

Xətti cəbr və riyazi analiz

1. Xətti asılılığın tərifinə görə $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c} = 0$ bərabərliyi $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ olduqda ödənərsə onda $\bar{a}, \bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

Verilənləri nəzərə alsaq

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \text{tənliklər sistemini alırıq.}$$

Üçüncü tənlikdən $\lambda_1 = -4\lambda_3$ əvəzləməsini digər iki tənlikdə nəzərə alsaq

$$\begin{cases} -8\lambda_3 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -12\lambda_3 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \text{ olar. Buradan } \begin{cases} 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ 7\lambda_2 - 14\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

tərəf-tərəfə çıxsaq $\lambda_3 = 0$ alırıq. Deməli $\lambda_3 = 0$ olduğunu digər tənliklərdə nəzərə alsaq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ alırıq.

Deməli bu vektorlar bazis əmələ gətirir.

$\bar{d}$ vektorun $\bar{a}, \bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları üzrə xətti kombinasiyasını tapmaq üçün $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} + \lambda_3 \bar{c} = \bar{d}$ tənliyini həll etməliyik.

$$\text{Verilənləri nəzərə alsaq } \begin{cases} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 3\lambda_3 = 4 \\ 3\lambda_1 + 7\lambda_2 - 2\lambda_3 = 12 \\ \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \end{cases} \quad \text{alırıq.}$$

Axırıncı tənliyi olduğu kimi saxlayıb -2 -yə vurub 1-ci tənliklə, -3-ə vurub 2-ci

$$\text{tənliklə toplayaq. } \begin{cases} \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ 5\lambda_2 - 5\lambda_3 = 10 \\ 7\lambda_2 - 14\lambda_3 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 0 \cdot \lambda_2 + 4\lambda_3 = -3 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 3 \end{cases}$$

İkinci və üçüncü tənlikləri tərəf-tərəf çıxsaq $\lambda_3 = -1$ alırıq.

Bu qiyməti 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq $\lambda_2 + 1 = 2 \Rightarrow \lambda_2 = 1$ olar. $\lambda_3 = -1$ olduğunu $\lambda_1 + 4\lambda_3 = -3$ tənliyində nəzərə alsaq $\lambda_1 = 1$ alırıq.

Deməli yeni koordinatlar $\bar{d}(1;1;-1)$ olar. Yəni $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ xətti kombinasiya alınar.

2. $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$, $|\bar{c}| = 5$, $(\bar{a}\bar{b}) = 60^\circ$ $(\bar{b}\bar{c}) = 60^\circ$ olarsa $\bar{d} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$ -nin uzunluğunu tapın.

Bilirik ki, $|d| = \sqrt{(\bar{d}, \bar{d})}$ bərabərliyi doğrudur. Burdan $(a; a) = |a|^2, (b; b) = |b|^2, (\bar{c}; \bar{c}) = (\bar{c})$ alınə bilər.

$$\begin{aligned}
 |d| &= \sqrt{(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}; \bar{a} + \bar{b} - \bar{c})} = \\
 &= \sqrt{(a; a) + 2(a; b) + (\bar{b}; \bar{b}) - 2(\bar{a}; \bar{c}) - 2(\bar{b}; \bar{c}) + (\bar{c}; \bar{c})} = \\
 &= \sqrt{|a|^2 + 2|a||b|\cos(a; b) + |b|^2 - 2|a||c|\cos(a; c) - 2|b||c|\cos(b; c) + |c|^2} = \\
 &= \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 25} = \sqrt{4 + 6 + 9 - 10 - 15 + 25} = \sqrt{19}
 \end{aligned}$$

Deməli, $|d| = \sqrt{19}$ olar.

