

# Физика -1

## Введение

### Предмет физики и ее связь с другими науками

Окружающий вас мир, все существующее вокруг вас и обнаруживаемое нами посредством ощущений представляет собой материю.

Неотъемлемым свойством материи и формой ее существования является движение. Движение в широком смысле слова — это всевозможные изменения материи — от простого перемещения до сложнейших процессов мышления.

Разнообразные формы движения материи изучаются различными науками, в том числе и физикой. Предмет физики, как, впрочем, и любой науки, может быть раскрыт только по мере его детального изложения. Дать строгое определение предмета физики довольно сложно, потому что границы между физикой и рядом смежных дисциплин условны. На данной стадии развития нельзя сохранить определение физики только как науки о природе.

Академик А. Ф. Иоффе (1880—1960; российский физик)\* определил физику как науку, изучающую общие свойства и законы движения вещества и поля. В настоящее время общепризнано, что все взаимодействия осуществляются посредством полей, например гравитационных, электромагнитных, полей ядерных сил. Поле наряду с веществом является одной из форм существования материи. Неразрывная связь поля и вещества, а также различие в их свойствах будут рассмотрены по мере изучения курса.

---

\* Все данные приведены по биографическому справочнику Ю. А. Храмова «Физики» (М.: Наука, 1983).

Физика — наука о наиболее простых и вместе с тем наиболее общих формах движения материи и их взаимных превращениях. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая и др.) присутствуют во всех высших и более сложных формах движения материи (химических, биологических и др.). Поэтому они, будучи наиболее простыми, являются в то же время наиболее общими формами движения материи. Высшие и более сложные формы движения материи — предмет изучения других наук (химии, биологии и др.).

Физика тесно связана с естественными науками. Эта теснейшая связь физики с другими отраслями естествознания, как отмечал академик С. И. Вавилов (1891—1955; российский физик и общественный деятель), привела к тому, что физика глубочайшими корнями выросла в астрономию, геологию, химию, биологию и другие естественные науки. В результате образовался ряд новых смежных дисциплин, таких, как астрофизика, биофизика и др.

Физика тесно связана и с техникой, причем эта связь имеет двусторонний характер. Физика выросла из потребностей техники (развитие механики у древних греков, например, было вызвано запросами строительной и военной техники того времени), и техника, в свою очередь, определяет направление физических исследований (например, в свое время задача создания наиболее экономичных тепловых двигателей вызвала бурное развитие термодинамики). С другой стороны, от развития физики зависит технический уровень производства. Физика — база для создания новых отраслей техники (электронная техника, ядерная техника и др.).

Бурный темп развития физики, растущие связи ее с техникой указывают на значительную роль курса физики во втузе: это фундаментальная база для теоретической подготовки инженера, без которой его успешная деятельность невозможна.

### Единицы физических величин

Основным методом исследования в физике является опыт — основанное на практике чувственно-эмпирическое познание объективной действительности, т. е. наблюдение исследуемых явлений в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за ходом явлений и многократно воспроизводить его при повторении этих условий.

Для объяснения экспериментальных фактов выдвигаются гипотезы. **Гипотеза** — это научное предположение, выдвигаемое для объяснения какого-либо явления и требующее проверки на опыте и теоретического обоснования для того, чтобы стать достоверной научной теорией.

В результате обобщения экспериментальных фактов, а также результатов деятельности людей устанавливаются **физические законы** — устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе. Наиболее важные законы устанавливают связь между физическими величинами, для чего необходимо эти величины измерять. Измерение физической величины есть действие, выполняемое с помощью средств измерений для нахождения значения физической величины в принятых единицах. Единицы физических величин можно выбрать произвольно, но тогда возникнут трудности при их сравнении. Поэтому целесообразно ввести систему единиц, охватывающую единицы всех физических величин.

Для построения системы единиц произвольно выбирают единицы для нескольких не зависящих друг от друга физических величин. Эти единицы называются **основными**. Остальные же величины и их единицы выводятся из законов, связывающих эти величины и их единицы с основными. Они называются **производными**.

В настоящее время обязательна к применению в научной, а также в учебной литературе Система Интернациональная (СИ), которая строится на семи основных единицах — метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль, кандела — и двух дополнительных — радиан истерадиан.

**Метр** (м) — длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299792458$  с.

**Килограмм** (кг) — масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

**Секунда** (с) — время, равное  $9192631770$  периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

**Ампер** (А) — сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создаст между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Кельвин** (К) —  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль** (моль) — количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в нуклиде  $^{12}\text{C}$  массой 0,012 кг.

**Кандела** (кд) — сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет  $1/683$  Вт/ср.

**Радиан** (рад) — угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**стерадиан** (ср) — телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Для установления производных единиц используют физические законы, связывающие их с основными единицами. Например, из формулы равномерного прямолинейного движения  $v=s/t$  ( $s$  — пройденный путь,  $t$  — время) производная единица скорости получается равной 1 м/с.

## 1 ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

### Элементы кинематики

#### Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения

**Механика** — часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение. **Механическое движение** — это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Развитие механики как науки начинается с III в. до н. э., когда древнегреческий ученый Архимед (287—212 до н. э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564—1642) и окончательно сформулированы английским ученым И. Ньютоном (1643—1727).

Механика Галилея—Ньютона называется **классической механикой**. В ней изучаются законы движения макроскопических тел, скорости которых малы по сравнению со скоростью света  $c$  в вакууме. Законы движения макроскопических тел со скоростями, сравнимыми со скоростью  $c$ , изучаются **релятивистской механикой**, основанной на **специальной теории относительности**, сформулированной А. Эйнштейном (1879—1955). Для описания движения микроскопических тел

(отдельные атомы и элементарные частицы) законы классической механики неприменимы — они заменяются законами **квантовой механики**.

В первой части нашего курса мы будем изучать механику Галилея—Ньютона, т.е. рассматривать движение макроскопических тел со скоростями, значительно меньшими скорости  $c$ . В классической механике общепринята концепция пространства и времени, разработанная И. Ньютоном и господствовавшая в естествознании на протяжении XVII—XIX вв. Механика Галилея—Ньютона рассматривает пространство и время как объективные формы существования материи, но в отрыве друг от друга и от движения материальных тел, что соответствовало уровню знаний того времени.

Механика делится на три раздела: 1) кинематику; 2) динамику; 3) статику.

Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

**Динамика** изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

**Статика** изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия. Поэтому законы статики отдельно от законов динамики физика не рассматривает.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *физические модели*. Простейшей моделью является **материальная точка** — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь. Понятие материальной точки — абстрактное, но его введение облегчает решение практических задач. Например, изучая движение планет по орбитам вокруг Солнца, можно принять их за материальные точки.

Под воздействием тел друг на друга тела могут деформироваться, т. е. изменять свою форму и размеры. Поэтому в механике вводится еще одна модель — абсолютно твердое тело. Абсолютно твердым телом называется тело, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений. Поступательное движение — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению. Вращательное движение — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Положение материальной точки определяется по отношению к какому-либо другому, произвольно выбранному телу, называемому телом отсчета. С ним связывается система отсчета — совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчета. В декартовой системе координат, используемой наиболее часто, положение точки  $A$  в данный момент времени по отношению к этой системе характеризуется тремя координатами  $x$ ,  $y$  и  $z$  или радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , проведенным из начала системы координат в данную точку (рис. 1).

При движении материальной точки ее координаты с течением времени изменяются. В общем случае ее движение определяется скалярными уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1.1)$$

эквивалентными векторному уравнению

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и соответственно (1.2) называются **кинематическими уравнениями** движения **материальной точки**.

Число независимых координат, полностью определяющих положение точки в пространстве, называется **числом степеней свободы**. Если материальная точка свободно движется в пространстве, то, как уже было сказано, она обладает тремя степенями свободы (координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$ ), если она движется по некоторой поверхности, то двумя степенями свободы, если вдоль некоторой линии, то одной степенью свободы.

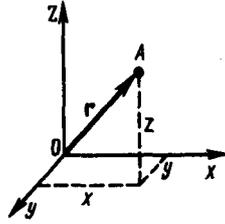


Рис. 1

- Что называется материальной точкой? Почему в механике вводят такую модель?
- Что такое система отсчета?
- Что такое вектор перемещения? Всегда ли модуль вектора перемещения равен отрезку пути, пройденному точкой?
- Какое движение называется поступательным? вращательным?

Исключая  $t$  в уравнениях (1.1) и (1.2), получим уравнение траектории движения материальной точки.

**Траектория** движения материальной точки — линия, описываемая этой точкой в пространстве. В зависимости от формы траектории движение может быть прямолинейным или криволинейным.

Рассмотрим движение материальной точки вдоль произвольной траектории (рис. 2). Отсчет времени начнем с момента, когда точка находилась в положении  $A$ . Длина участка траектории  $AB$ , пройденного материальной точкой с момента начала отсчета времени, называется **длиной пути**  $\Delta s$  и является *скалярной функцией* времени:  $\Delta s = \Delta s(t)$ . **Вектор**  $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением**.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения  $|\Delta \mathbf{r}|$  равен пройденному пути  $\Delta s$ .

### Скорость

Для характеристики движения материальной точки вводится векторная величина — скорость, которой определяется как *быстрота* движения, так и его *направление* в данный момент времени.

Пусть материальная точка движется по какой-либо криволинейной траектории так, что в момент времени  $t$  ей соответствует радиус-вектор  $\mathbf{r}_0$  (рис. 3). В течение малого промежутка времени  $\Delta t$  точка пройдет путь  $\Delta s$  и получит элементарное (бесконечно малое) перемещение  $\Delta \mathbf{r}$ .

**Вектором средней скорости**  $\langle \mathbf{v} \rangle$  называется отношение приращения  $\Delta \mathbf{r}$  радиуса-вектора точки к промежутку времени  $\Delta t$ :

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}. \quad (2.1)$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением  $\Delta \mathbf{r}$ . При неограниченном уменьшении  $\Delta t$  средняя скорость стремится к предельному значению, которое называется **мгновенной скоростью**  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

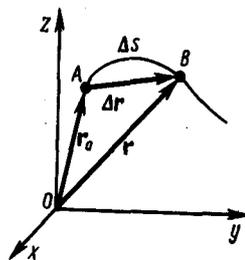


Рис. 2

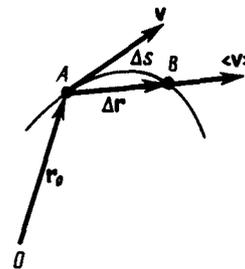


Рис. 3

Мгновенная скорость  $\mathbf{v}$ , таким образом, есть векторная величина, равная первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени. Так как секущая в пределе совпадает с касательной, то вектор скорости  $\mathbf{v}$  направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 3). По мере уменьшения  $\Delta t$  путь  $\Delta s$  все больше будет приближаться к  $|\Delta \mathbf{r}|$ , поэтому модуль мгновенной скорости

$$v = |\mathbf{v}| = \left| \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени:

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (2.2)$$

При **неравномерном движении** — модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. В данном случае пользуются скалярной величиной  $\langle v \rangle$  — **средней скоростью** неравномерного движения:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Из рис. 3 вытекает, что  $\langle v \rangle > |\langle v \rangle|$ , так как  $\Delta s > |\Delta r|$ , и только в случае прямолинейного движения

$$\Delta s = |\Delta r|.$$

Если выражение  $ds = v dt$  (см. формулу (2.2)) проинтегрировать по времени в пределах от  $t$  до  $t + \Delta t$ , то найдем длину пути, пройденного точкой за время  $\Delta t$ :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt. \quad (2.3)$$

В случае **равномерного движения** числовое значение мгновенной скорости постоянно; тогда выражение (2.3) примет вид

$$s = v \int_t^{t+\Delta t} dt = v \Delta t.$$

Длина пути, пройденного точкой за промежутки времени от  $t_1$  до  $t_2$ , дается интегралом

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

### Ускорение и его составляющие

В случае неравномерного движения важно знать, как быстро изменяется скорость с течением времени. Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**.

Рассмотрим **плоское движение**, т.е. движение, при котором все участки траектории точки лежат в одной плоскости. Пусть вектор  $v$  задает скорость точки  $A$  в момент времени  $t$ . За время  $\Delta t$  движущаяся точка перешла в положение  $B$  и приобрела скорость, отличную от  $v$  как по модулю, так и направлению и равную  $v_1 = v + \Delta v$ . Перенесем вектор  $v_1$  в точку  $A$  и найдем  $\Delta v$  (рис. 4).

**Средним ускорением** неравномерного движения в интервале от  $t$  до  $t + \Delta t$  называется векторная величина, равная отношению изменения скорости  $\Delta v$  к интервалу времени  $\Delta t$

$$\langle a \rangle = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

**Мгновенным ускорением**  $a$  (ускорением) материальной точки в момент времени  $t$  будет предел среднего ускорения:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle a \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Таким образом, ускорение  $a$  есть векторная величина, равная первой производной скорости по времени. Разложим вектор  $\Delta v$  на две составляющие. Для этого из точки  $A$  (рис. 4) по направлению скорости  $v$  отложим вектор  $\overline{AD}$ , по модулю равный  $v_1$ . Очевидно, что вектор  $\overline{CD}$ , равный  $\Delta v_\tau$ , определяет изменение скорости за время  $\Delta t$  *по модулю*:  $\Delta v_\tau = v_1 - v$ . Вторая же составляющая  $\Delta v_n$  вектора  $\Delta v$  характеризует изменение скорости за время  $\Delta t$  *по направлению*.

**Тангенциальная составляющая ускорения**

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

т. е. равна первой производной по времени от модуля скорости, определяя тем самым быстроту изменения скорости по модулю.

Найдем вторую составляющую ускорения. Допустим, что точка  $B$  достаточно близка к точке  $A$ , поэтому  $\Delta s$  можно считать дугой окружности некоторого радиуса  $r$ , мало отличающейся от хорды  $AB$ . Тогда из подобия треугольников  $AOB$  и  $EAD$  следует  $\Delta v_n/AB = v_1/r$ , но так как  $AB = v\Delta t$ , то

$$\frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v v_1}{r}.$$

В пределе при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим  $v_1 \rightarrow v$ .

Поскольку  $v_1 \rightarrow v$ , угол  $EAD$  стремится к нулю, а так как треугольник  $EAD$  равнобедренный, то угол  $ADE$  между  $v$  и  $\Delta v_n$  стремится к прямому. Следовательно, при  $\Delta t \rightarrow 0$  векторы  $\Delta v_n$  и  $v$  оказываются взаимно перпендикулярными. Так как вектор скорости направлен по касательной к траектории, то вектор  $\Delta v_n$ , перпендикулярный вектору скорости, направлен к центру ее кривизны. Вторая составляющая ускорения, равная

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r},$$

называется **нормальной составляющей ускорения** и направлена по нормали к траектории к центру ее кривизны (поэтому ее называют также **центростремительным ускорением**).

**Полное ускорение** тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих (рис.5):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n.$$

Итак, *тангенциальная* составляющая ускорения характеризует *быстроту изменения скорости по модулю* (направлена по касательной к траектории), а *нормальная* составляющая ускорения — *быстроту изменения скорости по направлению* (направлена к центру кривизны траектории).

В зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения движение можно классифицировать следующим образом:

- 1)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное равномерное движение;
- 2)  $a_\tau = a = \text{const}$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное равнопеременное движение. При таком виде движения

$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}.$$

Если начальный момент времени  $t_1=0$ , а начальная скорость  $v_1=v_0$ , то, обозначив  $t_2=t$  и  $v_2=v$ , получим  $a = (v - v_0)/t$ , откуда

$$v = v_0 + at.$$

Проинтегрировав эту формулу в пределах от нуля до произвольного момента времени  $t$ , найдем, что длина пути, пройденного точкой, в случае равнопеременного движения

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + at^2/2;$$

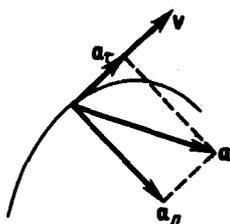


Рис. 5

- Что называется угловой скоростью? угловым ускорением? Как определяются их направления?
- Какова связь между линейными и угловыми величинами?

- 3)  $a_\tau = f(t)$ ,  $a_n = 0$  — прямолинейное движение с переменным ускорением;
- 4)  $a_\tau = 0$ ,  $a_n = \text{const}$ . При  $a_\tau = 0$  скорость по модулю не изменяется, а изменяется по направлению. Из формулы  $a_n = v^2/r$  следует, что радиус кривизны должен быть постоянным. Следовательно, движение по окружности является равномерным;

- 5)  $a_\tau = 0, a_n \neq 0$  — равномерное криволинейное движение;  
 6)  $a_\tau = \text{const}, a_n \neq 0$  — криволинейное равнопеременное движение;  
 7)  $a_\tau = f(t), a_n \neq 0$  — криволинейное движение с переменным ускорением.

### Угловая скорость и угловое ускорение

Рассмотрим твердое тело, которое вращается вокруг неподвижной оси. Тогда отдельные точки этого тела будут описывать окружности разных радиусов, центры которых лежат на оси вращения. Пусть некоторая точка движется по окружности радиуса  $R$  (рис. 6). Ее положение через промежуток времени  $\Delta t$  зададим углом  $\Delta\varphi$ . Элементарные (бесконечно малые) повороты можно рассматривать как векторы (они обозначаются  $\vec{\Delta\varphi}$  или  $\vec{d\varphi}$ ). Модуль вектора  $\vec{d\varphi}$  равен углу поворота, а его направление совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется **правилу правого винта** (рис.6). Векторы, направления которых связываются с направлением вращения, называются **псевдовекторами** или **аксиальными векторами**. Эти векторы не имеют определенных точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

**Угловой скоростью** называется векторная величина, равная первой производной угла поворота тела по времени:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}.$$

Вектор  $\vec{\omega}$  направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же, как и вектор  $\vec{d\varphi}$  (рис.7). Размерность угловой скорости  $\dim \omega = T^{-1}$ , а ее единица — радиан в секунду (рад/с).  
 Линейная скорость точки (см. рис. 6)

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R\Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega,$$

т. е.

$$\mathbf{v} = \omega R.$$

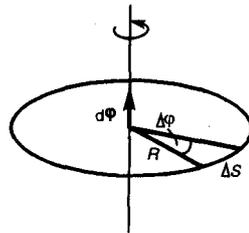


Рис. 6

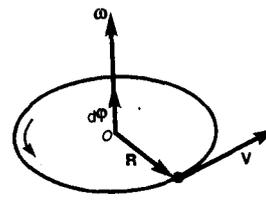


Рис. 7

В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как векторное произведение:

$$\mathbf{v} = [\vec{\omega} \mathbf{R}].$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен  $\omega R \sin(\widehat{\vec{\omega} \mathbf{R}})$ , а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{\omega}$  к  $\mathbf{R}$ .

Если ( $\omega = \text{const}$ , то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения**  $T$  — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т.е. поворачивается на угол  $2\pi$ . Так как промежутку времени  $\Delta t = T$  соответствует  $\Delta\varphi = 2\pi$ , то  $\omega = 2\pi/T$ , откуда

$$T = 2\pi/\omega.$$

Число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени называется частотой вращения:

$$n = 1/T = \omega/(2\pi),$$

откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

Угловым ускорением называется векторная величина, равная первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$  (рис.8), при замедленном — противонаправлен ему (рис.9).

Тангенциальная составляющая ускорения  $a_{\tau} = \frac{dv}{dt}$ ,  $v = \omega R$  и

$$a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon.$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

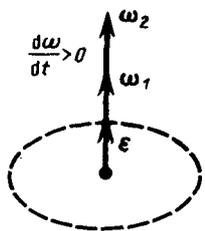


Рис. 8

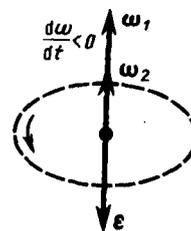


Рис. 9

Таким образом, связь между линейными (длина пути  $s$ , пройденного точкой по дуге окружности радиуса  $R$ , линейная скорость  $v$ , тангенциальное ускорение  $a_{\tau}$ , нормальное ускорение  $a_n$ ) и угловыми величинами (угол поворота  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$ , угловое ускорение  $\varepsilon$ ) выражается следующими формулами:

$$s = R\varphi, \quad v = R\omega, \quad a_{\tau} = R\varepsilon, \quad a_n = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ( $\varepsilon = \text{const}$ )

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \varepsilon t^2/2,$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость.

### Первый закон Ньютона. Масса. Сила

Динамика является основным разделом механики, в ее основе лежат три закона Ньютона, сформулированные им в 1687 г. Законы Ньютона играют исключительную роль в механике и являются (как и все физические законы) обобщением результатов огромного человеческого опыта. Их рассматривают как *систему взаимосвязанных законов* и опытной проверке подвергают не каждый отдельный закон, а всю систему в целом.

**Первый закон Ньютона:** *всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние.* Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется **инертностью**. Поэтому первый закон Ньютона называют также **законом инерции**.

Механическое движение относительно, и его характер зависит от системы отсчета. Первый закон Ньютона выполняется не во всякой системе отсчета, а те системы, по отношению к которым он выполняется, называются **инерциальными системами отсчета**. Инерциальной системой отсчета является такая система отсчета, относительно которой материальная точка, *свободная от внешних воздействий*, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. *Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.*

Опытным путем установлено, что инерциальной можно считать гелиоцентрическую (звездную) систему отсчета (начало координат находится в центре Солнца, а оси проведены в направлении определенных звезд). Система отсчета, связанная с Землей, строго говоря, неинерциальна, однако эффекты,

обусловленные ее неинерциальностью (Земля вращается вокруг собственной оси и вокруг Солнца), при решении многих задач пренебрежимо малы, и в этих случаях ее можно считать инерциальной.

Из опыта известно, что при одинаковых воздействиях различные тела неодинаково изменяют скорость своего движения, т.е., иными словами, приобретают различные ускорения. Ускорение зависит не только от величины воздействия, но и от свойств самого тела (от его массы).

**Масса** тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (**инертная масса**) и гравитационные (**гравитационная масса**) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$  их значения).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие силы. Под действием сил тела либо изменяют скорость движения, т.е. приобретают ускорения (динамическое проявление сил), либо деформируются, т.е. изменяют свою форму и размеры (статическое проявление сил). В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения. Итак, **сила** — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры.

### Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона — *основной закон динамики поступательного движения* — отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Если рассмотреть действие различных сил на одно и то же тело, то оказывается, что ускорение, приобретаемое телом, всегда прямо пропорционально равнодействующей приложенных сил:

$$a \sim F \quad (m = \text{const}). \quad (6.1)$$

При действии одной и той же силы на тела с разными массами их ускорения оказываются различными, а именно

$$a \sim 1/m \quad (F = \text{const}). \quad (6.2)$$

Используя выражения (6.1) и (6.2) и учитывая, что сила и ускорение — величины векторные, можем записать

$$\mathbf{a} = k\mathbf{F}/m. \quad (6.3)$$

Соотношение (6.3) выражает второй закон Ньютона: ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).

В СИ коэффициент пропорциональности  $k=1$ . Тогда

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m,$$

или

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (6.4)$$

Учитывая, что масса материальной точки (тела) в классической механике есть величина постоянная, в выражении (6.4) ее можно внести под знак производной:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (6.5)$$

Векторная величина

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}, \quad (6.6)$$

численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется **импульсом (количеством движения)** этой материальной точки.

Подставляя (6.6) в (6.5), получим

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (6.7)$$

Это выражение — **более общая формулировка второго закона Ньютона**: скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (6.7) называется **уравнением движения материальной точки**.

Единица силы в СИ — **ньютон (Н)**: 1 Н — сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение  $1 \text{ м/с}^2$  в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отсчета. Первый закон Ньютона можно получить из второго. Действительно, в случае равенства нулю равнодействующей сил (при отсутствии воздействия на тело со стороны других тел) ускорение (см. (6.3)) также равно нулю. Однако *первый закон Ньютона* рассматривается как *самостоятельный закон* (а не как следствие второго закона), так как именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета, в которых только и выполняется уравнение (6.7).

В механике большое значение имеет **принцип независимости действия сил**: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было.

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то, согласно принципу независимости действия сил, под  $F$  во втором законе Ньютона понимают результирующую силу.

### Третий закон Ньютона

Взаимодействие между материальными точками (телами) определяется **третьим законом Ньютона**: всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:

$$F_{12} = - F_{21}, \quad (7.1)$$

где  $F_{12}$  — сила, действующая на первую материальную точку со стороны второй;

$F_{21}$  — сила, действующая на вторую материальную точку со стороны первой. Эти силы приложены к *разным* материальным точкам (телам), всегда действуют *парами* и являются силами *одной природы*.

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной* материальной точки к динамике *системы* материальных точек. Это следует из того, что и для системы материальных точек взаимодействие сводится к силам парного взаимодействия между материальными точками.

### Силы трения

Обсуждая до сих пор силы, мы не интересовались их происхождением. Однако в механике мы будем рассматривать различные силы: трения, упругости, тяготения.

Из опыта известно, что всякое тело, движущееся по горизонтальной поверхности другого тела, при отсутствии действия на него других сил с течением времени замедляет свое движение и в конце концов останавливается. Это можно объяснить существованием **силы трения**, которая препятствует скольжению соприкасающихся тел друг относительно друга. Силы трения зависят от относительных скоростей тел. Силы трения могут быть разной природы, но в результате их действия механическая энергия всегда превращается во внутреннюю энергию соприкасающихся тел.

Различают внешнее (сухое) и внутреннее (жидкое или вязкое) трение. **Внешним трением** называется трение, возникающее в плоскости касания двух соприкасающихся тел при их относительном перемещении. Если соприкасающиеся тела неподвижны друг относительно друга, говорят о трении покоя, если же происходит относительное перемещение этих тел, то в зависимости от характера их относительного движения говорят о **трении скольжения**, **качения** или **верчения**.

**Внутренним трением** называется трение между частями одного и того же тела, например между различными слоями жидкости или газа, скорости которых меняются от слоя к слою. В отличие от внешнего трения здесь отсутствует трение покоя. Если тела скользят относительно друг друга и разделены прослойкой вязкой жидкости (смазки), то трение происходит в слое смазки. В таком случае говорят о **гидродинамическом трении** (слой смазки достаточно толстый) и **граничном трении** (толщина смазочной прослойки  $\approx 0,1$  мкм и меньше).

Обсудим некоторые закономерности внешнего трения. Это трение обусловлено шероховатостью соприкасающихся поверхностей; в случае же очень гладких поверхностей трение обусловлено силами межмолекулярного притяжения.

Рассмотрим лежащее на плоскости тело (рис. 11), к которому приложена горизонтальная сила  $F$ . Тело придет в движение лишь тогда, когда приложенная сила  $F$  будет больше силы трения  $F_{\text{тр}}$ .

Французские физики Г. Амонтон (1663—1705) и Ш. Кулон (1736—1806) опытным путем установили следующий **закон**: сила трения скольжения  $F_{\text{тр}}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления, с которой одно тело действует на другое:

$$F_{\text{тр}} = fN,$$

где  $f$  — коэффициент трения скольжения, зависящий от свойств соприкасающихся поверхностей.

Найдем значение коэффициента трения. Если тело находится на наклонной плоскости с углом наклона  $\alpha$  (рис. 12), то оно приходит в движение, только когда тангенциальная составляющая  $F$  силы тяжести  $P$  больше силы трения  $F_{\text{тр}}$ . Следовательно, в предельном случае (начало скольжения тела)  $F = F_{\text{тр}}$ . или  $P \sin \alpha_0 = fN = fP \cos \alpha_0$ , откуда

$$f = \operatorname{tg} \alpha_0.$$

Таким образом, коэффициент трения равен тангенсу угла  $\alpha_0$ , при котором начинается скольжение тела по наклонной плоскости.

Для гладких поверхностей определенную роль начинает играть межмолекулярное притяжение. Для них применяется **закон трения скольжения**

$$F_{\text{тр}} = f_{\text{ист}} (N + Sp_0),$$

где  $p_0$  — добавочное давление, обусловленное силами межмолекулярного притяжения, которые быстро уменьшаются с увеличением расстояния между частицами;  $S$  — площадь контакта между телами;  $f_{\text{ист}}$  — истинный коэффициент трения скольжения.

Трение играет большую роль в природе и технике. Благодаря трению движется транспорт, удерживается забитый в стену гвоздь и т. д.

В некоторых случаях силы трения оказывают вредное действие и поэтому их надо уменьшать. Для этого на трущиеся поверхности наносят смазку (сила трения уменьшается примерно в 10 раз), которая заполняет неровности между этими поверхностями и располагается тонким слоем между ними так, что поверхности как бы перестают касаться друг друга, а скользят друг относительно друга отдельные слои жидкости. Таким образом, внешнее трение твердых тел заменяется значительно меньшим внутренним трением жидкости.

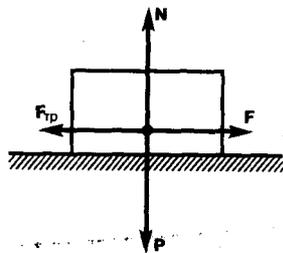


Рис. 11

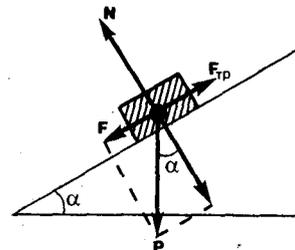


Рис. 12

Радикальным способом уменьшения силы трения является замена трения скольжения трением качения (шариковые и роликовые подшипники и т. д.). Сила трения качения определяется по закону, установленному Кулоном:

$$F_{\text{тр}} = f_k N/r, \quad (8.1)$$

где  $r$  — радиус катящегося тела;  $f_k$  — коэффициент трения качения, имеющий размерность  $\dim f_k = L$ . Из (8.1) следует, что сила трения качения обратно пропорциональна радиусу катящегося тела.

### Закон сохранения импульса. Центр масс

Для вывода закона сохранения импульса рассмотрим некоторые понятия. Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются — **внутренними**. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются **внешними**. Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой** (или **изолированной**). Если мы имеем механическую систему, состоящую из многих тел, то, согласно третьему закону Ньютона, силы, действующие между этими телами, будут равны и противоположно направлены, т. е. геометрическая сумма внутренних сил равна нулю.

Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  тел, масса и скорость которых соответственно равны  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , и  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Пусть  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  — равнодействующие внутренних сил, действующих на каждое из этих тел, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — равнодействующие внешних сил. Запишем второй закон Ньютона для каждого из  $n$  тел механической системы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 v_1) &= F'_1 + F_1, \\ \frac{d}{dt}(m_2 v_2) &= F'_2 + F_2, \\ &\dots \\ \frac{d}{dt}(m_n v_n) &= F'_n + F_n. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти уравнения, получаем

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F'_1 + F'_2 + \dots + F'_n + F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Но так как геометрическая сумма внутренних сил механической системы по третьему закону Ньютона равна нулю, то

$$\frac{d}{dt}(m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n) = F_1 + F_2 + \dots + F_n,$$

или

$$\frac{dp}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n, \quad (9.1)$$

где  $p = \sum_{i=1}^n m_i v_i$  — импульс системы. Таким образом, производная по времени от импульса механической системы равна геометрической сумме внешних сил, действующих на систему.

В случае отсутствия внешних сил (рассматриваем замкнутую систему)

$$\frac{dp}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i v_i) = 0, \quad \text{т. е.} \quad p = \sum_{i=1}^n m_i v_i = \text{const.}$$

Последнее выражение и является **законом сохранения импульса**: импульс замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения импульса справедлив не только в классической физике, хотя он и получен как следствие законов Ньютона. Эксперименты доказывают, что он выполняется и для замкнутых систем микрочастиц (они подчиняются законам квантовой механики). Этот закон носит универсальный характер, т. е. закон сохранения импульса — *фундаментальный закон природы*.

Закон сохранения импульса является следствием определенного свойства симметрии пространства — его однородности. **Однородность пространства** заключается в том, что при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого ее физические свойства и законы движения не изменяются, иными словами, не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчета.

Отметим, что, согласно (9.1), импульс сохраняется и для незамкнутой системы, если геометрическая сумма всех внешних сил равна нулю.

В механике Галилея—Ньютона из-за независимости массы от скорости импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс** (или **центром инерции**) системы материальных точек называется воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы.

Учитывая, что  $p_i = m_i v_i$ , а  $\sum_{i=1}^n p_i$  есть импульс  $p$  системы, можно написать

$$p = m v_C, \quad (9.2)$$

т. е. импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс.

Подставив выражение (9.2) в уравнение (9.1), получим

$$m \frac{dv_C}{dt} = F_1 + F_2 + \dots + F_n, \quad (9.3)$$

т. е. центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. Выражение (9.3) представляет собой **закон движения центра масс**.

В соответствии с (9.2) из закона сохранения импульса вытекает, что *центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным*.

## Работа и энергия

### Энергия, работа, мощность

Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную и др. В одних явлениях форма движения материи не изменяется (например, горячее тело нагревает холодное), в других — переходит в иную форму (например, в результате трения механическое движение превращается в тепловое). Однако существенно, что во всех случаях энергия, отданная (в той или иной форме) одним телом другому телу, равна энергии, полученной последним телом.

Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел. Чтобы количественно характеризовать процесс обмена энергией между взаимодействующими телами, в механике вводится понятие **работы силы**.

Если тело движется *прямолинейно* и на него действует постоянная сила  $F$ , которая составляет некоторый угол  $\alpha$  с направлением перемещения, то работа этой силы равна произведению проекции силы  $F_s$  на направление перемещения ( $F_s = F \cos \alpha$ ), умноженной на перемещение точки приложения силы:

$$A = F_s s = F s \cos \alpha. \quad (11.1)$$

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому формулой (11.1) пользоваться нельзя. Если, однако, рассмотреть элементарное перемещение  $dr$ , то силу  $F$  можно считать постоянной, а движение точки ее приложения — прямолинейным. **Элементарной работой** силы  $F$  на перемещении  $dr$  называется *скалярная* величина

$$dA = F dr = F \cos \alpha ds = F_s ds,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $F$  и  $dr$ ;  $ds = |dr|$  — элементарный путь;  $F_s$  — проекция вектора  $F$  на вектор  $dr$  (рис. 13).

Работа силы на участке траектории от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути. Эта сумма приводится к интегралу

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = \int_1^2 F_s ds. \quad (11.2)$$

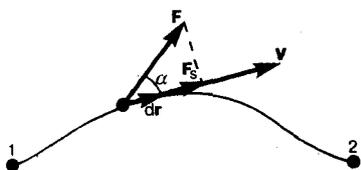


Рис. 13

- В чем различие между понятиями энергии и работы?
- Как найти работу переменной силы?

