frac{v^2}{r} \mathbf{n} \quad (4.13)$$

есть вектор, направленный вдоль главной нормали в сторону вогнутости траектории. Он называется *нормальным ускорением*. Таким образом, в общем случае ускорение \mathbf{a} можно представить в виде геометрической суммы тангенциального и нормального ускорений:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n. \quad (4.14)$$

Тангенциальное ускорение меняет скорость только по величине, нормальное ускорение меняет ее только по направлению.

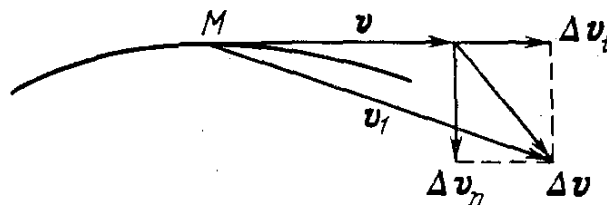


Рис. 11.

Рис. 11 поясняет разложение полного ускорения на тангенциальное и нормальное. Пусть \mathbf{v} — скорость материальной точки в момент времени t , когда она находилась в положении M . Обозначим посредством $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ скорость той же точки в момент $t + \Delta t$, когда она переместилась в положение M_1 (не обозначенное на рисунке). Отложим оба вектора \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 из одной и той же точки M и разложим приращение $\Delta\mathbf{v}$ скорости на две составляющие: составляющую $\Delta\mathbf{v}_t$ вдоль вектора \mathbf{v} и составляющую $\Delta\mathbf{v}_n$, перпендикулярную к этому вектору. При уменьшении Δt оба отношения $\frac{\Delta\mathbf{v}_t}{\Delta t}$ и $\frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t}$ будут стремиться к определенным пределам. Первый из них есть тангенциальное, а второй — нормальное ускорения.

При вычислении скорости точки бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать бесконечно коротким прямолинейным отрезком, направление которого совпадает с направлением касательной к траектории. При определении ускорения такая аппроксимация уже не годится. Однако, как видно из рассуждений настоящего параграфа, при вычислении ускорения бесконечно малую дугу траектории можно аппроксимировать дугой окружности, плоскость которой совпадает с соприкасающейся плоскостью,

4. Кинематика вращательного движения твердого тела

Вращательное движение — вид механического движения при котором все точки тела описывают окружности центры которых лежат на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой осью вращения. Вращательное движение характеризуется такими величинами как угловая скорость, угловое ускорение период и частота вращения.

Угловой скоростью называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т. е. так же, как и вектор $d\vec{\varphi}$ (рис. 2). Размерность угловой скорости $\dim \omega = T^{-1}$, а ее единица — радиан в секунду (рад/с).

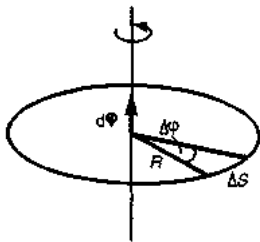


Рис. 1

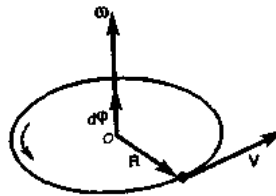


Рис. 2

Линейная скорость точки (см. рис. 1)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т.е

$$v = \omega R.$$

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega} \mathbf{R}].$$

При этом модуль векторного произведения имеет направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к \mathbf{R} .

Если $\omega = \text{const}$, то вращение равномерное и его можно характеризовать периодом вращения T — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π . Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует $\Delta\varphi = 2\pi$, то $\omega = 2\pi/T$, откуда

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется частотой вращения:

$$n = 1/T = \omega/(2\pi),$$

Откуда $\omega = 2\pi n.$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

производной угловой скорости по времени:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, v = \omega R \text{ и}$$

Тангенциальная составляющая ускорения

$$a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлю вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$ (рис. 3), при замедленном — противоположен ему (рис. 4).



Рис. 3,4

Таким образом, связь между линейными (длина пути s , пройденного точкой по дуге окружности радиуса R , линейная скорость v , тангенциальное ускорение a_t , нормальное ускорение a_n) и угловыми величинами (угол поворота φ , угловая скорость ω , угловое ускорение ε) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, \quad v = R\omega, \quad a_t = R\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2 / 2,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость.

5. Первый закон Ньютона. Масса и импульс тела

Первый закон Ньютона: *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.* Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется инертностью. Поэтому первый закон Ньютона называют также законом инерции.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются инерциальными системами отсчета. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий*, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты, обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т. е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

Масса тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (инертная масса) и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей 10 их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т. е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т. е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, сила — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

Векторная величина $P = mv$ численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется импульсом (количеством движения) этой материальной

6. Второй и третий законы Ньютона

Второй закон Ньютона — *основной закон динамики поступательного движения* отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела под действием приложенных к ней сил).

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}). \quad (1)$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно

$$a \sim 1/m \quad (F = \text{const}). \quad (2)$$

Используя выражения (1) и (2) и учитывая, что сила и ускорение —

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F}/m.$$

величины векторные, можем записать

(3)

Соотношение (3) выражает второй закон Ньютона: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с нею по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ
пропорциональности

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m,$$

коэффициент
 $k=1$. Тогда

$$(4) \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (4) ее можно внести под

знак производной:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}). \quad (5)$$

Векторная величина $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ (6)

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется импульсом (количеством движения) этой материальной точки.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \quad (7)$$

Это выражение — более общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (7) называется уравнением движения материальной точки.

Единица силы в СИ — ньютон (Н): 1 Н — сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с² в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (7).

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется третьим законом Ньютона: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21}, \quad (8)$$

где F_{12} — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй; F_{21} — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парам* и являются силами *одной природы*.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

7. Закон сохранения импульса

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется механической системой. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются внутренними. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются внешними. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется замкнутой (или изолированной). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n тел, масса и скорость которых соответственно равны m_1, m_2, \dots, m_n и v_1, v_2, \dots, v_n . Пусть F'_1, F'_2, \dots, F'_n — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а F_1, F_2, \dots, F_n — равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из n тел (механической системы):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v_1) &= F'_1 + F_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2 v_2) &= F'_2 + F_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{d}{dt}(m_n v_n) &= F'_n + F_n. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n + F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему Закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

или
$$\frac{dp}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n. \quad (1)$$

где $p = \sum_{i=1}^n m_i v_i$ — импульс системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = 0, \quad \text{т. е.} \quad p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const.}$$

Последнее выражение и является законом сохранения импульса: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный

характер, т. е. закон сохранения импульса — *фундаментальный закон природы*.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности. Однородность пространства заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

8. Закон всемирного тяготения

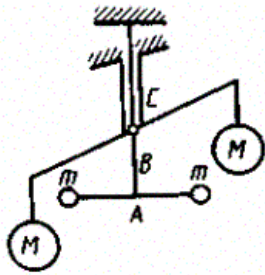
И. Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий закон всемирного тяготения: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек (m_1 и m_2 и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними (r^2):

$$F = Gm_1m_2/r^2. \quad (1)$$

Эта сила называется гравитационной (или силой всемирного тяготения). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности G называется гравитационной постоянной.

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной G проведено английским физиком Г. Кавендишем. Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего крутильные весы, представлена на рис. 1. Легкое коромысло A с двумя одинаковыми шариками массой $m = 729$ г подвешено на упругой нити B . На коромысле C укреплены на той же высоте массивные шары массой $M=158$ кг. Поворачивая коромысло C вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами m и M . Под действием пары сил, приложенных к шарам m со стороны шаров M , коромысло A поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить B до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момента сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по

измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение G



Как определяется гравитационная постоянная и каков ее физический смысл?
 На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?

Рис. 1

Значение G , приводимое в таблицах фундаментальных физических постоянных, принимается равным $6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, т. е. два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой $6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н}$. Очень малая величина G показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

На любое тело, расположенное вблизи поверхности Земли, действует сила тяготения F , под влиянием которой и в согласии со вторым законом Ньютона тело начнет двигаться с ускорением свободного падения g . Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой m действует сила $P = mg$, называемая силой тяжести.