3. $|\bar{a} + \bar{b}| = ?$

Bilirik, ki $|a| = \sqrt{a; a}$ bərabərliyi doğrudur. Həmçinin,

$$|\bar{a} - \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} - \bar{b}; \bar{a} - \bar{b})} = \sqrt{|a|^2 - 2(a; b) + |b|^2} = 30$$

$$\sqrt{|a|^2 - 2(a; b) + 529} = 30$$

$$650 - 2(\bar{a}; \bar{b}) = 900$$

$$2(\bar{a}; \bar{b}) = -250$$

$$(\bar{a}; \bar{b}) = -125 \text{ alarıq.}$$

$$|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} + \bar{b}; \bar{a} + \bar{b})} =$$

Onda
$$\sqrt{|a|^2 + 2(\bar{a}; \bar{b}) + |b|^2} = \sqrt{121 + 2 \cdot (-125) + 529} =$$

$$\sqrt{650 - 250} = \sqrt{400} = 20 \text{ alarıq.}$$

$$|\bar{a} + \bar{b}| = 20$$

4. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının bazis əmələ gətirdiyini yoxlamaq üçün $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = 0$

bərabərliyindən
$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \text{ sistemini alarıq.}$$

Tərəf-tərəfə toplasaq $\lambda_1 = 0$ alarıq. Yerinə yazsaq $\lambda_1 = 0$ olar.

Deməli, tərifə görə $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları bazis əmələ gətirir.

$\bar{p}$ vektorunun koordinatlarını tapaq.

$$\bar{p} = 2(2; -2) - (2; -1) + (2; 4) = (4; -4) - (2; -1) + (2; 4) = (4; 1)$$

Xətti ayrılış üçün $\lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{b} = \bar{p}$ şərti ödənməlidir.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases} \text{ sistemində tənlikləri tərəf-tərəfə toplasaq } \lambda_1 = 5$$

alırıq. Digər tənlikdə yerinə yazsaq $2\lambda_1 + 2 \cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$ alırıq. Deməli, $\bar{p} = -3\bar{a} + 5\bar{b}$ alınır.

5. R^n - də xətti asılı olan vektorlar haqqında teorem və isbatı.

Teorem 1. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olması üçün zəruri və kafi şərt bu vektorlardan heç olmazsa birinin yerdə qalanlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilməsidir.

□ **Zərurilik.** Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorları xətti asılıdır. Yəni, (2) bərabərliyi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ədədlərinin biri (məsələn, λ_m) sıfırdan fərqli olduqda doğrudur. Onda (2) bərabərliyinin hər tərəfini λ_m -ə bölsək $\vec{a}_m$ vektorunu digərləri ilə aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$\vec{a}_m = \frac{-\lambda_1}{\lambda_m} \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \vec{a}_{m-1}. \quad (4)$$

Burada, $\alpha_u = -\frac{\lambda_u}{\lambda_m}$ ($u = \overline{1, m-1}$) kimi işarə etsək, onda (4) bərabərliyini

$$\vec{a}_m = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \vec{a}_{m-1} \quad (5)$$

şəklində yazı bilərik. Bu isə o deməkdir ki, $\vec{a}_m$ vektoru $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{m-1}$ vektorlarının xətti kombinasiyası kimi göstərilə bilər.

Kafilik. Fərz edək ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlarından biri (məsələn, $\vec{a}_m$) yerdə qalanlarının xətti kombinasiyasıdır. Yəni, (5) bərabərliyi doğrudur. Onda (5) bərabərliyini

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_{m-1} \vec{a}_{m-1} + (-1) \vec{a}_m = \vec{0} \quad (6)$$

kimi yazsaq, $\alpha_m = -1 \neq 0$ olduğundan tərifə əsasən $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlarının xətti asılı olduğunu alırıq. □

Qeyd edək ki, əgər $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlarının heç olmazsa biri sıfır vektordursa, onda bu vektorlar xətti asılıdır. Doğrudan da fərz etsək ki, $\vec{a}_m = \vec{0}$. Onda $\lambda_m = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{m-1} = 0$, götürsək, (2) bərabərliyi ödəyir.

