Riyaziyyat-2 Fənnindən I Kollokvium

Suallarının Cavabları

1/Dalamberəlamətinəgörəsıranınyığılanvəyadağılanolmasınıaraşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n + 7}$$

Həlli: $U_n = \frac{2n}{3^n + 7}, U_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1} + 7}$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)(3^n + 7)}{(3^n + 7)2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n + 7}{3^{n+1} + 7} \cdot \frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 + \frac{7}{3^n}}{3 + \frac{7}{3^n}} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1+0}{3+0} \cdot (1+0) = \frac{1}{3}$$

$$l = \frac{1}{3} < 1$$

Deməli verililmiş sıra yığılandır.

C:verililmiş sıra yığılandır

2) Dalamber əlamətinəgörə sıranın yığılan olmasını araşdırın.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n(n+1)}$$

Həlli: $U_n = \frac{n!}{3^n(n+1)}, U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}(n+2)}$

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!3^n(n+1)}{3^{n+1}\cdot(n+2)\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+1)}{3(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{3n+6}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{6}{n}}=\infty$$

C: $l=\infty$ olduğu üçün verilimiş sıra dağılandır. .

3). Koşinin inteqral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)\Big|_1^b=$$

Həlli: $=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)=$

$$=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2<\infty$$

Deməli verilmiş sıra yığılandır.

4. Koşinin inteqral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$$

Həlli:

$$\int_1^{\infty}\frac{2x-1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(2\ln b+\frac{1}{b}-1\right)=\infty$$

Cavab: verilimiş sıra dağılandır.

5. Koşinin inteqral əlamətinə görə sıranın yığılan və ya dağılan olmasını araşdırın:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

Həlli:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x-2}}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt{3x-2}}dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt{3x-2}}d(3x-2) = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\Big|_{1}^{b} =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(\sqrt{3b-2}-1) = \infty$$

Cavab : Verilimi sıra dağılandır.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}, a_{n+1} = \frac{1}{2^n}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

Cavab : R=2

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{1}{3^n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 3$$

Cavab : R=3

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{n}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{10^n}{n}, a_{n+1} = \frac{10^{n+1}}{n+1}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^n \cdot (n+1)}{n \cdot 10^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{10}$$

Cavab : $\frac{1}{10}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right) = 1$$

Cavab :R=1

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^4}}$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli: $a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}, a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}\cdot 3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Cavab. $R = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

11. $xy' - y - 1 = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$$x\frac{dy}{dx} = y+1$$
$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|y+1| = \ln|x| + c_1$$
$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c|$$
$$\ln|y+1| = \ln|cx|$$

y+1=cx

y=cx-1

Cavab : y=cx-1.

<u>12.</u> $x^2y' + y = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$$x^2\frac{dy}{dx} = -y$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2}$$
$$\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x^2}$$
$$\ln y = \frac{1}{x} + c_1$$
$$y = e^{\frac{1}{x}} + c_1 = ce^{\frac{1}{x}}$$
$$y = ce^{\frac{1}{x}}$$

Cavab : $y = ce^{\frac{1}{x}}$

13. $(x^2+1)y' - xy = 0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın.

Həlli:

$$(x^2+1)y'-xy=0$$

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=xy$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c_1$$

$$\ln|y|=\ln\sqrt{x^2+1}+\ln|c|$$

$$\ln|y|=\ln\left|c\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$y=c\sqrt{x^2+1}$$

Cavab : $y=c\sqrt{x^2+1}$

14. $2(x+1)y'+y=0$ dəyişənlərinə ayrılan tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli:

$$2(x+1)y'+y=0$$

$$2(x+1)\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c_1$$

$$\ln|y|=\ln c-\frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$\ln|y|=\ln\left|\frac{c}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$y=\frac{c}{\sqrt{x+1}}$$

Cavab . $\frac{c}{\sqrt{x+1}}$

15/ $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{x^2}$$

$$u'v + (v' + 2xv)u = 2xe^{x^2}$$

$$v' + 2xv = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx$$

$$\ln v = -x^2$$

$$v = e^{-x^2}$$

Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq.

$$u'e^{-x^2} = 2xe^{x^2}$$

$$u' = 2xe^{2x^2}$$

$$u = \int 2xe^{2x^2}dx = \frac{1}{2}e^{2x^2} + c$$

$$y = uv = e^{-x^2}(\frac{1}{2}e^{2x^2} + c)$$

Cavab: $y = \frac{1}{2}e^{x^2} + ce^{-x^2}$

16. $xy' - 3y = x^2$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$xu'\vartheta + xu\vartheta' - 3u\vartheta = x^2$$
$$xu'\vartheta + (x\vartheta' - 3\vartheta)u = x^2$$
$$x\vartheta' - 3v = 0$$
$$x\vartheta' = 3\vartheta$$
$$x\frac{d\vartheta}{dx} = 3\vartheta$$
$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = 3\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{d\vartheta}{v} = 3\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln v = 3\ln x$$

$\vartheta = x^3$ Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq:

$$xu'x^3 = x^2$$
$$u' = \frac{1}{x^2}$$
$$u = \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$$
$$y = u\vartheta = x^3(-\frac{1}{x} + c)$$

Cavab: $y = x^3(-\frac{1}{x} + c)$

17. $xy' + y = \sin x$ xətti tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: y=uv əvəzləməsi aparaq, onda $y' = u'v + uv'$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$x(u'v + uv') + uv = \sin x$$
$$xu'v + xuv' + uv = \sin x$$
$$xu'v + (xv' + v)u = \sin x \qquad (1)$$
$$x'v + v = 0$$
$$x\frac{dv}{dx} = -v, \qquad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$$