Согласно фундаментальному физическому закону — обобщенному закону Галилея, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от $9,780 \text{ м/с}^2$ на экваторе до $9,832 \text{ м/с}^2$ на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли — с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений g невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным $9,81 \text{ м/с}^2$.

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой

$$P = mg = F = GmM/R^2,$$

где M — масса Земли; R — расстояние между телом и центром Земли. Эта формула дана для случая, когда тело находится на поверхности Земли.

Пусть тело расположено на высоте A от поверхности Земли, R_1 — радиус Земли, тогда

$$P = GmM/(R_0 + h)^2,$$

т. е. сила тяжести с удалением от поверхности Земли уменьшается.

В физике применяется также понятие веса тела. Весом тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от g , т. е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием невесомости.

Таким образом, *сила тяжести действует всегда, а вес проявляется только в том случае, когда на тело кроме силы тяжести действуют еще другие силы*, вследствие чего тело движется с ускорением a , отличным от g . Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением $a \neq g$, то к этому телу приложена дополнительная сила N , удовлетворяющая условию

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}.$$

Тогда вес тела
$$\mathbf{P}' = -\mathbf{N} = \mathbf{P} - m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}).$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то $a = 0$ и $P' = mg$. Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории и в любом направлении, то $a = g$ и $P' = 0$, т. е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые космическими.

Первой космической (или круговой) скоростью v_1 называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник, движущийся по круговой орбите

радиусом r , действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение v^2/r . По второму закону Ньютона,

$$GmM/r^2 = mv^2/r.$$

Если спутник движется вблизи поверхности Земли, тогда $r \approx R_0$ (радиус Земли) и $g = GM/R_0^2$, поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической.

Второй космической (или параболической) скоростью v_2 называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = GmM/R_0,$$

Откуда $v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11,2 \text{ км/с.}$

Третьей космической скоростью v_3 называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость $v_3 = 16,7 \text{ км/с.}$ Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Ее первое теоретическое осмысление начато К. Э. Циолковским.

9. Работа и мощность

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие работы силы.

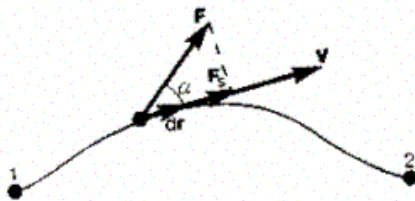
Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила F , которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы F , на направление перемещения ($F_s = F \cos \alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F s \cos \alpha. \quad (1)$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение dr , то силу F можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. Элементарной работой силы F на перемещении dr называется *скалярная* величина

$$dA = F dr = F \cos \alpha ds = F_s ds,$$

где α — угол между векторами F и dr ; $ds = |dr|$ — элементарный путь; F_s — проекция вектора F на вектор dr (рис. 1).



- В чем различие между понятиями энергии и работы?
- Как найти работу переменной силы?

Рис. 1

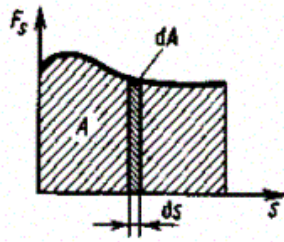
Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (2)$$

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы F_s от пути t вдоль траектории 1—2. Пусть эта зависимость представлена графически (рис. 2), тогда искомая работа A определяется на графике площадью заштрихованной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила $F = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F s \cos \alpha,$$

где s — пройденный телом путь.



- Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
- Что такое мощность? Выведите ее формулу.

Рис. 2

Из формулы (1) следует, что при $\alpha < \pi/2$ работа силы положительна, в этом случае составляющая F , совпадает по направлению с вектором скорости движения v (см. рис. 2). Если $\alpha > \pi/2$, то работа силы отрицательна. При $\alpha = \pi/2$ (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы — джоуль (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж=1 Н·м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие

мощности:

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad (3)$$

За время dt сила F совершает работу Fdr , и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{Fdr}{dt} = Fv,$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы; N — величина *скалярная*.

Единица мощности — ватт (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт=1 Дж/с).

10. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия. Полная механическая энергия системы

В механике различают два вида энергии: кинетическую и потенциальную. Кинетической энергией называют механическую энергию всякого свободно движущегося тела и измеряют ее той работой, которую могло бы совершить тело при его торможении до полной остановки.

Кинетическая энергия механической системы — это энергия механического движения этой системы.

Сила F , действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа dA силы F на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до v , идет на увеличение кинетической энергии dT тела, т. е.

$$dA = dT.$$

Работа силы (или равнодействующей сил) равна изменению кинетической энергии тела. Это утверждение называется теоремой о кинетической энергии.

Используя второй закон Ньютона $F=ma$ — и умножая на перемещение

$$F dr = m \frac{dv}{dt} dr = dA.$$

dr , получаем

Так как $v = \frac{dr}{dt}$, то $dA = m v dv = mv dv = dT$, откуда

$$T = \int_0^v m v dv = mv^2/2.$$

Таким образом, тело массой m , движущееся со скоростью v , обладает кинетической энергией $T = mv^2/2$. (1)

Из формулы (1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

Потенциальная энергия — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами

при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются потенциальными, а силы, действующие в них, — консервативными. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется диссипативной; ее примером является сила трения.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией Π . Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении кон конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = - d\Pi. \quad (2)$$

Работа dA выражается как скалярное произведение силы F на перемещение dr и выражение (2) можно записать в виде

$$Fdr = - d\Pi. \quad (3)$$

Следовательно, если известна функция $\Pi(r)$, то из формулы (3) можно найти силу F по модулю и направлению.

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (3) как

$$\Pi = - \int Fdr + C,$$

где C — постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной.

Конкретный вид функции Π зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh, \quad (7)$$

где высота H отсчитывается от нулевого уровня, для которого $\Pi_0=0$. Выражение (7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты h на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина h'), $\Pi = -mgh'$.

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

Полная механическая энергия системы — энергия механического движения и взаимодействия: $E = T + \Pi$, т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

11. Динамика вращательного движения

Если твердое тело движется так, что две его точки остаются неподвижными, то такое движение тела называется вращательным движением вокруг неподвижной оси. При изучении вращения твердых тел будем пользоваться понятием момента инерции. Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до

рассматриваемой оси :

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $J = \int r^2 dm$, где интегрирование производится по всему объему тела.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется теоремой Штейнера: момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_c + ma^2. \quad (1)$$

Моментом силы F относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора r , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу F (рис. 3): $M = [rF]$.

Здесь M — *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от r к F .

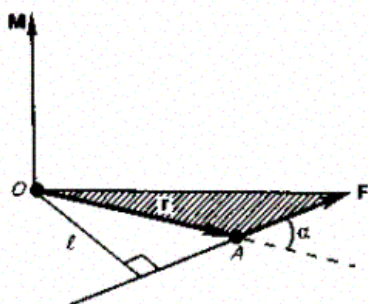


Рис. 3.

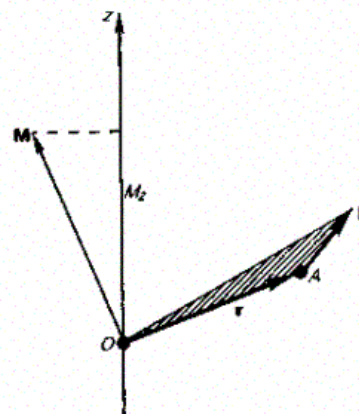


Рис. 4

Модуль момента силы $M = Fr \sin \alpha = Fl$, (4)

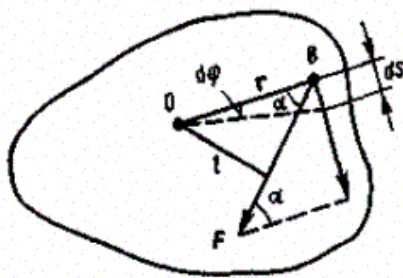
где α — угол между r и F ; $r \cdot \sin \alpha = l$ — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O — плечо силы.