Для вычисления этого интеграла надо знать зависимость силы  $F_s$  от пути  $s$  вдоль траектории 1—2. Пусть эта зависимость представлена графически (рис. 14), тогда искомая работа  $A$  определяется на графике площадью заштрихованной фигуры. Если, например, тело движется прямолинейно, сила  $F = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ , то получим

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F s \cos \alpha,$$

где  $s$  — пройденный телом путь (см. также формулу (11.1)).

Из формулы (11.1) следует, что при  $\alpha < \pi/2$  работа силы положительна, в этом случае составляющая  $F_s$  совпадает по направлению с вектором скорости движения  $v$  (см. рис. 13). Если  $\alpha > \pi/2$ , то работа силы отрицательна. При  $\alpha = \pi/2$  (сила направлена перпендикулярно перемещению) работа силы равна нулю.

Единица работы — **джоуль** (Дж): 1 Дж — работа, совершаемая силой 1 Н на пути 1 м (1 Дж = 1 Н · м).

Чтобы охарактеризовать скорость совершения работы, вводят понятие **мощности**:

$$N = \frac{dA}{dt}. \quad (11.3)$$

За время  $dt$  сила  $F$  совершает работу  $F dr$ , и мощность, развиваемая этой силой, в данный момент времени

$$N = \frac{F dr}{dt} = Fv,$$

т. е. равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы;  $N$  — величина *скалярная*.

Единица мощности — **ватт** (Вт): 1 Вт — мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж (1 Вт = 1 Дж/с).

### Кинетическая и потенциальная энергии

**Кинетическая энергия** механической системы — это энергия механического движения этой системы.

Сила  $F$ , действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной работы. Таким образом, работа  $dA$  силы  $F$  на пути, который тело прошло за время возрастания скорости от 0 до  $v$ , идет на увеличение кинетической энергии  $dT$  тела, т. е.

$$dA = dT.$$

Используя второй закон Ньютона  $F = m \frac{dv}{dt}$  и умножая на перемещение  $dr$  получаем

$$F dr = m \frac{dv}{dt} dr = dA.$$

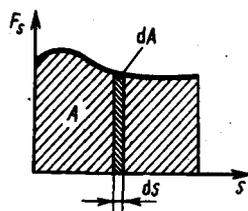


Рис. 14

- Какую работу совершает равнодействующая всех сил, приложенных к телу, равномерно движущемуся по окружности?
- Что такое мощность? Выведите ее формулу.

Так как  $v = \frac{dr}{dt}$  то  $dA = mv dv = mv dv = dT$ , откуда

$$T = \int_0^v mv dv = mv^2/2.$$

Таким образом, тело массой  $m$ , движущееся со скоростью  $v$ , обладает кинетической энергией

$$T = mv^2/2. \quad (12.1)$$

Из формулы (12.1) видно, что кинетическая энергия зависит только от массы и скорости тела, т. е. кинетическая энергия системы есть функция состояния ее движения.

При выводе формулы (12.1) предполагалось, что движение рассматривается в инерциальной системе отсчета, так как иначе нельзя было бы использовать законы Ньютона. В разных инерциальных системах отсчета, движущихся друг относительно друга, скорость тела, а следовательно, и его кинетическая энергия будут неодинаковы. Таким образом, кинетическая энергия зависит от выбора системы отсчета.

**Потенциальная энергия** — механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Пусть взаимодействие тел осуществляется посредством силовых полей (например, поля упругих сил, поля гравитационных сил), характеризующихся тем, что работа, совершаемая действующими силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Такие поля называются **потенциальными**, а силы, действующие в них, — **консервативными**. Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется **диссипативной**; ее примером является сила трения.

Тело, находясь в потенциальном поле сил, обладает потенциальной энергией  $\Pi$ . Работа консервативных сил при элементарном (бесконечно малом) изменении конфигурации системы равна приращению потенциальной энергии, взятому со знаком минус, так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии:

$$dA = - d\Pi. \quad (12.2)$$

Работа  $dA$  выражается как скалярное произведение силы  $F$  на перемещение  $dr$  и выражение (12.2) можно записать в виде

$$F dr = - d\Pi. \quad (12.3)$$

Следовательно, если известна функция  $\Pi(r)$ , то из формулы (12.3) можно найти силу  $F$  по модулю и направлению.

Потенциальная энергия может быть определена исходя из (12.3) как

$$\Pi = - \int F dr + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, т. е. потенциальная энергия определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной. Это, однако, не отражается на физических законах, так как в них входит или разность потенциальных энергий в двух положениях тела, или производная  $\Pi$  по координатам. Поэтому потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю (выбирают нулевой уровень отсчета), а энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня. Для консервативных сил

$$F_x = - \frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = - \frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = - \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

или в векторном виде

$$F = - \text{grad } \Pi, \quad (12.4)$$

где

$$\text{grad } \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \mathbf{k} \quad (12.5)$$

( $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  — единичные векторы координатных осей). Вектор, определяемый выражением (12.5), называется **градиентом скаляра**  $\Pi$ .

Для него наряду с обозначением  $\text{grad } \Pi$  применяется также обозначение  $\nabla \Pi$ .  $\nabla$  («набла») означает символический вектор, называемый **оператором Гамильтона\*** или **набла-оператором**:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (12.6)$$

---

\* У. Гамильтон (1805—1865) — ирландский математик и физик.

Конкретный вид функции  $\Pi$  зависит от характера силового поля. Например, потенциальная энергия тела массой  $m$ , поднятого на высоту  $h$  над поверхностью Земли, равна

$$\Pi = mgh, \quad (12.7)$$

где высота  $h$  отсчитывается от нулевого уровня, для которого  $\Pi_0=0$ . Выражение (12.7) вытекает непосредственно из того, что потенциальная энергия равна работе силы тяжести при падении тела с высоты  $h$  на поверхность Земли.

Так как начало отсчета выбирается произвольно, то потенциальная энергия может иметь отрицательное значение (*кинетическая энергия всегда положительна!*). Если принять за нуль потенциальную энергию тела, лежащего на поверхности Земли, то потенциальная энергия тела, находящегося на дне шахты (глубина  $h'$ ),  $\Pi = -mgh'$ .

Найдем потенциальную энергию упругодеформированного тела (пружины). Сила упругости пропорциональна деформации:

$$F_{x \text{ упр}} = - kx,$$

где  $F_{x \text{ упр}}$  — проекция силы упругости на ось  $x$ ;  $k$  — коэффициент упругости (для пружины — жесткость), а знак минус указывает, что  $F_{x \text{ упр}}$  направлена в сторону, противоположную деформации  $x$ .

По третьему закону Ньютона, деформирующая сила равна по модулю силе упругости и противоположно ей направлена, т. е.

$$F_x = - F_{x \text{ упр}} = kx.$$

Элементарная работа  $dA$ , совершаемая силой  $F_x$  при бесконечно малой деформации  $dx$ , равна

$$dA = F_x dx = kx dx,$$

а полная работа

$$A = \int_0^x kx dx = kx^2/2$$

идет на увеличение потенциальной энергии пружины. Таким образом, потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = kx^2/2.$$

Потенциальная энергия системы является функцией состояния системы. Она зависит только от конфигурации системы и ее положения по отношению к внешним телам.

**Полная механическая энергия системы** — энергия механического движения и взаимодействия:

$$E = T + \Pi,$$

т. е. равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

### Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии — результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М. В. Ломоносову (1711—1765), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественная формулировка закона сохранения энергии дана немецким врачом Ю. Майером (1814—1878) и немецким естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821—1894).

Рассмотрим систему материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_n$ .

Пусть  $F'_1, F'_2, \dots, F'_n$  — равнодействующие внутренних консервативных сил, действующих на каждую из этих точек, а  $F_1, F_2, \dots, F_n$  — равнодействующие внешних сил, которые также будем считать консервативными. Кроме того, будем считать, что на материальные точки действуют еще и внешние неконсервативные силы; равнодействующие этих сил, действующих на каждую из материальных точек, обозначим  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . При  $v \ll c$  массы материальных точек постоянны и уравнения второго закона Ньютона для этих точек следующие:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{dv_1}{dt} &= F'_1 + F_1 + f_1, \\ m_2 \frac{dv_2}{dt} &= F'_2 + F_2 + f_2, \\ &\dots \dots \dots \\ m_n \frac{dv_n}{dt} &= F'_n + F_n + f_n. \end{aligned}$$

Двигаясь под действием сил, точки системы за интервал времени  $dt$  совершают перемещения, соответственно равные  $dr_1, dr_2, \dots, dr_n$ . Умножим каждое из уравнений скалярно на соответствующее перемещение и, учитывая, что  $dr_i = v_i dt$ , получим

$$\begin{aligned} m_1 (v_1 dv_1) - (F'_1 + F_1) dr_1 &= f_1 dr_1, \\ m_2 (v_2 dv_2) - (F'_2 + F_2) dr_2 &= f_2 dr_2, \\ &\dots \dots \dots \\ m_n (v_n dv_n) - (F'_n + F_n) dr_n &= f_n dr_n. \end{aligned}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i) - \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}_i) d\mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i d\mathbf{r}_i. \quad (13.1)$$

Первый член левой части равенства (13.1)

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n d(m_i v_i^2/2) = dT,$$

где  $dT$  — приращение кинетической энергии системы. Второй член  $\sum_{i=1}^n (\mathbf{F}'_i + \mathbf{F}_i) d\mathbf{r}_i$  равен элементарной работе внутренних и внешних консервативных сил, взятой со знаком минус, т. е. равен элементарному приращению потенциальной энергии  $d\Pi$  системы (см. (12.2)).

Правая часть равенства (13.1) задает работу внешних неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, имеем

$$d(T + \Pi) = dA. \quad (13.2)$$

При переходе системы из состояния 1 в какое-либо состояние 2

$$\int_1^2 d(T + \Pi) = A_{12},$$

т. е. изменение полной механической энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно работе, совершенной при этом внешними неконсервативными силами. Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то из (13.2) следует, что

$$d(T + \Pi) = 0,$$

откуда

$$T + \Pi = E = \text{const}, \quad (13.3)$$

т. е. полная механическая энергия системы сохраняется постоянной. Выражение (13.3) представляет собой **закон сохранения механической энергии**: в системе тел, между которыми действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется, т. е. не изменяется со временем.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются **консервативными системами**. Закон сохранения механической энергии можно сформулировать так: в консервативных системах полная механическая энергия сохраняется.

Закон сохранения механической энергии связан с *однородностью времени*. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Существует еще один вид систем — **диссипативные системы**, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счет преобразования в другие (немеханические) формы энергии. Этот процесс получил название **диссипации** (или **рассеяния**) энергии. Строго говоря, все системы в природе являются диссипативными.

В консервативных системах полная механическая энергия остается постоянной. Могут происходить лишь превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах так, что полная энергия остается неизменной. Этот закон не есть просто закон *количественного* сохранения энергии, а закон сохранения и превращения энергии, выражающий и *качественную* сторону взаимного превращения различных форм движения друг в друга. Закон сохранения и превращения энергии — *фундаментальный закон природы*, он справедлив как для систем макроскопических тел, так и для систем микротел.

В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например силы трения, полная механическая энергия системы не сохраняется. Следовательно, в этих случаях закон сохранения механической энергии несправедлив. Однако при «исчезновении» механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, *энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой*. В этом и заключается *физическая сущность* закона сохранения и превращения энергии — сущность неуничтожимости материи и ее движения.

## . Удар абсолютно упругих и неупругих тел

Примером применения законов сохранения импульса и энергии при решении реальной физической задачи является удар абсолютно упругих и неупругих тел.

**Удар (или соударение)**—это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время. Помимо ударов в прямом смысле этого слова (столкновения атомов или бильiardных шаров) сюда можно отнести и такие, как удар человека о землю при прыжке с трамвая и т. д. Силы взаимодействия между сталкивающимися телами (*ударные* или *мгновенные силы*) столь велики, что внешними силами, действующими на них, можно пренебречь. Это позволяет систему тел в процессе их соударения приближенно рассматривать как замкнутую систему и применять к ней законы сохранения.

Тела во время удара претерпевают деформацию. Сущность удара заключается в том, что кинетическая энергия относительного движения соударяющихся тел на короткое время преобразуется в энергию упругой деформации. Во время удара имеет место перераспределение энергии между соударяющимися телами. Наблюдения показывают, что относительная скорость тел после удара не достигает своего прежнего значения. Это объясняется тем, что нет идеально упругих тел и идеально гладких поверхностей. Отношение нормальных составляющих относительной скорости тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления**  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = v'_n / v_n$$

Если для сталкивающихся тел  $\varepsilon=0$ , то такие тела называются **абсолютно неупругими**, если  $\varepsilon=1$  — **абсолютно упругими**. На практике для всех тел  $0 < \varepsilon < 1$  (например, для стальных шаров  $\varepsilon \approx 0,56$ , для шаров из слоновой кости  $\varepsilon \approx 0,89$ , для свинца  $\varepsilon \approx 0$ ). Однако в некоторых случаях тела можно с большой степенью точности рассматривать либо как абсолютно упругие, либо как абсолютно неупругие.

Прямая, проходящая через точку соприкосновения тел и нормальная к поверхности их соприкосновения, называется **линией удара**. Удар называется **центральный**, если тела до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры масс. Мы будем рассматривать только *центральные* абсолютно упругие и абсолютно неупругие удары.

**Абсолютно упругий удар** — столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию (подчеркнем, что это *идеализированный случай*).

Для абсолютно упругого удара выполняются закон сохранения импульса и закон сохранения кинетической энергии.

## Механика твердого тела

### Момент инерции

При изучении вращения твердых тел будем пользоваться понятием момента инерции. **Моментом инерции** системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная **сумме** произведений масс  $l$  материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу

$$J = \int r^2 dm,$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина  $r$  в этом случае есть функция положения точки с координатами  $x, y, z$ .

В качестве примера найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра высотой  $h$  и радиусом  $R$  относительно его геометрической оси (рис. 23). Разобьем цилиндр на отдельные полые концентрические цилиндры бесконечно малой толщины  $dr$  с внутренним радиусом  $r$  и внешним  $r+dr$ .

Момент инерции каждого полого цилиндра  $dJ=r^2dm$  (так как  $dr \ll r$ , то считаем, что расстояние всех точек цилиндра от оси равно  $r$ ), где  $dm$  — масса всего элементарного цилиндра; его объем  $2\pi rh dr$ . Если  $\rho$  — плотность материала, то  $dm=2\pi rh\rho dr$  и  $dJ=2\pi hr^3\rho dr$ . Тогда момент инерции сплошного цилиндра

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4\rho,$$

но так как  $\pi R^2 h$  — объем цилиндра, то его масса  $m=\pi R^2 h\rho$ , а момент инерции

$$J = \frac{1}{2}mR^2$$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен моменту его инерции  $J_c$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями:

$$J = J_c + ma^2. \quad (16.1)$$

В заключение приведем значения моментов инерции (табл. 1) для некоторых тел (тела считаются однородными,  $m$  — масса тела).

Таблица 1

Тело	Положение оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом $R$	Ось симметрии	$mR^2$
Сплошной цилиндр или диск радиусом $R$	То же	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Прямой тонкий стержень длиной $l$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом $R$	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

### Кинетическая энергия вращения

Рассмотрим абсолютно твердое тело (см. § 1), вращающееся около неподвижной оси  $z$ , проходящей через него (рис. 24). Мысленно разобьем это тело на маленькие объемы с элементарными массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , находящиеся на расстояниях  $r_1, r_2, \dots, r_n$  от оси.

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси отдельные его элементарные объемы массами  $m_i$  опишут окружности различных радиусов  $r_i$ , и имеют различные линейные скорости  $v_i$ . Но так как мы рассматриваем абсолютно твердое тело, то угловая скорость вращения этих объемов одинакова:

$$\omega = v_1/r_1 = v_2/r_2 = \dots = v_n/r_n. \quad (17.1)$$

Кинетическую энергию вращающегося тела найдем как сумму кинетических энергий его элементарных объемов:

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2},$$

или

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Используя выражение (17.1), получаем

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

где  $J_z$  — момент инерции тела относительно оси  $z$ . Таким образом, кинетическая энергия вращающегося тела

$$T_{\text{вр}} = J_z \omega^2 / 2. \quad (17.2)$$

Из сравнения формулы (17.2) с выражением (12.1) для кинетической энергии тела движущегося поступательно ( $T=mv^2/2$ ), следует, что момент инерции — *мера инертности тела* при вращательном движении. Формула (17.2) справедлива для тела вращающегося вокруг неподвижной оси.

В случае плоского движения тела, например цилиндра, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия движения складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$T = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{J_c \omega^2}{2},$$

где  $m$  — масса катящегося тела;  $v_c$  — скорость центра масс тела;  $J_c$  — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс;  $\omega$  — угловая скорость тела.

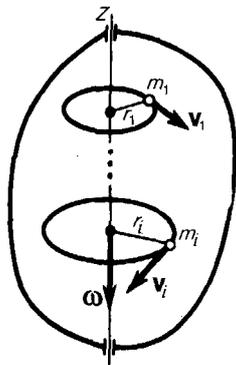


Рис. 24

- Выведите формулу для момента инерции обруча.
- Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
- Какова формула для кинетической энергии тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, и как ее вывести?

### Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

**Моментом силы  $F$  относительно неподвижной точки  $O$**  называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $r$ , проведенного из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $F$  (рис. 25):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]$$

Здесь  $M$  — *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $r$  к  $F$ . Модуль момента силы

$$M = Fr \sin \alpha = Fl, \quad (18.1)$$

где  $\alpha$  — угол между  $r$  и  $F$ ;  $r \sin \alpha = l$  — кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  — **плечо силы**.

**Моментом силы относительно неподвижной оси  $z$**  называется *скалярная* величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $M$  момента силы, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $z$  (рис. 26). Значение момента  $M_z$  не зависит от выбора положения точки  $O$  на оси  $z$ .

Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $M$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью:

$$\mathbf{M}_z = [\mathbf{rF}]_z.$$

Найдем выражение для работы при вращении тела (рис. 27). Пусть сила  $F$  приложена в точке  $B$ , находящейся от оси  $z$  на расстоянии  $r$ ,  $\alpha$  — угол между направлением силы и радиусом-вектором  $r$ . Так как тело абсолютно твердое, то работа этой силы равна работе, затраченной на поворот всего тела. При повороте тела на бесконечно малый угол  $d\varphi$  точка приложения  $B$  проходит путь  $ds = r d\varphi$  и работа равна произведению проекции силы на направление смещения на величину смещения:

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi. \quad (18.2)$$

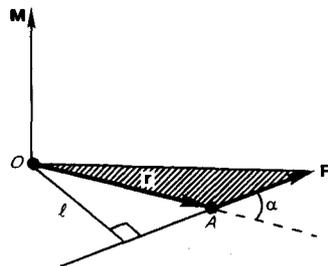


Рис. 25

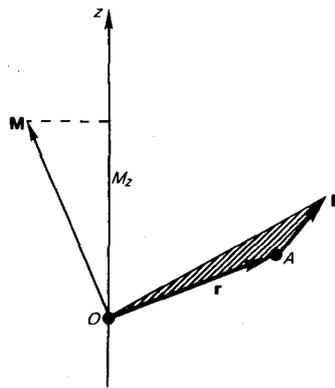


Рис. 26

Учитывая (18.1), можем записать

$$dA = M_z d\varphi,$$

где  $Frsin \alpha = Fl = M_z$  — момент силы относительно оси  $z$ . Таким образом, работа при вращении тела равна произведению момента действующей силы на угол поворота.

Работа при вращении тела идет на увеличение его кинетической энергии:  $dA = dT$ , но

$$dT = d\left(\frac{J_z \omega^2}{2}\right) = J_z \omega d\omega, \text{ поэтому } M_z d\varphi = J_z \omega d\omega, \text{ или } M_z \frac{d\varphi}{dt} = J_z \omega \frac{d\omega}{dt}.$$

Учитывая, что  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ , получаем

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon. \quad (18.3)$$

Уравнение (18.3) представляет собой **уравнение динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси.

Можно показать, что если ось  $z$  совпадает с главной осью инерции (см. § 20), проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство

$$\mathbf{M} = J \vec{\varepsilon} \quad (18.4)$$

где  $J$  — главный момент инерции тела (момент инерции относительно главной оси).

### Момент импульса и закон сохранения

При сравнении законов вращательного и поступательного движений просматривается аналогия между ними, только во вращательном движении вместо силы «выступает» ее момент, роль массы «играет» момент инерции. Какая же величина будет аналогом импульса тела? Ею является момент импульса тела относительно оси.

**Моментом импульса (количества движения) материальной точки  $A$  относительно неподвижной точки  $O$**  называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}\mathbf{p}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}],$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки  $O$  в точку  $A$ ,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  — импульс материальной точки (рис. 28);  $\mathbf{L}$  — *псевдовектор*, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\mathbf{r}$  к  $\mathbf{p}$ .

Модуль вектора момента импульса

$$L = rp \sin \alpha = mvr \sin \alpha = pl,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ ,  $l$  — плечо вектора  $\mathbf{p}$  относительно точки  $O$ .

**Моментом импульса относительно неподвижной оси  $z$**  называется скалярная величина  $L_z$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определенного относительно произвольной точки  $O$  данной оси. Момент импульса  $L_z$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $z$ .

При вращении абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси  $z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  с некоторой скоростью  $v_i$ . Скорость  $v_i$  и импульс

$m_i v_i$  перпендикулярны этому радиусу, т. е. радиус является плечом вектора  $m_i v_i$ . Поэтому можем записать, что момент импульса отдельной частицы равен

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \quad (19.1)$$

и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта.

**Момент импульса твердого тела** относительно оси есть сумма моментов импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i v_i r_i.$$

Используя формулу (17.1)  $v_i = \omega r_i$ , получим

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = J_z \omega,$$

т. е.

$$L_z = J_z \omega. \quad (19.2)$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно той же оси на угловую скорость. Продифференцируем уравнение (19.2) по времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z,$$

т. е.

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Это выражение — еще одна форма **уравнения динамики вращательного движения твердого тела** относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

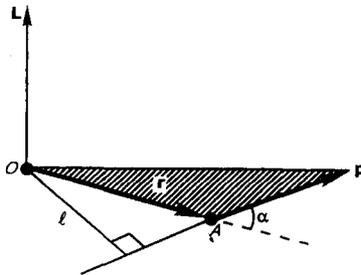


Рис. 28

- Что такое момент импульса материальной точки? твердого тела? Как определяется направление вектора момента импульса?
- В чем заключается физическая сущность закона сохранения момента импульса? В каких системах он выполняется? Приведите примеры.

Можно показать, что имеет место векторное равенство

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}. \quad (19.3)$$

В замкнутой системе момент внешних сил  $\mathbf{M} = 0$  и  $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$ , откуда

$$\mathbf{L} = \text{const}. \quad (19.4)$$

Выражение (19.4) представляет собой **закон сохранения момента импульса**: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени.

Закон сохранения момента импульса — *фундаментальный закон природы*. Он связан со свойством симметрии пространства — его *изотропностью*, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Продемонстрировать закон сохранения момента импульса можно с помощью скамьи Жуковского. Пусть человек, сидящий на скамье, которая без трения вращается вокруг вертикальной оси, и держащий в вытянутых руках гантели (рис. 29), приведен во вращение с угловой скоростью  $\omega_1$ . Если человек прижмет гантели к себе, то момент инерции системы уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, момент импульса системы сохраняется и угловая скорость вращения  $\omega_2$

возрастает. Аналогично, гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить свой момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения. Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение (табл. 2).

Таблица 2

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	$m$	Момент инерции	$J$
Скорость	$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\mathbf{F}$	Момент силы	$M_z$ или $M$
Поступательное движение		Вращательное движение	
Импульс	$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\mathbf{F} = m\mathbf{a};$ $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon;$ $M = \frac{dL}{dt}$
Работа	$dA = \mathbf{F}_j ds$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$mv^2/2$	Кинетическая энергия	$J_z\omega^2/2$

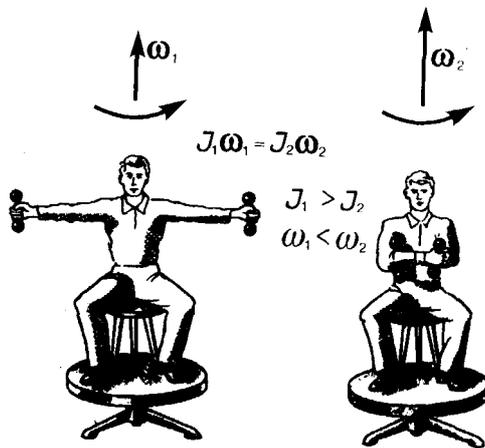


Рис. 29

- Каким свойством симметрии пространства обуславливается справедливость закона сохранения момента импульса?
- Сопоставьте основные уравнения динамики поступательного и вращательного движений, прокомментировав их аналогию.

### Деформации твердого тела

Рассматривая механику твердого тела, мы пользовались понятием абсолютно твердого тела. Однако в природе абсолютно твердых тел нет, так как все реальные тела под действием сил изменяют свою форму и размеры, т. е. *деформируются*.

**Деформация** называется **упругой**, если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму. **Деформации**, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил, называются **пластическими** (или **остаточными**). Деформации реального тела всегда пластические, так как они после прекращения действия внешних сил никогда полностью не исчезают. Однако если остаточные деформации малы, то ими можно пренебречь и рассматривать упругие деформации, что мы и будем делать.

В теории упругости доказывается, что все виды деформаций (растяжение или сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения или сжатия и сдвига.

Рассмотрим однородный стержень длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  (рис. 34), к концам которого приложены направленные вдоль его оси силы  $F_1$  и  $F_2$  ( $F_1 = F_2 = F$ ), в результате чего длина стержня меняется на величину  $\Delta l$ . Естественно, что при растяжении  $\Delta l$  положительно, а при сжатии отрицательно.

Сила, действующая на единицу площади поперечного сечения, называется **напряжением**:

$$\sigma = F/S. \quad (21.1)$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**, если же по касательной к поверхности — **тангенциальным**.

Количественной мерой, характеризующей степень деформации, испытываемой телом, является его **относительная деформация**. Так, относительное изменение длины стержня (продольная деформация)

$$\varepsilon = \Delta l / l, \quad (21.2)$$

относительное поперечное растяжение (сжатие)

$$\varepsilon' = \Delta d / d,$$

где  $d$  — диаметр стержня.

Деформации  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  всегда имеют разные знаки (при растяжении  $\Delta l$  положительно, а  $\Delta d$  отрицательно, при сжатии  $\Delta l$  отрицательно, а  $\Delta d$  положительно). Из опыта вытекает взаимосвязь  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ :

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon,$$

где  $\mu$  — положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый **коэффициентом Пуассона\***.

Английский физик Р. Гук (1635—1703) экспериментально установил, что для малых деформаций относительное удлинение  $\varepsilon$  и напряжение  $\sigma$  прямо пропорциональны друг другу:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (21.3)$$

где коэффициент пропорциональности  $E$  называется модулем Юнга\*\*. Из выражения (21.3) видно, что **модуль Юнга** определяется напряжением, вызывающим относительное удлинение, равное единице.

Из формул (21.2), (21.3) и (21.1) вытекает, что

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{ES'}$$

или

$$F = \frac{ES'}{l} \Delta l = k\Delta l, \quad (21.4)$$

где  $k$ —**коэффициент упругости**. Выражение (21.4) также задает закон Гука, согласно которому удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе.

\* С. Пуассон (1781—1840) — французский ученый.

\*\* Т. Юнг (1773—1829) — английский ученый.

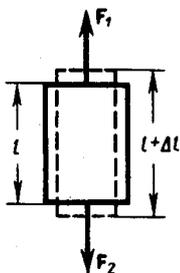


Рис. 34

- Что такое свободные оси (главные оси инерции)? Какие из них являются устойчивыми?
- Что такое гироскоп? Каковы его основные свойства?
- Сформулируйте закон Гука. Когда он справедлив?
- Дайте объяснение диаграммы напряжений  $\sigma(\varepsilon)$ . Что такое пределы пропорциональности, упругости и прочности?
- Каков физический смысл модуля Юнга?

Деформации твердых тел подчиняются закону Гука до известного предела. Связь между деформацией и напряжением представляется в виде диаграммы напряжений, качественный ход которой мы рассмотрим для металлического образца (рис. 35). Из рисунка видно, что линейная зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до так называемого **предела пропорциональности** ( $\sigma_n$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация еще упругая (хотя зависимость  $\sigma(\varepsilon)$  уже нелинейна) и до **предела упругости** ( $\sigma_y$ ) остаточные деформации не возникают. За пределом упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой  $BO$ , а параллельной ей —  $CF$ . Напряжение, при котором появляется заметная остаточная деформация ( $\approx 0,2\%$ ), называется **пределом текучести** ( $\sigma_T$ ) — точка  $C$  на кривой. В области  $CD$  деформация возрастает без увеличения напряжения, т. е. тело как бы «течет». Эта область называется **областью текучести** (или **областью пластических деформаций**). Материалы, для которых область текучести значительна, называются **вязкими**, для которых же она практически отсутствует — **хрупкими**. При дальнейшем растяжении (за точку  $D$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ( $\sigma_p$ ).

Диаграмма напряжений для реальных твердых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твердое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых силах является текучим.

Вычислим потенциальную энергию упругорастянутого (сжатого) стержня, которая равна работе, совершаемой внешними силами при деформации:

$$\Pi = A = \int_0^{\Delta l} F dx,$$

где  $x$  — абсолютное удлинение стержня, изменяющееся в процессе деформации от 0 до  $\Delta l$ . Согласно закону Гука (21.4),  $F=kx=ESx/l$ . Поэтому

$$\Pi = \int_0^{\Delta l} \frac{ES}{l} x dx = \frac{1}{2} \frac{ES}{l} (\Delta l)^2,$$

т. е. потенциальная энергия упругорастянутого стержня пропорциональна квадрату деформации  $(\Delta l)^2$ .

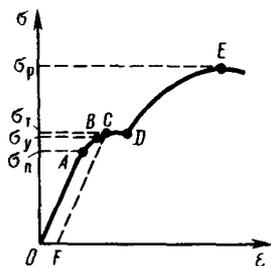


Рис. 35

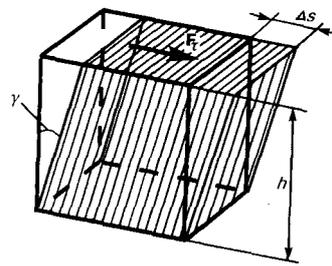


Рис. 36

Деформацию сдвига проще всего осуществить, если взять брусок, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, и приложить к нему силу  $F_\tau$ , (рис. 36), касательную к его поверхности (нижняя часть бруска закреплена неподвижно). Относительная деформация сдвига определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \gamma = \Delta s/h,$$

где  $\Delta s$  — абсолютный сдвиг параллельных слоев тела относительно друг друга;  $h$  — расстояние между слоями (для малых углов  $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$ ).

## Тяготение. Элементы теории поля

### Законы Кеплера. Закон всемирного тяготения

Еще в глубокой древности было замечено, что в отличие от звезд, которые неизменно сохраняют свое взаимное расположение в пространстве в течение столетий, планеты описывают среди звезд сложнейшие траектории. Для объяснения петлеобразного движения планет древнегреческий ученый К. Птоломей (II в. н. э.), считая Землю расположенной в центре Вселенной, предположил, что каждая из планет движется по малому кругу (эпициклу), центр которого равномерно движется по большому кругу, в центре которого находится Земля. Эта концепция получила название **птоломеевой геоцентрической системы мира**.

В начале XVI в. польским астрономом Н. Коперником (1473—1543) обоснована **гелиоцентрическая система** (см. § 5), согласно которой движения небесных тел объясняются движением Земли (а также других планет) вокруг Солнца и суточным вращением Земли. Теория и наблюдения Коперника воспринимались как занимательная фантазия.

К началу XVII столетия большинство ученых убедились, однако, в справедливости гелиоцентрической системы мира. И. Кеплер (1571—1630), обработав и уточнив результаты многочисленных наблюдений датского астронома Т. Браге (1546—1601), изложил **законы движения планет**:

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает одинаковые площади.
3. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Впоследствии И. Ньютон, изучая движение небесных тел, на основании законов Кеплера и основных законов динамики открыл всеобщий **закон всемирного тяготения**: между любыми двумя

материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними ( $r^2$ ):

$$F = Gm_1m_2/r^2. \quad (22.1)$$

Эта сила называется **гравитационной** (или **силой всемирного тяготения**). Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела. Коэффициент пропорциональности  $G$  называется **гравитационной постоянной**.

Закон всемирного тяготения установлен для тел, принимаемых за материальные точки, т. е. для таких тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Если же размеры взаимодействующих тел сравнимы с расстоянием между ними, то эти тела надо разбить на точечные элементы, подсчитать по формуле (22.1) силы притяжения между всеми попарно взятыми элементами, а затем геометрически их сложить (проинтегрировать), что является довольно сложной математической задачей.

Впервые экспериментальное доказательство закона всемирного тяготения для земных тел, а также числовое определение гравитационной постоянной  $G$  проведено английским физиком Г. Кавендишем (1731—1810). Принципиальная схема опыта Кавендиша, применившего **крутильные весы**, представлена на рис. 37. Легкое коромысло  $A$  с двумя одинаковыми шариками массой  $m=729$  г подвешено на упругой нити  $B$ . На коромысле  $C$  укреплены на той же высоте массивные шары массой  $M=158$  кг. Поворачивая коромысло  $C$  вокруг вертикальной оси, можно изменять расстояние между шарами с массами  $m$  и  $M$ . Под действием пары сил, приложенных к шарам  $m$  со стороны шаров  $M$ , коромысло  $A$  поворачивается в горизонтальной плоскости, закручивая нить  $B$  до тех пор, пока момент сил упругости не уравнивает момента сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение  $G$ .

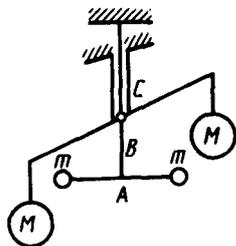


Рис. 37

- Как определяется гравитационная постоянная и каков ее физический смысл?
- На какой высоте над планетой ускорение свободного падения вдвое меньше, чем на ее поверхности?

Значение  $G$ , приводимое в таблицах фундаментальных физических постоянных, принимается равным  $6,6720 \cdot 10^{-11}$  Н·м/кг<sup>2</sup>, т. е. два точечных тела массой по 1 кг каждое, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой  $6,6720 \cdot 10^{-11}$  Н. Очень малая величина  $G$  показывает, что сила гравитационного взаимодействия может быть значительной только в случае больших масс.