$v = \dfrac{1}{x}$. Bu ifadəni (1) bərabərliyində yerinə yazıb alırıq.

$$xu' \cdot \frac{1}{x} = \sin x$$

$$u' = \sin x$$

$$u = -\cos x + c$$

$$y = uv = \frac{1}{x}(c - \cos x)$$

Cavab: $y = \dfrac{1}{x}(c - \cos x)$

18. $xy'' + y' = 0$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: $y' = \vartheta(x)$əvəzləməsi aparaq, onda $y'' = v'(x)$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$xv'(x) + v(x) = 0$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\vartheta$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + \ln|c_1|$$

$$\ln|v| = -\ln\left|\frac{x}{c_1}\right|$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{c_1}{x}\right|$$

$$v = \frac{c_1}{x};\ y' = \frac{c_1}{x}$$

$$y = c_1 \ln x + c_2$$

Cavab : $y = c_1 \ln x + c_2$

19. $y'' + \dfrac{y'}{x-1} = 0$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: $y' = \vartheta(x)$əvəzləməsi aparaq, onda $y'' = v'(x)$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$v'(x) + \frac{v(x)}{x-1} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x-1}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x-1}$$

$$\ln v = -\ln|x-1| + c_0$$

$$\ln v = -\ln|x-1| + \ln|c_1|$$

$$\ln v = -\ln\left|\frac{x-1}{c_1}\right|$$

$$\ln v = \ln\left|\frac{c_1}{x-1}\right|$$

$$v = \frac{c_1}{x-1},\ \ y' = \frac{c_1}{x-1}$$

$$y = c_1 \int \frac{dx}{x-1} = c_1 \ln|x-1| + c_2$$

Cavab: $y = c_1 \ln|x-1| + c_2$

20. $y'' = y' ctgx$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: $y' = \vartheta(x)$ əvəzləməsi aparaq, onda $y'' = \vartheta'(x)$. Bu ifadələri verilən tənlikdə yerinə yazaq.

$$\vartheta'(x) = \vartheta(x)\, ctgx$$
$$\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta ctgx;$$
$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = ctgxdx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgdx$$
$$\ln|v| = \ln|\sin x| + c_0$$
$$\ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|c_1|$$
$$\ln|v| = \ln|c_1 \sin x|$$
$$v = c_1 \sin x; \quad y' = c_1 \sin x$$
$$y = -c_1 \cos x + c_2$$

Cavab ; $y = -c_1 \cos x + c_2$

21/ $y'' - 4y' + 3y = 0$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: Verilimiş tənliyin xarakteristik tənliyini yazaq.

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

Xarakteristik tənliyin kökləri : $k_1 = 1, \quad k_2 = 3$

Fundamental həllər sistemini yazaq: $y_1 = e^x; y_2 = e^{3x}$

Verilimiştənliyinümumihəlli:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Cavab ; $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

22. $y'' - 6y' + 9y = 0$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: Verilimiş tənliyin xarakteristik tənliyini yazaq.

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

Xarakteristik tənliyin kökləri : $k_1 = k_2 = 3$

Fundamental həllər sistemini yazaq:

$y = e^{3x}$ və $y_2 = xe^{3x}$

Verilmiş tənliyin ümumi həlli: $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$

Cavab ; $y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$

23. $y'' + 6y' + 8y = 0$ tənliyin ümumi həllini tapın..

Həlli: Verilimiş tənliyin xarakteristik tənliyini yazaq.

$k^2 + 6k + 8 = 0$

Xarakteristik tənliyin kökləri : $k_1 = -2;\ k_2 = -4$

Fundamental həllər sistemini yazaq:

$y = e^{-2x}$ və $y_2 = e^{-4x}$

Verilmiş tənliyin ümumi həlli: $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-4x}$

Cavab ; $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-4x}$

24) Müsbət hədli sıraların yığılma əlamətləri.(Dalamber və Koşi əlamətləri).

1. Dalamver əlaməti.

Müsbəthədli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasında (n+1)-ci həddin n-ci həddə nisbətinin $n \to \infty$ şərtində sonlu limiti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$ (5)varsa, onda

1) $D < 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır.

2) $D > 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası dağılır.

3) $D = 1$ olduqda sıra yığıla da bilər, dağıla da bilər.

2. Koşi əlaməti

Müsbəthəddi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasıverildikdə $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ sonlulimitivardırsa $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = K$ işarəetsək,

onda1) $K < 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasıyığılır.

2) $K > 1$ olduqda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasıdağılır.

3) $K = 1$ olduqda sıra yığıla da bilər, dağıla da bilər.

25) İşarələrini növbə ilə dəyişən sıralar. Leybnis əlaməti.

$a_n > 0,\ (n = 1,2,3,...)$ olduqda $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... + (-1)^{n+1} a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (1)

sırasına işarəsini növbə ilə dəyişən sıra deyilir.

(1) sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (2)sırasına baxaq.

(2) sırası yığılan olduqda (1) sırasına mütləq yığılan sıra deyilir.

(2) sırası daığılan, (1) sırası yığılan olduqda (1) sırasına şərti yığılan sıra deyilir.

İşarəsini növbə ilə dəyişən sıraların yığılması üçün aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. (Leybinis əlaməti) İşarəsini növbə ilə dəyişən (1) sırasının hədləri üçün

$$1)\ a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq ... \qquad (3)$$

$$2)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (4)$$

Şərtləri ödəndikdə həmin sıra yığılandır. Onun cəmi müsbət ədəddir və bu cəm sıranın birinci həddindən (yəni a_1-dən) böyük deyildir.