Моментом силы относительно неподвижной оси z называется *скалярная* величина M_z , равная проекции на эту ось вектора M момента силы, определенного относительно произвольной точки O данной оси z (рис. 4). Значение момента M_z не зависит от выбора положения точки O на оси z .

Если ось z совпадает с направлением вектора M , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью: $M_z = [rF]_z$.

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 5). Пусть сила F приложена в точке B , находящейся от оси z на расстоянии r , α — угол между направлением силы и радиусом-вектором r . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения B проходит путь $ds = r d\varphi$ и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi.$$



- Что называется моментом силы относительно неподвижной точки? относительно неподвижной оси? Как определяется направление момента силы?
- Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Рис. 5

Учитывая (4), можем записать $dA = M_z d\varphi,$ (5)

где $F r \sin \alpha = F l = M_z$ — момент силы относительно оси z . Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота. Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии: $dA = dT$, но $dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega$,

поэтому $M_z d\varphi = J_z \omega d\omega$, или $M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}$.

Учитывая, что $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, получаем

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (6)$$

Уравнение (6) представляет собой уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси.

Можно показать, что если ось z совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\mathbf{M} = J \vec{\varepsilon}, \quad (7)$$

где J — главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

12. Момент импульса и закон его сохранения

Моментом импульса (количества движения) материальной точки A относительно неподвижной точки O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}],$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A ; $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ — импульс материальной точки (рис. 1); \mathbf{L} — *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \mathbf{r} к \mathbf{p} . Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl,$$

где α — угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{p} , l — плечо вектора \mathbf{p} относительно точки O .



- Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
- В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

Рис. 1

Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки O данной оси. Момент импульса L , не зависит от положения точки O на оси z .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси z каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса r_i с некоторой скоростью v_i . Скорость v_i и импульс $m_i v_i$ перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора $m_i v_i$. Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен $L_{iz} = m_i v_i r_i$ (1) и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

Момент импульса твердого тела относительно оси есть сумма

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i$$

моментов импульса отдельных частиц:

Используя формулу (1) $v_i = \omega r_i$, получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

т. е.

$$L_z = J_z \omega. \quad (2)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость. Продифференцируем уравнение (2) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т. е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это выражение — еще одна форма уравнения динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси. Можно показать, что имеет место

векторное равенство $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$ (3)

В замкнутой системе момент внешних сил $M=0$ и $\frac{dL}{dt} = 0,$

откуда $\mathbf{L} = \text{const}.$ (4)

Выражение (4) представляет собой закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства — его *изотропностью*, т. е. с инвариантностью физических законов относительно

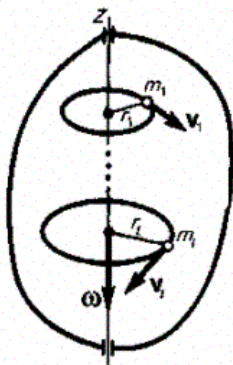
выбора направления осей координат системы от счета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

13. Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело, вращающееся около неподвижной оси z , проходящей через него (рис. 2). Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами m_1, m_2, \dots, m_n , находящиеся на расстоянии r_1, r_2, \dots, r_n от оси.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами m_i опишут окружности различных радиусов r_i и имеют различные линейные скорости v_i . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения

этих объемов одинакова:

$$\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = \dots = v_n/r_n \quad (2)$$


- Выведите формулу для момента инерции обруча.
- Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
- Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

Рис. 2

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{кр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}, \quad \text{или} \quad T_{\text{кр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя выражение (2), получаем

$$T_{\text{кр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси z . Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{\text{вр}} = J_z \omega^2 / 2. \quad (3)$$

Из сравнения формулы (3) с выражением для кинетической энергии тела, движущегося поступательно ($E_k = mv^2/2$), следует, что момент инерции — *мера инертности тела* при вращательном движении. Формула (3) справедлива для тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где m — масса катящегося тела; v_c — скорость центра масс тела; J_c — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

14. Механические колебания и волны

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебания называются свободными (или собственными), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются гармонические колебания — колебания, при которых колеблющаяся величина s изменяется со временем по закону синуса (косинуса) и описываются уравнением типа

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

где A — максимальное значение колеблющейся величины, называемое амплитудой колебания, ω_0 — круговая (циклическая) частота, φ — начальная фаза колебания в момент времени $t = 0$, $(\omega_0 t + \varphi)$ — фаза колебания в момент времени t . Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то s может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия, принятого за

начало координат. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, аналогичным уравнению (1), где $s = x$:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (2)$$

скорость v и ускорение a колеблющейся точки соответственно равны

$$\begin{aligned} v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2); \\ a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \end{aligned} \quad (3)$$

Сила $F = ma$, действующая на колеблющуюся материальную точку массой m , равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi),$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (4) \quad (5)$$

Потенциальная энергии материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F , равна

$$П = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

или

$$П = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (6) \quad (7)$$

Сложив (5) и (7), получим формулу для полной энергии:

$$E = T + П = mA^2\omega_0^2/2. \quad (8)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

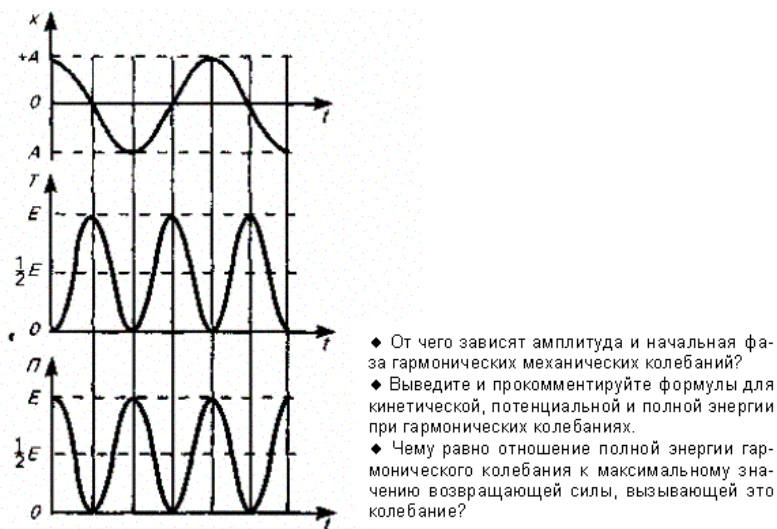


Рис. 1

Если колебательная система одновременно участвует в двух (или более) независимых колебательных движениях, возникает задача - найти результирующее колебание. В случае однонаправленных колебаний под этим понимается нахождение уравнения результирующего колебания; в случае взаимно перпендикулярных колебаний - нахождение траектории результирующего колебания.

Вид траектории при сложении взаимно перпендикулярных колебаний зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний. Получающиеся кривые носят название фигур Лиссажу.

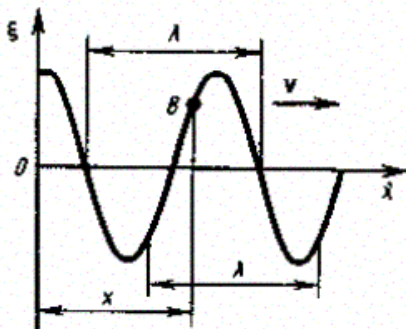
Затухающими называются колебания, энергия и амплитуда которых уменьшается с течением времени. Затухание свободных механических колебаний связано с убыванием механической энергии за счет действия сил сопротивления и трения.

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется волновым процессом (или волной). При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.*

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяются следующие их типы: волны на поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны. Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные. В продольных волнах частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в поперечных — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*, т. е. твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы *при деформации сдвига*, т. е. в твердых телах; *в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.*

Упругая волна называется гармонической, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 3 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью v вдоль



оси x .