Yoxlamaq olar ki, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ vektorlarının bir neçəsi xətti asılıdırsa, onda bu vektorların hamısı xətti asılıdır.

$$6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ matrisləri}$$

üzerində qruplaşdırma qanununun $((AB)C = A(BC))$ doğruluğunu yoxlayın.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -8 \\ 14 & 8 & -3 \\ 11 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$((AB)C) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -8 \\ 14 & 8 & -3 \\ 11 & 18 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 14 \\ 42 & 39 & 23 \\ 46 & 30 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A(BC)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 14 \\ 42 & 39 & 23 \\ 46 & 30 & 7 \end{pmatrix}$$

$((AB)C = A(BC))$ -nin doğruluğunu yoxladıq

7. Determinant anlayışı. Minor və cəbri tamamlayıcı. Determinantın əsas xassələri.

n tərtibli $A_{n \times n}$ kvadrat matrisinin a_{ij} elementinin yerləşdiyi i -ci sətiri və j -ci sütunu şərti olaraq sildikdən sonra qalan elementlərin əmələ gətirdiyi $n-1$ tərtibli kvadrat matrisin determinantını M_{ij} ilə işarə edək. M_{ij} -yə a_{ij} elementinin minoru deyilir. Bu halda

$$\sum_{b=1}^n (-1)^{1+b} a_{1b} M_{1b} = a_{11} M_{11} - a_{12} M_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} M_{1n} \quad (7)$$

cəminə n tərtibli $A_{n \times n}$ kvadrat matrisinin determinantı deyilir.

Xassə 1. Determinantın bütün sətirlərinin onun uyğun nömrəli sütunları ilə yerini dəyişdikdə determinantın qiyməti dəyişməz. Yəni,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots a_{n2} \\ \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (1)$$

sonrakı xassələrini ancaq sətirləri və ya ancaq sütunları üçün söyləmək kifayətdir.

Xassə 2. Hər hansı determinantın ixtiyari iki sətirin (sütunun) yerini dəyişsək, onda determinantın yalnız işarəsi dəyişər. Yəni, məsələn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Xassə 3. İki sətiri və ya iki sütunu eyni olan determinant sıfra bərabərdir.

Xassə 4. Determinantın hər hansı bir sətir (sütun) elementlərinin ortaq vurğu olarsa, həmin vurğu determinantın işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Yəni

$$\begin{vmatrix} \kappa a_{11} & \kappa a_{12} \dots \kappa a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Xassə 4 onu göstərir ki, $\kappa \cdot \det A_{n \times n}$ hasilini tapmaq üçün $\det A_{n \times n}$ -nin hər hansı bir sətirinin (sütununun) elementlərini həmin κ ədədinə vurmaq lazımdır.

Xassə 5. Determinantın iki sətirin (sütunun) elementləri mütənasibdirlərsə, həmin determinant sıfra bərabərdir.

Xəssə 7. Determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementləri iki toplananın cəmi şəklindədirsə, həmin determinant iki determinantın cəminə bərabərdir: 1-ci determinantda həmin sətir (sütun) elementi olaraq 1-ci toplanan, 2-ci determinantda isə həmin sətir (sütun) elementləri olaraq 2-ci toplanan götürülür. Yəni, məsələn 1-ci sətir elementləri üçün

olur.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1H} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2H} \\ \dots & \dots \\ a_{u1} & a_{u2} \dots a_{uH} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + \kappa a_{21} & \kappa a_{12} + \kappa a_{22} \dots a_{1H} + \kappa a_{2H} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2H} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{u1} & a_{u2} & \dots & a_{uH} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Yəni, məsələn

8. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(x) = x^2 - 3x + 2$ çoxhədlisinə uyğun $f(A) = ?$

$$f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & -3-6+0 & 0-3+0 \\ 0+0+3 & 0+4-3 & 0+2+2 \\ 3+0+6 & -9-6-6 & 0-3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

9. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olarsa, $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ çoxhədlisinə uyğun

$f(A) = 4A^3 - 2A^2 + 3A - 2E$ şəkildə yaza bilərik.

$$\begin{aligned}
f(A) &= 4 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 4+3 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -14-6 & 21+0 \\ 4+3 & -6+0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -80 & 84 \\ 28 & -24 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 14 & -12 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \\
&- \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -102 & 105 \\ 35 & -32 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