### Сила тяжести и вес. Невесомость

На любое тело, расположенное вблизи поверхности Земли, действует сила тяготения  $F$ , под влиянием которой и в согласии со вторым законом Ньютона тело начнет двигаться с ускорением свободного падения  $g$ . Таким образом, в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело массой  $m$  действует сила

$$P = mg,$$

называемая **силой тяжести**.

Согласно фундаментальному физическому закону — **обобщенному закону Галилея**, все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением. Следовательно, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от  $9,780$  м/с<sup>2</sup> на экваторе до  $9,832$  м/с<sup>2</sup> на полюсах. Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли — с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно 6378 и 6357 км). Так как различие значений  $g$  невелико, ускорение свободного падения, которое используется при решении практических задач, принимается равным  $9,81$  м/с<sup>2</sup>.

Если пренебречь суточным вращением Земли вокруг своей оси, то сила тяжести и сила гравитационного тяготения равны между собой:

$$P = mg = F = GmM/R^2,$$

где  $M$  — масса Земли;  $R$  — расстояние между телом и центром Земли. Эта формула дана для случая, когда тело находится на поверхности Земли.

Пусть тело расположено на высоте  $h$  от поверхности Земли,  $R_0$  — радиус Земли, тогда

$$P = GmM/(R_0 + h)^2,$$

т. е. сила тяжести с удалением от поверхности Земли уменьшается.

В физике применяется также понятие веса тела. **Весом** тела называют силу, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору (или подвес), удерживающую тело от свободного падения. Вес тела проявляется только в том случае, если тело движется с ускорением, отличным от  $g$ , т. е. когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести, называется состоянием **невесомости**.

Таким образом, *сила тяжести действует всегда*, а *вес* проявляется *только* в том случае, *когда* на тело *кроме силы тяжести действуют еще другие силы*, вследствие чего тело движется с ускорением  $\mathbf{a}$ , отличным от  $\mathbf{g}$ . Если тело движется в поле тяготения Земли с ускорением  $\mathbf{a} \neq \mathbf{g}$ , то к этому телу приложена дополнительная сила  $\mathbf{N}$ , удовлетворяющая условию

$$\mathbf{N} + \mathbf{P} = m\mathbf{a}.$$

Тогда вес тела

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{N} = \mathbf{P} - m\mathbf{a} = m\mathbf{g} - m\mathbf{a} = m(\mathbf{g} - \mathbf{a}),$$

т. е. если тело покоится или движется прямолинейно и равномерно, то  $\mathbf{a}=0$  и  $\mathbf{P}'=m\mathbf{g}$ . Если тело *свободно движется в поле тяготения* по любой траектории и в любом направлении, то  $\mathbf{a}=\mathbf{g}$  и  $\mathbf{P}'=0$ , т. е. тело будет невесомым. Например, невесомыми являются тела, находящиеся в космических кораблях, свободно движущихся в космосе.

### Поле тяготения и то напряженность

Закон тяготения Ньютона определяет зависимость силы тяготения от масс взаимодействующих тел и расстояния между ними, но не показывает, как осуществляется это взаимодействие. Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Силы тяготения, например, не зависят от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует и в вакууме.

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью **поля тяготения**, или **гравитационного поля**. Это поле порождается телами и является формой существования материи. Основное свойство поля тяготения заключается в том, что на всякое тело массой  $m$ , внесенное в это поле, действует сила тяготения, т. е.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \quad (24.1)$$

Вектор  $\mathbf{g}$  не зависит от  $m$  и называется напряженностью поля тяготения. **Напряженность поля тяготения** определяется силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы, и совпадает по направлению с действующей силой. Напряженность есть *силовая характеристика* поля тяготения.

Поле тяготения называется **однородным**, если его напряженность во всех точках одинакова, и **центральный**, если во всех точках поля векторы напряженности направлены вдоль прямых, которые пересекаются в одной точке ( $A$ ), *неподвижной* по отношению к какой-либо инерциальной системе отсчета (рис. 38).

Для графического изображения силового поля используются *силовые линии (линии напряженности)*. Силовые линии выбирают так, что вектор напряженности поля направлен по касательной к силовой линии.

### Космические скорости

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости, называемые космическими.

**Первой космической (или круговой) скоростью**  $v_1$  называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение  $v_1^2/r$ . По второму закону Ньютона,

$$GmM/r^2 = mv_1^2/r.$$

Если спутник движется вблизи поверхности Земли, тогда  $r \approx R_0$  (радиус Земли) и  $g = GM/R_0^2$  (см. (25.6)), поэтому у поверхности Земли

$$v_1 = \sqrt{gR_0} = 7,9 \text{ км/с.}$$

Первой космической скорости недостаточно для того, чтобы тело могло выйти из сферы земного притяжения. Необходимая для этого скорость называется второй космической. **Второй космической (или параболической) скоростью**  $v_2$  называют ту наименьшую скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца, т. е. чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической. Для того чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, необходимо, чтобы его кинетическая энергия была равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{mv_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G \frac{mM}{r^2} dr = GmM/R_0,$$

откуда

$$v_2 = \sqrt{2gR_0} = 11,2 \text{ км/с.}$$

**Третьей космической скоростью**  $v_3$  называют скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца. Третья космическая скорость  $v_3 = 16,7$  км/с. Сообщение телам таких больших начальных скоростей является сложной технической задачей. Ее первое теоретическое осмысление начато К. Э. Циолковским, им была выведена уже рассмотренная нами формула (10.3), позволяющая рассчитывать скорость ракет.

Впервые космические скорости были достигнуты в СССР: первая — при запуске первого искусственного спутника Земли в 1957 г., вторая — при запуске ракеты в 1959 г. После исторического полета Ю. А. Гагарина в 1961 г. начинается бурное развитие космонавтики.

## Элементы механики жидкостей

### Давление в жидкости и газе

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или весьма слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объем, т. е. объем газа определяется объемом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определенный объем, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но в жидкостях в отличие от газов среднее расстояние между молекулами остается практически постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объемом.

Свойства жидкостей и газов во многом отличаются, однако в ряде механических явлений их поведение определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому гидроаэромеханика — раздел механики, изучающий равновесие и движение жидкостей и газов, их взаимодействие между собой и обтекаемыми ими твердыми телами, — использует *единый подход* к изучению жидкостей и газов.

В механике с большой степенью точности жидкости и газы рассматриваются как *сплошные, непрерывно распределенные* в занятой ими части пространства. Плотность же газов от давления зависит существенно. Из опыта известно, что сжимаемостью жидкости и газа во многих задачах можно пренебречь и пользоваться единым понятием *несжимаемой жидкости* — жидкости, плотность которой всюду одинакова и не изменяется со временем.

Если в покоящуюся жидкость поместить тонкую пластинку, то части жидкости, находящиеся по разные стороны от нее, будут действовать на каждый ее элемент  $\Delta S$  с силами  $\Delta F$ , которые независимо от того, как пластинка ориентирована, будут равны по модулю и направлены перпендикулярно площадке  $\Delta S$ , так как наличие касательных сил привело бы частицы жидкости в движение (рис. 44).

Физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади, называется *давлением*  $p$  жидкости:

$$p = \Delta F / \Delta S.$$

Единица давления — **паскаль** (Па): 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределенной по нормальной к ней поверхности площадью  $1 \text{ м}^2$  ( $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ ).

Давление при равновесии жидкостей (газов) подчиняется **закону Паскаля\***: давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причем давление одинаково передается по всему объему, занятому покоящейся жидкостью.

\* Б. Паскаль (1623—1662) — французский ученый.

Рассмотрим, как влияет вес жидкости на распределение давления внутри покоящейся несжимаемой жидкости. При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость несжимаема, то ее плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho gSh$ , а давление на нижнее основание

$$p = P/S = \rho gSh/S = \rho gh, \quad (28.1)$$

т. е. давление изменяется линейно с высотой. Давление  $\rho gh$  называется **гидростатическим давлением**.

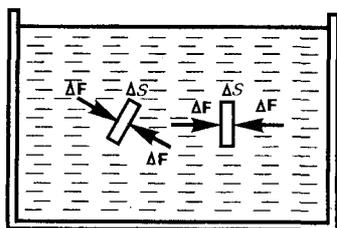


Рис. 44

- Что такое давление в жидкости? Давление — величина векторная или скалярная? Какова единица давления в СИ?
- Сформулируйте и поясните законы Паскаля и Архимеда.
- Что называют линией тока? трубкой тока?

Согласно формуле (28.1), сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, определяемая **законом Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho gV,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $V$  — объем погруженного в жидкость тела.

### Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называется **течением**, а совокупность частиц движущейся жидкости — **поток**. Графически движение жидкостей изображается с помощью **линий тока**, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в соответствующих точках пространства (рис. 45). Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризующая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течет медленнее. Таким образом, по картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости в разных точках пространства, т. е. можно определить состояние движения жидкости. Линии тока в жидкости можно «проявить», например, подмешав в нее какие-либо заметные взвешенные частицы.

Часть жидкости, ограниченную линиями тока, называют **трубкой тока**. Течение жидкости называется **установившимся** (или **стационарным**), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой ее точке со временем не изменяются.

Рассмотрим какую-либо трубку тока. Выберем два ее сечения  $S_1$  и  $S_2$ , перпендикулярные направлению скорости (рис. 46).

За время  $\Delta t$  через сечение  $S$  проходит объем жидкости  $Sv\Delta t$ ; следовательно, за 1 с через  $S_1$  пройдет объем жидкости  $S_1v_1$ , где  $v_1$  — скорость течения жидкости в месте сечения  $S_1$ . Через сечение  $S_2$  за 1 с пройдет объем жидкости  $S_2v_2$ , где  $v_2$  — скорость течения жидкости в месте сечения  $S_2$ . Здесь предполагается, что скорость жидкости в сечении постоянна. Если жидкость несжимаема ( $\rho = \text{const}$ ), то через сечение  $S_2$  пройдет такой же объем жидкости, как и через сечение  $S_1$ , т. е.

$$S_1v_1 = S_2v_2 = \text{const}. \quad (29.1)$$

Следовательно, произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока. Соотношение (29.1) называется **уравнением неразрывности** для несжимаемой жидкости.

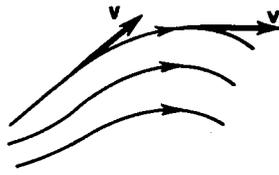


Рис. 45

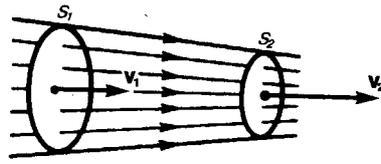


Рис. 46

### Уравнение Бернулли и следствия из него

Выделим в стационарно текущей идеальной жидкости (*физическая абстракция*, т. е. воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения) трубку тока, ограниченную сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , по которой слева направо течет жидкость (рис. 47). Пусть в месте сечения  $S_1$  скорость течения  $v_1$ , давление  $p_1$  и высота, на которой это сечение расположено,  $h_1$ . Аналогично, в месте сечения  $S_2$  скорость течения  $v_2$ , давление  $p_2$  и высота сечения  $h_2$ . За малый промежуток времени  $\Delta t$  жидкость перемещается от сечения  $S_1$  к сечению  $S'_1$ , от  $S_2$  к  $S'_2$ .

Согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии  $E_2 - E_1$  идеальной несжимаемой жидкости должно быть равно работе  $A$  внешних сил по перемещению массы  $m$  жидкости:

$$E_2 - E_1 = A, \quad (30.1)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — полные энергии жидкости массой  $m$  в местах сечений  $S_1$  и  $S_2$  соответственно.

С другой стороны,  $A$  — это работа, совершаемая при перемещении всей жидкости, заключенной между сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , за рассматриваемый малый промежуток времени  $\Delta t$ . Для перенесения массы  $m$  от  $S_1$  до  $S'_1$  жидкость должна переместиться на расстояние  $l_1 = v_1 \Delta t$  и от  $S_2$  до  $S'_2$  — на расстояние  $l_2 = v_2 \Delta t$ .

Отметим, что  $l_1$  и  $l_2$  настолько малы, что всем точкам объемов, закрашенных на рис. 47, приписывают постоянные значения скорости  $v$ , давления  $p$  и высоты  $h$ . Следовательно,

$$A = F_1 l_1 + F_2 l_2, \quad (30.2)$$

где  $F_1 = p_1 S_1$  и  $F_2 = -p_2 S_2$  (отрицательна, так как направлена в сторону, противоположную течению жидкости; рис. 47).

Полные энергии  $E_1$  и  $E_2$  будут складываться из кинетической и потенциальной энергий массы  $m$  жидкости:

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad (30.3)$$

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2. \quad (30.4)$$

Подставляя (30.3) и (30.4) в (30.1) и приравнявая (30.1) и (30.2), получим

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1 S_1 v_1 \Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2 S_2 v_2 \Delta t. \quad (30.5)$$

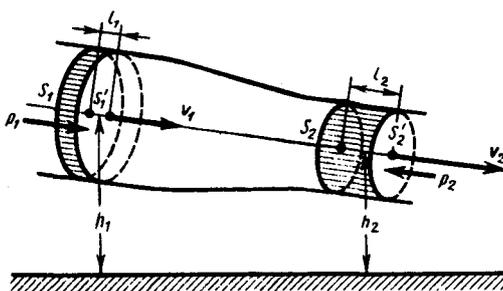


Рис. 47

- Что характерно для установившегося течения жидкости?
- Каков физический смысл уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости и как его вывести?
- Выведите уравнение Бернулли.

Согласно уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости (29.1), объем, занимаемый жидкостью, остается постоянным, т. е.

$$\Delta V = S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t.$$

Разделив выражение (30.5) на  $\Delta V$ , получим

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости. Но так как сечения выбирались произвольно, то можем записать

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \text{const.} \quad (30.6)$$

Выражение (30.6) выведено швейцарским физиком Д. Бернулли (1700—1782; опубликовано в 1738 г.) и называется **уравнением Бернулли**. Как видно из его вывода, уравнение Бернулли — выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости. Оно хорошо выполняется и для реальных жидкостей, внутреннее трение которых не очень велико.

Величина  $p$  в формуле (30.6) называется **статическим давлением** (давление жидкости на поверхность обтекаемого ею тела), величина  $\rho v^2/2$  — **динамическим давлением**. Как уже указывалось выше (см. § 28), величина  $\rho g h$  представляет собой **гидростатическое давление**.

Для горизонтальной трубки тока ( $h_1 = h_2$ ) выражение (30.6) принимает вид

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const.} \quad (30.7)$$

где  $p + \rho v^2/2$  называется **полным давлением**.

Из уравнения Бернулли (30.7) для горизонтальной трубки тока и уравнения неразрывности (29.1) следует, что при течении жидкости по горизонтальной трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах, т. е. там, где скорость меньше. Это можно продемонстрировать, установив вдоль трубы ряд **манометров** (рис. 48). В соответствии с уравнением Бернулли опыт показывает, что в манометрической трубке  $B$ , прикрепленной к узкой части трубы, уровень жидкости ниже, чем в манометрических трубках  $A$  и  $C$ , прикрепленных к широкой части трубы.

Так как динамическое давление связано со скоростью движения жидкости (газа), то уравнение Бернулли позволяет измерять скорость потока жидкости. Для этого применяется трубка Пито — Прандтля (рис. 49). Прибор состоит из двух изогнутых под прямым углом трубок, противоположные концы которых присоединены к манометру. С помощью одной из трубок измеряется полное давление ( $p_0$ ), с помощью другой — статическое ( $p$ ). Манометром измеряют разность давлений:

$$p_0 - p = \rho_0 g h, \quad (30.8)$$

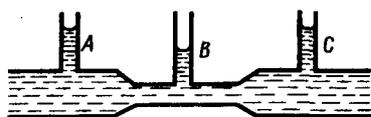


Рис. 48

- Как в потоке жидкости измерить статическое давление? динамическое давление? полное давление?

где  $\rho_0$  — плотность жидкости в манометре. С другой стороны, согласно уравнению Бернулли, разность полного и статического давлений равна динамическому давлению:

$$p_0 - p = \rho v^2/2. \quad (30.9)$$

Из формул (30.8) и (30.9) получаем искомую скорость потока жидкости:

$$v = \sqrt{2\rho_0 g h / \rho}.$$

Уменьшение статического давления в точках, где скорость потока больше, положено в основу работы **водоструйного насоса** (рис. 50). Струя воды подается в трубку, открытую в атмосферу, так что давление на выходе из трубки равно атмосферному. В трубке имеется сужение, по которому вода течет с большей скоростью. В этом месте давление меньше атмосферного. Это давление устанавливается и в откачанном сосуде, который связан с трубкой через разрыв, имеющийся в ее узкой части. Воздух увлекается вытекающей с большой скоростью водой из узкого конца. Таким образом можно откачивать воздух из сосуда до давления 100 мм рт. ст. (1 мм рт. ст. = 133,32 Па).

Уравнение Бернулли используется для нахождения скорости истечения жидкости через отверстие в стенке или дне сосуда. Рассмотрим цилиндрический сосуд с жидкостью, в боковой стенке которого на некоторой глубине ниже уровня жидкости имеется маленькое отверстие (рис. 51).

Рассмотрим два сечения (на уровне  $h_1$  свободной поверхности жидкости в сосуде и на уровне  $h_2$  выхода ее из отверстия) и напишем уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + p_2.$$

Так как давления  $p_1$  и  $p_2$  в жидкости на уровнях первого и второго сечений равны атмосферному, т. е.  $p_1 = p_2$ , то уравнение будет иметь вид

$$\frac{v_1^2}{2} + g h_1 = \frac{v_2^2}{2} + g h_2$$

Из уравнения неразрывности (29.1) следует, что  $v_2/v_1 = S_1/S_2$ , где  $S_1$  и  $S_2$  — площади поперечных сечений сосуда и отверстия. Если  $S_1 \gg S_2$ , то членом  $v_1^2/2$  можно пренебречь и

$$v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh,$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Это выражение получило название формулы Торричелли.\*

\* Э. Торричелли (1608—1647) — итальянский физик и математик.

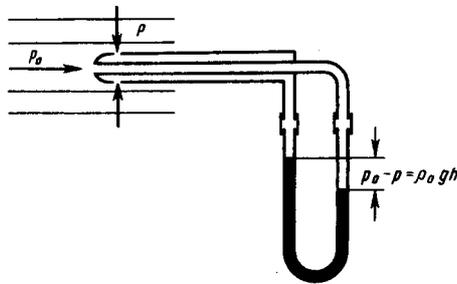


Рис. 49

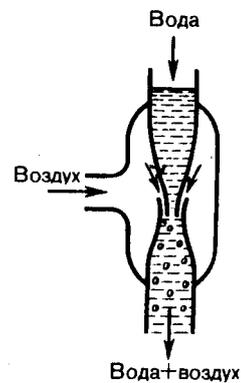


Рис. 50

### Вязкость (внутреннее трение). Ламинарный и турбулентный режимы течения жидкостей

**Вязкость (внутреннее трение)** — это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Сила внутреннего трения  $F$  тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$  (рис. 52), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою. На рисунке представлены два слоя, отстоящие друг от друга на расстоянии  $\Delta x$  и движущиеся со скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . При этом  $v_1 - v_2 = \Delta v$ . Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, *перпендикулярно* скорости течения слоев. Величина  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев, и называется **градиентом скорости**. Таким образом, модуль силы внутреннего трения

$$F = \eta \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| S, \quad (31.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $\mu$ , зависящий от природы жидкости, называется **динамической вязкостью** (или просто **вязкостью**).

Единица вязкости — паскаль-секунда (Па·с): 1 Па·с равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м<sup>2</sup> поверхности касания слоев (1 Па·с = 1 Н·с/м<sup>2</sup>).

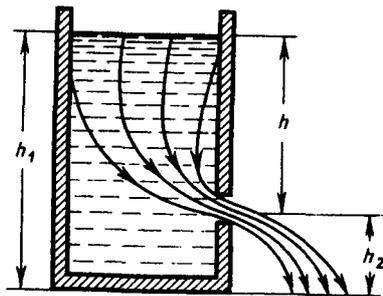


Рис. 51

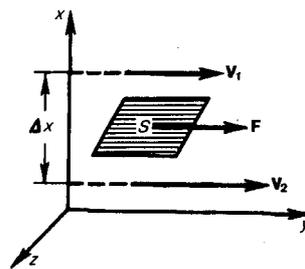


Рис. 52

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем большие силы внутреннего трения в ней возникают. Вязкость зависит от температуры, причем характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Особенно сильно от температуры зависит вязкость масел. Например, вязкость касторового масла в интервале 18—40°C падает в четыре раза. Российский физик П. Л. Капица (1894—1984; Нобелевская премия 1978 г.) открыл, что при температуре 2,17 К жидкий гелий переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю.

Существует два режима течения жидкостей. Течение называется **ламинарным (слоистым)**, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними, и **турбулентным (вихревым)**, если вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание жидкости (газа).

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях ее движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течет, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы.

При турбулентном течении частицы жидкости приобретают составляющие скоростей, перпендикулярные течению, поэтому они могут переходить из одного слоя в другой. Скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Так как частицы жидкости переходят из одного слоя в другой, то их скорости в различных слоях мало отличаются. Из-за большого градиента скоростей у поверхности трубы обычно происходит образование вихрей.

Профиль усредненной скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 53) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения. Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой **числом Рейнольдса** (О. Рейнольдс (1842—1912) — английский ученый):

$$Re = \frac{\rho \langle v \rangle d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle d}{\nu},$$

где  $\nu = \eta/\rho$  — **кинематическая вязкость**;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  — средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  — характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \lesssim 1000$ ) наблюдается ламинарное течение, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит в области  $1000 \lesssim Re \lesssim 2000$ , а при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение — турбулентное. Если число Рейнольдса одинаково, то режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

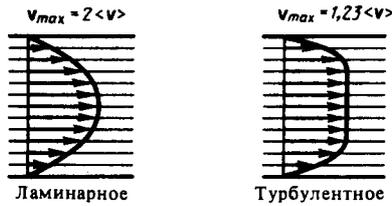


Рис. 53

- Что такое градиент скорости?
- Каков физический смысл коэффициента динамической вязкости?

### § 32. Методы определения вязкости

**1. Метод Стокса.\*** Этот метод определения вязкости основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

\* Дж. Стокс (1819—1903) — английский физик и математик.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют три силы: сила тяжести  $P = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$  ( $\rho$  — плотность шарика), сила Архимеда  $P' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g$  ( $\rho'$  — плотность жидкости) и сила сопротивления, эмпирически установленная Дж. Стоксом:  $F = 6\pi\eta r v$ , где  $r$  — радиус шарика,  $v$  — его скорость. При равномерном движении шарика

$$P = F_A + F \quad \text{или} \quad \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho' g + 6\pi\eta r v,$$

откуда

$$v = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta}.$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость жидкости (газа).

**2. Метод Пуазейля.\*** Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом  $R$  и длиной  $l$ . В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом  $r$  и толщиной  $dr$  (рис. 54). Сила внутреннего трения (см. (31.1)), действующая на боковую поверхность этого слоя,

$$F = -\eta \frac{dv}{dr} dS = -\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr},$$

где  $dS$  — боковая поверхность цилиндрического слоя; знак минус означает, что при возрастании радиуса скорость уменьшается.

\* Ж. Пуазейль (1799—1868) — французский физиолог и физик.

Для установившегося течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, уравнивается силой давления, действующей на его основание:

$$-\eta \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = \Delta p \pi r^2, \quad dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr.$$

После интегрирования, полагая, что у стенок имеет место прилипание жидкости, т. е. скорость на расстоянии  $R$  от оси равна нулю, получаем

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2).$$

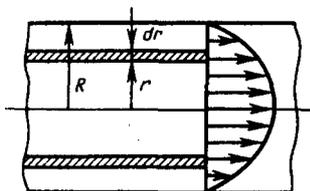


Рис. 54

- Какое течение жидкости называется ламинарным? турбулентным? Что характеризует число Рейнольдса?
- Поясните (с выводом) практическое применение методов Стокса и Пуазейля.

Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону, причем вершина параболы лежит на оси трубы (см. также рис. 53).

За время  $t$  из трубы вытечет жидкость, объем которой

$$V = \int_0^R vt \cdot 2\pi r dr = \frac{2\pi \Delta p t}{4\eta l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p t}{2\eta l} \left[ \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8\eta l},$$

откуда вязкость

$$\eta = \frac{\pi R^4 \Delta p t}{8Vl}.$$

## ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ

### Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

#### Статистический и термодинамический методы. Опытные законы идеального газа

**Статистический и термодинамический методы исследования.** Молекулярная физика и термодинамика — разделы физики, в которых изучаются **макроскопические процессы** в телах, связанные с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. Для исследования этих процессов применяют два качественно различных и взаимно дополняющих друг друга метода: **статистический (молекулярно-кинетический)** и **термодинамический**. Первый лежит в основе молекулярной физики, второй — термодинамики.

**Молекулярная физика** — раздел физики, изучающий строение и свойства вещества исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

Идея об атомном строении вещества высказана древнегреческим философом Демокритом (460—370 до н. э.). Атомистика возрождается вновь лишь в XVII в. и развивается в работах М. В. Ломоносова, взгляды которого на строение вещества и тепловые явления были близки к современным. Строгое развитие молекулярной теории относится к середине XIX в. и связано с работами немецкого физика Р. Клаузиуса (1822—1888), Дж. Максвелла и Л. Больцмана.

Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Законы поведения огромного числа молекул, являясь статистическими закономерностями, изучаются с помощью **статистического метода**. Этот метод основан на том, что свойства макроскопической системы в конечном счете определяются свойствами частиц системы, особенностями их движения и *усредненными* значениями динамических характеристик этих частиц (скорости, энергии и т. д.). Например, температура тела определяется скоростью хаотического движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют различные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы. Таким образом, макроскопические характеристики тел имеют физический смысл лишь в случае большого числа молекул.

**Термодинамика** — раздел физики, изучающий общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Термодинамика не рассматривает микропроцессы, которые лежат в основе этих превращений. Этим **термодинамический метод** отличается от статистического. Термодинамика базируется на двух началах — фундаментальных законах, установленных в результате обобщения опытных данных.

Область применения термодинамики значительно шире, чем молекулярно-кинетической теории, ибо нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться термодинамическим методом. Однако, с другой стороны, термодинамический метод несколько ограничен: термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества. Молекулярно-кинетическая теория и термодинамика взаимно дополняют друг друга, образуя единое целое, но отличаясь различными методами исследования.

Термодинамика имеет дело с **термодинамической системой** — совокупностью макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с другими телами (внешней средой). Основа термодинамического метода — определение состояния термодинамической системы. Состояние системы задается **термодинамическими параметрами (параметрами состояния)** — совокупностью физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и удельный объем.

Температура — одно из основных понятий, играющих важную роль не только в термодинамике, но и в физике в целом. **Температура** — физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы. В соответствии с решением XI Генеральной конференции по мерам и весам (1960) в настоящее время можно применять только две температурные шкалы — **термодинамическую** и **Международную практическую**, градуированные соответственно в кельвинах (К) и в градусах Цельсия (°С). В **Международной практической шкале** температура замерзания и кипения воды при давлении  $1,013 \cdot 10^5$  Па соответственно 0 и 100°С (**реперные точки**).

**Термодинамическая температурная шкала** определяется по одной реперной точке, в качестве которой взята **тройная точка воды** (температура, при которой лед, вода и насыщенный пар при давлении 609 Па находятся в термодинамическом равновесии). Температура этой точки по термодинамической шкале равна 273,16 К (точно). Градус Цельсия равен кельвину. В термодинамической шкале температура замерзания воды равна 273,15 К (при том же давлении, что и в Международной практической шкале), поэтому, по определению, термодинамическая температура и температура по Международной практической шкале связаны соотношением

$$T = 273,15 + t.$$

Температура  $T = 0$  К называется **нулем кельвин**. Анализ различных процессов показывает, что 0 К недостижим, хотя приближение к нему сколь угодно близко возможно.

**Удельный объем  $v$**  — это объем единицы массы. Когда тело однородно, т. е. его плотность  $\rho = \text{const}$ , то  $v = V/m = 1/\rho$ . Так как при постоянной массе удельный объем пропорционален общему объему, то макроскопические свойства однородного тела можно характеризовать объемом тела.

Параметры состояния системы могут изменяться. Любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из ее термодинамических параметров, называется **термодинамическим процессом**. Макроскопическая система находится в **термодинамическом равновесии**, если ее состояние с течением времени не меняется (предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы при этом не изменяются).

В молекулярно-кинетической теории пользуются *идеализированной моделью идеального газа*, согласно которой считают, что:

- 1) собственный объем молекул газа пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда;
- 2) между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- 3) столкновения молекул газа между собой и со стенками сосуда абсолютно упругие.

Модель идеального газа можно использовать при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным (например, кислород и гелий), а также при низких давлениях и высоких температурах близки по своим свойствам к идеальному газу. Кроме того, внося поправки, учитывающие собственный объем молекул газа и действующие молекулярные силы, можно перейти к теории реальных газов.

Рассмотрим законы, описывающие поведение идеальных газов.

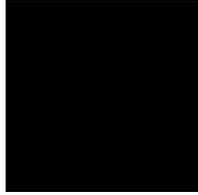
**Закон Бойля—Мариотта\***: для данной массы газа при постоянной температуре произведение давления газа на его объем есть величина постоянная:

$$A_{34} = \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = - Q_2. \quad (41.1)$$

\* Р. Бойль (1627—1691)—английский ученый; Э. Мариотт (1620—1684) — французский физик.

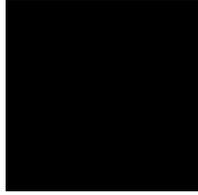
Кривая, изображающая зависимость между величинами  $p$  и  $V$ , характеризующими свойства вещества при постоянной температуре, называется **изотермой**. Изотермы представляют собой гиперболы, расположенные на графике тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс (рис. 60).

**Законы Гей-Люссака\***: 1) объем данной массы газа при постоянном давлении изменяется линейно с температурой:



(41.2)

2) давление данной массы газа при постоянном объеме изменяется линейно с температурой:



(41.3)

\* Ж. Гей-Люссак (1778—1850) — французский ученый.

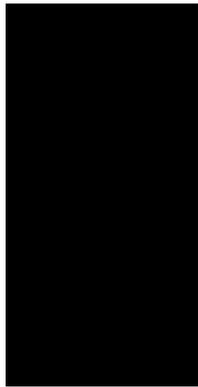
В этих уравнениях  $t$  — температура по шкале Цельсия,  $p_0$  и  $V_0$  — давление и объем при  $0^\circ\text{C}$ , коэффициент  $\alpha = 1/273,15 \text{ K}^{-1}$ .

**Процесс**, протекающий при постоянном давлении, называется **изобарным**. На диаграмме в координатах  $V, t$  (рис. 61) этот процесс изображается прямой, называемой **изобарой**. **Процесс**, протекающий при постоянном объеме, называется **изохорным**. На диаграмме в координатах  $p, t$  (рис. 62) он изображается прямой, называемой **изохорой**.

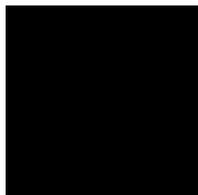
Из (41.2) и (41.3) следует, что изобары и изохоры пересекают ось температур в точке  $t = -1/\alpha = -273,15^\circ\text{C}$ , определяемой из условия  $1 + \alpha t = 0$ . Если перенести начало отсчета в эту точку, то происходит переход к шкале Кельвина (рис. 62), откуда



Вводя в формулы (41.2) и (41.3) термодинамическую температуру, законам Гей-Люссака можно придать более удобный вид:



(41.4)



(41.5)

где индексы 1 и 2 относятся к произвольным состояниям, лежащим на одной изобаре или изохоре.



**Закон Авогадро\***: моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объемы. При нормальных условиях этот объем равен  $22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$ .

\* А. Авогадро (1776—1856) — итальянский физик и химик.

По определению, в одном моле различных веществ содержится одно и то же число молекул, называемое **постоянной Авогадро**:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

**Закон Дальтона\***: давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_n$  входящих в нее газов:

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

**Парциальное давление** — давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объем, равный объему смеси при той же температуре.

### Уравнение Клапейрона — Менделеева

Как уже указывалось, состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением  $p$ , объемом  $V$  и температурой  $T$ . Между этими параметрами существует определенная связь, называемая **уравнением состояния**, которое в общем виде дается выражением

$$f(p, V, T) = 0,$$

где каждая из переменных является функцией двух других.

Французский физик и инженер Б. Клапейрон (1799—1864) вывел уравнение состояния идеального газа, объединив законы Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Пусть некоторая масса газа занимает объем  $V_1$ , имеет давление  $p_1$  и находится при температуре  $T_1$ . Эта же масса газа в другом произвольном состоянии характеризуется параметрами  $p_2, V_2, T_2$  (рис. 63). Переход из состояния 1 в состояние 2 осуществляется в виде двух процессов: 1) изотермического (изотерма 1-1'), 2) изохорного (изохора

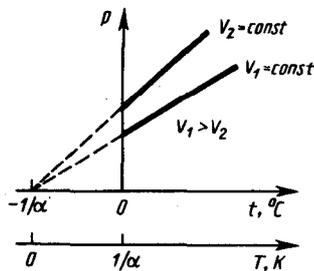


Рис. 62

- Почему термодинамический и статистический (молекулярно-кинетический) методы исследования макроскопических систем качественно различны и взаимно дополняют друг друга?
- Что такое термодинамические параметры? Какие термодинамические параметры вам известны?
- Как объяснить закон Бойля — Мариотта с точки зрения молекулярно-кинетической теории?

1'-2).

В соответствии с законами Бойля — Мариотта (41.1) и Гей-Люссака (41.5) запишем:

$$p_1 V_1 = p_1' V_2, \quad (42.1)$$

$$\frac{p_1'}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (42.2)$$

Исключив из уравнений (42.1) и (42.2)  $p_1'$  получим

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}.$$

Так как состояния 1 и 2 были выбраны произвольно, то для данной массы газа величина  $pV/T$  остается постоянной, т. е.

$$pV/T = B = \text{const}. \quad (42.3)$$

Выражение (42.3) является **уравнением Клапейрона**, в котором  $B$  — газовая постоянная, *различная для разных газов*.