- Как объяснить распространение колебаний в упругой среде? Что такое волна?
- Что называется поперечной волной? продольной? Когда они возникают?
- Что такое волновой фронт? волновая поверхность?
- Что называется длиной волны? Какова связь между длиной волны, скоростью и периодом?

Рис. 3

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется длиной волны (рис. 3). Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период, т. е.

$$\lambda = vT,$$

или, учитывая, что $T = 1/\nu$, где ν — частота колебаний,

$$v = \lambda\nu.$$

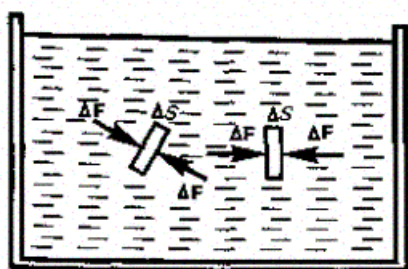
Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси x , а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т. е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства. Геометрическое место точек, до которых доходят

колебания к моменту времени t , называется волновым фронтом. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется волновой поверхностью. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно волна называется плоской или сферической.

15. Движение жидкостей. Уравнение Бернулли

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как сплошные, непрерывно распределенные в занятой ими части пространства. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием несжимаемой жидкости — жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент ΔS с силами ΔF , которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке ΔS , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (рис. 1).



- Что такое давление в жидкости? Давление — величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?
- Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
- Что называют линией тока? трубкой тока?

Рис. 1

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется давлением p

жидкости:
$$p = \Delta F / \Delta S.$$
 Единица давления — паскаль (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью 1 м² (1 Па=1 Н/м²).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется закону Паскаля*: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $P = \rho g S h$, а давление на нижнее основание

$$p = P/S = \rho g S h / S = \rho g h, \quad (1)$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой. Давление $\rho g h$ называется гидростатическим давлением.

Согласно формуле (1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая законом Архимеда: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V,$$

где ρ — плотность жидкости, V — объем погруженного в жидкость тела.

Движение жидкостей называется течением, а совокупность частиц движущейся жидкости — потоком. Графически движение жидкостей изображается с помощью линий тока, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 2). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость

течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.



Рис. 2

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют трубкой тока. Течение жидкости называется установившимся (или стационарным), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения S_1 и S_2 , перпендикулярные направлению скорости (рис. 3).

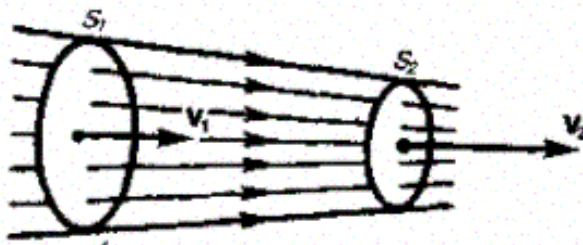


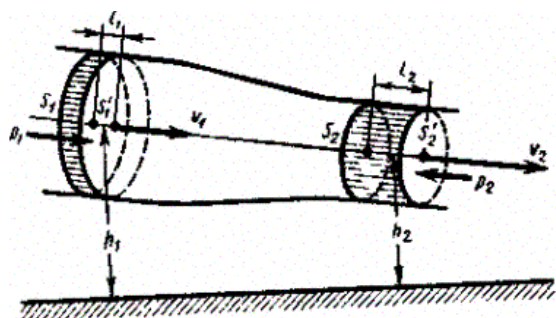
Рис. 3

За время Δt через сечение S проходит объем жидкости $Sv\Delta t$; следовательно, за 1 с через S_1 пройдет объем жидкости S_1v_1 , где v_1 — скорость течения жидкости в месте сечения S_1 . Через сечение S_2 за 1 с пройдет объем жидкости S_2v_2 , где v_2 — скорость течения жидкости в месте сечения S_2 . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), то через сечение S_2 пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение S_1 , т. е.

$$S_1v_1 = S_2v_2 = \text{const.} \quad (2)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (2) называется уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости.

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (*физическая абстракция*, т. е. воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2 , по которой слева направо течет жидкость (рис. 4). Пусть в месте сечения S_1 скорость течения v_1 , давление p_1 и высота, на которой это сечение расположено, h_1 . Аналогично, в месте сечения S_2 скорость течения v_2 , давление p_2 и высота сечения h_2 . За малый промежуток времени Δt жидкость перемещается от сечения S_1 к сечению S'_1 , от S_2 к S'_2 .



- Что характерно для установившегося течения жидкости?
- Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
- Выведите уравнение Бернулли

Рис. 4

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии $E_2 - E_1$ идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе A внешних сил по перемещению массы m жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (4)$$

где E_1 и E_2 — полные энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 соответственно.

С другой стороны, A — это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями S_1 и S_2 , за рассматриваемый малый промежуток времени Δt . Для перенесения массы m от S_1 до S_2 жидкость должна переместиться на расстояние $l_1 = v_1 \Delta t$ и от S_2 до S_2 — на расстояние $l_2 = v_2 \Delta t$. Отметим, что l_1 и l_2 настолько малы, что всем точкам объемов, закрасенных на рис. 4, приписывают постоянные значения скорости v , давления p и высоты h . Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (5)$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = -p_2 S_2$ (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рис. 4).

Полные энергии E_1 и E_2 будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы m жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (6)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (7)$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (8)$$

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (8) на ΔV , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho gh_2 + p_2,$$

где ρ — плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}. \quad (9)$$

Выражение (9) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли и называется уравнением Бернулли. Величина p в формуле (9) называется статическим давлением (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина $\rho v^2/2$ — динамическим давлением. Как уже указывалось выше, величина ρgh представляет собой гидростатическое давление.

Для горизонтальной трубки тока ($h_1 = h_2$ выражение (9) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad (10)$$

где $p + \rho v^2/2$ называется полным давлением.

Из уравнения Бернулли (10) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито — Прандтля (рис. 5).

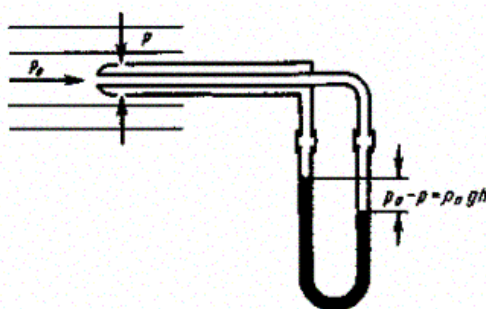


Рис. 5

16. Основные положения молекулярно-кинетической теории.

Основное уравнение МКТ. Уравнение состояния идеального газа

В молекулярно-кинетической теории пользуются *идеализированной моделью* идеального газа, согласно которой считают, что:

- 1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

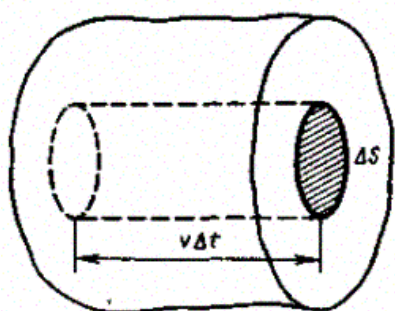
Рассмотрим основные положения молекулярно-кинетической теории (МКТ).

I. Все вещества состоят из мельчайших частиц -молекул и атомов, которые, в свою очередь, состоят из более мелких элементарных частиц. Доказательство - наблюдение больших белковых молекул в электронных микроскопах.

II. Молекулы и атомы находятся в непрерывном хаотическом движении. Доказательства: броуновское движение; диффузия; осмос

III. Между молекулами и атомами существуют силы притяжения и отталкивания. При сближении двух атомов или молекул сначала преобладают силы притяжения (до равновесного значения), затем - силы отталкивания.