10. Əgər determinantın hər hansı sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə onu iki determinantın cəmi kimi yazma bilərik.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & a^2+1 & (a+1)^2 \\ b & b^2+1 & (b+1)^2 \\ c & c^2+1 & (c+1)^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+2a+1 \\ b & b^2 & b^2+2b+1 \\ c & c^2 & c^2+2c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a+1 \\ b & 1 & b^2+2b+1 \\ c & 1 & c^2+2c+1 \end{vmatrix} = \\
&\begin{vmatrix} a & a^2 & a^2 \\ b & b^2 & b^2 \\ c & c^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 2a+1 \\ b & b^2 & 2b+1 \\ c & c^2 & 2c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2+2a \\ b & 1 & b^2+2b \\ c & 1 & c^2+2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Əgər determinantın iki sütunu eyni və ya mütənasıbdırsa, o determinant sıfıra bərabərdir. Onda I toplanan və axırıncı toplanan sıfıra bərabər olar. Digər determinantları da ayırsaq

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & a^2 & 2a \\ b & b^2 & 2b \\ c & c^2 & 2c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & 2a \\ b & 1 & 2b \\ c & 1 & 2c \end{vmatrix} = \\
&= 0 + \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} + 0 = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

alırıq.

Buradan

$$\begin{aligned}
&2(ab^2 + bc^2 + ca^2 - cb^2 - ac^2 - ba^2) = \\
&= 2(ab(b-a) + bc(c-b) + ac(a-c)) \quad \text{alırıq.}
\end{aligned}$$

11. Determinantın uyğun xassəsini yazın və həmin xassədən istifadə edərək

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

Determinantın hər hansı sətir və sütunu iki toplananın cəmi şəklindədirsə, onda determinant elə iki determinantın cəminə bərabərdir ki, birinci determinantda birinci toplanan, ikinci determinantda isə ikinci toplanan olmaqla qalan elementləri isə verilmiş determinantda olduğu kimi saxlanılır.

İki sətiri və ya sütunu eyni olan determinant bərabərdir.

Determinantın hər hansı bir sətirinin və ya sütununun bütün elementlərinin ortaq vurulğunu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar. Hər hansı determinantın iki sətirinin yerini dəyişsək, onda determinant yalnız işarəsini dəyişər. Determinantın mütənasib olan sətirləri və ya sütunları varsa, bu determinant sıfıra bərabərdir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz xassələrə əsasən verilmiş determinantı hesablayaq.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = (1-x^2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bilirik ki, matrisin sıfırdan fərqli ən yüksək minorunun tərtibinə ranq deyilir. Ranqı tapmaq üçün haşiyələyən minorlar üsulundan istifadə edək.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4=5 \neq 0 \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = -8 \neq 0$$

olduğuna görə bu matrisin ranqı $r(A) = 3$ olar. Onda

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ olduğundan həm də bazis minoru olacaqdır.}$$

13. Matrisin ranqı və onun hesablanması

$m \times n$ ölçülü $A_{m \times n}$ düzbucaqlı matrisində $\kappa \leq \min\{m, n\}$ şərtini ödəyən ixtiyari k sayda sətir və k sayda sütunların kəsişməsində duran elementlərdən düzəldilmiş k tərtibli $A_{k \times k}$ kvadrat matrisin

determinantına k tərtibli minor deyilir və M_k ilə işarə olunur. $M_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$ kimidir.

Matrislərin ranqı üçün aşağıdakı münasibətlərin doğruluğunu yoxlamaq olar.

- 1) $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$; 2) $\rho(A+B) \geq |\rho(A) - \rho(B)|$;
- 3) $\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$; 4) $\rho(A^T A) = \rho(A)$;
- 5) $\rho(AB) = \rho(A)$ əgər $\det B \neq 0$ olarsa;
- 6) $\rho(AB) \geq \rho(A) + \rho(B) - n$, burada n , A matrisinin sütunlarının sayını və ya B matrisinin sətirləri sayını göstərir.

ranqın tapılması üsullar haşiyələyən minorlar və elementar çevirmələr üsuludur.