Русский ученый Д. И. Менделеев (1834—1907) объединил уравнение Клапейрона с законом Авогадро, отнеся уравнение (42.3) к одному молю, используя молярный объем  $V_m$ . Согласно закону Авогадро, при одинаковых  $p$  и  $T$  моли всех газов занимают одинаковый молярный объем  $V_m$ , поэтому постоянная  $B$  будет *одинаковой для всех газов*. Эта общая для всех газов постоянная обозначается  $R$  и называется **молярной газовой постоянной**. Уравнению

$$pV_m = RT \quad (42.4)$$

удовлетворяет лишь идеальный газ, и оно является **уравнением состояния идеального газа**, называемым также **уравнением Клапейрона — Менделеева**.

Числовое значение молярной газовой постоянной определим из формулы (42.4), полагая, что моль газа находится при нормальных условиях ( $p_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $T_0 = 273,15$  К,  $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/моль):  $R = 8,31$  Дж/(моль·К).

От уравнения (42.4) для моля газа можно перейти к уравнению Клапейрона — Менделеева для произвольной массы газа. Если при некоторых заданных давлении и температуре один моль газа занимает молярный объем  $V_m$ , то при тех же условиях масса  $m$  газа займет объем  $V = (m/M)V_m$ , где  $M$  — **молярная масса** (масса одного моля вещества). Единица молярной массы — килограмм на моль (кг/моль). Уравнение Клапейрона — Менделеева для массы  $m$  газа

$$pV = \frac{m}{M} RT = \nu RT, \quad (42.5)$$

где  $\nu = m/M$  — **количество вещества**.

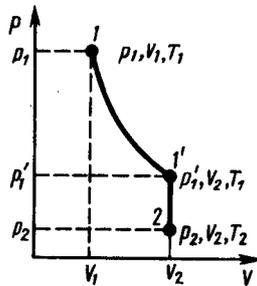


Рис. 63

- Какими законами описываются изобарные и изохорные процессы?
- Каков физический смысл постоянной Авогадро? числа Лошмидта?
- При некоторых значениях температуры и давления азот количеством вещества 1 моль занимает объем 20 л. Какой объем при этих же условиях займет водород количеством вещества 1 моль?

Часто пользуются несколько иной формой уравнения состояния идеального газа, вводя **постоянную Больцмана**:

$$k = R/N_A = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Исходя из этого уравнение состояния (42.4) запишем в виде

$$p = RT/V_m = kN_A T/V_m = nkT,$$

где  $N_A/V_m = n$  — концентрация молекул (число молекул в единице объема). Таким образом, из уравнения

$$p = nkT \quad (42.6)$$

следует, что давление идеального газа при данной температуре прямо пропорционально концентрации его молекул (или плотности газа). При одинаковых температуре и давлении все газы содержат в единице объема одинаковое число молекул. Число молекул, содержащихся в 1 м<sup>3</sup> газа при **нормальных условиях**, называется **числом Лошмидта\***:

$$N_L = p_0/(kT_0) = 2,68 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

\* И. Лошмидт (1821—1895) — австрийский химик и физик.

### Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов

Для вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории рассмотрим одноатомный идеальный газ. Предположим, что молекулы газа движутся хаотически, число взаимных столкновений между молекулами газа пренебрежимо мало по сравнению с числом ударов о стенки сосуда, а соударения молекул со стенками сосуда абсолютно упругие. Выделим на стенке сосуда некоторую элементарную площадку  $\Delta S$  (рис. 64) и вычислим давление, оказываемое на эту площадку. При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передает ей импульс  $m_0v - (-m_0v) = 2m_0v$ , где  $m_0$  — масса молекулы,  $v$  — ее скорость. За время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  достигнут только те молекулы, которые заключены в объеме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v\Delta t$  (рис. 64). Число этих молекул равно  $n\Delta S v\Delta t$  ( $n$  — концентрация молекул).

Необходимо, однако, учитывать, что реально молекулы движутся к площадке  $\Delta S$  под разными углами и имеют различные скорости, причем скорость молекул при каждом соударении меняется. Для

упрощения расчетов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трех взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется  $1/3$  молекул, причем половина молекул  $1/6$  движется вдоль данного направления в одну сторону, половина — в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку  $\Delta S$  будет  $1/6 n \Delta S v \Delta t$ . При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2m_0 v \cdot 1/6 n \Delta S v \Delta t = 1/3 n m_0 v^2 \Delta S \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда,

$$p = \Delta P / (\Delta t \Delta S) = 1/3 n m_0 v^2. \quad (43.1)$$

Если газ в объеме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то целесообразно рассматривать **среднюю квадратную скорость**

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (43.2)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (43.1) с учетом (43.2) примет вид

$$p = 1/3 n m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2. \quad (43.3)$$

Выражение (43.3) называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов**. Точный расчет с учетом движения молекул по всевозможным направлениям дает ту же формулу.

Учитывая, что  $n = N/V$ , получим

$$pV = 1/3 N m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2, \quad (43.4)$$

или

$$pV = 2/3 N \frac{m_0 \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{2} = 2/3 E, \quad (43.5)$$

где  $E$  — суммарная кинетическая энергия поступательного движения всех молекул газа.

Так как масса газа  $m = N m_0$ , то уравнение (43.4) можно переписать в виде

$$pV = 1/3 m \langle v_{\text{кв}} \rangle^2.$$

Для одного моля газа  $m = M$  ( $M$  — молярная масса), поэтому

$$pV_m = 1/3 M \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

где  $V_m$  — молярный объем. С другой стороны, по уравнению Клапейрона — Менделеева,  $pV_m = RT$ .

Таким образом,

$$RT = 1/3 M \langle v_{\text{кв}} \rangle^2,$$

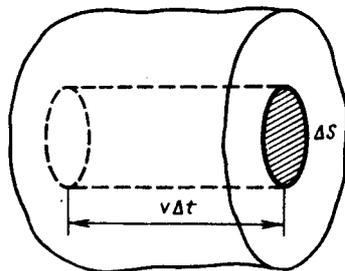


Рис. 64

- В чем заключается молекулярно-кинетическое толкование давления газа? термодинамической температуры?
- В чем содержание и какова цель вывода основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов?

откуда

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (43.6)$$

Так как  $M = m_0 N_A$ , где  $m_0$  — масса одной молекулы, а  $N_A$  — постоянная Авогадро, то из уравнения (43.6) следует, что

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \quad (43.7)$$

где  $k=R/N_A$  — постоянная Больцмана. Отсюда найдем, что при комнатной температуре молекулы кислорода имеют среднюю квадратичную скорость 480 м/с, водорода — 1900 м/с. При температуре жидкого гелия те же скорости будут соответственно 40 и 160 м/с.

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = E/N = m_0 \langle v_{\text{rms}} \rangle^2 / 2 = 3/2 kT \quad (43.8)$$

(использовали формулы (43.5) и (43.7)) пропорциональна термодинамической температуре и зависит только от нее. Из этого уравнения следует, что при  $T=0$   $\langle \varepsilon_0 \rangle = 0$ , т. е. при 0К прекращается поступательное движение молекул газа, а следовательно, его давление равно нулю. Таким образом, термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа, и формула (43.8) раскрывает молекулярно-кинетическое толкование температуры.

### Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории молекулам задавали различные скорости. В результате многократных соударений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению. Однако из-за хаотического движения молекул все направления движения являются равновероятными, т. е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

По молекулярно-кинетической теории, как бы ни изменялись скорости молекул при столкновениях, средняя квадратичная скорость молекул массой  $m_0$  в газе, находящемся в состоянии равновесия при  $T = \text{const}$ . остается постоянной и равной  $\langle v_{\text{rms}} \rangle = \sqrt{3kT/m_0}$ .

Это объясняется тем, что в газе, находящемся в состоянии равновесия, устанавливается некоторое стационарное, не меняющееся со временем распределение молекул по скоростям, которое подчиняется вполне определенному статистическому закону. Этот закон теоретически выведен Дж. Максвеллом.

При выводе закона распределения молекул по скоростям Максвелл предполагал, что газ состоит из очень большого числа  $N$  тождественных молекул, находящихся в состоянии беспорядочного теплового движения при одинаковой температуре. Предполагалось также, что силовые поля на газ не действуют.

Закон Максвелла описывается некоторой функцией  $f(v)$ , называемой **функцией распределения молекул по скоростям**. Если разбить диапазон скоростей молекул на малые интервалы, равные  $dv$ , то на каждый интервал скорости будет приходиться некоторое число молекул  $dN(v)$ , имеющих скорость, заключенную в этом интервале. Функция  $f(v)$  определяет относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v+dv$ , т. е.

$$dN(v)/N = f(v) dv,$$

откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{N dv}.$$

Применяя методы теории вероятностей. Максвелл нашел функцию  $f(v)$  — **закон о распределении молекул идеального газа по скоростям**:

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp[-m_0 v^2 / (2kT)]. \quad (44.1)$$

Из (44.1) видно, что конкретный вид функции зависит от рода газа (от массы молекулы) и от параметра состояния (от температуры  $T$ ).

График функции (44.1) приведен на рис. 65. Так как при возрастании  $v$  множитель  $\exp[-m_0 v^2 / (2kT)]$  уменьшается быстрее, чем растет множитель  $v^2$ , то функция  $f(v)$ , начинаясь от нуля, достигает максимума при  $v_B$ , и затем асимптотически стремится к нулю. Кривая несимметрична относительно  $v_B$ .

Относительное число молекул  $dN(v)/N$ , скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v+dv$ , находится как площадь заштрихованной полоски на рис. 65. Площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Это означает, что функция  $f(v)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью**. Значение наиболее вероятной скорости можно найти продифференцировав выражение (44.1) (постоянные множители опускаем) по аргументу  $v$ , приравняв результат нулю и используя условие для максимума выражения  $f(v)$ :

$$\frac{d}{dv} (v^2 \exp[-m_0 v^2 / (2kT)]) = 2v \left( 1 - \frac{m_0 v^2}{2kT} \right) \exp[-m_0 v^2 / (2kT)] = 0.$$

Значения  $v=0$  и  $v=\infty$  соответствуют минимумам выражения (44.1), а значение  $v$ , при котором выражение в скобках становится равным нулю, и есть искомая наиболее вероятная скорость  $v_B$ :

$$v_B = \sqrt{2kT/m_0} = \sqrt{2RT/M}. \tag{44.2}$$

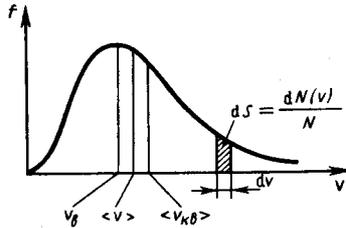


Рис. 65

- Каков физический смысл функции распределения молекул по скоростям? по энергиям?
- Как, зная функцию распределения молекул по скоростям, перейти к функции распределения по энергиям?

Из формулы (44.2) следует, что при повышении температуры максимум функции распределения молекул по скоростям (рис. 66) сместится вправо (значение наиболее вероятной скорости становится больше). Однако площадь, ограниченная кривой, остается неизменной, поэтому при повышении температуры кривая распределения молекул по скоростям будет растягиваться и понижаться.

**Средняя скорость молекулы  $\langle v \rangle$  (средняя арифметическая скорость)** определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv.$$

Подставляя сюда  $f(v)$  и интегрируя, получаем

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_0)} = \sqrt{8RT/(\pi M)}. \tag{44.3}$$

Скорости, характеризующие состояние газа: 1) наиболее вероятная  $v_B = \sqrt{2RT/M}$ , 2) средняя  $\langle v \rangle = \sqrt{8RT/(\pi M)} = 1,13v_B$ ; 3) средняя квадратичная  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{3RT/M} = 1,22v_B$  (рис. 65). Исходя из распределения молекул по скоростям

$$dN(v) = N \cdot 4\pi \left( \frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_0 v^2 / (2kT)} dv, \tag{44.4}$$

можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии  $\epsilon$ . Для этого перейдем от переменной  $v$  к переменной  $\epsilon = m_0 v^2 / 2$ . Подставив в (44.4)  $v = \sqrt{2\epsilon / m_0}$  и  $dv = (2m_0 \epsilon)^{-1/2} d\epsilon$ , получим

$$dN(\epsilon) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)} d\epsilon = N f(\epsilon) d\epsilon,$$

где  $dN(\epsilon)$  — число молекул, имеющих кинетическую энергию поступательного движения, заключенную в интервале от  $\epsilon$  до  $\epsilon + d\epsilon$ .

Таким образом, **функция распределения молекул по энергиям теплового движения**

$$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\epsilon/(kT)}.$$

Средняя кинетическая энергия  $\langle \epsilon \rangle$  молекулы идеального газа

$$\langle \epsilon \rangle = \int_0^{\infty} \epsilon f(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{3/2} e^{-\epsilon/(kT)} d\epsilon = 3/2 kT,$$

т. е. получили результат, совпадающий с формулой (43.8).

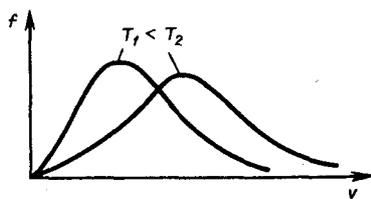


Рис. 66

- Как определяется наиболее вероятная скорость? средняя скорость?
- Во сколько раз и как изменится средняя скорость движения молекул при переходе от кислорода к водороду?

### Барометрическая формула. Распределение Больцмана

При выводе основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов и максвелловского распределения молекул по скоростям предполагалось, что на молекулы газа внешние силы не действуют, поэтому молекулы равномерно распределены по объему. Однако молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул — с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает

$$p_2 = p_1 e^{-Mg(h_2 - h_1)/(RT)} \quad (45.2)$$

Выражение (45.2) называется **барометрической формулой**. Она позволяет найти атмосферное давление в зависимости от высоты или, измерив давление, найти высоту: Так как высоты обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным, то выражение (45.2) может быть записано в виде

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}, \quad (45.3)$$

где  $p$  — давление на высоте  $h$ .

Прибор для определения высоты над земной поверхностью называется **высотометром** (или **альтиметром**). Его работа основана на использовании формулы (45.3). Из этой формулы следует, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем тяжелее газ.

Барометрическую формулу (45.3) можно преобразовать, если воспользоваться выражением (42.6)  $p = nkT$ :

$$n = n_0 e^{-Mgh/(RT)},$$

где  $n$  — концентрация молекул на высоте  $h$ ,  $n_0$  — то же, на высоте  $h=0$ . Так как  $M = m_0 N_A$  ( $N_A$  — постоянная Авогадро,  $m_0$  — масса одной молекулы), а  $R = kN_A$ , то

$$n = n_0 e^{-m_0 gh/(kT)}, \quad (45.4)$$

где  $m_0 gh = \Pi$  — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения, т. е.

$$n = n_0 e^{-\Pi/(kT)}. \quad (45.5)$$

Выражение (45.5) называется **распределением Больцмана** для внешнего потенциального поля. Из него следует, что при постоянной температуре плотность газа больше там, где меньше потенциальная энергия его молекул.

Если частицы имеют одинаковую массу и находятся в состоянии хаотического теплового движения, то распределение Больцмана (45.5) справедливо в любом внешнем потенциальном поле, а не только в поле сил тяжести.

### Среднее число столкновений и средняя длина свободного пробега молекул

Молекулы газа, находясь в состоянии хаотического движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь  $l$ , который называется **длиной свободного пробега**. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с огромным числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о **средней длине свободного пробега молекул**  $\langle l \rangle$ .

Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется **эффективным диаметром молекулы**  $d$  (рис. 68). Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула проходит в среднем путь, равный средней арифметической скорости  $\langle v \rangle$ , и если  $\langle z \rangle$  — среднее число столкновений, испытываемых одной молекулой газа за 1 с, то средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = \langle v \rangle / \langle z \rangle.$$

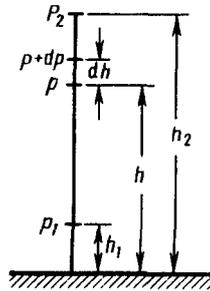


Рис. 67

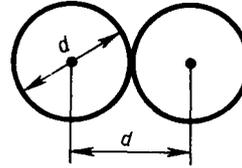


Рис. 68

Для определения  $\langle z \rangle$  представим себе молекулу в виде шарика диаметром  $d$ , которая движется среди других «застывших» молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших  $d$ , т. е. лежат внутри «ломаного» цилиндра радиусом  $d$  (рис. 69).

Среднее число столкновений за 1 с равно числу молекул в объеме «ломаного» цилиндра:

$$\langle z \rangle = nV,$$

где  $n$  — концентрация молекул,  $V = \pi d^2 \langle v \rangle$  — средняя скорость молекулы или путь, пройденный ею за 1 с). Таким образом, **среднее число столкновений**

$$\langle z \rangle = n\pi d^2 \langle v \rangle.$$

Расчеты показывают, что при учете движения других молекул

$$\langle z \rangle = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Тогда средняя длина свободного пробега

$$\langle l \rangle = 1 / (\sqrt{2} \pi d^2 n),$$

т. е.  $\langle l \rangle$  обратно пропорциональна концентрации  $n$  молекул. С другой стороны, из (42.6) следует, что при постоянной температуре  $n$  пропорциональна давлению  $p$ . Следовательно,

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$

### Опытное обоснование молекулярно-кинетической теории

Рассмотрим некоторые явления, экспериментально подтверждающие основные положения и выводы молекулярно-кинетической теории.

**1. Броуновское движение.** Шотландский ботаник Р. Броун (1773—1858), наблюдая под микроскопом взвесь цветочной пыльцы в воде, обнаружил, что частицы пыльцы оживленно и беспорядочно двигались, то вращаясь, то перемещаясь с места на место, подобно пылинкам в солнечном луче. Впоследствии оказалось, что подобное сложное зигзагообразное движение характерно для любых частиц малых размеров ( $\approx 1$  мкм), взвешенных в газе или жидкости. Интенсивность этого движения, называемого **броуновским**, повышается с ростом температуры среды, с уменьшением вязкости и размеров частиц (независимо от их химической природы)

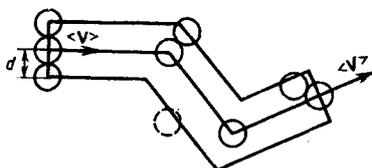


Рис. 69

- В чем суть распределения Больцмана?
- Зависит ли средняя длина свободного пробега молекул от температуры газа? Почему?
- Как изменится средняя длина свободного пробега молекул с увеличением давления?

2. **Опыт Штерна.** Первое экспериментальное определение скоростей молекул выполнено немецким физиком О. Штерном (1888—1970). Его опыты позволили также оценить распределение молекул по скоростям
3. **Опыт Ламмерт.** Этот опыт позволяет более точно определить закон распределения молекул по скоростям.
4. **Опытное определение постоянной Авогадро.** Воспользовавшись идеей распределения молекул по высоте (см. формулу (45.4)), французский ученый Ж. Перрен (1870—1942) экспериментально определил значение постоянной Авогадро. Исследуя под микроскопом броуновское движение, он убедился, что броуновские частицы распределяются по высоте подобно молекулам газа в поле тяготения. Применяв к ним больцмановское распределение, можно записать

$$n = n_0 e^{-(m-m_1)gh/(kT)},$$

где  $m$ —масса частицы,  $m_1$ —масса вытесненной ею жидкости;  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ ,  $m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1$  ( $r$  — радиус частицы,  $\rho$  — плотность частицы,  $\rho_1$  — плотность жидкости).

Если  $n_1$  и  $n_2$  — концентрации частиц на уровнях  $h_1$  и  $h_2$ , а  $k=R/N_A$ , то

$$N_A = \frac{3RT \ln(n_1/n_2)}{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g (h_2 - h_1)}.$$

Значение  $N_A$ , получаемое из работ Ж. Перрена, соответствовало значениям, полученным в других опытах, что подтверждает применимость к броуновским частицам распределения (45.4).

### Явления переноса в термодинамически неравновесных системах

В термодинамически неравновесных системах возникают особые *необратимые* процессы, называемые **явлениями переноса**, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы, импульса. К явлениям переноса относятся **теплопроводность** (обусловлена *переносом энергии*), **диффузия** (обусловлена *переносом массы*) и **внутреннее трение** (обусловлено *переносом импульса*). Для простоты ограничимся *одномерными* явлениями переноса. Систему отсчета выберем так, чтобы ось  $x$  была ориентирована в направлении переноса.

1. **Теплопроводность.** Если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени вследствие постоянных столкновений молекул происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, т. е., иными словами, выравнивание температур.

Перенос энергии в форме теплоты подчиняется **закону Фурье**:

$$j_E = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (48.1)$$

где  $j_E$  — **плотность теплового потока** — величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты *в единицу времени через единичную площадку*, перпендикулярную оси  $x$ ,  $\lambda$  — **теплопроводность**,  $\frac{dT}{dx}$  — градиент температуры, равный скорости изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что при теплопроводности энергия переносится в направлении убывания температуры (поэтому знаки  $j_E$  и  $\frac{dT}{dx}$  — противоположны). Теплопроводность  $\lambda$  численно равна плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

Можно показать, что

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \quad (48.2)$$

где  $c_V$  — *удельная теплоемкость газа при постоянном объеме* (количество теплоты, необходимое для нагревания 1 кг газа на 1 К при постоянном объеме),  $\rho$  — плотность газа,  $\langle v \rangle$  — средняя скорость теплового движения молекул,  $\langle l \rangle$  — средняя длина свободного пробега.

2. **Диффузия.** Явление диффузии заключается в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твердых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности. Во время становления молекулярно-кинетической теории по вопросу диффузии возникли противоречия. Так как молекулы движутся с огромными скоростями, диффузия должна происходить

очень быстро. Если же открыть в комнате сосуд с пахучим веществом, то запах распространяется довольно медленно. Однако противоречия здесь нет. Молекулы при атмосферном давлении обладают малой длиной свободного пробега и, сталкиваясь с другими молекулами, в основном «стоят» на месте.

Явление диффузии для химически однородного газа подчиняется **закону Фика**:

$$j_m = -D \frac{d\rho}{dx}, \quad (48.3)$$

где  $j_m$  — **плотность потока массы** — величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $D$  — **диффузия (коэффициент диффузии)**,  $d\rho/dx$  — градиент плотности, равный скорости изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к этой площадке. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности (поэтому знаки  $j_m$  и  $d\rho/dx$  противоположны). Диффузия  $D$  численно равна плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице. Согласно кинетической теории газов,

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (48.4)$$

**3. Внутреннее трение (вязкость).** Механизм возникновения внутреннего трения между параллельными слоями газа (жидкости), движущимися с различными скоростями, заключается в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее — увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Согласно формуле (31.1), сила внутреннего трения между двумя слоями газа (жидкости) подчиняется **закону Ньютона**:

$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (48.5)$$

где  $\eta$  — динамическая вязкость (вязкость),  $dv/dx$  — градиент скорости, показывающий быстроту изменения скорости в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоев,  $S$  — площадь, на которую действует сила  $F$ .

Взаимодействие двух слоев согласно второму закону Ньютона можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени передается импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение (48.5) можно представить в виде

$$j_p = -\eta \frac{dv}{dx}, \quad (48.6)$$

где  $j_p$  — **плотность потока импульса** — величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении оси  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ ,  $\frac{dv}{dx}$  — градиент скорости. Знак минус указывает, что импульс переносится

в направлении убывания скорости (поэтому знаки  $j_p$  и  $\frac{dv}{dx}$  противоположны).

Динамическая вязкость  $\eta$  численно равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице; она вычисляется по формуле

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (48.7)$$

Из сопоставления формул (48.1), (48.3) и (48.6), описывающих явления переноса, следует, что закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Рассмотренные законы Фурье, Фика и Ньютона не вскрывают молекулярно-кинетического смысла коэффициентов  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ . Выражения для коэффициентов переноса выводятся из кинетической теории. Они записаны без вывода, так как строгое рассмотрение явлений переноса довольно громоздко, а качественное — не имеет смысла. Формулы (48.2), (48.4) и (48.7) связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих формул вытекают простые зависимости между  $\lambda$ ,  $D$  и  $\eta$ :

$$\eta = \rho D, \\ \lambda / (\eta c_v) = 1.$$

Используя эти формулы, можно по найденным из опыта одним величинам определить другие.

## Основы термодинамики

### Число степеней свободы молекулы. Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул

Важной характеристикой термодинамической системы является ее **внутренняя энергия**  $U$  — энергия хаотического (теплового) движения микрочастиц системы (молекул, атомов, электронов, ядер и т. д.) и энергия взаимодействия этих частиц. Из этого определения следует, что к внутренней энергии не относятся кинетическая энергия движения системы как целого и потенциальная энергия системы во внешних полях.

Внутренняя энергия — *однозначная функция* термодинамического состояния системы, т. е. в каждом состоянии система обладает вполне определенной внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренней энергии этих состояний и не зависит от пути перехода.

В § 1 было введено понятие числа степеней свободы: это число независимых переменных (координат), полностью определяющих положение системы в пространстве. В ряде задач молекулу одноатомного газа (рис. 77, а) рассматривают как материальную точку, которой приписывают три степени свободы поступательного движения. При этом энергию вращательного движения можно не учитывать ( $r \rightarrow 0$ ,  $J = mr^2 \rightarrow 0$ ,  $T_{\text{вр}} = J\omega^2/2 \rightarrow 0$ ).

В классической механике молекула двухатомного газа в первом приближении рассматривается как совокупность двух материальных точек, жестко связанных недеформируемой связью (рис. 77, б). Эта система кроме трех степеней свободы поступательного движения имеет еще две степени свободы вращательного движения. Вращение вокруг третьей оси (оси, проходящей через оба атома) лишено смысла. Таким образом, двухатомный газ обладает пятью степенями свободы ( $i = 5$ ). Трехатомная (рис. 77, в) и многоатомная нелинейные молекулы имеют шесть степеней свободы: три поступательных и три вращательных. Естественно, что жесткой связи между атомами не существует. Поэтому для реальных молекул необходимо учитывать также степени свободы колебательного движения.

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимущества перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $1/3$  значения  $\langle \varepsilon_0 \rangle$  в (43.8):

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{1}{2} kT.$$

В классической статистической физике выводится **закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул**: для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $kT/2$ , а на каждую колебательную степень свободы — в среднем энергия, равная  $kT$ . Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией потому, что на нее приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причем средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы. Таким образом, средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT,$$

где  $i$  — сумма числа поступательных, числа вращательных в удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы:

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}.$$

В классической теории рассматривают молекулы с жесткой связью между атомами; для них  $i$  совпадает с числом степеней свободы молекулы.

Так как в идеальном газе взаимная потенциальная энергия молекул равна нулю (молекулы между собой не взаимодействуют), то внутренняя энергия, отнесенная к одному молю газа, будет равна сумме кинетических энергий  $N_A$  молекул:

$$U_m = \frac{i}{2} kTN_A = \frac{i}{2} RT. \quad (50.1)$$

Внутренняя энергия для произвольной массы  $m$  газа.

$$U = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT = \nu \frac{i}{2} RT,$$

где  $M$  — молярная масса,  $\nu$  — количество вещества.

### Первое начало термодинамики

Рассмотрим термодинамическую систему, для которой механическая энергия не изменяется, а изменяется лишь ее внутренняя энергия. Внутренняя энергия системы может изменяться в результате различных процессов, например совершения над системой работы или сообщения ей теплоты. Так, вдвигая поршень в цилиндр, в котором находится газ, мы сжимаем этот газ, в результате чего его температура повышается, т. е. тем самым изменяется (увеличивается) внутренняя энергия газа. С другой стороны, температуру газа и его внутреннюю энергию можно увеличить за счет сообщения ему некоторого количества теплоты — энергии, переданной системе внешними телами путем теплообмена (процесс обмена внутренними энергиями при контакте тел с разными температурами).

Таким образом, можно говорить о двух формах передачи энергии от одних тел к другим: работе и теплоте. Энергия механического движения может превращаться в энергию теплового движения, и наоборот. При этих превращениях соблюдается закон сохранения и превращения энергии; применительно к термодинамическим процессам этим законом и является первое начало термодинамики, установленное в результате обобщения многовековых опытных данных.

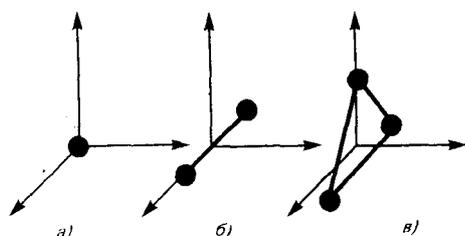


Рис. 77

- В чем суть закона Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы молекул?
- Почему колебательная степень свободы обладает вдвое большей энергией, чем поступательная и вращательная?

Допустим, что некоторая система (газ, заключенный в цилиндр под поршнем), обладая внутренней энергией  $U_1$ , получила некоторое количество теплоты  $Q$  и, перейдя в новое состояние, характеризующееся внутренней энергией  $U_2$ , совершила работу  $A$  над внешней средой, т. е. против внешних сил. Количество теплоты считается положительным, когда оно подводится к системе, а работа — положительной, когда система совершает ее против внешних сил. Опыт показывает, что в соответствии с законом сохранения энергии при любом способе перехода системы из первого состояния во второе изменение внутренней энергии  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет одинаковым и равным разности между количеством теплоты  $Q$ , полученным системой, и работой  $A$ , совершенной системой против внешних сил:

$$\Delta U = Q - A,$$

или

$$Q = \Delta U + A. \quad (51.1)$$

Уравнение (51.1) выражает **первое начало термодинамики**: теплота, сообщаемая системе, расходуется на изменение ее внутренней энергии и на совершение ею работы против внешних сил. Выражение (51.1) в дифференциальной форме будет иметь вид

$$dQ = dU + dA,$$

или в более корректной форме

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (51.2)$$

где  $dU$  — бесконечно малое изменение внутренней энергии системы,  $\delta A$  — элементарная работа,  $\delta Q$  — бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta A$  и  $\delta Q$  таковыми не являются. В дальнейшем будем использовать запись первого начала термодинамики в форме (51.2).

Из формулы (51.1) следует, что в СИ количество теплоты выражается в тех же единицах, что работа и энергия, т. е. в джоулях (Дж).

Если система периодически возвращается в первоначальное состояние, то изменение ее внутренней энергии  $\Delta U = 0$ . Тогда, согласно первому началу термодинамики,

$$A = Q,$$

**т. е. вечный двигатель первого рода** — периодически действующий двигатель, который совершал бы большую работу, чем сообщенная ему извне энергия, — невозможен (одна из формулировок первого начала термодинамики).

### Работа газа при изменении его объема

Для рассмотрения конкретных процессов найдем в общем виде внешнюю работу, совершаемую газом при изменении его объема. Рассмотрим, например, газ, находящийся под поршнем в цилиндрическом сосуде (рис. 78). Если газ, расширяясь, передвигает поршень на бесконечно малое расстояние  $dl$ , то производит над ним работу

$$\delta A = F dl = p S dl = p dV,$$

где  $S$  — площадь поршня,  $S dl = dV$  — изменение объема системы. Таким образом,

$$\delta A = p dV. \quad (52.1)$$

Полную работу  $A$ , совершаемую газом при изменении его объема от  $V_1$  до  $V_2$ , найдем интегрированием формулы (52.1):

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (52.2)$$

Результат интегрирования определяется характером зависимости между давлением и объемом газа. Найденное для работы выражение (52.2) справедливо при любых изменениях объема твердых, жидких и газообразных тел.

Произведенную при том или ином процессе работу можно изобразить графически с помощью кривой в координатах  $p, V$ . Пусть изменение давления газа при его расширении изображается кривой на рис. 79. При увеличении объема на  $dV$  совершаемая газом работа равна  $p dV$ , т. е. определяется площадью полоски с основанием  $dV$ , заштрихованной на рисунке. Поэтому полная работа, совершаемая газом при расширении от объема  $V_1$  до объема  $V_2$ , определяется площадью, ограниченной осью абсцисс, кривой  $p=f(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .

Графически можно изображать только равновесные процессы — процессы, состоящие из последовательности равновесных состояний. Они протекают так, что изменение термодинамических параметров за конечный промежуток времени бесконечно мало. *Все реальные процессы неравновесны* (они протекают с конечной скоростью), но в ряде случаев неравновесностью реальных процессов можно пренебречь (чем медленнее процесс протекает, тем он ближе к равновесному). В дальнейшем рассматриваемые процессы будем считать равновесными.

### Теплоемкость

**Удельная теплоемкость вещества** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 кг вещества на 1 К:

$$c = \frac{\delta Q}{m dT}.$$

Единица удельной теплоемкости — джоуль на килограмм-кельвин (Дж/(кг · К)).

**Молярная теплоемкость** — величина, равная количеству теплоты, необходимому для нагревания 1 моль вещества на 1 К:

$$C_m = \frac{\delta Q}{\nu dT}, \quad (53.1)$$

где  $\nu = m/M$  — количество вещества.

Единица молярной теплоемкости — джоуль на моль-кельвин (Дж/(моль · К)).

Удельная теплоемкость  $c$  связана с молярной  $C_m$ , соотношением

$$C_m = cM, \quad (53.2)$$

где  $M$  — молярная масса вещества.

Различают теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении, если в процессе нагревания вещества его объем или давление поддерживается постоянным.