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку ΔS (рис. 1) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс $m_0v - (-m_0v) = 2m_0v$, где m_0 — масса молекулы, v — ее скорость. За время Δt площадки ΔS достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием ΔS и высотой $v\Delta t$ (рис. 1). Число этих молекул равно $n\Delta S v\Delta t$ (n — концентрация молекул).



- В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?
- В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?

Рис. 1

Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке ΔS под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль

каждого из них движется $1/3$ молекул, причем половина молекул - $1/6$ - движется вдоль данного направления в одну сторону, половина — в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку ΔS будет

$1/6 n \Delta S v \Delta t$. При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot 1/6 n \Delta S v \Delta t = 1/3 n m_0 v^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p = \Delta P / (\Delta t \Delta S) = 1/3 n m_0 v^2. \quad (1)$$

Если газ в объеме V содержит N молекул, движущихся со скоростями v_1, v_2, \dots, v_N , то целесообразно рассматривать среднюю квадратичную скорость

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (2)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа. Уравнение (1) с учетом (2) примет вид

$$p = 1/3 n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (3)$$

Выражение (3) называется основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов. Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

$$pV = 1/3 N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

или

$$pV = 2/3 N \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = 2/3 E, \quad (4) \quad (5)$$

Учитывая, что $n = N/V$, получим

где E — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа $m = N m_0$, то уравнение (4) можно переписать в виде

$$pV = 1/3 m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Для одного моля газа $m = M$ (M — молярная масса), поэтому

$$pV_m = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{ср}} \rangle^2,$$

где V_m — молярный объем. С другой стороны, по уравнению

$$RT = \frac{1}{3} M \langle v_{\text{ср}} \rangle^2,$$

Клапейрона — Менделеева, $pV_m = RT$. Таким образом,

откуда

$$\langle v_{\text{ср}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (6)$$

Так как $M = m_0 N_A$ — масса одной молекулы, а N_A — постоянная Авогадро, то из уравнения (6) следует, что

$$\langle v_{\text{ср}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (7)$$

где $k = R/N_A$ — постоянная Больцмана. Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \epsilon_0 \rangle = E/N = m_0 \langle v_{\text{ср}} \rangle^2 / 2 = \frac{3}{2} kT \quad (8)$$

(использовали формулы (5) и (7)) пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. Из этого уравнения следует, что при $T=0$ $\langle \epsilon_0 \rangle = 0$, т. е. при 0 К прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю.

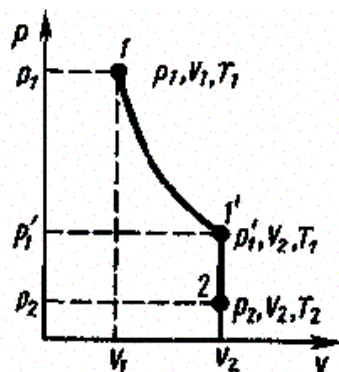
Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением p , объемом V и температурой T . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая уравнением состояния, которое в общем виде дается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

Б. Клапейрон вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Пусть некоторая масса газа занимает объем V_1 , имеет давление p_1 и находится при температуре T_1 . Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами p_2 , V_2 , T_2 (рис. 63). Переход из состояния 1 в состояние 2

осуществляется в виде двух процессов: 1) изотермического (изотерма 1 — 1', 2) изохорного (изохора 1' - 2).



- Какими законами описываются изобарные и изохорные процессы?
- Каков физический смысл постоянной Авогадро? числа Лошмидта?
- При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?

Рис. 1

В соответствии с законами Бойля — Мариотта и Гей-Люссака запишем:

$$p_1 V_1 = p_1' V_2,$$

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}.$$

(1) (2)

Исключив из уравнений (1) и (2) p_1' , получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина pV/T остается постоянной, т. е. $pV/T = B = \text{const.}$ (3)

Выражение (3) является уравнением Клапейрона, в котором B — газовая постоянная, различная для разных газов.

Русский ученый Д. И. Менделеев объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (3) к одному молю, используя молярный объем V_m . Согласно закону Авогадро, при одинаковых p и T моли всех газов занимают одинаковый молярный объем V_m , поэтому постоянная B будет одинаковой для всех газов. Эта общая для всех газов постоянная обозначается R и называется молярной газовой постоянной. Уравнению

$$pV_m = RT \tag{4}$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является уравнением состояния идеального газа, называемым также уравнением Клапейрона — Менделеева.

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы (4), полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ($p_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273,15$ К, $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$ м³/моль): $R = 8,31$ Дж/(моль·К).

От уравнения (4) для моля газа можно перейти к уравнению Клапейрона — Менделеева для произвольной массы газа. Если при некоторых заданных давлении и температуре один моль газа занимает молярный объем V_m , то при тех же условиях масса m газа займет объем $V = (m/M) \cdot V_m$, где M — молярная масса (масса одного моля вещества). Единица молярной массы — килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона — Менделеева для массы m газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (5)$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества.

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя постоянную Больцмана:

$$k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Исходя из этого уравнение состояния (4) запишем в виде

$$p = RT/V_m = kN_A T/V_m = nkT,$$

где $N_A/V_m = n$ — концентрация молекул (число молекул в единице объема). Таким образом, из уравнения

$$p = nkT \quad (6)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в 1 м³ газа при нормальных условиях, называется числом Лошмндта*:

$$N_L = p_0/(kT_0) = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

17. Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь l , который называется длиной свободного пробега. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о средней длине свободного пробега молекул $\langle l \rangle$.

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы d (рис. 1). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости $\langle v \rangle$, и если $\langle z \rangle$ — среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

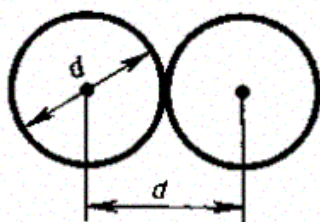
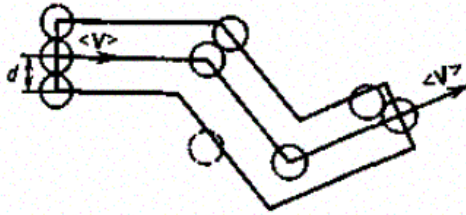
$$\langle l \rangle = \langle v \rangle / \langle z \rangle.$$


Рис. 1

Для определения $\langle z \rangle$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром d , которая движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d , т. е. лежат внутри «ломаного»

цилиндра радиусом d (рис. 2).



- В чем суть распределения Больцмана?
- Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
- Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?

Рис. 2

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$\langle z \rangle = nV,$$

где n — концентрация молекул, $V = nd^2 \langle v \rangle$ ($\langle v \rangle$ — средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с). Таким образом, среднее число столкновений

$$\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle = 1/(\sqrt{2} \pi d^2 n)$,

т. е. $\langle l \rangle$ обратно пропорциональна концентрации n молекул. С другой стороны, из уравнения $p = nkT$ следует, что при постоянной температуре n

пропорциональна давлению p . Следовательно,

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

18. Явления переноса в газах: диффузия, теплопроводность, внутреннее трение

В термодинамически неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые явлениями переноса, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся теплопроводность (обусловлена *переносом энергии*), диффузия (обусловлена *переносом массы*) и внутреннее трение (обусловлено *переносом импульса*). Для простоты ограничимся *одномерными*

явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось x была ориентирована в направлении переноса.

1. Теплопроводность. Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т. е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется закону Фурье:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (1)$$

где j_E — плотность теплового потока — величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x , λ — теплопроводность, $\frac{dT}{dx}$ — градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины x в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки j_E и $\frac{dT}{dx}$ — противоположны).

Теплопроводность λ численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице. Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (2)$$

где c_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме), ρ — плотность газа, $\langle v \rangle$ — средняя скорость теплового движения молекул, $\langle l \rangle$ — средняя длина свободного пробега.