1) Haşiyələyən minorlar üsulu.

$A_{m \times n}$ matrisinin ranqını tapmaq üçün hesablamayı, onun aşağı tərtibli minorlarından başlayıb yuxarı tərtibli minorlara keçmək və bu prosesdə sıfırdan fərqli r tərtibli M_r minoruna rast gəldikdən sonra, M_r minorunu haşiyələyən (öz daxilində saxlayan) $(r+1)$ – tərtibli minorları hesablamaq lazımdır. Əgər M_r –i ($M_p \neq 0$) haşiyələyən $(r+1)$ – tərtibli minorların hamısı sıfırırsa, onda $A_{m \times n}$ matrisinin ranqı r –dir. Yəni, $\rho(A_{m \times n}) = p$. Əgər $(r+1)$ – tərtibli haşiyələyən minorlardan biri, məsələn, M_{p+1} sıfırdan fərqli olarsa, onda $A_{m \times n}$ matrisinin ranqı r -dən böyük olmalıdır. Bu prosesi M_{p+1} -i haşiyələyən $(r+2)$ – tərtibli minorları hesablamaqla davam etdirsək və M_{p+1} -i ($M_{p+1} \neq 0$) haşiyələyən bütün $(r+2)$ – tərtibli minorlar sıfıra bərabərdirsə onda $A_{m \times n}$ matrisinin ranqı $r+1$ -ə bərabərdir və s.

2) Elementar çevirmələr üsulu.

İsbatsız olaraq aşağıdakı teoremi qeyd edək.

Teorem. Matrisin üzərində aparılan elementar çevirmələr onun ranqını dəyişmir.

Qeyd edək ki, ranqları bərabər olan matrislərə ekvivalent matrislər deyilir və $\rho(A) = \rho(B) \Leftrightarrow A \sim B$ kimi işarə olunur. Deməli, elementar çevirmələrdən sonra alınan matris, verilmiş matrisə bərabər deyildir.

Teorem (bazis minorlar haqqında teorem). Matrisin bazis sətirləri (bazis sütunları) xətti asılı deyildir. Matrisin ixtiyari sətiri (ixtiyari sütunu) onun bazis sətirlərinin (bazis sütunlarının) xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilər.

$$14. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ matrisinin tərsini elementar çevirmələrlə tapmaq.}$$

Bilirik ki, $Q = (A / E)$ kimi bir qoşma matrisi düzəldilir. Onu elementar çevirmələrlə E / A şəklinə gətirilir.

$$A/E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, birinci sətiri ikinci ilə toplayıb ikinci sütunda yazdıq, birinci ilə üçüncü sətiri toplayıb üçüncü sətirdə yazdıq. Daha sonra birinci sətirlə ikinci sətiri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Sonra birinci sətirlə üçüncü sətiri toplayıb birinci sətirdə yazdıq. Nəticədə A matrisinin tərsini elementar çevirmələr yolu ilə tapmış olduq.

15. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ matris üçün A^{-1} -i tapmaq.

Bilirik ki, A matrisinin tərsi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ düsturu ilə hesablanır.

Verilmiş A matrisinin tərs matrisini tapmaq.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 2 = -6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -(0 - 9) = 9$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = -3, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 0 + 1 \cdot 2) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 6) = 4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 6 + 1 = 7, \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Deməli $A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 7 \\ 9 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

16. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ olduqda A^{-2} -ni tapmaq.