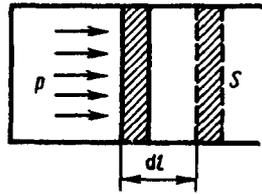


Рис. 78

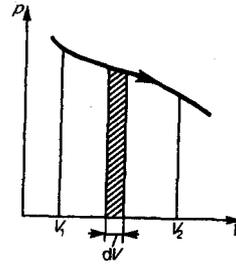


Рис. 79

Запишем выражение первого начала термодинамики (51.2) для 1 моль газа с учетом формул (52.1) и (53.1):

$$C_m dT = dU_m + p dV_m. \quad (53.3)$$

Если газ нагревается при постоянном объеме, то работа внешних сил равна нулю (см. (52.1)) и сообщаемая газу извне теплота идет только на увеличение его внутренней энергии:

$$C_V = \frac{dU_m}{dT}, \quad (53.4)$$

т. е. молярная теплоемкость газа при постоянном объеме  $C_V$  равна изменению внутренней энергии 1 моль газа при повышении его температуры на 1 К. Согласно формуле (50.1),  $dU_m = \frac{i}{2} R dT$ , тогда

$$C_V = iR/2. \quad (53.5)$$

Если газ нагревается при постоянном давлении, то выражение (53.3) можно записать в виде

$$C_p = \frac{dU_m}{dT} + \frac{p dV_m}{dT}.$$

Учитывая, что  $\frac{dU_m}{dT}$  не зависит от вида процесса (внутренняя энергия идеального газа не зависит ни от  $p$ , ни от  $V$ , а определяется лишь температурой  $T$ ) и всегда равна  $C_V$  (см. (53.4)), и дифференцируя уравнение Клапейрона — Менделеева  $pV_m = RT$  (42.4) по  $T$  ( $p = \text{const}$ ), получаем

$$C_p = C_V + R. \quad (53.6)$$

Выражение (53.6) называется **уравнением Майера**; оно показывает, что  $C_p$  всегда больше  $C_V$  на величину молярной газовой постоянной. Это объясняется тем, что при нагревании газа *при постоянном давлении* требуется еще дополнительное количество теплоты на совершение работы расширения газа, так как постоянство давления обеспечивается увеличением объема газа. Используя (53.5), выражение (53.6) можно записать в виде

$$C_p = \frac{i + 2}{2} R. \quad (53.7)$$

При рассмотрении термодинамических процессов важно знать характерное для каждого газа отношение  $C_p$  к  $C_V$ :

$$\gamma = C_p/C_V = (i + 2)/i. \quad (53.8)$$

Из формул (53.5) и (53.7) следует, что молярные теплоемкости определяются лишь числом степеней свободы и не зависят от температуры. Это утверждение молекулярно-кинетической теории справедливо в довольно широком интервале температур лишь для одноатомных газов. Уже у двухатомных газов число степеней свободы, проявляющееся в теплоемкости, зависит от температуры. Молекула двухатомного газа обладает тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы.

По закону равномерного распределения энергии по степеням свободы (см. § 50), для комнатных температур  $C_V = \frac{5}{2} R$ . Из качественной экспериментальной зависимости молярной теплоемкости  $C_V$  водорода (рис. 80) следует, что  $C_V$  зависит от температуры: при низкой температуре ( $\approx 50$  К)  $C_V = \frac{3}{2} R$ , при комнатной —  $C_V = \frac{5}{2} R$  (вместо расчетных  $\frac{7}{2} R$ ) и при очень высокой —  $C_V = \frac{7}{2} R$ . Это можно объяснить, предположив, что при низких температурах наблюдается только поступательное движение молекул, при комнатных — добавляется их вращение, а при высоких — к этим двум видам движения добавляются еще колебания молекул.

## Применение первого начала термодинамики к изопроцессам

Среди равновесных процессов, происходящих с термодинамическими системами, выделяются **изопроцессы**, при которых один из основных параметров состояния сохраняется постоянным.

**Изохорный процесс** ( $V=\text{const}$ ). Диаграмма этого процесса (**изохора**) в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси ординат (рис. 81), где процесс 1—2 есть изохорное нагревание, а 1—3 — изохорное охлаждение. При изохорном процессе газ не совершает работы над внешними телами, т. е.

$$\delta A = p dV = 0.$$

Как уже указывалось в § 53, из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для изохорного процесса следует, что вся теплота, сообщаемая газу, идет на увеличение его внутренней энергии:

$$\delta Q = dU.$$

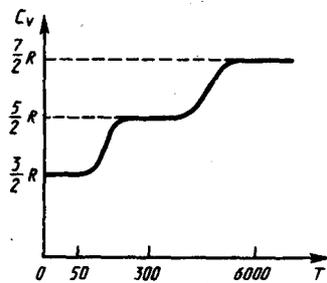
Согласно формуле (53.4),

$$dU_m = C_V dT.$$

Тогда для произвольной массы газа получим

$$\delta Q = dU = \frac{m}{M} C_V dT. \quad (54.1)$$

Рис. 80



- Что такое внутренняя энергия идеального газа? В результате каких процессов может изменяться внутренняя энергия системы?
- Что такое теплоемкость газа? Какая из теплоемкостей —  $C_V$  или  $C_p$  — больше и почему?
- Как объяснить температурную зависимость молярной теплоемкости водорода?

**Изобарный процесс** ( $p=\text{const}$ ). Диаграмма этого процесса (**изобара**) в координатах  $p, V$  изображается прямой, параллельной оси  $V$ . При изобарном процессе работа газа (см. (52.2)) при увеличении объема от  $V_1$  до  $V_2$  равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p(V_2 - V_1) \quad (54.2)$$

и определяется площадью заштрихованного прямоугольника (рис. 82). Если использовать уравнение (42.5) Клапейрона — Менделеева для выбранных нами двух состояний, то

$$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1, \quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2,$$

откуда

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{M} \frac{R}{p} (T_2 - T_1).$$

Тогда выражение (54.2) для работы изобарного расширения примет вид

$$A = \frac{m}{M} R (T_2 - T_1). \quad (54.3)$$

Из этого выражения вытекает физический смысл молярной газовой постоянной  $R$ : если  $T_2 - T_1 = 1$  К, то для 1 моль газа  $R=A$ , т. е.  $R$  численно равна работе изобарного расширения 1 моль идеального газа при нагревании его на 1 К.

В изобарном процессе при сообщении газу массой  $m$  количества теплоты

$$\delta Q = \frac{m}{M} C_p dT$$

его внутренняя энергия возрастает на величину (согласно формуле (53.4))

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT.$$

При этом газ совершит работу, определяемую выражением (54.3).

**Изотермический процесс** ( $T=\text{const}$ ). Как уже указывалось в § 41, изотермический процесс описывается законом Бойля—Мариотта:

$$pV = \text{const.}$$

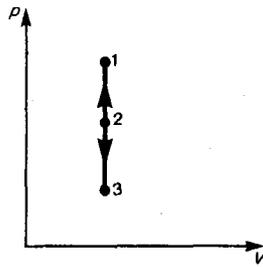


Рис. 81

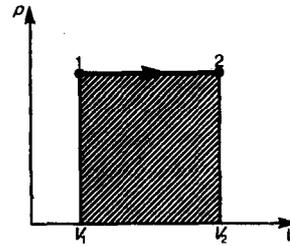


Рис. 82

Диаграмма этого процесса (**изотерма**) в координатах  $p$ ,  $V$  представляет собой гиперболу (см. рис. 60), расположенную на диаграмме тем выше, чем выше температура, при которой происходит процесс.

Так как при  $T = \text{const}$  внутренняя энергия идеального газа не изменяется:

$$dU = \frac{m}{M} C_V dT = 0,$$

то из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) следует, что для изотермического процесса

$$\delta Q = \delta A,$$

Следовательно, для того чтобы при расширении газа температура не понижалась, к газу в течение изотермического процесса необходимо подводить количество теплоты, эквивалентное внешней работе расширения.

### Адиабатический процесс. Политропный процесс

**Адиабатическим** называется процесс, при котором отсутствует теплообмен ( $\delta Q = 0$ ) между системой и окружающей средой. К адиабатическим процессам можно отнести все быстропротекающие процессы. Например, адиабатическим процессом можно считать процесс распространения звука в среде, так как скорость распространения звуковой волны настолько велика, что обмен энергией между волной и средой произойти не успевает. Адиабатические процессы применяются в двигателях внутреннего сгорания (расширение и сжатие горючей смеси в цилиндрах), в холодильных установках и т. д.

Из первого начала термодинамики ( $\delta Q = dU + \delta A$ ) для адиабатического процесса следует, что

$$\delta A = -dU, \quad (55.1)$$

т. е. внешняя работа совершается за счет изменения внутренней энергии системы.

Используя выражения (52.1) и (53.4), для произвольной массы газа перепишем уравнение (55.1) в виде

$$p dV = -\frac{m}{M} C_V dT. \quad (55.2)$$

Продифференцировав уравнение состояния для идеального газа  $pV = \frac{m}{M} RT$ , получим

$$p dV + V dp = \frac{m}{M} R dT. \quad (55.3)$$

Исключим из (55.2) и (55.3) температуру  $T$ .

$$\frac{p dV + V dp}{p dV} = -\frac{R}{C_V} = -\frac{C_p - C_V}{C_V}.$$

Разделив переменные и учитывая, что  $C_p/C_V = \gamma$  (см. (53.8)), найдем

$$dp/p = -\gamma dV/V.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $p_1$  до  $p_2$  и соответственно от  $V_1$  до  $V_2$ , а затем потенцируя, приходим к выражению

$$p_2/p_1 = (V_1/V_2)^\gamma, \text{ или } p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Так как состояния 1 и 2 выбраны произвольно, то можно записать

$$pV^\gamma = \text{const.} \quad (55.4)$$

Полученное выражение есть **уравнение адиабатического процесса**, называемое также **уравнением Пуассона**.

Для перехода к переменным  $T$ ,  $V$  или  $p$ ,  $T$  исключим из (55.4) с помощью уравнения Клапейрона — Менделеева

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

соответственно давление или объем:

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.}, \quad (55.5)$$

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{const.} \quad (55.6)$$

Выражения (55.4) — (55.6) представляют собой уравнения адиабатического процесса. В этих уравнениях безразмерная величина (см. (53.8) и (53.2))

$$\gamma = C_p/C_v = c_p/c_v = (i+2)/i \quad (55.7)$$

называется **показателем адиабаты** (или **коэффициентом Пуассона**). Для одноатомных газов (Ne, He и др.), достаточно хорошо удовлетворяющих условию идеальности,  $i=3$ ,  $\gamma=1,67$ . Для двухатомных газов ( $H_2$ ,  $N_2$ ,  $O_2$  и др.)  $i=5$ ,  $\gamma=1,4$ . Значения  $\gamma$ , вычисленные по формуле (55.7), хорошо подтверждаются экспериментом.

Диаграмма адиабатического процесса (**адиабата**) в координатах  $p$ ,  $V$  изображается гиперболой (рис. 83).

На рисунке видно, что адиабата ( $pV^\gamma = \text{const}$ ) более крута, чем изотерма ( $pV = \text{const}$ ). Это объясняется тем, что при адиабатическом сжатии 1—3 увеличение давления газа обусловлено не только уменьшением его объема, как при изотермическом сжатии, но и повышением температуры.

Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе. Запишем уравнение (55.1) в виде

$$\delta A = - \frac{m}{M} C_v dT.$$

Если газ адиабатически расширяется от объема  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$  и работа расширения идеального газа

$$A = - \frac{m}{M} C_v \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} C_v (T_1 - T_2). \quad (55.8)$$

Работа, совершаемая газом при адиабатическом расширении 1—2 (определяется площадью, заштрихованной на рис. 83), меньше, чем при изотермическом. Это объясняется тем, что при адиабатическом расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом — температура поддерживается постоянной за счет притока извне эквивалентного количества теплоты.

Рассмотренные изохорный, изобарный, изотермический и адиабатический процессы имеют общую особенность — они происходят при постоянной теплоемкости. В первых двух процессах теплоемкости соответственно равны  $C_v$  и  $C_p$ , в изотермическом процессе ( $dT=0$ ) теплоемкость равна  $\pm\infty$ , в адиабатическом ( $\delta Q=0$ ) теплоемкость равна нулю. Процесс, в котором теплоемкость остается постоянной, называется **политропным**.

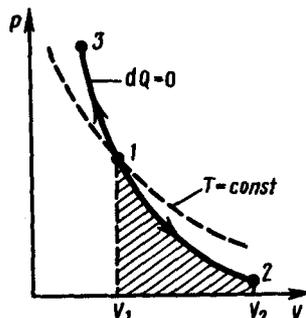


Рис. 83

- Почему адиабата более крута, чем изотерма?
- Как изменится температура газа при его адиабатическом сжатии?
- Показатель политропы  $n > 1$ . Нагревается или охлаждается идеальный газ при сжатии?

Исходя из первого начала термодинамики при условии постоянства теплоемкости ( $C=\text{const}$ ) можно вывести уравнение политропы:

$$pV^n = \text{const.}, \quad (55.9)$$

где  $n=(C-C_p)/(C-C_V)$ —показатель политропы. Очевидно, что при  $C=0$ ,  $n=\gamma$ , из (55.9) получается уравнение адиабаты; при  $C = \infty$ ,  $n = 1$  — уравнение изотермы; при  $C=C_p$ ,  $n=0$  —уравнение изобары, при  $C=C_V$ ,  $n=\pm\infty$  — уравнение изохоры. Таким образом, все рассмотренные процессы являются частными случаями политропного процесса.

### Круговой процесс (цикл). Обратимые и необратимые процессы

**Круговым процессом** (или **циклом**) называется процесс, при котором система, пройдя через ряд состояний, возвращается в исходное. На диаграмме процессов цикл изображается замкнутой кривой (рис. 84). Цикл, совершаемый идеальным газом, можно разбить на процессы расширения ( $1-2$ ) и сжатия ( $2-1$ ) газа. Работа расширения (определяется площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ ) положительна ( $dV>0$ ), работа сжатия (определяется площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ ) отрицательна ( $dV<0$ ). Следовательно, работа, совершаемая газом за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой. Если за **цикл** совершается положительная работа  $A=\oint pdV > 0$  (цикл протекает по часовой стрелке), то он называется **прямым** (рис. 84, а), если за цикл совершается отрицательная работа  $A=\oint pdV < 0$  (цикл протекает против часовой стрелки), то он называется **обратным** (рис. 84, б).

Прямой цикл используется в *тепловых двигателях* — периодически действующих двигателях, совершающих работу за счет полученной извне теплоты. Обратный цикл используется в *холодильных машинах* — периодически действующих установках, в которых за счет работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние и, следовательно, полное изменение внутренней энергии газа равно нулю. Поэтому первое начало термодинамики (51.1) для кругового процесса

$$Q=\Delta U+A=A, \quad (56.1)$$

т. е. работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты. Однако в результате кругового процесса система может теплоту как получать, так и отдавать, поэтому

$$Q=Q_1-Q_2,$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, полученное системой,  $Q_2$  — количество теплоты, отданное системой.

Поэтому **термический коэффициент полезного действия для кругового процесса**

$$\eta=\frac{A}{Q_1}=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1}=1-\frac{Q_2}{Q_1}. \quad (56.2)$$

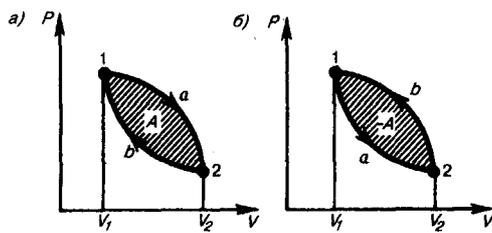


Рис. 84

- Проанализируйте прямой и обратный циклы.
- Чем отличаются обратимые и необратимые процессы? Почему все реальные процессы необратимы?

Термодинамический процесс называется **обратимым**, если он может происходить как в прямом, так и в обратном направлении, причем если такой процесс происходит сначала в прямом, а затем в обратном направлении и система возвращается в исходное состояние, то в окружающей среде и в этой системе не происходит никаких изменений. Всякий процесс, не удовлетворяющий этим условиям, является **необратимым**.

Любой равновесный процесс является обратимым. Обратимость равновесного процесса, происходящего в системе, следует из того, что се любое промежуточное состояние есть состояние термодинамического равновесия; для него «безразлично», идет процесс в прямом или обратном направлении. Реальные процессы сопровождаются диссипацией энергии (из-за трения, теплопроводности и т. д.), которая нами не обсуждается. *Обратимые процессы* — это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение важно по двум причинам: 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы; 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения к. п. д. реальных тепловых двигателей.

### Энтропия, ее статистическое толкование и связь с термодинамической вероятностью

Понятие энтропии введено в 1865 г. Р. Клаузиусом. Для выяснения физического содержания этого понятия рассматривают отношение теплоты  $Q$ , полученной телом в изотермическом процессе, к температуре  $T$  теплоотдающего тела, называемое **приведенным количеством теплоты**.

Приведенное количество теплоты, сообщаемое телу на бесконечно малом участке процесса, равно  $\delta Q/T$ . Строгий теоретический анализ показывает, что приведенное количество теплоты, сообщаемое телу в *любом обратимом круговом процессе*, равно нулю:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (57.1)$$

Из равенства нулю интеграла (57.1), взятого по замкнутому контуру, следует, что подынтегральное выражение  $\delta Q/T$  есть полный дифференциал некоторой функции, которая определяется только состоянием системы и не зависит от пути, каким система пришла в это состояние. Таким образом,

$$\frac{\delta Q}{T} = dS. \quad (57.2)$$

*Функция состояния*, дифференциалом которой является  $\delta Q/T$ , называется **энтропией** и обозначается  $S$ . Из формулы (57.1) следует, что для *обратимых процессов* изменение энтропии

$$\Delta S = 0. \quad (57.3)$$

В термодинамике доказывается, что энтропия системы, совершающей *необратимый цикл*, возрастает:

$$\Delta S > 0. \quad (57.4)$$

Выражения (57.3) и (57.4) относятся только к *замкнутым системам*, если же система обменивается теплотой с внешней средой, то ее энтропия может вести себя любым образом. Соотношения (57.3) и (57.4) можно представить в виде **неравенства Клаузиуса**

$$\Delta S \geq 0, \quad (57.5)$$

т. е. *энтропия замкнутой системы может либо возрасть (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянной (в случае обратимых процессов)*.

$$(57.7)$$

т. е. изменение энтропии  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 *не зависит от вида процесса перехода 1 → 2*.

Так как для адиабатического процесса  $\delta Q = 0$ , то  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = \text{const}$ , т. е. *адиабатический обратимый процесс протекает при постоянной энтропии*. Поэтому его часто называют

#### изоэнтропийным процессом

Энтропия обладает свойством *аддитивности*: *энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему*. Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объем (температура и давление таким свойством не обладают).

Более глубокий смысл энтропии вскрывается в статистической физике: энтропия связывается с термодинамической вероятностью состояния системы. **Термодинамическая вероятность  $W$**  состояния системы — это *число способов*, которыми может быть реализовано данное состояние макроскопической системы, или число микросостояний, осуществляющих данное макросостояние (по определению,  $W \geq 1$ , т. е. термодинамическая вероятность не есть вероятность в математическом смысле (последняя  $\leq 1$ )).

Согласно Больцману (1872), *энтропия системы и термодинамическая вероятность связаны между собой следующим образом*:

$$S = k \ln W, \quad (57.8)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана. Таким образом, энтропия определяется логарифмом числа микросостояний, с помощью которых может быть реализовано данное макросостояние. Следовательно, энтропия может рассматриваться как *мера вероятности* состояния термодинамической системы. Формула Больцмана (57.8) позволяет дать энтропии следующее *статистическое толкование*: *энтропия является мерой неупорядоченности системы*. В самом деле, чем больше число микросостояний, реализующих данное макросостояние, тем больше энтропия. В состоянии равновесия — наиболее вероятного состояния системы — число микросостояний максимально, при этом максимальна и энтропия.

Так как реальные процессы необратимы, то можно утверждать, что все процессы в замкнутой системе ведут к увеличению ее энтропии — **принцип возрастания энтропии**. При статистическом толковании энтропии это означает, что процессы в замкнутой системе идут в направлении увеличения числа микросостояний, иными словами, от менее вероятных состояний к более вероятным, до тех пор пока вероятность состояния не станет максимальной.

Сопоставляя выражения (57.5) и (57.8), видим, что энтропия и термодинамическая вероятность состояний замкнутой системы могут либо возрастать (в случае необратимых процессов), либо оставаться постоянными (в случае обратимых процессов).

### Второе начало термодинамики

Первое начало термодинамики, выражая закон сохранения и превращения энергии, не позволяет установить направление протекания термодинамических процессов. Кроме того, можно представить множество процессов, не противоречащих первому началу, в которых энергия сохраняется, а в природе они не осуществляются. Появление второго начала термодинамики связано с необходимостью дать ответ на вопрос, какие процессы в природе возможны, а какие нет. Второе начало термодинамики определяет направление протекания термодинамических процессов.

Используя понятие энтропии и неравенство Клаузиуса (см. § 57), **второе начало термодинамики** можно сформулировать как **закон возрастания энтропии** замкнутой системы при необратимых процессах: *любой необратимый процесс в замкнутой системе происходит так, что энтропия системы при этом возрастает.*

Можно дать более краткую формулировку второго начала термодинамики: *в процессах, происходящих в замкнутой системе, энтропия не убывает.* Здесь существенно, что речь идет о замкнутых системах, так как в незамкнутых системах энтропия может вести себя любым образом (убывать, возрастать, оставаться постоянной). Кроме того, отметим еще раз, что энтропия остается постоянной в замкнутой системе только при обратимых процессах. При необратимых процессах в замкнутой системе энтропия всегда возрастает.

Формула Больцмана (57.8) позволяет объяснить постулируемое вторым началом термодинамики возрастание энтропии в замкнутой системе при необратимых процессах: *возрастание энтропии* означает переход системы из *менее вероятных в более вероятные* состояния. Таким образом, формула Больцмана позволяет дать статистическое толкование второго начала термодинамики. Оно, являясь статистическим законом, описывает закономерности хаотического движения большого числа частиц, составляющих замкнутую систему.

Укажем еще две формулировки второго начала термодинамики:

- 1) **по Кельвину:** *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является превращение теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу;*
- 2) **по Клаузиусу:** *невозможен круговой процесс, единственным результатом которого является передача теплоты от менее нагретого тела к более нагретому.*

Можно довольно просто доказать (предоставим это читателю) эквивалентность формулировок Кельвина и Клаузиуса. Кроме того, показано, что если в замкнутой системе провести воображаемый процесс, противоречащий второму началу термодинамики в формулировке Клаузиуса, то он сопровождается уменьшением энтропии. Это же доказывает эквивалентность формулировки Клаузиуса (а следовательно, и Кельвина) и статистической формулировки, согласно которой энтропия замкнутой системы не может убывать.

В середине XIX в. возникла проблема так называемой **тепловой смерти Вселенной**. Рассматривая Вселенную как замкнутую систему и применяя к ней второе начало термодинамики, Клаузиус свел его содержание к утверждению, что энтропия Вселенной должна достигнуть своего максимума. Это означает, что со временем все формы движения должны перейти в тепловую. Переход же теплоты от горячих тел к холодным приведет к тому, что температура всех тел во Вселенной сравняется, т. е. наступит полное тепловое равновесие и все процессы во Вселенной прекратятся — наступит тепловая смерть Вселенной. Ошибочность вывода о тепловой смерти заключается в том, что бессмысленно применять второе начало термодинамики к незамкнутым системам, например к такой безграничной и бесконечно развивающейся системе, как Вселенная.

Первые два начала термодинамики дают недостаточно сведений о поведении термодинамических систем при нуле Кельвина. Они дополняются **третьим началом термодинамики**, или **теоремой**

**Нернста\* — Планка:** энтропия всех тел в состоянии равновесия стремится к нулю по мере приближения температуры к нулю Кельвина:

$$\lim_{T \rightarrow 0} S = 0.$$

\*В. Ф. Г. Нернст (1864—1941) — немецкий физик и химик.

Так как энтропия определяется с точностью до аддитивной постоянной, то эту постоянную удобно взять равной нулю. Отметим, однако, что это произвольное допущение, поскольку энтропия по своей *сущности* всегда определяется с точностью до аддитивной постоянной. Из теоремы Нернста — Планка следует, что теплоемкости  $C_p$  и  $C_V$  при 0 К равны нулю.

### Тепловые двигатели и холодильные машины. Цикл Карно и его к. п. д. для идеального газа

Из формулировки второго начала термодинамики по Кельвину следует, что **вечный двигатель второго рода** — периодически действующий двигатель, совершающий работу за счет охлаждения одного источника теплоты, — невозможен. Для иллюстрации этого положения рассмотрим работу теплового двигателя (исторически второе начало термодинамики и возникло из анализа работы тепловых двигателей).

Принцип действия теплового двигателя приведен на рис. 85. От термостата\* с более высокой температурой  $T_1$ , называемого **нагревателем**, за цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому **холодильником**, за цикл передается количество теплоты  $Q_2$ , при этом совершается работа  $A = Q_1 - Q_2$ .

\*Термодинамическая система, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры.

Чтобы термический коэффициент полезного действия теплового двигателя (56.2) был равен 1, необходимо выполнение условия  $Q_2 = 0$ , т. е. тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты, а это невозможно. Так, французский физик и инженер Н. Л. С. Карно (1796 — 1832) показал, что для работы теплового двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами, иначе это противоречило бы второму началу термодинамики.

Двигатель второго рода, будь он возможен, был бы практически вечным. Охлаждение, например, воды океанов на  $1^\circ$  дало бы огромную энергию. Масса воды в Мировом океане составляет примерно  $10^{18}$  т, при охлаждении которой на  $1^\circ$  выделилось бы примерно  $10^{24}$  Дж теплоты, что эквивалентно полному сжиганию  $10^{14}$  т угля. Железнодорожный состав, нагруженный этим количеством угля, растянулся бы на расстояние  $10^{10}$  км, что приблизительно совпадает с размерами Солнечной системы!

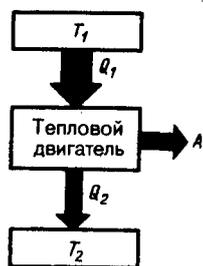


Рис. 85



Рис. 86

Процесс, обратный происходящему в тепловом двигателе, используется в холодильной машине, принцип действия которой представлен на рис. 86. Системой за цикл от термостата с более низкой температурой  $T_2$  отнимается количество теплоты  $Q_2$  и отдается термостату с более высокой температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ . Для кругового процесса, согласно (56.1),  $Q=A$ , но, по условию,  $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ , поэтому  $A < 0$  и  $Q_2 - Q_1 = -A$ , или  $Q_1 = Q_2 + A$ , т. е. количество теплоты  $Q_1$ , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре  $T_1$  больше количества теплоты  $Q_2$ , полученного от источника теплоты при более низкой температуре  $T_2$ , на величину работы, совершенной над системой. Следовательно, *без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать ее более нагретому*. Это утверждение есть не что иное, как второе начало термодинамики в формулировке Клаузиуса.

Однако второе начало термодинамики не следует представлять так, что оно совсем запрещает переход теплоты от менее нагретого тела к более нагретому. Ведь именно такой переход осуществляется в холодильной машине. Но при этом надо помнить, что внешние силы совершают работу над системой, т. е. этот переход не является единственным результатом процесса.

Основываясь на втором начале термодинамики, Карно вывел теорему, носящую теперь его имя: из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим к. п. д. обладают обратимые машины; при этом к. п. д. обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела (тела, совершающего круговой процесс и обменивающегося энергией с другими телами), а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

Карно теоретически проанализировал обратимый наиболее экономичный цикл, состоящий из двух изотерм и двух адиабат. Его называют **циклом Карно**. Рассмотрим *прямой цикл* Карно, в котором в качестве рабочего тела используется идеальный газ, заключенный в сосуд с подвижным поршнем.

Цикл Карно изображен на рис. 87, где изотермические расширение и сжатие заданы соответственно кривыми 1—2 и 3—4, а адиабатические расширение и сжатие — кривыми 2—3 и 4—1. При изотермическом процессе  $U = \text{const}$ , поэтому, согласно (54.4), количество теплоты  $Q_1$ , полученное газом от нагревателя, равно работе расширения  $A_{12}$ , совершаемой газом при переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$A_{12} = \frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (59.1)$$

При адиабатическом расширении 2—3 теплообмен с окружающей средой отсутствует и работа расширения  $A_{23}$  совершается за счет изменения внутренней энергии (см. (55.1) и (55.8)):

$$A_{23} = -\frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1).$$

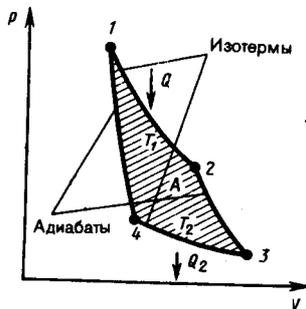


Рис. 87

- Представив цикл Карно на диаграмме  $p, V$  графически, укажите, какой площадью определяется: 1) работа, совершенная над газом; 2) работа, совершенная самим расширяющимся газом.
- Представьте графически цикл Карно в переменных  $T, S$ .

(59.3)

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (59.4)$$

т. е. для цикла Карно к. п. д. действительно определяется только температурами нагревателя и холодильника. Для его повышения необходимо увеличивать разность температур нагревателя и холодильника. Например, при  $T_1 = 400$  К и  $T_2 = 300$  К  $\eta = 0,25$ . Если же температуру нагревателя повысить на 100 К, а температуру холодильника понизить на 50 К, то  $\eta = 0,5$ . К. п. д. всякого реального теплового двигателя из-за трения и неизбежных тепловых потерь гораздо меньше вычисленного для цикла Карно.

*Обратный цикл* Карно положен в основу действия **тепловых насосов**. В отличие от холодильных машин тепловые насосы должны как можно больше тепловой энергии отдавать горячему телу, например системе отопления. Часть этой энергии отбирается от окружающей среды с более низкой температурой, а часть — получается за счет механической работы, производимой, например, компрессором.

Теорема Карно послужила основанием для установления **термодинамической шкалы температур**. Сравнив левую и правую части формулы (59.4), получим

$$T_2/T_1 = Q_2/Q_1, \quad (59.5)$$

т. е. для сравнения температур  $T_1$  и  $T_2$  двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое — холодильника. Из равенства (59.5) видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая термодинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определенного термометрического тела. Отметим, что практически таким образом сравнивать температуры трудно, так как реальные термодинамические процессы, как уже указывалось, являются необратимыми.

## Реальные газы, жидкости и твердые тела

### Силы и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия

Модель идеального газа, используемая в молекулярно-кинетической теории газов, позволяет описывать поведение разреженных реальных газов при достаточно высоких температурах и низких давлениях. При выводе уравнения состояния идеального газа размерами молекул и их взаимодействием друг с другом пренебрегают. Повышение давления приводит к уменьшению среднего расстояния между молекулами, поэтому необходимо учитывать объем молекул и взаимодействие между ними. Так, в  $1 \text{ м}^3$  газа при нормальных условиях содержится  $2,68 \cdot 10^{25}$  молекул, занимающих объем примерно  $10^{-4} \text{ м}^3$  (радиус молекулы примерно  $10^{-10} \text{ м}$ ), которым по сравнению с объемом газа ( $1 \text{ м}^3$ ) можно пренебречь. При давлении 500 МПа ( $1 \text{ атм} = 101,3 \text{ кПа}$ ) объем молекул составит уже половину всего объема газа. Таким образом, при высоких давлениях и низких температурах указанная модель идеального газа непригодна.

При рассмотрении **реальных газов** — газов, свойства которых зависят от взаимодействия молекул, надо учитывать **силы межмолекулярного взаимодействия**. Они проявляются на расстояниях  $\leq 10^{-9} \text{ м}$  и быстро убывают при увеличении расстояния между молекулами. Такие силы называются **короткодействующими**.

В XX в., по мере развития представлений о строении атома и квантовой механики, было выяснено, что между молекулами вещества одновременно действуют **силы притяжения и силы отталкивания**. На рис. 88, а приведена качественная зависимость сил межмолекулярного взаимодействия от расстояния  $r$  между молекулами, где  $F_0$  и  $F_{\text{п}}$  — соответственно силы отталкивания и притяжения, а  $F$  — их результирующая. Силы отталкивания считаются *положительными*, а силы взаимного притяже-

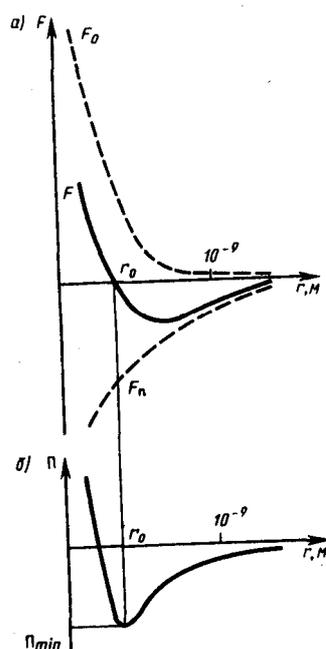


Рис. 88

- Каков критерий различных агрегатных состояний вещества?
- Запишите и проанализируйте уравнение Ван-дер-Ваальса для моля газа; для произвольного количества вещества.

ния — отрицательными.

На расстоянии  $r=r_0$  результирующая сила  $F=0$ , т.е. силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга. Таким образом, расстояние  $r_0$  соответствует равновесному расстоянию между молекулами, на котором бы они находились в отсутствие теплового движения. При  $r < r_0$

преобладают силы отталкивания ( $F > 0$ ), при  $r > r_0$  — силы притяжения ( $F < 0$ ). На расстояниях  $r > 10^{-9}$  м межмолекулярные силы взаимодействия практически отсутствуют ( $F \rightarrow 0$ ).

Элементарная работа  $\delta A$  силы  $F$  при увеличении расстояния между молекулами на  $dr$  совершается за счет уменьшения взаимной потенциальной энергии молекул, т. е.

$$\delta A = Fdr = -d\Pi. \quad (60.1)$$

Из анализа качественной зависимости потенциальной энергии взаимодействия молекул от расстояния между ними (рис. 88, б) следует, что если молекулы находятся друг от друга на расстоянии, на котором межмолекулярные силы взаимодействия не действуют ( $r \rightarrow \infty$ ), то  $\Pi = 0$ . При постепенном сближении молекул между, ними появляются силы притяжения ( $F < 0$ ), которые совершают положительную работу ( $\delta A = Fdr > 0$ ). Тогда, согласно (60.1), потенциальная энергия взаимодействия уменьшается, достигая минимума при  $r = r_0$ . При  $r < r_0$  с уменьшением  $r$  силы отталкивания ( $F > 0$ ) резко возрастают и совершаемая против них работа отрицательна ( $\delta A = Fdr < 0$ ). Потенциальная энергия начинает тоже резко возрастать и становится положительной. Из данной потенциальной кривой следует, что система из двух взаимодействующих молекул в состоянии устойчивого равновесия ( $r = r_0$ ) обладает минимальной потенциальной энергией.

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами  $\Pi_{\min}$  и  $kT$ .  $\Pi_{\min}$  — наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул — определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ( $r = r_0$ );  $kT$  определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплого) движения молекул.

Если  $\Pi_{\min} \ll kT$ , то вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния  $r_0$ , т. е. вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала. Если  $\Pi_{\min} \gg kT$ , то вещество находится в твердом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг к другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемого расстоянием  $r_0$ . Если  $\Pi_{\min} \approx kT$ , то вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее  $r_0$ .

Таким образом, любое вещество в зависимости от температуры может находиться в газообразном, жидком или твердом агрегатном состоянии, причем температура перехода из одного агрегатного состояния в другое зависит от значения  $\Pi_{\min}$ , для данного вещества. Например, у инертных газов  $\Pi_{\min}$  мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твердом состояниях.