2. Диффузия. Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах

распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется закону Фика:

$$j_m = -D \frac{dp}{dx}, \quad (3)$$

где J_m — плотность потока массы — величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси x , D — диффузия (коэффициент диффузии), dp/dx — градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины x в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки j_m и dp/dx противоположны). Диффузия D численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (4)$$

3. Внутреннее трение (вязкость). Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее — увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости)

подчиняется закону Ньютона:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (5)$$

где η — динамическая вязкость (вязкость), dv/dx — градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении x , перпендикулярном направлению движения слоев, S — площадь, на которую действует сила F .

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу

времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда

$$\text{выражение (5) можно пред ставить в виде } j_p = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (6)$$

где j_p — плотность потока импульса — величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси x через единичную площадку, перпендикулярную оси x , $\frac{dv}{dx}$ — градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости (поэтому знаки j_m и dp/dx — противоположны).

Динамическая вязкость η численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице; она вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (7)$$

Из сопоставления формул, описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Эти законы были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов A , D и f_j . Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное — не имеет смысла. Формулы (2), (4) и (7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между λ ,

$$\eta = \rho D, \\ \lambda / (\eta c_v) = 1.$$

D и η :

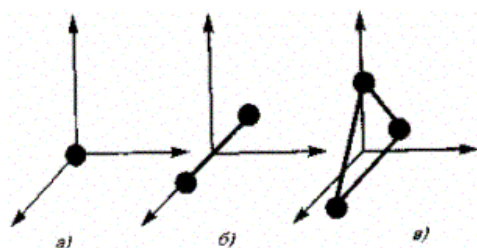
Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

19. Степень свободы молекул и внутренняя энергия системы

Важной характеристикой термодинамической системы является ее внутренняя энергия U — энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия — *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т. е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.

Число степеней свободы: это число независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис. 1, а) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ($r \rightarrow 0, J = mr^2 \rightarrow 0, T_{вр} = J\omega^2 \rightarrow 0$).



- В чем суть закона Больцмана о равнораспределении энергии по степеням свободы молекул?
- Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?

Рис.1

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис. 1, б). Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба атома) лишено смысла. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ($\nu=5$). Трехатомная (рис. 1, в) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Естественно, что жесткой связи между

атомами не существует. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная $1/3$ значения :

$$\langle \epsilon_1 \rangle = \frac{\langle \epsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная $kT/2$, а на каждую колебательную степень свободы — в среднем энергия, равная kT . Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

образом, средняя энергия молекулы где i — сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$$

степеней свободы молекулы:

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них i совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия, отнесенная к одному молу газа, будет равна сумме кинетических

энергий N молекул:
$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT. \quad (1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы m газа

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где M — молярная масса, ν — количество вещества.

20.Количество теплоты. Работа газа при изменении его объема. Теплоемкость

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 1). Если газ, расширяясь, перемещает поршень на бесконечно малое расстояние dl , то производит над ним работу $\delta A = Fdl = pSdl = p dV$,

где S — площадь поршня, $Sdl = dV$ — изменение объема системы. Таким образом, $\delta A = p dV$. (1)

Полную работу A , совершаемую газом при изменении его объема от V_1 до V_2 , найдем интегрированием формулы (1): $A = \int_{V_1}^{V_2} p dV$. (2)

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (2) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах p, V . Пусть изменение давления газа при его расширении изображается кривой на рис. 1. При увеличении объема на dV совершаемая газом работа равна $p dV$, т. е. определяется площадью полоски с основанием dV , заштрихованной на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до объема V_2 , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой $p=f(V)$ и прямыми V_1 и V_2 .

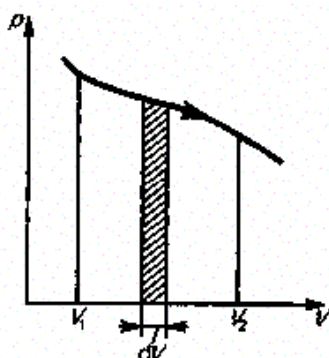


Рис. 1

Графически можно изображать только равновесные процессы — процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. *Все реальные процессы неравновесны* (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

Удельная теплоемкость вещества — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Единица удельной теплоемкости — джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг·К)).

Молярная теплоемкость — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (1)$$

где $\nu = m/M$ — количество вещества.

Единица молярной теплоемкости — джоуль на моль·кельвин (Дж/(моль·К)).

Удельная теплоемкость c связана с молярной C_m соотношением

$$C_m = cM, \quad (2)$$

где M — молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

Запишем выражение первого начала термодинамики для 1 моль газа:

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (3)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его

внутренней энергии:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}, \quad (4)$$

т. е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме C_V равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (1), $dU_m = \frac{i}{2} R dT$, тогда $C_V = iR/2$. (5)

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (3)

можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_m}{dT}.$$

Учитывая, что $\frac{dU_m}{dT}$ не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от p , ни от V , а определяется лишь температурой T) и всегда равна C_V и дифференцируя уравнение Клапейрона — Менделеева $pV_m = RT$ по T ($p = \text{const}$), получаем $C_p = C_V + R$. (6)

Выражение (6) называется уравнением Майера; оно показывает, что C_p всегда больше C_V на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа *при постоянном давлении* требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используя (5), выражение (6) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (7)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение C_p к C_V :

$$\gamma = C_p/C_V = (i+2)/i. \quad (8)$$

Из формул (5) и (7) следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры.

21. Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия системы может изменяться в результате различных процессов, например совершения над системой работы или сообщения ей теплоты. Так, вдвигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т. е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно увеличить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты — энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с разными температурами).

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения, и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией U_1 получила некоторое количество теплоты Q и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией U_2 , совершила работу A над внешней средой, т. е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа — положительной, когда система совершает ее против внешних сил. Опыт показывает, что в соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии $\Delta U = U_2 - U_1$ будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты Q , полученным системой, и работой A , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A,$$

или

$$Q = \Delta U + A. \quad (1)$$

Уравнение (1) выражает первое начало термодинамики: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил. Выражение (1) в дифференциальной форме будет иметь вид

$$dQ = dU + dA,$$

или в более

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (2)$$

где dU — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы, δA — элементарная работа, δQ — бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении dU является полным дифференциалом, а δA и δQ таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (2).

Из формулы (1) следует, что в СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии $\Delta U = 0$. Тогда, согласно первому началу

термодинамики, $A = Q$, т. е. вечный двигатель первого рода — периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, — невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

22. Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются изопроцессы, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

Изохорный процесс ($V = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (изохора) в координатах p, K изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 1), где процесс 1—2 есть изохорное нагревание, а 1—3 — изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т. е. $\delta A = p dV = 0$.

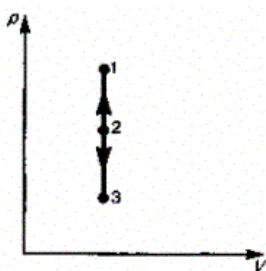


Рис. 1

Из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение

$$\delta Q = dU.$$

его внутренней энергии: $dU_m = C_V dT$.

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (1)$$

Изобарный процесс ($p = \text{const}$). Диаграмма этого процесса (изобара) в координатах p, V изображается прямой, параллельной оси V . При изобарном процессе работа газа при увеличении объема от V_1 до V_2 равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (2)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника (рис. 2).