Bilirik ki, A^{-2} -ni tapmaq üçün $A^{-2} = A^{-1}A^{-1}$ hesablamaq lazımdır.

$$A^{-1}\text{-matrisin tərsini tapmaq üçün } A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \text{ düsturundan}$$

istifadə etmək lazımdır. Bu düsturu verilmiş misalla tətbiq edək.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 2 - 2 + 4 - 0 - 12 = -8 \quad A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 1 = 11$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(-4 - 2) = 6 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 6 = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(0 - 2) = 2 \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(0 + 2) = -2 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Deməli } A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ olur.}$$

$A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} A^{-2} &= \left(-\frac{1}{8}\right)^2 \begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & -2 & -5 \\ 6 & -4 & -2 \\ -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 121 & -12 & +35 & -22 & +8 & -10 & -55 & +4 & -5 \\ 66 & -24 & +14 & -12 & +16 & -4 & -30 & +8 & -2 \\ -77 & +12 & -7 & 14 & -8 & +2 & 35 & -4 & +1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 144 & -24 & -56 \\ 56 & 0 & -24 \\ -72 & 8 & 32 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 18 & -3 & -7 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$A^2 A^{-2} = E$ olduğunu göstərək

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A^2 A^{-2} &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 9 & 5 \\ 7 & 9 & 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18 & -3 & -7 \\ 7 & 0 & -3 \\ -9 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 54 & +35 & -81 & -9 & +0 & +9 & -21-15+36 \\ -18 & +63 & -45 & 3 & +0 & +5 & 7-27+20 \\ 126 & +63 & -189 & -21 & +0 & +21 & -49-27+84 \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E
 \end{aligned}$$

$$17. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = -5 \end{cases}$$

Bilirik ki, əsas matris dəyişənlərin əmsallarından düzəldilir.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \text{ genişləndirilmiş matris isə}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \text{ olar.}$$

Kroneker –Kapelli teoreminə görə sistemin həllinin varlığı üçün $r(A) = r(A^*)$ olmalıdır.

Əvvəlcə $r(A)$ -nı tapaq.

$$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0 ; \quad M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 4 - 6 - 3 - 12 = 4 \neq 0 \text{ olduğundan}$$

$r(A) = 3$ olur.

İndi isə A^* -un rənkini tapaq.

Bunun üçün

$$19. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$$

Birinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək. Digər dəyişənləri toplama üsulu ilə “yox” edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

İndi isə ikinci tənliyi aparıcı tənlik kimi qəbul edək və toplama üsulu ilə digər dəyişənləri ardıcıl yox edək.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ 10x_3 - 6x_4 = 36 \mid 5 \\ 18x_3 - 10x_4 = 56 \mid -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$50x_3 - 54x_3 - 30x_4 + 30x_4 = 180 - 168$$

$$4x_3 = 12$$

$$x_3 = 3$$

$x_3 = 3$ qiymətini $10x_3 - 6x_4 = 36$ tənliyində yerinə yazsaq

$$\begin{array}{lll} 30 - 6x_4 = 36 & 2x_2 - 6 - 6 = -14 & x_1 - 2 - 9 - 4 = -13 \\ 6x_4 = -6 & 2x_2 = -2 & x_1 = 2 \\ x_4 = -1 & x_2 = -1 & \end{array}$$

Deməli, tənliyin ümumi və xüsusi həlləri eynidir.

$\{2; -1; 3; -1\}$ olur.

20. Bilirik ki, bircins xətti tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün əsas matrisin determinantı sıfıra bərabər olmalıdır.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4 + 12a + 7 + 3 - 14a - 8 = 0 \Rightarrow -2a - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

olarsa, sistemin sonsuz sayda həlli var.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

üçüncü tənliyi aparıcı tənlik kimi saxlayaq.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = 3x_2 \text{ alarıq.}$$

$x_2 = C \in R$ qəbul etsək~

$$x_3 = 3C \text{ və } \begin{cases} x_1 - C + 6C = 0 \\ x_1 = -5C \end{cases} \text{ alarıq.}$$

Onda sistemin ümumi həlli $\{-5C; C; 3C\}$ olar.

21. $Ax = (x_1 + x_2 + 8x_3; 2x_2; x_1 - x_3)$ Bu çevirmənin matrisi əmsalardan düzəldilir.