### Уравнение Ван-дер-Ваальса

Как уже указывалось в § 60, для реальных газов необходимо учитывать размеры молекул и их взаимодействие друг с другом, поэтому модель идеального газа и уравнение Клапейрона — Менделеева (42.4)  $pV_m = RT$  (для моля газа), описывающее идеальный газ, для реальных газов непригодны.

Учитывая собственный объем молекул и силы межмолекулярного взаимодействия, голландский физик И. Ван-дер-Ваальс (1837—1923) вывел уравнение состояния реального газа. Ван-дер-Ваальсом в уравнение Клапейрона — Менделеева введены две поправки.

**1. Учет собственного объема молекул.** Наличие сил отталкивания, которые противодействуют проникновению в занятый молекулой объем других молекул, сводится к тому, что фактический свободный объем, в котором могут двигаться молекулы реального газа, будет не  $V_m$ , а  $V_m - b$ , где  $b$  — объем, занимаемый самими молекулами.

Объем  $b$  равен *учетверенному собственному объему молекул*. Если, например, в сосуде находятся две молекулы, то центр любой из них не может приблизиться к центру другой молекулы на расстояние, меньшее диаметра  $d$  молекулы. Это означает, что для центров обеих молекул оказывается недоступным сферический объем радиуса  $d$ , т. е. объем, равный восьми объемам молекулы или учетверенному объему молекулы в расчете на одну молекулу.

**2. Учет притяжения молекул.** Действие сил притяжения газа приводит к появлению дополнительного давления на газ, называемого внутренним давлением. По вычислениям Ван-дер-Ваальса, внутреннее давление обратно пропорционально квадрату молярного объема, т. е.

$$p' = a/V_m^2, \quad (61.1)$$

где  $a$  — постоянная Ван-дер-Ваальса, характеризующая силы межмолекулярного притяжения,  $V_m$  — молярный объем.

Вводя эти поправки, получим **уравнение Ван-дер-Ваальса для моля газа (уравнение состояния реальных газов)**:

$$(p + a/V_m^2)(V_m - b) = RT. \quad (61.2)$$

Для произвольного количества вещества  $\nu$  газа ( $\nu = m/M$ ) с учетом того, что  $V = \nu V_m$ , уравнение Ван-дер-Ваальса примет вид

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right) \left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \text{ или } (p + \nu^2 a/V^2)(V - \nu b) = \nu RT,$$

где поправки  $a$  и  $b$  — постоянные для каждого газа величины, определяемые опытным путем (записываются уравнения Ван-дер-Ваальса для двух известных из опыта состояний газа и решаются относительно  $a$  и  $b$ ).

При выводе уравнения Ван-дер-Ваальса сделан целый ряд упрощений, поэтому оно также весьма приближенное, хотя и лучше (особенно для несильно сжатых газов) согласуется с опытом, чем уравнение состояния идеального газа.

Уравнение Ван-дер-Ваальса не единственное уравнение, описывающее реальные газы. Существуют и другие уравнения, некоторые из них даже точнее описывают реальные газы, но не рассматриваются из-за их сложности.

### Изотермы Ван-дер-Ваальса и их анализ

Для исследования поведения реального газа рассмотрим **изотермы Ван-дер-Ваальса** — кривые зависимости  $p$  от  $V_m$  при заданных  $T$ , определяемые уравнением Ван-дер-Ваальса (61.2) для моля газа. Эти кривые (рассматриваются для четырех различных температур; рис. 89) имеют довольно своеобразный характер. При высоких температурах ( $T > T_k$ ) изотерма реального газа отличается от изотермы идеального газа только некоторым искажением ее формы, оставаясь монотонно спадающей кривой. При некоторой температуре  $T_k$  на изотерме имеется лишь одна точка перегиба  $K$ .

Эта **изотерма** называется **критической**, соответствующая ей температура  $T_k$  — критической температурой; точка перегиба  $K$  называется критической точкой; в этой точке касательная к ней параллельна оси абсцисс. Соответствующие этой точке **объем**  $V_k$  и **давление**  $p_k$  называются также **критическими**. Состояние с критическими параметрами ( $p_k, V_k, T_k$ ) называется **критическим состоянием**. При низких температурах ( $T < T_k$ ) изотермы имеют волнообразный участок, сначала монотонно опускаясь вниз, затем монотонно поднимаясь вверх и снова монотонно опускаясь.

Рассматривая различные участки изотермы при  $T < T_k$  (рис. 90), видим, что на участках 1—3 и 5—7 при уменьшении объема  $V_m$  давление  $p$  возрастает, что естественно. На участке 3—5 сжатие вещества приводит к уменьшению давления; практика же показывает, что такие состояния в природе не осуществляются. Наличие участка 3—5 означает, что при постепенном изменении объема вещество не может оставаться все время в виде однородной среды; в некоторый момент должно наступить скачкообразное изменение состояния и распад вещества на две фазы. Таким образом, истинная изотерма будет иметь вид ломаной линии 7—6—2—1. Часть 6—7 отвечает газообразному состоянию, а часть 2—1 — жидкому. В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы 6—2, наблюдается равновесие жидкой и газообразной фаз вещества. Вещество в газообразном состоянии при температуре ниже критической называется паром, а пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется **насыщенным**.

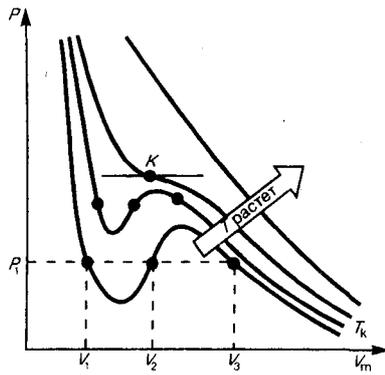


Рис. 89

- Чем отличаются реальные газы от идеальных?
- Каков смысл поправок при выводе уравнения Ван-дер-Ваальса?

Данные выводы, следующие из анализа уравнения Ван-дер-Ваальса, были подтверждены опытами ирландского ученого Т. Эндрюса (1813—1885), изучавшего изотермическое сжатие углекислого газа. Отличие экспериментальных (Эндрюс) и теоретических (Ван-дер-Ваальс) изотерм заключается в том, что превращению газа в жидкость в первом случае соответствуют горизонтальные участки, а во втором — волнообразные.

Газ же при температуре выше критической не может быть превращен в жидкость ни при каком давлении.

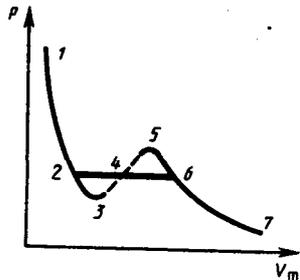


Рис. 90

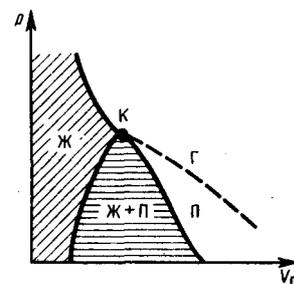


Рис. 91

При достаточно низких температурах изотерма пересекает ось  $V_m$ , переходя в область отрицательных давлений (нижняя кривая на рис. 92). Вещество под отрицательным давлением находится в состоянии растяжения. При некоторых условиях такие состояния также реализуются. Участок 8—9 на нижней изотерме соответствует **перегретой жидкости**, участок 9—10 — **растянутой жидкости**.

### Внутренняя энергия реального газа

Внутренняя энергия реального газа складывается из кинетической энергии теплового движения его молекул (определяет внутреннюю энергию идеального газа, равную  $C_V T$ ; см. § 53) и потенциальной энергии межмолекулярного взаимодействия. Потенциальная энергия реального газа обусловлена только силами притяжения между молекулами. Наличие сил притяжения приводит к возникновению внутреннего давления на газ (см. (61.1)):

$$p' = a/V_m^2.$$

Работа, которая затрачивается для преодоления сил притяжения, действующих между молекулами газа, как известно из механики, идет на увеличение потенциальной энергии системы, т. е.  $\delta A = p' dV_m = \delta \Pi$ , или  $\delta \Pi = \frac{a}{V_m^2} dV_m$ , откуда

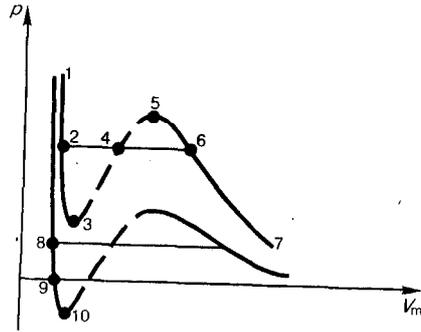
$$\Pi = -a/V_m$$

(постоянная интегрирования принята равной нулю). Знак минус означает, что молекулярные силы, создающие внутреннее давление  $p'$ , являются силами притяжения (см. § 60). Учитывая оба слагаемых, получим, что внутренняя энергия моля реального газа

$$U_m = C_V T - a/V_m \tag{63.1}$$

растет с повышением температуры и увеличением объема.

Рис. 92



● Почему перегретая жидкость и пересыщенный пар являются метастабильными состояниями?

Если газ расширяется без теплообмена с окружающей средой (адиабатический процесс, т. е.  $\delta Q=0$ ) и не совершает внешней работы (расширение газа в вакуум, т. е.  $\delta A=0$ ), то на основании первого начала термодинамики ( $\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A$ ) Получим, что

$$U_1 = U_2. \tag{63.2}$$

Следовательно, при адиабатическом расширении без совершения внешней работы внутренняя энергия газа не изменяется.

Равенство (63.2) формально справедливо как для идеального, так и для реального газов, но физический смысл его для обоих случаев совершенно различен. Для идеального газа равенство  $U_1 = U_2$  означает равенство температур ( $T_1 = T_2$ ), т. е. при адиабатическом расширении идеального газа в вакуум его температура не изменяется. Для реального газа из равенства (63.2), учитывая, что для моля газа

$$U_1 = C_V T_1 - a/V_1, \quad U_2 = C_V T_2 - a/V_2, \tag{63.3}$$

получаем

$$T_1 - T_2 = \frac{a}{C_V} \left( \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right).$$

Так как  $V_2 > V_1$ , то  $T_1 > T_2$ , т. е. реальный газ при адиабатическом расширении в вакуум охлаждается. При адиабатическом сжатии в вакуум реальный газ нагревается.

### Эффект Джоуля — Томсона

Если идеальный газ адиабатически расширяется и совершает при этом работу, то он охлаждается, так как работа в данном случае совершается за счет его внутренней энергии (см. § 55). Подобный процесс, но с реальным газом — адиабатическое расширение реального газа с совершением внешними силами положительной работы — осуществили английские физики Дж. Джоуль (1818—1889) и У. Томсон (лорд Кельвин, 1824—1907).

Рассмотрим эффект Джоуля — Томсона. На рис. 93 представлена схема их опыта. В теплоизолированной трубке с пористой перегородкой находятся два поршня, которые могут перемещаться без трения. Пусть сначала слева от перегородки газ под поршнем 1 находится под давлением  $p_1$ , занимает объем  $V_1$  при температуре  $T_1$ , а справа газ отсутствует (поршень 2 придвинут к перегородке). После прохождения газа через пористую перегородку в правой части газ характеризуется параметрами  $p_2, V_2, T_2$ . Давления  $p_1$  и  $p_2$  поддерживаются постоянными ( $p_1 > p_2$ ).

Так как расширение газа происходит без теплообмена с окружающей средой (адиабатически), то на основании первого начала термодинамики

$$\delta Q = (U_2 - U_1) + \delta A = 0. \tag{64.1}$$

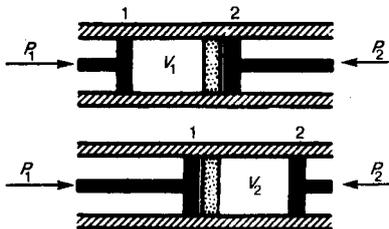


Рис. 93

- При адиабатическом расширении газа в вакуум его внутренняя энергия не изменяется. Как изменится температура, если газ идеальный? реальный?
- Какова суть эффекта Джоуля — Томсона? Когда он положителен? отрицателен?

Внешняя работа, совершаемая газом, состоит из положительной работы при движении поршня 2 ( $A_2=p_2V_2$ ) и отрицательной при движении поршня 1 ( $A_1=p_1V_1$ ), т. е.  $\delta A=A_2-A_1$ . Подставляя выражения для работ в формулу (64.1), получаем

$$U_1+p_1V_1=U_2+p_2V_2. \quad (64.2)$$

Таким образом, в опыте Джоуля — Томсона сохраняется (остаётся неизменной) величина  $U+pV$ . Она является функцией состояния и называется **энтальпией**.

Изменение температуры реального газа в результате его адиабатического расширения, или, как говорят, **адиабатического дросселирования** — медленного прохождения газа под действием перепада давления сквозь **дроссель** (например, пористую перегородку), называется **эффектом Джоуля—Томсона**. Эффект Джоуля — Томсона принято называть **положительным**, если газ в процессе дросселирования охлаждается ( $\Delta T < 0$ ), и **отрицательным**, если газ нагревается ( $\Delta T > 0$ ).

В зависимости от условий дросселирования для одного и того же газа эффект Джоуля — Томсона может быть как положительным, так и отрицательным. Температура, при которой (для данного давления) происходит изменение знака эффекта Джоуля — Томсона, называется **температурой инверсии**. Ее зависимость от объема получим, приравняв выражение (64.4) нулю:

$$T = \frac{2a}{Rb} \left( 1 - \frac{b}{V} \right), \quad (64.5)$$

Кривая, определяемая уравнением (64.5), — **кривая инверсии** — приведена на рис. 94. Область выше этой кривой соответствует отрицательному эффекту Джоуля — Томсона, ниже — положительному. Отметим, что при больших перепадах давления на дросселе температура газа изменяется значительно. Так, при дросселировании от 20 до 0,1 МПа и начальной температуре 17° С воздух охлаждается на 35° С.

Эффект Джоуля — Томсона обусловлен отклонением газа от идеальности. В самом деле, для моля идеального газа  $pV_m=RT$ , поэтому выражение (64.2) примет вид

$$C_V T_1 + RT_1 = C_V T_2 + RT_2,$$

откуда следует, что  $T_1 = T_2$ .

### Свойства жидкостей. Поверхностное натяжение

Жидкость является агрегатным состоянием вещества, промежуточным между газообразным и твердым, поэтому она обладает свойствами как газообразных, так и твердых веществ. Жидкости, подобно твердым телам, обладают определенным объемом, а подобно газам, принимают форму сосуда, в котором они находятся (см. § 28). Молекулы газа практически не связаны между собой силами межмолекулярного взаимодействия, и в данном случае средняя энергия теплового движения молекул газа гораздо больше средней потенциальной энергии, обусловленной силами притяжения между ними (см. § 60), поэтому молекулы газа разлетаются в разные стороны и газ занимает предоставленный ему объем. В твердых и жидких телах силы притяжения между молекулами уже существенны и удерживают молекулы на определенном расстоянии друг от друга. В этом случае средняя энергия хаотического (теплового) движения молекул меньше средней потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия, и ее недостаточно для преодоления сил притяжения между молекулами, поэтому твердые тела и жидкости имеют определенный объем.

Рентгеноструктурный анализ жидкостей показал, что характер расположения частиц жидкости промежуточен между газом и твердым телом. В газах молекулы движутся хаотично, поэтому нет никакой закономерности в их взаимном расположении. Для твердых тел наблюдается так называемый *дальний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на больших расстояниях. В жидкостях имеет место так называемый *ближний порядок* в расположении частиц, т. е. их упорядоченное расположение, повторяющееся на расстояниях, сравнимых с межатомными.

Теория жидкости до настоящего времени полностью не развита. Разработка ряда проблем в исследовании сложных свойств жидкости принадлежит Я. И. Френкелю (1894—1952). Тепловое движение в жидкости он объяснял тем, что каждая молекула в течение некоторого времени колеблется около определенного положения равновесия, после чего скачком переходит в новое положение, отстоящее от исходного на расстоянии порядка межатомного. Таким образом, молекулы жидкости довольно медленно перемещаются по всей массе жидкости и диффузия происходит

гораздо медленнее, чем в газах. С повышением температуры жидкости частота колебательного движения резко увеличивается, возрастает подвижность молекул, что, в свою очередь, является причиной уменьшения вязкости жидкости.

На каждую молекулу жидкости со стороны окружающих молекул действуют силы притяжения, быстро убывающие с расстоянием (см. рис. 88); следовательно, начиная с некоторого минимального расстояния силами притяжения между молекулами можно пренебречь. Это расстояние (порядка  $10^{-9}$  м) называется **радиусом молекулярного действия**  $r$ , а сфера радиуса  $r$  — **сферой молекулярного действия**.

Выделим внутри жидкости какую-либо молекулу  $A$  (рис. 96) и проведем вокруг нее сферу радиуса  $r$ . Достаточно, согласно определению, учесть действие на данную молекулу только тех молекул, которые находятся внутри сферы молекулярного действия. Силы, с которыми эти молекулы действуют на молекулу  $A$ , направлены в разные стороны и в среднем скомпенсированы, поэтому результирующая сила, действующая на молекулу внутри жидкости со стороны других молекул, равна нулю. Иначе обстоит дело, если молекула, например молекула  $B$ , расположена от поверхности на расстоянии, меньшем  $r$ . В данном случае сфера молекулярного действия лишь частично расположена внутри жидкости. Так как концентрация молекул в расположенном над жидкостью газе мала по сравнению с их концентрацией в жидкости, то равнодействующая сил  $F$ , приложенных к каждой молекуле поверхностного слоя, не равна нулю и направлена внутрь жидкости. Таким образом, результирующие силы всех молекул поверхностного слоя оказывают на жидкость давление, называемое **молекулярным** (или **внутренним**). Молекулярное давление не действует на тело, помещенное в жидкость, так как оно обусловлено силами, действующими только между молекулами самой жидкости.

Суммарная энергия частиц жидкости складывается из энергии их хаотического (теплового) движения и потенциальной энергии, обусловленной силами межмолекулярного взаимодействия. Для перемещения молекулы из глубины жидкости в поверхностный слой надо затратить работу. Эта работа совершается за счет кинетической энергии молекул и идет на увеличение их потенциальной энергии. Поэтому молекулы поверхностного слоя жидкости обладают большей потенциальной энергией, чем молекулы внутри жидкости. Эта дополнительная энергия, которой обладают молекулы в поверхностном слое жидкости, называемая поверхностной энергией, пропорциональна площади слоя  $\Delta S$ :

$$\Delta E = \sigma \Delta S, \quad (66.1)$$

где  $\sigma$  — поверхностное натяжение.

Так как равновесное состояние характеризуется минимумом потенциальной энергии, то жидкость при отсутствии внешних сил будет принимать такую форму, чтобы при заданном объеме она имела минимальную поверхность, т. е. форму шара. Наблюдая мельчайшие капельки, взвешенные в воздухе, можем видеть, что они действительно имеют форму шариков, но несколько искаженную из-за действия сил земного тяготения. В условиях невесомости капля любой жидкости (независимо от ее размеров) имеет сферическую форму, что доказано экспериментально на космических кораблях.

Итак, условием устойчивого равновесия жидкости является минимум поверхностной энергии. Это означает, что жидкость при заданном объеме должна иметь наименьшую площадь поверхности, т. е. жидкость стремится сократить площадь свободной поверхности. В этом случае поверхностный слой жидкости можно уподобить растянутой упругой пленке, в которой действуют силы натяжения.

Рассмотрим поверхность жидкости (рис. 97), ограниченную замкнутым контуром. Под действием сил поверхностного натяжения (направлены по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно участку контура, на который они действуют) поверхность жидкости сократилась и рассматриваемый контур переместился в положение, отмеченное светло-серым цветом. Силы, действующие со стороны выделенного участка на граничащие с ним участки, совершают работу

$$\Delta A = f \Delta l \Delta x,$$

где  $f$  — сила поверхностного натяжения, действующая на единицу длины контура поверхности жидкости.

Из рис. 97 видно, что  $\Delta l \Delta x = \Delta S$ , т. е.

$$\Delta A = f \Delta S. \quad (66.2)$$

Эта работа совершается за счет уменьшения поверхностной энергии, т. е.

$$\Delta A = \Delta E. \quad (66.3)$$

Из сравнения выражений (66.1) — (66.3) видно, что

$$\sigma = f, \quad (66.4)$$

т. е. **поверхностное натяжение**  $\sigma$  равно силе поверхностного натяжения, приходящейся на единицу длины контура, ограничивающего поверхность. Единица поверхностного натяжения — *ньютон на метр* (Н/м) или *джоуль на квадратный метр* (Дж/м<sup>2</sup>) (см. (66.4) и (66.1)). Большинство жидкостей при температуре 300 К имеет поверхностное натяжение порядка  $10^{-2}$ — $10^{-1}$  Н/м. Поверхностное натяжение с повышением температуры уменьшается, так как увеличиваются средние расстояния между молекулами жидкости.

Поверхностное натяжение существенным образом зависит от примесей, имеющих в жидкостях. Вещества, ослабляющие поверхностное натяжение жидкости, называются **поверхностно-активными**. Наиболее известным поверхностно-активным веществом по отношению к воде является мыло. Оно сильно уменьшает ее поверхностное натяжение (примерно с  $7,5 \cdot 10^{-2}$  до  $4,5 \cdot 10^{-2}$  Н/м). Поверхностно-активными веществами, понижающими поверхностное натяжение воды, являются также спирты, эфиры, нефть и др.

Существуют вещества (сахар, соль), которые увеличивают поверхностное натяжение жидкости благодаря тому, что их молекулы взаимодействуют с молекулами жидкости сильнее, чем молекулы жидкости между собой. Например, если посолить мыльный раствор, то в поверхностный слой жидкости выталкивается молекул мыла больше, чем в пресной воде. В мыловаренной технике мыло «высаливается» этим способом из раствора.

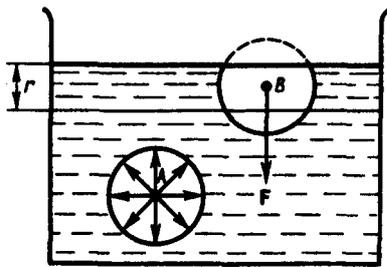


Рис. 96

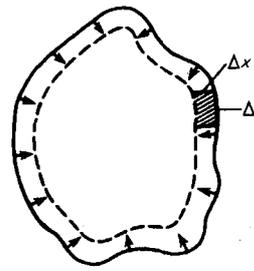


Рис. 97

### Смачивание

Из практики известно, что капля воды растекается на стекле и принимает форму, изображенную на рис. 98, в то время как ртуть на той же поверхности превращается в несколько сплюснутую каплю (рис. 99). В первом случае говорят, что жидкость *смачивает* твердую поверхность, во втором — *не смачивает ее*. Смачивание зависит от характера сил, действующих между молекулами поверхностных слоев соприкасающихся сред. Для смачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела больше, чем между молекулами самой жидкости, и жидкость стремится увеличить поверхность соприкосновения с твердым телом. Для несмачивающей жидкости силы притяжения между молекулами жидкости и твердого тела меньше, чем между молекулами жидкости, и жидкость стремится уменьшить поверхность своего соприкосновения с твердым телом.

К линии соприкосновения трех сред (точка  $O$  есть ее пересечение с плоскостью чертежа) приложены три силы поверхностного натяжения, которые направлены по касательной внутрь поверхности соприкосновения соответствующих двух сред (рис. 98 и 99). Эти силы, отнесенные к *единице длины* линии соприкосновения, равны соответствующим поверхностным натяжениям  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$ . Угол  $\theta$  между касательными к поверхности жидкости и твердого тела называется **краевым углом**. Условием равновесия капли (рис. 98) является равенство нулю суммы проекций сил поверхностного натяжения на направление касательной к поверхности твердого тела, т. е.

$$-\sigma_{13} + \sigma_{12} + \sigma_{23} \cos \theta = 0,$$

откуда

$$\cos \theta = (\sigma_{13} - \sigma_{12}) / \sigma_{23}. \quad (67.1)$$

Из условия (67.1) вытекает, что краевой угол может быть острым или тупым в зависимости от значений  $\sigma_{13}$  и  $\sigma_{12}$ . Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12}$ , то  $\cos \theta > 0$  и угол  $\theta$ —острый (рис. 98), т. е. жидкость смачивает твердую

поверхность. Если  $\sigma_{13} < \sigma_{12}$ , то  $\cos\theta < 0$  и угол  $\theta$  — тупой (рис. 99), т. е. жидкость не смачивает твердую поверхность. Краевой угол удовлетворяет условию (67.1), если

$$|\sigma_{13} - \sigma_{12}|/\sigma_{23} \leq 1. \quad (67.2)$$

Если условие (67.2) не выполняется, то капля жидкости 2 ни при каких значениях  $\theta$  не может находиться в равновесии. Если  $\sigma_{13} > \sigma_{12} + \sigma_{23}$ , то жидкость растекается по поверхности твердого тела, покрывая его тонкой пленкой (например, керосин на поверхности стекла), — имеет место **полное смачивание** (в данном случае  $\theta = 0$ ). Если  $\sigma_{12} > \sigma_{13} + \sigma_{23}$ , то жидкость стягивается в шаровую каплю, в пределе имея с ней лишь одну точку соприкосновения (например, капля воды на поверхности парафина), — имеет место **полное несмачивание** (в данном случае  $\theta = \pi$ ).

Смачивание и несмачивание являются понятиями относительными, т. е. жидкость, смачивающая одну твердую поверхность, не смачивает другую. Например, вода смачивает стекло, но не смачивает парафин; ртуть не смачивает стекло, но смачивает чистые поверхности металлов.

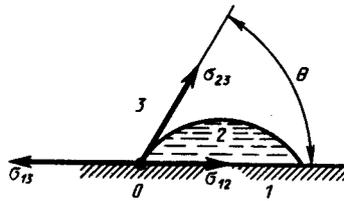


Рис. 98

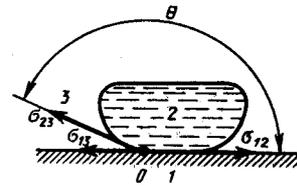


Рис. 99

Явления смачивания и несмачивания имеют большое значение в технике. Например, в методе флотационного обогащения руды (отделение руды от пустой породы) ее, мелко раздробленную, взбалтывают в жидкости, смачивающей пустую породу и не смачивающей руду. Через эту смесь продувается воздух, а затем она отстаивается. При этом смоченные жидкостью частицы породы опускаются на дно, а крупинки минералов «прилипают» к пузырькам воздуха и всплывают на поверхность жидкости. При механической обработке металлов их смачивают специальными жидкостями, что облегчает и ускоряет обработку.

### Давление под искривленной поверхностью жидкости

Если поверхность жидкости не плоская, а искривленная, то она оказывает на жидкость *избыточное (добавочное) давление*. Это давление, обусловленное силами поверхностного натяжения, для выпуклой поверхности положительно, а для вогнутой поверхности — отрицательно.

Для расчета избыточного давления предположим, что свободная поверхность жидкости имеет форму сферы радиуса  $R$ , от которой мысленно отсечен шаровой сегмент, опирающийся на окружность радиуса  $r = R \sin \alpha$  (рис. 100). На каждый бесконечно малый элемент длины  $\Delta l$  этого контура действует сила поверхностного натяжения  $\Delta F = \sigma \Delta l$ , касательная к поверхности сферы. Разложив  $\Delta F$  на два компонента ( $\Delta F_1$  и  $\Delta F_2$ ), видим, что геометрическая сумма сил  $\Delta F_2$  равна нулю, так как эти силы на противоположных сторонах контура направлены в обратные стороны и взаимно уравниваются. Поэтому равнодействующая сил поверхностного натяжения, действующих на вырезанный сегмент, направлена перпендикулярно плоскости сечения внутрь жидкости и равна алгебраической сумме составляющих  $\Delta F_1$ :

$$F = \sum \Delta F_1 = \sum \Delta F \sin \alpha = \sum \sigma \Delta l \frac{r}{R} = \frac{\sigma r}{R} \sum \Delta l = \frac{\sigma r}{R} 2\pi r.$$

Разделив эту силу на площадь основания сегмента  $\pi r^2$ , вычислим избыточное давление на жидкость, создаваемое силами поверхностного натяжения и обусловленное кривизной поверхности:

$$\Delta p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma\pi r^2}{R\pi r^2} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (68.1)$$

Если поверхность жидкости вогнутая, то можно доказать, что результирующая сила поверхностного натяжения направлена из жидкости и равна

$$\Delta p = -2\sigma/R. \quad (68.2)$$

Следовательно, давление внутри жидкости под вогнутой поверхностью меньше, чем в газе, на величину  $\Delta p$ .

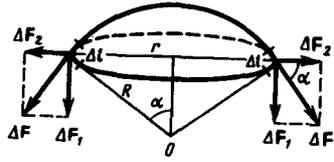


Рис. 100

- Почему у всех веществ поверхностное натяжение уменьшается с температурой?
- Что представляют собой поверхностно-активные вещества?

Формулы (68.1) и (68.2) являются частным случаем формулы Лапласа,\* определяющей избыточное давление для произвольной поверхности жидкости двойкой кривизны:

$$\Delta p = \sigma (1/R_1 + 1/R_2), \quad (68.3)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух любых взаимно перпендикулярных нормальных сечений поверхности жидкости в данной точке. Радиус кривизны положителен, если центр кривизны соответствующего сечения находится внутри жидкости, и отрицателен, если центр кривизны находится вне жидкости.

\*П. Лаплас (1749—1827) — французский ученый.

Для сферической искривленной поверхности ( $R_1=R_2=R$ ) выражение (68.3) переходит в (68.1), для цилиндрической ( $R_1=R$  и  $R_2=\infty$ ) — избыточное давление

$$\Delta p = \sigma (1/R + 1/\infty) = \sigma/R.$$

В случае плоской поверхности ( $R_1=R_2=\infty$ ) силы поверхностного натяжения избыточного давления не создают.

### Капиллярные явления

Если поместить узкую трубку (**капилляр**) одним концом в жидкость, налитую в широкий сосуд, то вследствие смачивания или несмачивания жидкостью стенок капилляра кривизна поверхности жидкости в капилляре становится значительной. Если жидкость смачивает материал трубки, то внутри ее поверхность жидкости — **мениск** — имеет вогнутую форму, если не смачивает — выпуклую (рис. 101).

Под вогнутой поверхностью жидкости появится отрицательное избыточное давление, определяемое по формуле (68.2). Наличие этого давления приводит к тому, что жидкость в капилляре поднимается, так как под плоской поверхностью жидкости в широком сосуде избыточного давления нет. Если же жидкость не смачивает стенки капилляра, то положительное избыточное давление приведет к опусканию жидкости в капилляре. Явление изменения высоты уровня жидкости в капиллярах называется **капиллярностью**. Жидкость в капилляре поднимается или опускается на такую высоту  $h$ , при которой давление столба жидкости (**гидростатическое давление**)  $\rho gh$  уравнивается избыточным давлением  $\Delta p$ , т. е.

$$2\sigma/R = \rho gh,$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — ускорение свободного падения.

Если  $r$  — радиус капилляра,  $\theta$  — краевой угол, то из рис. 101 следует, что  $(2\sigma \cos\theta)/r = \rho gh$ , откуда

$$h = (2\sigma \cos\theta)/(\rho gh). \quad (69.1)$$

В соответствии с тем, что смачивающая жидкость по капилляру поднимается, а несмачивающая — опускается, из формулы (69.1) при  $\theta < \pi/2$  ( $\cos\theta > 0$ ) получим положительные значения  $h$ , а при  $\theta > \pi/2$  ( $\cos\theta < 0$ ) — отрицательные. Из выражения (69.1) видно также, что высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре обратно пропорциональна его радиусу. В тонких капиллярах жидкость поднимается достаточно высоко. Так, при полном смачивании ( $\theta=0$ ) вода ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\sigma = 0,073 \text{ Н/м}$ ) в капилляре диаметром 10 мкм поднимается на высоту  $h \approx 3 \text{ м}$ .

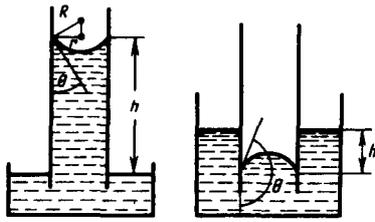


Рис. 101

- При каком условии жидкость смачивает твердое тело? не смачивает?
- От чего зависит высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре?

Капиллярные явления играют большую роль в природе и технике. Например, влагообмен в почве и в растениях осуществляется за счет поднятия воды по тончайшим капиллярам. На капиллярности основано действие фитилей, впитывание влаги бетоном и т. д.

### Твердые тела. Моно- и поликристаллы

Твердые тела (кристаллы) характеризуются наличием значительных сил межмолекулярного взаимодействия и сохраняют постоянными не только свой объем, но и форму. Кристаллы имеют правильную геометрическую форму, которая, как показали рентгенографические исследования немецкого физика-теоретика М. Лауэ (1879—1960), является результатом упорядоченного расположения частиц (атомов, молекул, ионов), составляющих кристалл. Структура, для которой характерно регулярное расположение частиц с периодической повторяемостью в трех измерениях, называется **кристаллической решеткой**. Точки, в которых расположены частицы, а точнее — средние равновесные положения, около которых частицы совершают колебания, называются **узлами кристаллической решетки**.

Кристаллические тела можно разделить на две группы: монокристаллы и поликристаллы. **Монокристаллы** — твердые тела, частицы которых образуют единую кристаллическую решетку. Кристаллическая структура монокристаллов обнаруживается по их внешней форме. Хотя внешняя форма монокристаллов одного типа может быть различной, но углы между соответствующими гранями у них остаются постоянными. Это **закон постоянства углов**, сформулированный М. В. Ломоносовым. Он сделал важный вывод, что правильная форма кристаллов связана с закономерным размещением частиц, образующих кристалл. Монокристаллами являются большинство минералов. Однако крупные природные монокристаллы встречаются довольно редко (например, лед, поваренная соль, исландский шпат). В настоящее время многие монокристаллы выращиваются искусственно. Условия роста крупных монокристаллов (чистый раствор, медленное охлаждение и т. д.) часто не выдерживаются, поэтому большинство твердых тел имеет мелкокристаллическую структуру, т. е. состоит из множества беспорядочно ориентированных мелких кристаллических зерен. Такие твердые тела называются поликристаллами (многие горные породы, металлы и сплавы).