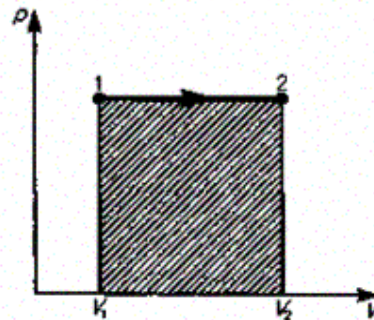


Рис. 2

Если использовать уравнение Клапейрона — Менделеева для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Тогда выражение (2) для работы изобарного расширения примет вид

$$(3)$$

Из этого выражения вытекает *физический смысл молярной газовой постоянной R*: если $(T_2 - T_1 = 1 \text{ К})$, то для 1 моль газа $R=A$, т. е. R численно

равна работе изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой m количества теплоты $\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT$ его внутренняя энергия возрастает на величину

$$dU = \frac{m}{M} C_v dT.$$

При этом газ совершит работу, определяемую выражением (3). Изотермический процесс ($T = \text{const}$). Изотермический процесс описывается законом Бойля—Мариотта:

$$pV = \text{const}.$$

Диаграмма этого процесса (изотерма) в координатах p, V представляет собой гиперболу, расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

Исходя из выражения (2) найдем работу изотермического расширения

газа:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m}{M} RT \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Так как при $T = \text{const}$ внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_v dT = 0,$$

то из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) следует, что для изотермического процесса $\delta Q = \delta A$, т. е. все количество теплоты, сообщаемое газу, расходуется на совершение им работы против внешних сил:

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4)$$

Следовательно, для того чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

23. Адиабатический процесс. Уравнение Пуассона

Адиабатическим называется процесс, при котором отсутствует теплообмен между системой и окружающей средой. К адиабатическим процессам можно отнести все быстропротекающие процессы. Например, адиабатическим процессом можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатические процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т. д. Из первого начала термодинамики ($\delta Q = dU + \delta A$) для адиабатического процесса следует, что $\delta A = -dU$, (1)

т. е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Для произвольной массы газа перепишем уравнение (1) в виде

$$p dV = - \frac{m}{M} C_v dT. \quad (2)$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа

$$pV = \frac{m}{M} RT_v, \text{ получим} \quad p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (3)$$

Исключим из (2) и (3) температуру T :

$$\frac{p dV + V dp}{p dV} = - \frac{R}{C_v} = - \frac{C_p - C_v}{C_v}$$

Разделив переменные и учитывая, что $C_p/C_v = \gamma$, найдем

$$dp/p = -\gamma dV/V$$

Интегрируя это уравнение в пределах от p_1 до p_2 и соответственно от V_1 до V_2 , а затем потенцируя, придем к выражению

$$p_2/p_1 = (V_1/V_2)^\gamma, \text{ или } p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так как состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (4)$$

Полученное выражение есть уравнение адиабатического процесса, называемое также уравнением Пуассона.

Для перехода к переменным T , V или p , T исключим из (4) с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

соответственно давление или объем:

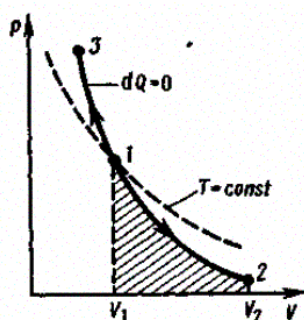
$$\begin{aligned} TV^{\gamma-1} &= \text{const}, \\ T^\gamma p^{1-\gamma} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (5) \quad (6)$$

Выражения (4) — (6) представляют собой уравнения адиабатического процесса. В этих уравнениях безразмерная величина

$$\gamma = C_p/C_v = c_p/c_v = (i+2)/i \quad (7)$$

называется показателем адиабаты (или коэффициентом Пуассона). Для одноатомных газов .

Диаграмма адиабатического процесса (адиабата) в координатах p , V изображается гиперболой (рис. 1). На рисунке видно, что адиабата ($pV^\gamma = \text{const}$) более крута, чем изотерма ($pV = \text{const}$). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии 1—3 увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.



- Почему адиабата более крута, чем изотерма?
- Как изменится температура газа при его адиабатическом сжатии?
- Показатель политропы $n > 1$. Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?

Рис. 1

24. Второе начало термодинамики. Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются. Появление второго начала термодинамики связано с необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса, второе начало термодинамики можно сформулировать как закон возрастания энтропии замкнутой системы при необратимых процессах: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.* Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться ПОСТОЯННОЕ). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Формула Больцмана позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии* означает переход системы из *менее вероятных в более вероятные* состояния. Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Оно, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

1) по Кельвину: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;*

2) по Клаузиусу: *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.*

Можно довольно просто доказать (предоставим это читателю) эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса. Кроме того, показано, что если в замкнутой системе провести воображаемый процесс, противоречащий второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, то он сопровождается уменьшением энтропии. Это же доказывает эквивалентность формулировки Клаузиуса (а следовательно, и Кельвина) и статистической формулировки, согласно которой энтропия замкнутой системы не может убывать.

Первые два начала термодинамики дают недостаточно сведений о поведении термодинамических систем при нуле Кельвина. Они дополняются третьим началом термодинамики, или теоремой Нернста* — Планка: *энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере*

приближения температуры к нулю Кельвина: $\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$

Так как энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то эту постоянную удобно взять равной нулю. Отметим, однако, что это произвольное допущение, поскольку энтропия по своей *сущности* всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной. Из теоремы Нернста — Планка следует, что теплоемкости C_p и C_v при 0 К равны нулю.

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что вечный двигатель второго рода — периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, — невозможен.

Основываясь на втором начале термодинамики, Карно вывел теорему, носящую теперь его имя: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), наибольшим к. п. д. обладают обратимые машины; при этом к. п. д. обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей (T_1) и холодильников (T_2), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

Круговым процессом (или циклом) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рис. 1). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения (1—2) и сжатия (2—1) газа. Работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за цикл совершается положительная работа $A = \oint p dV > 0$ (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется прямым (рис. 1, а), если за цикл совершается отрицательная работа $A = \oint p dV < 0$ (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется обратным (рис. 1, б). Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* — периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* — периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

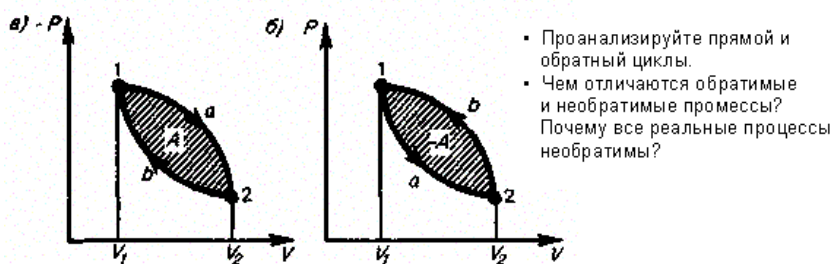


Рис. 1

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики для кругового процесса

$$Q = \Delta U + A = A, \quad (1)$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q = Q_1 - Q_2,$$

где Q_1 — количество теплоты, полученное системой, Q_2 — количество теплоты, отданное системой. Поэтому термический коэффициент полезного действия для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2)$$

Термодинамический процесс называется обратимым, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является необратимым.

Любой равновесный процесс является обратимым. *Обратимые процессы* — это идеализация реальных процессов. Карно теоретически проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Его называют циклом Карно.

25. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Изотермы Ван-дер-Ваальса

Модель идеального газа, используемая в молекулярно-кинетической теории газов, позволяет описывать поведение разреженных реальных газов при достаточно высоких температурах и низких давлениях. При выводе уравнения состояния идеального газа размерами молекул и их взаимодействием друг с другом пренебрегают. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать объем молекул и взаимодействие между ними.

Как уже указывалось, для реальных газов необходимо учитывать размеры молекул и их взаимодействие друг с другом, поэтому модель идеального газа и уравнение Клапейрона — Менделеева $pV_m = RT$ (для моля газа), описывающее идеальный газ, для реальных газов непригодны.

Учитывая собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия, голландский физик И. Ван-дер-Ваальс (1837—1923) вывел уравнение состояния реального газа. Ван-дер-Ваальсом в уравнение Клапейрона — Менделеева введены две поправки.

1. Учет собственного объема молекул. Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не V_m , а $V_m - b$, где b — объем, занимаемый самими молекулами.

Объем b равен *четверенному собственному объему молекул*. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру фугой молекулы на расстояние, меньшее диаметра d молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса d , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы или четверенному объему молекулы в рас чете на одну молекулу.