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Məxsusi ədədi tapmaq üçün

$$|A - \lambda E| = 0 \text{ tənliyini həll etmək lazımdır.}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 8(2-\lambda)0 - 0 = 0$$

$$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - 8) = 0$$

$$-(1-\lambda^2) - 8 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda^2 = 9$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = -3$$

Onların cəmi $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + (-3) = -1$ olar

22. Verilən çevirmələrin əmsallarından A və B matrislərini düzəldək

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Onda AB-BA çevirməsi

$$\begin{cases} x'' = 5x - y + 4z \\ y'' = 3x - 6y + z \\ z'' = 3y \end{cases}$$

23. Bilirik ki, məxsusi ədəd $|A - \lambda E| = 0$ tənliyindən tapılır.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 4(2-\lambda) + 4\lambda 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) - 8 + 4\lambda + 4\lambda = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 8\lambda - 8 = 0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda) + 8(\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda(2-\lambda) + 8) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad 2\lambda - \lambda^2 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$\lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$$

Hər bir məxsusi ədədə uyğun məxsusi vektorları tapaq.

$\lambda_1 = 1$ olduğunu nəzərə alaq.

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - 2x_2 + 0 = 0 \\ -2x_1 + (1-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 - 2x_2 - \lambda x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 = x_3 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$x_2 = C_1$ qəbul etsək $0 \neq C_1 \in R$ olmalıdır.

Onda məxsusi vektor $\{-2C_1; C_1; -2C_1\}$ olar.

2) $\lambda_2 = 4$ -ə uyğun sistem

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = C_2 \neq 0 \\ x_2 = -2C_2 \\ x_1 = 2C_2 \end{cases} \text{ alırıq.}$$

Məxsusi vektor $\{2C_2; -2C_2; C_2\}$ alınar.

3) $\lambda_3 = -2$ -yə uyğun məxsusi vektor.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_3 \\ x_2 = 2C_3 \\ x_3 = 2C_3 \end{cases}$$

$\{C_3; 2C_3; 2C_3\}$ alınar.

24 Verilmiş $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin xətti çevirməsinin məxsusi ədədini və məxsusi vektorunu tapın.

Həlli. $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ bərabərliyinə əsasən verilmiş matrisin xarakteristik tənliyini

$$|A - E\lambda| = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(2 - \lambda) - 20 = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = 0$$

şəklində yazı bilərik. Bu xarakteristik tənliyin kökləri $\lambda_1 = -2$ və $\lambda_2 = 7$ olar.

$\lambda_1 = -2$ olduqda tənliyinə görə

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 + 2)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 + 2)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4c_1 \\ x_2 = 5c_1 \end{cases} \quad (0 \neq c_1 \in R).$$

Deməli, $\lambda_1 = -2$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektoru $X = \{-4c_1; 5c_1\}$ şəklindədir. $c_1 \in R$ olduğundan istənilən qiymətlər verməklə verilən çevirmənin məxsusi vektorlarını tapa bilərik.

Eyni qayda ilə $\lambda_2 = 7$ olduqda uyğun bircins tənlik

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 - 7)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 + (2 - 7)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = c_2 \neq 0; c_2 \in R.$$

Deməli, $\lambda_2 = 7$ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor $X = \{c_2; c_2\}$ kimidir.

şəklində bircins xətti tənliklər sistemi alırıq. Bu sistemin sıfırdan fərqli həllinin varlığı üçün zəruri və kafi şərt onun məchullarının əmsallarından düzəldilmiş determinantın sıfıra bərabər olmasıdır:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

(7) bərabərliyini qısa olaraq $|A - \lambda E| = 0$ şəklində yazmaq olar. Bu bərabərliyin sol tərəfi həm də λ -dan asılı n -dərəcəli çoxhədlidir. Bu çoxhədlinə xarakteristik çoxhədli deyilir. Xarakteristik çoxhədlinin kökləri A xətti çevirməsinin məxsusi ədədləridir.

(7) xarakteristik tənliyini həll edərək $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ məxsusi ədədlərini tapırıq və bu məxsusi ədədləri ayrı-ayrılıqda (6) bircins xətti tənliklər sistemində yerinə yazaraq sıfırdan fərqli X həllini (vektorunu) tapırıq. Həmin bu X vektoru uyğun məxsusi vektor olacaqdır.