2. Учет притяжения молекул. Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема, т. е.

$$p' = a/V_m^2, \quad (1)$$

где a — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения, V_m — молярный объем.

Вводя эти поправки, получим уравнение Ван-дер-Ваальса *для моля газа* (уравнение состояния реальных газов):

$$(p + a/V_m^2)(V_m - b) = RT. \quad (2)$$

Для произвольного количества вещества ν газа ($\nu = m/M$) с учетом того, что $V = \nu V_m$, уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \text{ или } (p + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где поправки a и b — постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем (записываются уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно a и b).

При выводе уравнения Ван-дер-Ваальса сделан целый ряд упрощений, поэтому оно также весьма приближенное, хотя и лучше (особенно для несильно сжатых газов) согласуется с опытом, чем уравнение состояния идеального газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса не единственное уравнение, описывающее реальные газы. Существуют и другие уравнения, некоторые из них даже точнее описывают реальные газы, но не рассматриваются из-за их сложности.

Для исследования поведения реального газа рассмотрим изотермы Ван-дер-Ваальса — кривые зависимости p от V_m при заданных T , определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса для моля газа. Эти кривые (рассматриваются для четырех различных температур; (рис. 1) имеют довольно своеобразный характер. При высоких температурах ($T > T_k$) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой. При некоторой температуре T_k на изотерме имеется лишь одна точка перегиба K .

Эта изотерма называется критической, соответствующая ей температура T_k — критической температурой; точка перегиба K называется критической точкой; в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс. Соответствующие этой точке объем V_k и давление p_k называются также критическими. Состояние с критическими параметрами (p_k, V_k, T_k) называется критическим состоянием. При низких температурах ($T < T_k$) изотермы имеют волнообразный участок, сначала монотонно опускаясь вниз, затем монотонно поднимаясь вверх и снова монотонно опускаясь.

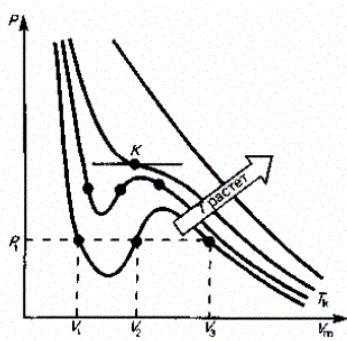


Рис. 1

- Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?

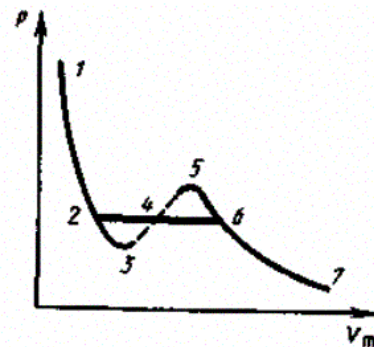


Рис. 2

Для пояснения характера изотерм преобразуем уравнение Ван-дер-Ваальса к виду

$$pV_m^3 - (RT + pb)V_m^2 + aV_m - ab = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) при заданных p и T является уравнением третьей степени относительно V_m ; следовательно, оно может иметь либо три вещественных корня, либо один вещественный и два мнимых, причем физический смысл имеют лишь вещественные положительные корни. Поэтому первому случаю соответствуют изотермы при низких температурах (три значения объема газа V_1, V_2 и V_3 отвечают (символ «m» для простоты опускаем) одному значению давления p_1), второму случаю — изотермы при высоких температурах.

Рассматривая различные участки изотермы при $T < T_K$ (рис. 2), видим, что на участках 1—3 и 5—7 при уменьшении объема V_m давление p возрастает, что естественно. На участке 3—5 сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка 3—5 означает, что при постепенном изменении объема вещество не может оставаться все время в виде однородной среды; в некоторый момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма будет иметь вид ломаной линии 7—6—2—1, Часть 6—7 отвечает газообразному состоянию, а часть 2—1 — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы 6—2, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется паром, а пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным.

Данные выводы, следующие из анализа уравнения Ван-дер-Ваальса, были подтверждены опытами ирландского ученого Т. Эндрюса, изучавшего изотермическое сжатие углекислого газа. Отличие экспериментальных (Эндрюс) и теоретических (Ван-дер-Ваальс) изотерм заключается в том, что превращению газа в жидкость в первом случае соответствуют горизонтальные участки, а во втором — волнообразные.

Для нахождения критических параметров подставим их значения в уравнение (1) и запишем $p_K V_K^3 - (RT_K + p_K b) V_K^2 + a V_K - ab = 0$ (2)

(символ «m» для простоты опускаем). Поскольку в критической точке все три корня совпадают и равны V_K , уравнение приводится к виду

$$p_K (V - V_K)^3 = 0,$$

или

$$p_K V^3 - 3p_K V_K V^2 + 3p_K V_K^2 V - p_K V_K^3 = 0. \quad (3)$$

Так как уравнения (2) и (3) тождественны, то в них должны быть равны и коэффициенты при неизвестных соответствующих степеней.

$$p_K V_K^3 = ab, \quad 3p_K V_K^2 = a, \quad 3p_K V_K = RT_K + p_K b.$$

Поэтому можно записать

Решая полученные уравнения, найдем

$$V_x = 3b, \quad p_x = a/(27b^2), \quad T_x = 8a/(27Rb). \quad (4)$$

Если через крайние точки горизонтальных участков семейства изотерм провести линию, то получится колоколообразная кривая (рис. 3), ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Эта кривая и критическая изотерма делят диаграмму p, V_m под изотермой на три области: под колоколообразной кривой располагается область двухфазных состояний (жидкость и насыщенный пар), слева от нее находится область жидкого состояния, а справа — область пара. Пар отличается от остальных газообразных состояний тем, что при изотермическом сжатии претерпевает процесс сжижения. Газ же при температуре выше критической не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

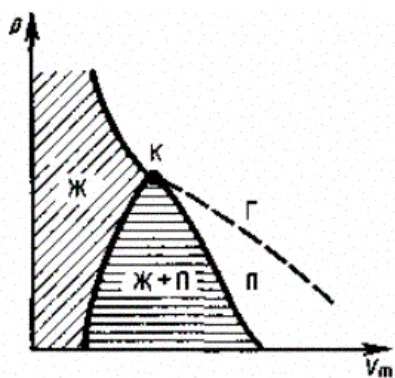


Рис. 3

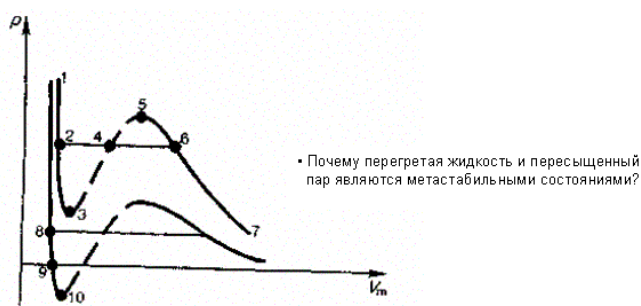


Рис. 4

Сравнивая изотерму Ван-дер-Ваальса с изотермой Эндрюса (верхняя кривая на рис. 92), видим, что последняя имеет прямолинейный участок 2—6, соответствующий двухфазным состояниям вещества. Правда, при некоторых условиях могут быть реализованы состояния, изображаемые участками ван-дер-ваальсовой изотермы 5—6 и 2—3. Эти неустойчивые состояния называются метастабильными. Участок 2—3 изображает перегретую жидкость, 5—6 — пересыщенный пар. Обе фазы ограниченно устойчивы.

При достаточно низких температурах изотерма пересекает ось V_m , переходя в область отрицательных давлений (нижняя кривая на рис. 4). Вещество под отрицательным давлением находится в состоянии растяжения. При некоторых условиях такие состояния также реализуются. Участок 8—9 на нижней изотерме соответствует перегретой жидкости, участок 9—10 — растянутой жидкости.