Характерной особенностью монокристаллов является их **анизотропность**, т. е. зависимость физических свойств — упругих, механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических — от направления. Анизотропия монокристаллов объясняется тем, что в кристаллической решетке различно число частиц, приходящихся на одинаковые по длине, но разные по направлению отрезки (рис. 102), т. е. плотность расположения частиц кристаллической решетки по разным направлениям неодинакова, что и приводит к различию свойств кристалла вдоль этих направлений. В поликристаллах анизотропия наблюдается только для отдельных мелких кристалликов, но их различная ориентация приводит к тому, что свойства поликристалла по всем направлениям в среднем

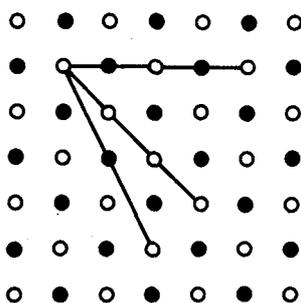


Рис. 102

- Что такое узлы кристаллической решетки?
- В чем заключается анизотропность монокристаллов?
- Что такое капиллярность?
- Чем отличаются монокристаллы от поликристаллов?
- Как можно классифицировать кристаллы?

одинаковы.

## Типы кристаллических твердых тел

Существует два признака для классификации кристаллов: 1) кристаллографический; 2) физический (природа частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характер сил взаимодействия между ними).

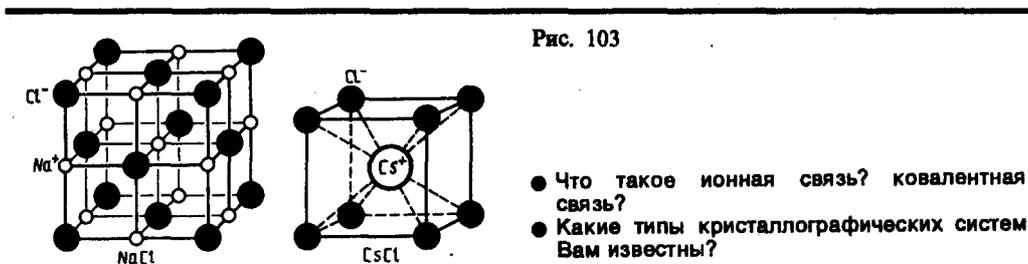
**1. Кристаллографический признак кристаллов.** В данном случае важна только пространственная периодичность в расположении частиц, поэтому можно отвлечься от их внутренней структуры, рассматривая частицы как геометрические точки.

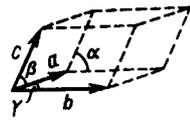
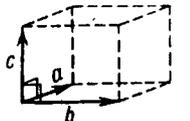
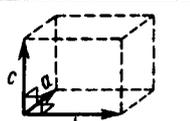
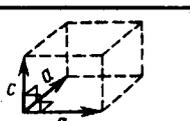
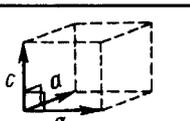
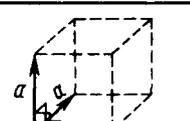
Кристаллическая решетка может обладать различными видами симметрии. **Симметрия кристаллической решетки** — ее свойство совмещаться с собой при некоторых пространственных перемещениях, например параллельных переносах, поворотах, отражениях или их комбинациях и т. д. Кристаллической решетке, как доказал русский кристаллограф Е. С. Федоров (1853—1919), присущи 230 комбинаций элементов симметрии, или 230 различных **пространственных групп**.

С переносной симметрией в трехмерном пространстве связывают понятие трехмерной периодической структуры — **пространственной решетки**, или **решетки Бравэ**, представление о которой введено французским кристаллографом О. Бравэ (1811—1863). Всякая пространственная решетка может быть составлена повторением в трех различных направлениях одного и того же структурного элемента — **элементарной ячейки**. Всего существует 14 типов решеток Бравэ, различающихся по виду переносной симметрии. Они распределяются по семи **кристаллографическим системам**, или **сингониям**, представленным в порядке возрастающей симметрии в табл. 3. Для описания элементарных ячеек пользуются кристаллографическими осями координат, которые проводят параллельно ребрам элементарной ячейки, а начало координат выбирают в левом углу передней грани элементарной ячейки. Элементарная кристаллическая ячейка представляет собой параллелепипед, построенный на ребрах  $a$ ,  $b$ ,  $c$  с углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  между ребрами (табл. 3). Величины  $a$ ,  $b$  и  $c$  и  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  называются параметрами элементарной ячейки и однозначно ее определяют.

**2. Физический признак кристаллов.** В зависимости от рода частиц, расположенных в узлах кристаллической решетки, и характера сил взаимодействия между ними кристаллы разделяются на четыре типа: ионные, атомные, металлические, молекулярные.

**Ионные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются поочередно ионы противоположного знака. Типичными ионными кристаллами являются большинство галоидных соединений щелочных металлов ( $\text{NaCl}$ ,  $\text{CsCl}$ ,  $\text{KBr}$  и т. д.), а также оксидов различных элементов ( $\text{MgO}$ ,  $\text{CaO}$  и т. д.). Структуры решеток двух наиболее характерных ионных кристаллов —  $\text{NaCl}$  (решетка представляет собой две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные друг в друга; в узлах одной из этих решеток находятся ионы  $\text{Na}^+$ , в узлах другой — ионы  $\text{Cl}^-$ ) и  $\text{CsCl}$  (кубическая объемно центрированная решетка — в центре каждой элементарной решетки находится ион) — показаны на рис. 103. Силы взаимодействия между ионами являются в основном электростатическими (кулоновскими). **Связь**, обусловленная кулоновскими силами притяжения между разноименно заряженными ионами, называется **ионной** (или **гетерополярной**). В ионной решетке нельзя выделить отдельные молекулы: кристалл представляет собой как бы одну гигантскую молекулу.



Кристаллографическая система	Характеристика элементарной ячейки	Форма элементарной ячейки
Триклинная	$a \neq b \neq c,$ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$	
Моноклиновая	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	
Ромбическая	$a \neq b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Тетрагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	
Ромбоэдрическая (тригональная)	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	
Гексагональная	$a = b \neq c,$ $\alpha = \beta = 90^\circ,$ $\gamma = 120^\circ$	
Кубическая	$a = b = c,$ $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	

**Атомные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные атомы, удерживаемые в узлах решетки **гомеополярными**, или **ковалентными**, **связями** квантово-механического происхождения (у соседних атомов обобществлены валентные электроны, наименее связанные с атомом). Атомными кристаллами являются алмаз и графит (два различных состояния углерода), некоторые неорганические соединения (ZnS, BeO и т. д.), а также типичные полупроводники — германий Ge и кремний Si.

Валентные связи осуществляются парами электронов, движущихся по орбитам, охватывающим оба атома, и носят направленный характер: ковалентные силы направлены от центрального атома к вершинам тетраэдра. В отличие от графита решетка алмаза не содержит плоских слоев, что не позволяет сдвигать отдельные участки кристалла, поэтому алмаз является прочным соединением.

**Металлические кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются положительные ионы металла. При образовании кристаллической решетки валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомами, отделяются от атомов и коллективизируются: они уже принадлежат не одному атому, как в случае ионной связи, и не паре соседних атомов, как в случае гомеополярной связи, а всему кристаллу в целом. Таким образом, в металлах между положительными ионами хаотически, подобно молекулам газа, движутся «свободные» электроны, наличие которых обеспечивает хорошую электропроводность металлов. Так как металлическая связь не имеет направленного действия и положительные ионы решетки одинаковы по свойствам, то металлы должны иметь симметрию высокого порядка. Действительно, большинство металлов имеют кубическую объемно центрированную (Li, Na, K, Rb, Cs) и кубическую гранецентрированную (Cu, Ag, Pt, Au) решетки. Чаще всего металлы встречаются в виде поликристаллов.

**Молекулярные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки располагаются нейтральные молекулы вещества, силы взаимодействия между которыми обусловлены незначительным взаимным смещением электронов в электронных оболочках атомов. Эти силы называются ван-дер-

ваальсовыми, так как они имеют ту же природу, что и силы притяжения между молекулами, приводящими к отклонению газов от идеальности. Молекулярными кристаллами являются, например, большинство органических соединений (парафин, спирт, резина и т. д.), инертные газы (Ne, Ar, Kr, Xe) и газы  $\text{CO}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{N}_2$  в твердом состоянии, лед, а также кристаллы брома  $\text{Br}_2$ , иода  $\text{I}_2$ . Ван-дер-ваальсовы силы довольно слабые, поэтому молекулярные кристаллы легко деформируются.

В некоторых твердых телах одновременно может осуществляться несколько видов связи. Примером может служить графит (гексагональная решетка).

Различие в строении кристаллических решеток двух разновидностей углерода — графита и алмаза — объясняет различие в их физических свойствах: мягкость графита и твердость алмаза; графит — проводник электричества, алмаз — диэлектрик (нет свободных электронов) и т. д.

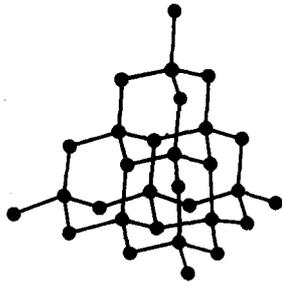


Рис. 104

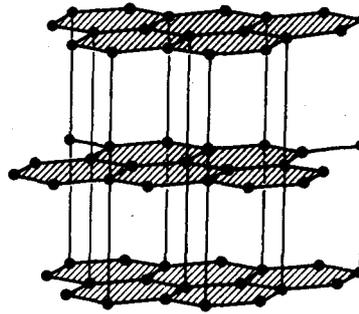


Рис. 105

Расположение атомов в кристаллах характеризуется также **координационным числом** — числом ближайших одноподобных с данным атомом соседних атомов в кристаллической решетке или молекул в молекулярных кристаллах. Для модельного изображения кристаллических структур из атомов и ионов пользуются системой плотной упаковки

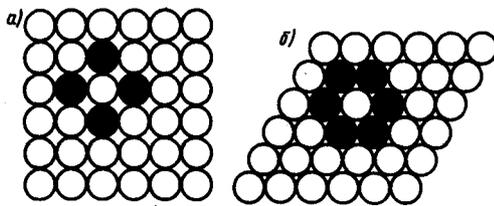


Рис. 106

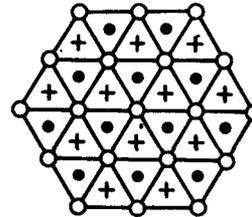


Рис. 107

### Дефекты в кристаллах

Рассмотренные в § 71 идеальные кристаллические структуры существуют лишь в очень малых объемах реальных кристаллов, в которых всегда имеются отклонения от упорядоченного расположения частиц в узлах решетки, называемые **дефектами кристаллической решетки**. Дефекты делятся на **макроскопические**, возникающие в процессе образования и роста кристаллов (например, трещины, поры, инородные макроскопические включения), и микроскопические, обусловленные микроскопическими отклонениями от периодичности.

**Микродефекты** делятся на **точечные** и **линейные**. Точечные дефекты бывают трех типов: 1) **вакансии** — отсутствие атома в узле кристаллической решетки (рис. 111, а); 2) **междоузельный атом** — атом, внедрившийся в междоузельное пространство (рис. 111, б); 3) **примесный атом** — атом примеси, либо замещающий атом основного вещества в кристаллической решетке (**примесь замещения**, рис. 111, в), либо внедрившийся в междоузельное пространство (**примесь внедрения**, рис. 111, б; только в междоузели вместо атома основного вещества располагается атом примеси). Точечные дефекты нарушают лишь ближний порядок в кристаллах, не затрагивая дальнего порядка, — в этом состоит их характерная особенность.

Линейные дефекты нарушают дальний порядок. Как следует из опытов, механические свойства кристаллов в значительной степени определяются дефектами особого вида — дислокациями. **Дислокации** — линейные дефекты, нарушающие правильное чередование атомных плоскостей.

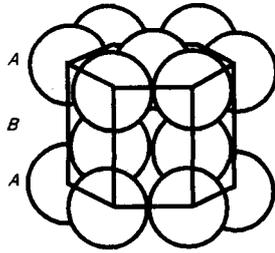


Рис. 108

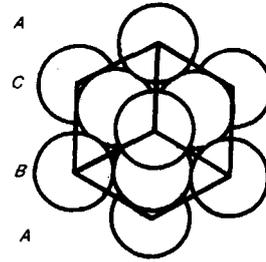


Рис. 109

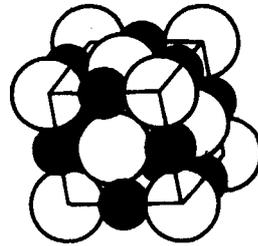


Рис. 110

Дислокации бывают **краевые** и **винтовые**. Если одна из атомных плоскостей обрывается внутри кристалла, то край этой плоскости образует краевую дислокацию (рис. 112, а). В случае винтовой дислокации (рис. 112, б) ни одна из атомных плоскостей внутри кристалла не обрывается, а сами плоскости лишь приблизительно параллельны и смыкаются друг с другом так, что фактически кристалл состоит из одной атомной плоскости, изогнутой по винтовой поверхности.

**Плотность дислокаций** (число дислокаций, приходящихся на единицу площади поверхности кристалла) для совершенных монокристаллов составляет  $10^2 — 10^3 \text{ см}^{-2}$ , для деформированных кристаллов —  $10^{10} — 10^{12} \text{ см}^{-2}$ . Дислокации никогда не обрываются, они либо выходят на поверхность, либо разветвляются, поэтому в реальном кристалле образуются плоские или пространственные сетки дислокаций. Дислокации и их движение можно наблюдать с помощью электронного микроскопа, а также методом избирательного травления — в местах выхода дислокации на поверхность возникают ямки травления (интенсивное разрушение кристалла под действием реагента), «проявляющие» дислокации.

Наличие дефектов в кристаллической структуре влияет на свойства кристаллов, анализ которых проведем ниже.

### Теплоемкость твердых тел

В качестве модели твердого тела рассмотрим правильно построенную кристаллическую решетку, в узлах которой частицы (атомы, ионы, молекулы), принимаемые за материальные точки, колеблются около своих положений равновесия — узлов решетки — в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таким образом, каждой составляющей кристаллическую решетку частице приписывается три колебательных степени свободы, каждая из которых, согласно закону равнораспределения энергии по степеням свободы (см. § 50), обладает энергией  $kT$ .

Внутренняя энергия моля твердого тела

$$U_m = 3N_A kT = 3RT,$$

где  $N_A$  — постоянная Авогадро;  $N_A k = R$  ( $R$  — молярная газовая постоянная). Молярная теплоемкость твердого тела

$$C_V = \frac{dU_m}{dT} = 3R = 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad (73.1)$$

т. е. молярная (атомная) теплоемкость *химически простых тел* в кристаллическом

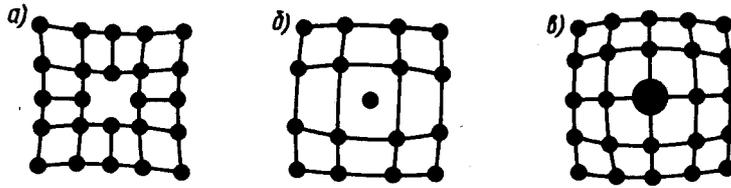


Рис. 111

состоянии одинакова (равна  $3R$ ) и не зависит от температуры. Этот закон был эмпирически получен французскими учеными П. Дюлонгом (1785—1838) и Л. Пти (1791—1820) и носит название **закона Дюлонга и Пти**.

Если твердое тело является химическим соединением (например, NaCl), то число частиц в моле не равно постоянной Авогадро, а равно  $nN_A$ , где  $n$  — число атомов в молекуле (для NaCl число частиц в моле равно  $2N_A$ , так, в одном моле NaCl содержится  $N_A$  атомов Na и  $N_A$  атомов Cl). Таким образом, молярная теплоемкость *твердых химических соединений*

$$C_V = 3nR \approx 25n \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)},$$

т. е. равна сумме атомных теплоемкостей элементов, составляющих это соединение.

Как показывают опытные данные (табл. 4), для многих веществ закон Дюлонга и Пти выполняется с довольно хорошим приближением, хотя некоторые вещества (C, Be, В) имеют значительные отклонения от вычисленных теплоемкостей. Кроме того, так же как и в случае газов (см. § 53), опыты по измерению теплоемкости твердых тел при низких температурах показали, что она зависит от температуры (рис. 113). Вблизи нуля кельвин теплоемкость тел пропорциональна  $T^3$ , и только при достаточно высоких температурах, характерных для каждого вещества, выполняется условие (73.1). Алмаз, например, имеет теплоемкость, равную  $3R$  при 1800 К! Однако для большинства твердых тел комнатная температура является уже достаточно высокой.

Таблица 4

Вещество	С, Дж/(моль · К)	
	Теоретическое значение	Экспериментальное значение
Алюминий Al	25	25,5
Алмаз С	25	5,9
Бериллий Be	25	15,6
Бор В	25	13,5
Железо Fe	25	26,8
Серебро Ag	25	25,6
NaCl	50	50,6
AgCl	50	50,9
CaCl <sub>2</sub>	75	76,2

Расхождение опытных и теоретических значений теплоемкостей, вычисленных на основе классической теории, объяснили, исходя из квантовой теории теплоемкостей, А. Эйнштейн и П. Дебай.

### Испарение, сублимация, плавление и кристаллизация. Аморфные тела

Как в жидкостях, так и в твердых телах всегда имеется некоторое число молекул, энергия которых достаточна для преодоления притяжения к другим молекулам и которые способны оторваться от поверхности жидкости или твердого тела и перейти в окружающее их пространство. Этот процесс для жидкости называется **испарением** (или **парообразованием**), для твердых тел — **сублимацией** (или **возгонкой**).

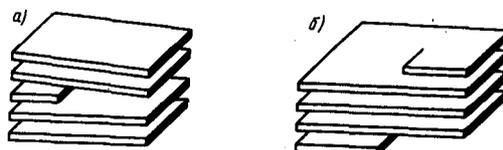


Рис. 112

Испарение жидкостей идет при любой температуре, но его интенсивность с повышением температуры возрастает. Наряду с процессом испарения происходит компенсирующий его процесс **конденсации** пара в жидкость. Если число молекул, покидающих жидкость за единицу времени через единицу поверхности, равно числу молекул, переходящих из пара в жидкость, то наступает **динамическое равновесие** между процессами испарения и конденсации. **Пар**, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным (см. также § 62).

Для большинства твердых тел процесс сублимации при обычных температурах незначителен и давление пара над поверхностью твердого тела мало; оно повышается с повышением температуры. Интенсивно сублимируют такие вещества, как нафталин, камфора, что обнаруживается по резкому, свойственному им запаху. Особенно интенсивно сублимация происходит в вакууме — этим пользуются для изготовления зеркал. Известный пример сублимации — превращение льда в пар — мокрое белье высыхает на морозе.

Если твердое тело нагревать, то его *внутренняя энергия* (складывается из энергии колебаний частиц в узлах решетки и энергии взаимодействия этих частиц) возрастает. При повышении температуры амплитуда колебаний частиц увеличивается до тех пор, пока кристаллическая решетка не разрушится, — твердое тело плавится. На рис. 114, *a* изображена примерная зависимость  $T(Q)$ , где  $Q$  — количество теплоты, получаемое телом при плавлении. По мере сообщения твердому телу теплоты его температура повышается, а при температуре плавления  $T_{пл}$ , начинается переход тела из твердого состояния в жидкое. Температура  $T_{пл}$  остается постоянной до тех пор, пока весь кристалл не расплавится, и только тогда температура жидкости вновь начнет повышаться.

Нагревание твердого тела до  $T_{пл}$  еще не переводит его в жидкое состояние, поскольку энергия частиц вещества должна быть достаточной для разрушения кристаллической решетки. В процессе плавления теплота, сообщаемая веществу, идет на совершение работы по разрушению кристаллической решетки, а поэтому  $T_{пл} = \text{const}$  до расплавления всего кристалла. Затем подводимая теплота пойдет опять-таки на увеличение энергии частиц жидкости и ее температура начнет повышаться. Количество теплоты, необходимое для расплавления 1 кг вещества, называется **удельной теплотой плавления**.

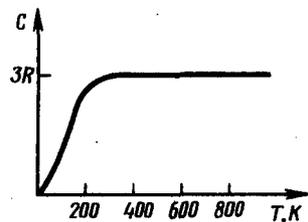


Рис. 113

● Как получить закон Дюлонга и Пти исходя из классической теории теплоемкости?

Если жидкость охлаждать, то процесс протекает в обратном направлении (рис. 114, *б*;  $Q'$  — количество теплоты, отдаваемое телом при кристаллизации): сначала температура жидкости понижается, затем при постоянной температуре, равной  $T_{пл}$ , начинается **кристаллизация**, после ее завершения температура кристалла начнет понижаться. Для кристаллизации вещества необходимо наличие так называемых **центров кристаллизации** — кристаллических зародышей, которыми могут быть не только кристаллики образующегося вещества, но и примеси, а также пыль, сажа и т. д. Отсутствие центров кристаллизации в чистой жидкости затрудняет образование микроскопических кристалликов, и вещество, оставаясь в жидком состоянии, охлаждается до температуры, меньшей температуры кристаллизации, при этом образуется **переохлажденная жидкость** (на рис. 114, *б* ей соответствует штриховая кривая). При сильном переохлаждении начинается спонтанное образование центров кристаллизации и вещество кристаллизуется довольно быстро.

Обычно переохлаждение расплава происходит от долей до десятков градусов, но для ряда веществ может достигать сотен градусов. Из-за большой вязкости сильно переохлажденные жидкости теряют текучесть, сохраняя, как в твердые тела, свою форму. Эти тела получили название **аморфных твердых тел**; к ним относятся смолы, мех, сургуч, стекло. Аморфные тела, являясь, таким образом, переохлажденными жидкостями, **изотропны**, т. е. их свойства во всех направлениях одинаковы; для них, как и для жидкостей, характерен *ближний порядок* в расположении частиц; в них в отличие от жидкостей подвижность частиц довольно мала. Особенностью аморфных тел является отсутствие у них определенной точки плавления, т. е. невозможно указать определенную температуру, выше

которой можно было бы констатировать жидкое состояние, а ниже — твердое. Из опыта известно, что в аморфных телах со временем может наблюдаться процесс кристаллизации, например в стекле появляются кристаллики; оно, теряя прозрачность, начинает мутнеть и превращаться в поликристаллическое тело.

В последнее время широкое распространение в народном хозяйстве получили **полимеры** — органические аморфные тела, молекулы которых состоят из большого числа одинаковых длинных молекулярных цепочек, соединенных химическими (валентными) связями. К полимерам относятся как естественные (крахмал, белок, каучук, клетчатка и др.), так и искусственные (пластмасса, резина, полистирол, лавсан, капрон и др.) органические вещества. Полимерам присущи прочность и эластичность; некоторые полимеры выдерживают растяжение, в 5—10 раз превышающее их первоначальную длину. Это объясняется тем, что длинные молекулярные цепочки могут при деформации либо сворачиваться в плотные клубки, либо вытягиваться в прямые линии. Эластичность полимеров проявляется только в определенном интервале температур, ниже которого они становятся твердыми и хрупкими, а выше — пластичными. Хотя синтетических полимерных материалов создано очень много (искусственные волокна, заменители кожи, строительные материалы, заменители металлов и др.), но теория полимеров до настоящего времени полностью не разработана. Ее развитие определяется запросами современной техники, требующей синтеза полимеров с заранее заданными свойствами.

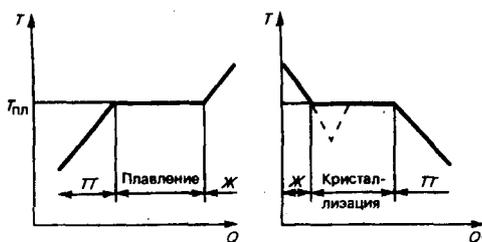


Рис. 114

- Что такое насыщенный пар?
- Некоторое количество твердого вещества смешано с тем же веществом в жидком состоянии. Почему при нагревании этой смеси ее температура не поднимается?

### Фазовые переходы I и II рода

**Фазой** называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний того же вещества. Если, например, в закрытом сосуде находится вода, то эта система является *двухфазной*: жидкая фаза — вода; газообразная фаза — смесь воздуха с водяными парами. Если в воду бросить кусочки льда, то эта система станет трехфазной, в которой лед является твердой фазой. Часто понятие «фаза» употребляется в смысле агрегатного состояния, однако надо учитывать, что оно шире, чем понятие «агрегатное состояние». В пределах одного агрегатного состояния вещество может находиться в нескольких фазах, отличающихся по своим свойствам, составу и строению (лед, например, встречается в пяти различных модификациях — фазах). Переход вещества из одной фазы в другую — **фазовый переход** — всегда связан с качественными изменениями свойств вещества. Примером фазового перехода могут служить изменения агрегатного состояния вещества или переходы, связанные с изменениями в составе, строении и свойствах вещества (например, переход кристаллического вещества из одной модификации в другую).

Различают фазовые переходы двух родов. **Фазовый переход I рода** (например, плавление, кристаллизация и т. д.) сопровождается поглощением или выделением теплоты, называемой **теплотой фазового перехода**. Фазовые переходы I рода характеризуются постоянством температуры, изменениями энтропии и объема. Объяснение этому можно дать следующим образом. Например, при плавлении телу нужно сообщить некоторое количество теплоты, чтобы вызвать разрушение кристаллической решетки. Подводимая при плавлении теплота идет не на нагрев тела, а на разрыв межатомных связей, поэтому плавление протекает при постоянной температуре. В подобных переходах — из более упорядоченного кристаллического состояния в менее упорядоченное жидкое состояние — степень беспорядка увеличивается, т. е., согласно второму началу термодинамики, этот процесс связан с возрастанием энтропии системы. Если переход происходит в обратном направлении (кристаллизация), то система теплоту выделяет.

Фазовые переходы, не связанные с поглощением или выделением теплоты и изменением объема, называются **фазовыми переходами II рода**. Эти переходы характеризуются постоянством объема и энтропии, но скачкообразным изменением теплоемкости. Общая трактовка фазовых переходов II рода предложена академиком Л. Д. Ландау (1908—1968). Согласно этой трактовке, фазовые переходы II рода связаны с изменением симметрии: выше точки перехода система, как правило, обладает более высокой симметрией, чем ниже точки перехода. Примерами фазовых переходов II рода являются: переход ферромагнитных веществ (железа, никеля) при определенных давлении и температуре в парамагнитное состояние; переход металлов и некоторых сплавов при температуре, близкой к 0 К, в сверхпроводящее состояние, характеризуемое скачкообразным уменьшением электрического сопротивления до нуля; превращение обыкновенного жидкого гелия (гелия I) при  $T=2,9$  К в другую жидкую модификацию (гелий II), обладающую свойствами сверхтекучести.

### Диаграмма состояния. Тройная точка

Согласно § 60, одно и то же вещество в зависимости от соотношения между удвоенной средней энергией, приходящейся на одну степень свободы хаотического (теплого) движения молекул, и наименьшей потенциальной энергией взаимодействия молекул может находиться в одном из трех агрегатных состояний: твердом, жидком или газообразном. Это соотношение, в свою очередь, определяется внешними условиями — температурой и давлением. Следовательно, фазовые превращения также определяются изменениями температуры и давления.

Для наглядного изображения фазовых превращений используется диаграмма состояния (рис. 115), на которой в координатах  $p, T$  задается зависимость между температурой фазового перехода и давлением в виде кривых испарения (КИ), плавления (КП) и сублимации (КС), разделяющих поле диаграммы на три области, соответствующие условиям существования твердой (ТТ), жидкой (Ж) и газообразной (Г) фаз. Кривые на диаграмме называются **кривыми фазового равновесия**, каждая точка на них соответствует условиям равновесия двух сосуществующих фаз: КП — твердого тела и жидкости, КИ—жидкости и газа, КС—твердого тела и газа.

Точка, в которой пересекаются эти кривые и которая, следовательно, определяет условия (температуру  $T_{тр}$  и соответствующее ей равновесное давление  $p_{тр}$ ) одновременного равновесного сосуществования трех фаз вещества, называется **тройной точкой**. Каждое вещество имеет только одну тройную точку. Тройная точка воды соответствует температуре 273,16 К (или температуре 0,01°C по шкале Цельсия) и является основной реперной точкой для построения термодинамической температурной шкалы.

Термодинамика дает метод расчета кривой равновесия двух фаз одного и того же вещества. Согласно **уравнению Клапейрона — Клаузиуса**, производная от равновесного давления по температуре равна

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \quad (76.1)$$

где  $L$  — теплота фазового перехода,  $(V_2 - V_1)$  — изменение объема вещества при переходе его из первой фазы во вторую,  $T$  — температура перехода (процесс изотермический).

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса позволяет определить наклоны кривых равновесия. Поскольку  $L$  и  $T$  положительны, наклон задается знаком  $V_2 - V_1$ . При испарении жидкостей и сублимации твердых тел объем вещества всегда возрастает, поэтому, согласно (76.1),  $dp/dT > 0$ ; следовательно, в этих процессах повышение температуры приводит к увеличению давления, и наоборот. При плавлении большинства веществ объем, как правило, возрастает, т. е.  $dp/dT > 0$ ; следовательно, увеличение давления приводит к повышению температуры плавления (сплошная КП на рис. 115). Для некоторых же веществ ( $H_2O$ , Ge, чугун и др.) объем жидкой фазы меньше объема твердой фазы, т. е.  $dp/dT < 0$ ; следовательно, увеличение давления сопровождается понижением температуры плавления (штриховая линия на рис. 115).

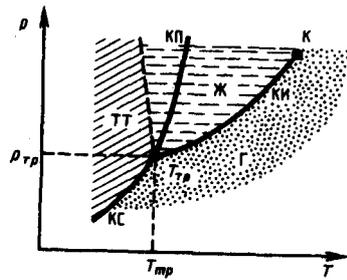


Рис. 115

- Что такое фаза? фазовый переход?
- Чем отличается фазовый переход I рода от фазового перехода II рода?

Диаграмма состояния, строящаяся на основе экспериментальных данных, позволяет судить, в каком состоянии находится данное вещество при определенных  $p$  и  $T$ , а также какие фазовые переходы будут происходить при том или ином процессе.

На диаграмме состояний (см. рис. 115 и 116) видно, что кривая испарения заканчивается в критической точке  $K$ . Поэтому возможен *непрерывный* переход вещества из жидкого состояния в газообразное и обратно в обход критической точки, без пересечения кривой испарения (переход 11—12 на рис. 116), т. е. такой переход, который не сопровождается фазовыми превращениями. Это возможно благодаря тому, что различие между газом и жидкостью является чисто количественным (оба эти состояния, например, являются изотропными). Переход же кристаллического состояния (характеризуется анизотропией) в жидкое или газообразное может быть только скачкообразным (в результате фазового перехода), поэтому кривые плавления и сублимации не могут обрываться, как это имеет место для кривой испарения в критической точке. Кривая плавления уходит в бесконечность, а кривая сублимации идет в точку, где  $p=0$  и  $T=0$  К.

## ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### Электростатика

#### Закон сохранения электрического заряда

Еще в глубокой древности было известно, что янтарь, потертый о шерсть, притягивает легкие предметы. Английский врач Джильберт (конец XVI в.) назвал тела, способные после натирания притягивать легкие предметы, наэлектризованными. Сейчас мы говорим, что тела при этом приобретают электрические заряды. Несмотря на огромное разнообразие веществ в природе, существует только *два типа электрических зарядов*: заряды, подобные возникающим на стекле, потертом о кожу (их назвали *положительными*), и заряды, подобные возникающим на эбоните, потертом о мех (их назвали *отрицательными*), одноименные заряды друг от друга отталкиваются, разноименные — притягиваются.

Опытным путем (1910—1914) американский физик Р. Милликен (1868—1953) показал, что электрический заряд **дискретен**, т. е. заряд любого тела составляет целое кратное от **элементарного электрического заряда**  $e$  ( $e=1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл). **Электрон** ( $m_e=9,11 \cdot 10^{-31}$  кг) и **протон** ( $m_p=1,67 \cdot 10^{-27}$  кг) являются соответственно носителями элементарных отрицательного и положительного зарядов.

Все тела в природе способны электризоваться, т. е. приобретать электрический заряд. Электризация тел может осуществляться различными способами: соприкосновением (трением), электростатической индукцией (см. § 92) и т. д. Всякий процесс заряджения сводится к разделению зарядов, при котором на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительного заряда, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательного заряда. Общее количество зарядов обоих знаков, содержащихся в телах, не изменяется: эти заряды только перераспределяются между телами.

Из обобщения опытных данных был установлен *фундаментальный закон природы*, экспериментально подтвержденный в 1843 г. английским физиком М. Фарадеем (1791—1867), — **закон сохранения заряда**: алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы (системы, не обменивающейся зарядами с внешними телами) остается неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы.

Электрический заряд — величина релятивистски инвариантная, т. е. не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется этот заряд или покоится.

В зависимости от концентрации свободных зарядов тела делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники. **Проводники** — тела, в которых электрический заряд может перемещаться по всему его объему. Проводники делятся на две группы: 1) **проводники первого рода** (металлы) — перенос в них зарядов (свободных электронов) не сопровождается химическими превращениями; 2) **проводники второго рода** (например, расплавленные соли, растворы кислот) — перенос в них зарядов (положительных и отрицательных ионов) ведет к химическим изменениям. **Диэлектрики** (например, стекло, пластмассы) — тела, в которых практически отсутствуют свободные заряды. **Полупроводники** (например, германий, кремний) занимают промежуточное положение между проводниками и диэлектриками. Указанное деление тел является весьма условным, однако большое различие в них концентраций свободных зарядов обуславливает огромные качественные различия в их поведении и оправдывает поэтому деление тел на проводники, диэлектрики и полупроводники.

Единица электрического заряда (производная единица, так как определяется через единицу силы тока) — **кулон** (Кл) — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

### Закон Кулона

Закон взаимодействия *неподвижных точечных* электрических зарядов установлен в 1785 г. Ш. Кулоном с помощью крутильных весов, подобных тем, которые (см. § 22) использовались Г. Кавендишем для определения гравитационной постоянной (ранее этот закон был открыт Г. Кавендишем, однако его работа оставалась неизвестной более 100 лет). **Точечным** называется заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует. Понятие точечного заряда, как и материальной точки, является *физической абстракцией*.

**Закон Кулона**: сила взаимодействия  $F$  между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися *в вакууме*, пропорциональна зарядам  $Q_1$  и  $Q_2$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F = k \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2},$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц.

Сила  $\mathbf{F}$  направлена по прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, т. е. является центральной, и соответствует притяжению ( $F < 0$ ) в случае разноименных зарядов и отталкиванию ( $F > 0$ ) в случае одноименных зарядов. Эта сила называется **кулоновской силой**. В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r}, \quad (78.1)$$

где  $\mathbf{F}_{12}$  — сила, действующая на заряд  $Q_1$  со стороны заряда  $Q_2$ ,  $\mathbf{r}_{12}$  — радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_2$  с зарядом  $Q_1$ ,  $r = |\mathbf{r}_{12}|$  (рис. 117). На заряд  $Q_2$  со стороны заряда  $Q_1$  действует сила  $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ .

В СИ коэффициент пропорциональности равен

$$k = 1/(4\pi\epsilon_0).$$

Тогда закон Кулона запишется в окончательном виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}. \quad (78.2)$$

Величина  $\epsilon_0$  называется электрической постоянной; она относится к числу *фундаментальных физических постоянных* и равна

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2), \text{ или } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}, \quad (78.3)$$

где **фарад (Ф)** — единица электрической емкости (см. § 93). Тогда

$$1/(4\pi\epsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф.}$$

### Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Если в пространство, окружающее электрический заряд, внести другой заряд, то на него будет действовать кулоновская сила; значит, в пространстве, окружающем электрические заряды, существует **силовое поле**. Согласно представлениям современной физики, поле реально существует и наряду с веществом является одной из форм существования материи, посредством которого осуществляются определенные взаимодействия между макроскопическими телами или частицами, входящими в состав вещества. В данном случае говорят об электростатическом поле — поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды. Мы будем рассматривать электрические поля, которые создаются неподвижными электрическими зарядами и называются **электростатическими**.

Для обнаружения и опытного исследования электростатического поля используется *пробный точечный положительный заряд* — такой заряд, который не искажает исследуемое поле (не вызывает перераспределения зарядов, создающих поле). Если в поле, создаваемое зарядом  $Q$ , поместить пробный заряд  $Q_0$ , то на него действует сила  $F$ , различная в разных точках поля, которая, согласно закону Кулона (78.2), пропорциональна пробному заряду  $Q_0$ . Поэтому отношение  $F/Q_0$  не зависит от  $Q_0$  и характеризует электростатическое поле в той точке, где пробный заряд находится. Эта величина называется **напряженностью** и является *силовой характеристикой электростатического поля*.

**Напряженность электростатического поля** в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный положительный заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q_0. \quad (79.1)$$

Как следует из формул (79.1) и (78.1), напряженность поля точечного заряда в вакууме

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \text{ или } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (79.2)$$

Направление вектора  $E$  совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Если поле создается положительным зарядом, то вектор  $E$  направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство (отталкивание пробного положительного заряда); если поле создается отрицательным зарядом, то вектор  $E$  направлен к заряду (рис. 118).

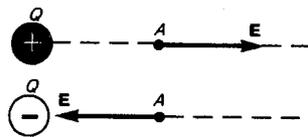


Рис. 118

● Запишите, сформулируйте и объясните закон Кулона.

Из формулы (79.1) следует, что единица напряженности электростатического поля — ньютон на кулон (Н/Кл): 1 Н/Кл — напряженность такого поля, которое на точечный заряд 1 Кл действует с силой в 1 Н; 1 Н/Кл = 1 В/м, где В (вольт) — единица потенциала электростатического поля (см. § 84).

Графически электростатическое поле изображают с помощью **линий напряженности** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $E$  (рис. 119). Линиям напряженности приписывается направление, совпадающее с направлением вектора напряженности. Так как в каждой данной точке пространства вектор напряженности имеет лишь одно направление, то линии напряженности никогда не пересекаются. Для **однородного поля** (когда вектор напряженности в любой точке постоянен по величине и направлению) линии напряженности параллельны вектору напряженности. Если поле создается точечным зарядом, то линии напряженности — радиальные прямые, выходящие из заряда, если он положителен (рис. 120, а), и входящие в него, если заряд отрицателен (рис. 120, б).

Тогда число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку  $dS$ , нормаль  $\mathbf{n}$  которой образует угол  $\alpha$  с вектором  $\mathbf{E}$ , равно  $E dS \cos \alpha = E_n dS$ , где  $E_n$  — проекция вектора  $\mathbf{E}$  на нормаль  $\mathbf{n}$  к площадке  $dS$  (рис. 121). Величина

$$d\Phi_E = E_n dS = \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

называется **поток вектора напряженности** через площадку  $dS$ . Здесь  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление совпадает с направлением нормали  $\mathbf{n}$  к площадке. Выбор

направления вектора  $\mathbf{n}$  (а следовательно, и  $d\mathbf{S}$ ) условен, так как его можно направить в любую сторону. Единица потока вектора напряженности электростатического поля — 1 В·м. Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\mathbf{E}$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \oint_S \mathbf{E} dS, \quad (79.3)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ . Поток вектора  $\mathbf{E}$  является *алгебраической величиной*: зависит не только от конфигурации поля  $\mathbf{E}$ , но и от выбора направления  $\mathbf{n}$ . Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается *внешняя нормаль*, т. е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

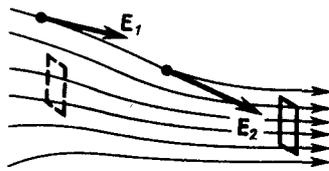


Рис. 119

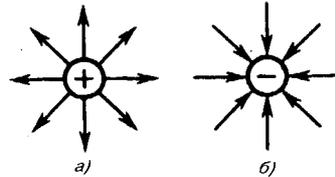


Рис. 120

### Принцип суперпозиции электростатических полей. Поле диполя

Рассмотрим метод определения модуля и направления вектора напряженности  $\mathbf{E}$  в каждой точке электростатического поля, создаваемого системой неподвижных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

Опыт показывает, что к кулоновским силам применим рассмотренный в механике принцип независимости действия сил (см. § 6), т. е. результирующая сила  $\mathbf{F}$ , действующая со стороны поля на пробный заряд  $Q_0$ , равна векторной сумме сил  $F_i$ , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов  $Q_i$ :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (80.1)$$

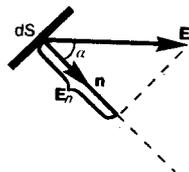
Согласно (79.1),  $\mathbf{F} = Q_0 \mathbf{E}$  и  $\mathbf{F}_i = Q_0 \mathbf{E}_i$ , где  $\mathbf{E}$  — напряженность результирующего поля, а  $\mathbf{E}_i$  — напряженность поля, создаваемого зарядом  $Q_i$ . Подставляя последние выражения в (80.1), получаем

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i. \quad (80.2)$$

Формула (80.2) выражает **принцип суперпозиции (наложения) электростатических полей**, согласно которому напряженность  $\mathbf{E}$  результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна *геометрической сумме* напряженностей полей, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать электростатические поля любой системы неподвижных зарядов, поскольку если заряды не точечные, то их можно всегда свести к совокупности точечных зарядов.

Рис. 121



- Какие поля называют электростатическими?
- Что такое напряженность  $\mathbf{E}$  электростатического поля?
- Каково направление вектора напряженности  $\mathbf{E}$ ? Единица напряженности в СИ?

Принцип суперпозиции применим для расчета электростатического поля электрического диполя. **Электрический диполь** — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов  $(+Q, -Q)$ , расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. Вектор, направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя**  $\mathbf{l}$ . Вектор

$$\mathbf{p} = |Q|\mathbf{l}, \quad (80.3)$$

совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда  $|Q|$  на плечо  $\mathbf{l}$ , называется **электрическим моментом диполя** или **дипольным моментом** (рис. 122).

Согласно принципу суперпозиции (80.2), напряженность  $\mathbf{E}$  поля диполя в произвольной точке

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

где  $\mathbf{E}_+$  и  $\mathbf{E}_-$  — напряженности полей, создаваемых соответственно положительным и отрицательным зарядами.

### Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью принципа суперпозиции электростатических полей можно значительно упростить, используя выведенную немецким ученым К. Гауссом (1777—1855) теорему, определяющую поток вектора напряженности электрического поля сквозь произвольную замкнутую поверхность.

Поток вектора напряженности сквозь сферическую поверхность радиуса  $r$ , охватывающую точечный заряд  $Q$ , находящийся в ее центре (рис. 124), равен

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Этот результат справедлив для замкнутой поверхности любой формы. Действительно, если окружить сферу (рис. 124) произвольной замкнутой поверхностью, то каждая линия напряженности, пронизывающая сферу, пройдет и сквозь эту поверхность.

Если замкнутая поверхность произвольной формы охватывает заряд (рис. 125), то при пересечении любой выбранной линии напряженности с поверхностью она то входит в нее, то выходит из нее. Нечетное число пересечений при вычислении потока в конечном счете сводится к одному пересечению, так как поток считается положительным, если линии напряженности выходят из поверхности, и отрицательным для линий, входящих в поверхность. Если замкнутая поверхность не охватывает заряда, то поток сквозь нее равен нулю, так как число линий напряженности, входящих в поверхность, равно числу линий напряженности, выходящих из нее.

Таким образом, для поверхности любой формы, если она замкнута и заключает в себя точечный заряд  $Q$ , поток вектора  $\mathbf{E}$  будет равен  $Q/\epsilon_0$ , т. е.

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} dS = \oint_S \mathbf{E}_n dS = Q/\epsilon_0. \quad (81.1)$$

Знак потока совпадает со знаком заряда  $Q$ .

Рассмотрим общий случай произвольной поверхности, окружающей  $n$  зарядов. В соответствии с принципом суперпозиции (80.2) напряженность  $\mathbf{E}$  поля, создаваемого всеми зарядами, равна сумме напряженностей  $\mathbf{E}_i$  полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:  $\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i$ . Поэтому

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} dS = \oint_S (\sum_i \mathbf{E}_i) dS = \sum_i \oint_S \mathbf{E}_i dS.$$

Согласно (81.1), каждый из интегралов, стоящий под знаком суммы, равен  $Q_i/\epsilon_0$ . Следовательно,

$$\oint_S \mathbf{E} dS = \oint_S \mathbf{E}_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i. \quad (81.2)$$

Формула (81.2) выражает **теорему Гаусса для электростатического поля в вакууме**: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на  $\epsilon_0$ . Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М. В. **Остроградским** (1801—1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю — К. Гауссом.

В общем случае электрические заряды могут быть «размазаны» с некоторой объемной плотностью  $\rho = dQ/dV$ , различной в разных местах пространства. Тогда суммарный заряд, заключенный внутри замкнутой поверхности  $S$ , охватывающей некоторый объем  $V$ ,

$$\sum_i Q_i = \int_V \rho dV. \quad (81.3)$$

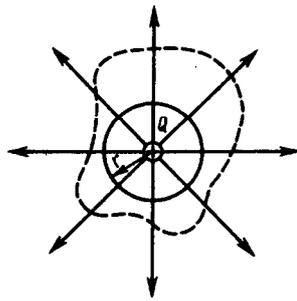


Рис. 124

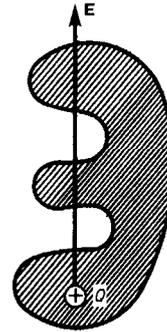


Рис. 125

Используя формулу (81.3), теорему Гаусса (81.2) можно записать так:

$$\oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

### Потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в потенциальном поле сил (а электростатическое поле является потенциальным), обладает потенциальной энергией, за счет которой силами поля совершается работа (см. § 12). Как известно (см. (12.2)), работа консервативных сил совершается за счет убыли потенциальной энергии. Поэтому работу (83.1) сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд  $Q_0$  в начальной и конечной точках поля заряда  $Q$ :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2, \quad (84.1)$$

откуда следует, что потенциальная энергия заряда  $Q_0$  в поле заряда  $Q$  равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r} + C.$$

Она, как и в механике, определяется неоднозначно, а с точностью до произвольной постоянной  $C$ . Если считать, что при удалении заряда в бесконечность ( $r \rightarrow \infty$ ) потенциальная энергия обращается в нуль ( $U=0$ ), то  $C=0$  и потенциальная энергия заряда  $Q_0$ , находящегося в поле заряда  $Q$  на расстоянии  $r$  от него, равна

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r}. \quad (84.2)$$

Для одноименных зарядов  $Q_0Q > 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (отталкивания) положительна, для разноименных зарядов  $Q_0Q < 0$  и потенциальная энергия их взаимодействия (притяжения) отрицательна.

Если поле создается системой  $n$  точечных зарядов  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , то работа электростатических сил, совершаемая над зарядом  $Q_0$ , равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности. Поэтому потенциальная энергия  $U$  заряда  $Q_0$ , находящегося в этом поле, равна сумме потенциальных энергий  $U_i$ , каждого из зарядов:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = Q_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}. \quad (84.3)$$

Из формул (84.2) и (84.3) вытекает, что отношение  $U/Q_0$  не зависит от  $Q_0$  и является поэтому энергетической характеристикой электростатического поля, называемой потенциалом:

$$\varphi = U/Q_0. \quad (84.4)$$

**Потенциал**  $\varphi$  в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

Из формул (84.4) и (84.2) следует, что потенциал поля, создаваемого точечным зарядом  $Q$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}. \quad (84.5)$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 (см. (84.1), (84.4), (84.5)), может быть представлена как

$$A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (84.6)$$

т. е. равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. **Разность потенциалов** двух точек 1 и 2 в электростатическом поле определяется работой, совершаемой силами поля, при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2.

Работа сил поля при перемещении заряда  $Q_0$  из точки 1 в точку 2 может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 Q_0 \mathbf{E} dl_{\text{пл}} \quad (84.7)$$

Приравняв (84.6) и (84.7), приходим к выражению для разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathbf{E} dl = \int_1^2 E_l dl, \quad (84.8)$$

где интегрирование можно производить вдоль любой линии, соединяющей начальную и конечную точки, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения.

Если перемещать заряд  $Q_0$  из произвольной точки за пределы поля, т. е. в бесконечность, где, по условию, потенциал равен нулю, то работа сил электростатического поля, согласно (84.6),  $A_\infty = Q_0 \varphi$ , откуда

$$\varphi = A_\infty / Q_0. \quad (84.9)$$

Таким образом, **потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного положительного заряда при удалении его из данной точки поля в бесконечность. Эта работа численно равна работе, совершаемой внешними силами (против сил электростатического поля) по перемещению единичного положительного заряда из бесконечности в данную точку поля.

Из выражения (84.4) следует, что единица потенциала — **вольт** (В): 1 В есть потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж (1 В = 1 Дж/Кл). Учитывая размерность вольта, можно показать, что введенная в § 79 единица напряженности электростатического поля действительно равна 1 В/м: 1 Н/Кл = 1 Н·м/(Кл·м) = 1 Дж/(Кл·м) = 1 В/м.

Из формул (84.3) и (84.4) вытекает, что если поле создается несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен *алгебраической* сумме потенциалов полей всех этих зарядов:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}.$$

### Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности

Найдем взаимосвязь между напряженностью электростатического поля, являющейся его *силовой характеристикой*, и потенциалом — *энергетической характеристикой* поля.

Работа по перемещению *единичного* точечного положительного заряда из одной точки поля в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и  $x_2 - x_1 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = d\varphi$ . Приравняв оба выражения, можем записать

$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (85.1)$$

где символ частной производной подчеркивает, что дифференцирование производится только по  $x$ .

Повторив аналогичные рассуждения для осей  $y$  и  $z$ , можем найти вектор  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{E} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k} \right),$$

где  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  — единичные векторы координатных осей  $x, y, z$ .

Из определения градиента (12.4) и (12.6) следует, что

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi, \text{ или } \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (85.2)$$

т. е. напряженность  $\mathbf{E}$  поля равна градиенту потенциала со знаком минус. Знак минус определяется тем, что вектор напряженности  $\mathbf{E}$  поля направлен в *сторону убывания* потенциала.

Для графического изображения распределения потенциала электростатического поля, как и в случае поля тяготения (см. § 25), пользуются **эквипотенциальными поверхностями** — поверхностями, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  имеет одно и то же значение.

Если поле создается точечным зарядом, то его потенциал, согласно (84.5),  $\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ . Таким образом, эквипотенциальные поверхности в данном случае — концентрические сферы. С другой стороны, линии напряженности в случае точечного заряда — радиальные прямые. Следовательно, линии напряженности в случае точечного заряда *перпендикулярны* эквипотенциальным поверхностям.

Линии напряженности *всегда нормальны* к эквипотенциальным поверхностям. Действительно, все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, *всегда* направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям. Следовательно, вектор  $\mathbf{E}$  *всегда нормален* к эквипотенциальным поверхностям, а поэтому линии вектора  $\mathbf{E}$  ортогональны этим поверхностям.

Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряженность поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряженность поля больше.

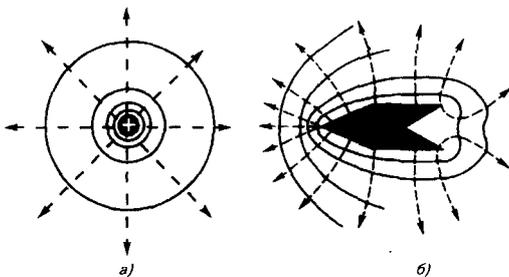


Рис. 133

● Какова связь между напряженностью и потенциалом? Выведите ее и объясните. Каков физический смысл этих понятий?

### Вычисление разности потенциалов по напряженности поля

Установленная в § 85 связь между напряженностью поля и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

**1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости** определяется формулой (82.1):  $E = \sigma / (2\epsilon_0)$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости, равна (используем формулу (85.1))

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1).$$

**2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей** определяется формулой (82.2);  $E = \sigma / \epsilon_0$ , где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между плоскостями, расстояние между которыми равно  $d$  (см. формулу (85.1)), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E dx = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (86.1)$$

**3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  вне сферы ( $r > R$ )** вычисляется по (82.3):  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$ . Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на

расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра сферы ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (86.2)$$

Если принять  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ , то потенциал поля вне сферической поверхности, согласно формуле (86.2), задается выражением

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

(ср. с формулой (84.5)). Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

График зависимости  $\varphi$  от  $r$  приведен на рис. 134.

**4. Поле объемно заряженного шара** радиуса  $R$  с общим зарядом  $Q$  *вне* шара ( $r > R$ ) вычисляется по формуле (82.3), поэтому разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), определяется формулой (86.2). В любой точке, лежащей *внутри* шара на расстоянии  $r'$  от его центра ( $r' < R$ ), напряженность определяется выражением (82.4):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r'. \text{ Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях}$$

$r'_1$  и  $r'_2$  от центра шара ( $r'_1 < R$ ,  $r'_2 < R$ ,  $r'_2 > r'_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r'_1}^{r'_2} E dr = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (r'^2_2 - r'^2_1).$$

**5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра** радиуса  $R$ , заряженного с линейной плотностью  $\tau$ , *вне* цилиндра ( $r > R$ ) определяется формулой (82.5):  $E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}$ . Следовательно, разность

потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра ( $r_1 > R$ ,  $r_2 > R$ ,  $r_2 > r_1$ ), равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (86.3)$$

Аналогично, как и поле  $\mathbf{E}$ , поле  $\mathbf{D}$  изображается с помощью **линий электрического смещения**, направление и густота которых определяются точно так же, как и для линий напряженности (см. §79).

*Линии вектора  $\mathbf{E}$  могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, в то время как линии вектора  $\mathbf{D}$  — только на свободных зарядах.* Через области поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\mathbf{D}$  проходят не прерываясь.

Для произвольной *замкнутой* поверхности  $S$  поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS,$$

где  $D_n$  — проекция вектора  $\mathbf{D}$  на нормаль  $n$  к площадке  $dS$ .

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:**

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i, \quad (89.3)$$

т. е. поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности *свободных* электрических зарядов. В такой форме теорема Гаусса справедлива для электростатического поля как для однородной и изотропной, так и для неоднородной и анизотропной сред.

Для вакуума  $D_n = \epsilon_0 E_n$  ( $\epsilon = 1$ ), тогда поток вектора напряженности  $\mathbf{E}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность (ср. с (81.2)) равен

$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Так как источниками поля  $\mathbf{E}$  в среде являются как свободные, так и связанные заряды, то теорему Гаусса (81.2) для поля  $\mathbf{E}$  в самом общем виде можно записать как

$$\oint_S \epsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i + \sum_{i=1}^k Q_{ic},$$

где  $\sum_{i=1}^n Q_i$  и  $\sum_{i=1}^k Q_{ic}$  — соответственно алгебраические суммы свободных и связанных зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью  $S$ . Однако эта формула неприемлема для описания поля  $\mathbf{E}$  в диэлектрике, так как она выражает свойства неизвестного поля  $\mathbf{E}$  через связанные заряды, которые, в

свою очередь, определяются им же. Это еще раз доказывает целесообразность введения вектора электрического смещения.

### Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться. Перемещение зарядов (ток) продолжается до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль. Это происходит в течение очень короткого времени. В самом деле, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии. Итак, напряженность поля во всех точках внутри проводника равна нулю:

$$\mathbf{E} = 0.$$

Отсутствие поля внутри проводника означает, согласно, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен ( $\varphi = \text{const}$ ), т. е. поверхность проводника в электростатическом поле является *эквипотенциальной*. Отсюда же следует, что вектор напряженности поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности. Если бы это было не так, то под действием касательной составляющей  $\mathbf{E}$  заряды начали бы по поверхности проводника перемещаться, что, в свою очередь, противоречило бы равновесному распределению зарядов.

Если проводнику сообщить некоторый заряд  $Q$ , то нескомпенсированные заряды располагаются *только на поверхности* проводника. Это следует непосредственно из теоремы Гаусса (89.3), согласно которой заряд  $Q$ , находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью, равен

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \, d\mathbf{S} = \oint_S D_n \, dS = 0,$$

так как во всех точках внутри поверхности  $D=0$ .

Найдем взаимосвязь между напряженностью  $E$  поля вблизи поверхности заряженного проводника и поверхностной плотностью  $\sigma$  зарядов на его поверхности. Для этого применим теорему Гаусса к бесконечно малому цилиндру с основаниями  $\Delta S$ , пересекающему границу проводник — диэлектрик. Ось цилиндра ориентирована вдоль вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 141). Поток вектора электрического смещения через внутреннюю часть цилиндрической поверхности равен нулю, так как внутри проводника  $\mathbf{E}_1$  (а следовательно, и  $\mathbf{D}_1$ ) равен нулю, поэтому поток вектора  $\mathbf{D}$  сквозь замкнутую цилиндрическую поверхность определяется только потоком сквозь наружное основание цилиндра. Согласно теореме Гаусса (89.3), этот поток ( $D\Delta S$ ) равен сумме зарядов ( $Q = \sigma\Delta S$ ), охватываемых поверхностью:  $D\Delta S = \sigma\Delta S$  т.е.

$$D = \sigma \tag{92.1}$$

или

$$E = \sigma / (\epsilon_0 \epsilon), \tag{92.2}$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Таким образом, напряженность электростатического поля у поверхности проводника определяется поверхностной плотностью зарядов. Можно показать, что соотношение (92.2) задает напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника *любой формы*.

Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) будут перемещаться: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 142, а). На одном конце проводника будет скапливаться избыток положительного заряда, на другом — избыток отрицательного. Эти заряды называются **индуцированными**. Процесс будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его поверхности (рис. 142, б). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности; они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных. Индуцированные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией**.

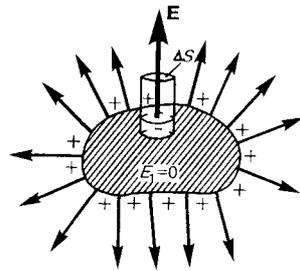


Рис. 141

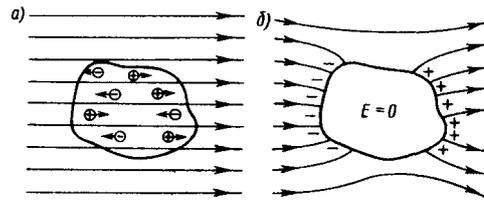


Рис. 142

Из рис. 142, б следует, что индуцированные заряды появляются на проводнике вследствие *смещения* их под действием поля, т. е.  $\sigma$  является поверхностной плотностью смещенных зарядов. По (92.1), электрическое смещение  $D$  вблизи проводника численно равно поверхностной плотности смещенных зарядов. Поэтому вектор  $D$  получил название вектора электрического смещения.

Так как в состоянии равновесия внутри проводника заряды отсутствуют, то создание внутри него полости не повлияет на конфигурацию расположения зарядов и тем самым на электростатическое поле. Следовательно, внутри полости поле будет отсутствовать. Если теперь этот проводник с полостью заземлить, то потенциал во всех точках полости будет нулевым, т. е. полость полностью изолирована от влияния внешних электростатических полей. На этом основана **электростатическая защита** — экранирование тел, например измерительных приборов, от влияния внешних электростатических полей. Вместо сплошного проводника для защиты может быть использована густая металлическая сетка, которая, кстати, является эффективной при наличии не только постоянных, но и переменных электрических полей.

Свойство зарядов располагаться на внешней поверхности проводника используется для устройства **электростатических генераторов**, предназначенных для накопления больших зарядов и достижения разности потенциалов в несколько миллионов вольт.

### Электрическая емкость уединенного проводника

Рассмотрим **уединенный проводник**, т. е. проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Его потенциал, согласно, прямо пропорционален заряду проводника. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют различные потенциалы. Поэтому для уединенного проводника можно записать

$$Q = C\varphi.$$

Величину

$$C = Q/\varphi \quad (93.1)$$

называют **электроемкостью** (или просто **емкостью**) уединенного проводника. Емкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщением которого проводнику изменяет его потенциал на единицу.

Емкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит от материала, агрегатного состояния, формы и размеров полостей внутри проводника. Это связано с тем, что избыточные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Емкость не зависит также ни от заряда проводника, ни от его потенциала.

Единица электроемкости — **фарад (Ф)**: 1 Ф — емкость такого уединенного проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Согласно (84.5), потенциал уединенного шара радиуса  $R$ , находящегося в однородной среде с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\epsilon R}.$$

Используя формулу (93.1), получим, что емкость шара

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (93.2)$$

Отсюда следует, что емкостью 1 Ф обладал бы уединенный шар, находящийся в вакууме и имеющий радиус  $R=C/(4\pi\epsilon_0)\approx 9\cdot 10^6$  км, что примерно в 1400 раз больше радиуса Земли (емкость Земли  $C\approx 0,7$  мФ). Следовательно, фарад — очень большая величина, поэтому на практике используются дольные единицы - миллифарад (мФ), микрофарад (мкФ), нанофарад (нФ), пикофарад (пФ). Из формулы (93.2) вытекает также, что единица электрической постоянной  $\epsilon_0$  — фарад на метр (Ф/м) (см. (78.3)).

### Конденсаторы

Для того чтобы проводник обладал большой емкостью, он должен иметь очень большие размеры. На практике, однако, необходимы устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших относительно окружающих тел потенциалах накапливать значительные по величине заряды, иными словами, обладать большой емкостью. Эти устройства получили название конденсаторов.

Если к заряженному проводнику приближать другие тела, то на них возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды, причем ближайшими к наводящему заряду  $Q$  будут заряды противоположного знака. Эти заряды, естественно, ослабляют поле, создаваемое зарядом  $Q$ , т. е. понижают потенциал проводника, что приводит (см. (93.1)) к повышению его емкости.

Конденсатор состоит из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком. На емкость конденсатора не должны оказывать влияния окружающие тела, поэтому проводникам придают такую форму, чтобы поле, создаваемое накапливаемыми зарядами, было сосредоточено в узком зазоре между обкладками конденсатора. Этому условию удовлетворяют (см. § 82): 1) две плоские пластины; 2) два коаксиальных цилиндра; 3) две концентрические сферы. Поэтому в зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на **плоские, цилиндрические и сферические**.

Так как поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии напряженности начинаются на одной обкладке и кончаются на другой, поэтому свободные заряды, возникающие на разных обкладках, являются равными по модулю разноименными зарядами. Под **емкостью конденсатора** понимается физическая величина, равная отношению заряда  $Q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов ( $\varphi_1 - \varphi_2$ ) между его обкладками:

$$C = Q/(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (94.1)$$

Рассчитаем емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных металлических пластин площадью  $S$  каждая, расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга и имеющих заряды  $+Q$  и  $-Q$ . Если расстояние между пластинами мало по сравнению с их линейными размерами, то краевыми эффектами можно пренебречь и поле между обкладками считать однородным. При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов между ними, согласно (86.1),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sigma d/(\epsilon_0\epsilon), \quad (94.2)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость. Тогда из формулы (94.1), заменяя  $Q = \sigma S$ , с учетом (94.2) получим выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C = \epsilon_0\epsilon S/d. \quad (94.3)$$

Для определения емкости цилиндрического конденсатора, состоящего из двух полых коаксиальных цилиндров с радиусами  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ), вставленных один в другой, опять пренебрегая краевыми эффектами, считаем поле радиально-симметричным и сосредоточенным между цилиндрическими обкладками. Разность потенциалов между обкладками вычислим по формуле для поля равномерно заряженного бесконечного цилиндра с линейной плотностью  $\tau = Q/l$  ( $l$  — длина обкладок). При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0\epsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0\epsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (94.4)$$

Подставив (94.4) в (94.1), получим выражение для емкости цилиндрического конденсатора:

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon l/\ln(r_2/r_1). \quad (94.5)$$

Для определения емкости сферического конденсатора, состоящего из двух концентрических обкладок, разделенных сферическим слоем диэлектрика, используем формулу (86.2) для разности потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) от центра заряженной сферической поверхности. При наличии диэлектрика между обкладками разность потенциалов

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (94.6)$$

Подставив (94.6) в (94.1), получим

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Если  $d = r_2 - r_1 \ll r_1$ , то  $r_2 \approx r_1 \approx r$  и  $C = 4\pi\epsilon_0\epsilon r^2/d$ . Так как  $4\pi r^2$  — площадь сферической обкладки, то получаем формулу (94.3). Таким образом, при малой величине зазора по сравнению с радиусом сферы выражения для емкости сферического и плоского конденсаторов совпадают. Этот вывод справедлив и для цилиндрического конденсатора: при малом зазоре между цилиндрами по сравнению с их радиусами в формуле (94.5)  $\ln(r_2/r_1)$  можно разложить в ряд, ограничиваясь только членом первого порядка. В результате опять приходим к формуле (94.3).

Из формул (94.3), (94.5) и (94.7) вытекает, что емкость конденсаторов любой формы прямо пропорциональна диэлектрической проницаемости диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками. Поэтому применение в качестве прослойки сегнетоэлектриков значительно увеличивает емкость конденсаторов.

Конденсаторы характеризуются **пробивным напряжением** — разностью потенциалов между обкладками конденсатора, при которой происходит **пробой** — электрический разряд через слой диэлектрика в конденсаторе. Пробивное напряжение зависит от формы обкладок, свойств диэлектрика и его толщины.

Для увеличения емкости и варьирования ее возможных значений конденсаторы соединяют в батареи, при этом используется их параллельное и последовательное соединения.

**1. Параллельное соединение конденсаторов** (рис. 144). У параллельно соединенных конденсаторов разность потенциалов на обкладках конденсаторов одинакова и равна  $\varphi_A - \varphi_B$ . Если емкости отдельных конденсаторов  $C_1, C_2, \dots, C_n$ , то, согласно (94.1), их заряды равны

$$Q_1 = C_1 (\varphi_A - \varphi_B),$$

$$Q_2 = C_2 (\varphi_A - \varphi_B),$$

$$\vdots$$

$$Q_n = C_n (\varphi_A - \varphi_B),$$

а заряд батареи конденсаторов

$$Q = \sum_{i=1}^n Q_i = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) (\varphi_A - \varphi_B).$$

Полная емкость батареи

$$C = Q/(\varphi_A - \varphi_B) = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i.$$

т. е. при параллельном соединении конденсаторов она равна сумме емкостей отдельных конденсаторов.

**2. Последовательное соединение конденсаторов** (рис. 145). У последовательно соединенных конденсаторов заряды всех обкладок равны по модулю, а разность потенциалов на зажимах батареи

$$\Delta\varphi = \sum_{i=1}^n \Delta\varphi_i,$$

где для любого из рассматриваемых конденсаторов  $\Delta\varphi_i = Q/C_i$ . С другой стороны,

$$\Delta\varphi = Q/C = Q \sum_{i=1}^n (1/C_i),$$

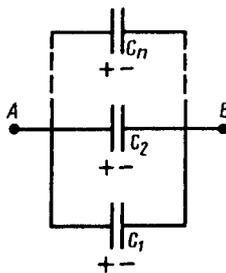


Рис. 144

- Три одинаковых конденсатора один раз соединены последовательно, другой — параллельно. Во сколько раз и когда емкость батареи будет больше?
- Может ли электростатика ответить на вопрос: где локализована энергия и что является ее носителем — заряды или поле? Почему?

откуда

$$1/C = \sum_{i=1}^n (1/C_i),$$

т. е. при последовательном соединении конденсаторов суммируются величины, обратные емкостям. Таким образом, при последовательном соединении конденсаторов результирующая емкость  $C$  всегда меньше наименьшей емкости, используемой в батарее.

### Энергия системы зарядов, уединенного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля

**1. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.** Электростатические силы взаимодействия консервативны, следовательно, система зарядов обладает потенциальной энергией. Найдем потенциальную энергию системы двух неподвижных точечных зарядов  $Q_1$  и  $Q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга. Каждый из этих зарядов в поле другого обладает потенциальной энергией

$$W_1 = Q_1 \varphi_{12}, \quad W_2 = Q_2 \varphi_{21},$$

где  $\varphi_{12}$  и  $\varphi_{21}$  — соответственно потенциалы, создаваемые зарядом  $Q_2$  в точке нахождения заряда  $Q_1$  и зарядом  $Q_1$  в точке нахождения заряда  $Q_2$ . Согласно (84.5),

$$\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r} \quad \text{и} \quad \varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r},$$

поэтому  $W_1 = W_2 = W$  и

$$W = Q_1 \varphi_{12} = Q_2 \varphi_{21} = \frac{1}{2} (Q_1 \varphi_{12} + Q_2 \varphi_{21}).$$

Добавляя к системе из двух зарядов последовательно заряды  $Q_3, Q_4, \dots$ , можно убедиться в том, что в случае  $n$  неподвижных зарядов энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i, \quad (95.1)$$

где  $\varphi_i$  — потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $Q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -го.

**2. Энергия заряженного уединенного проводника.** Пусть имеется уединенный проводник, заряд, емкость и потенциал которого соответственно равны  $Q, C, \varphi$ . Увеличим заряд этого проводника на  $dQ$ . Для этого необходимо перенести заряд  $dQ$  из бесконечности на уединенный проводник, затратив на это работу, равную

$$dA = \varphi dQ = C\varphi d\varphi.$$

Чтобы зарядить тело от нулевого потенциала до  $\varphi$ , необходимо совершить работу

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = C\varphi^2/2. \quad (95.2)$$

Энергия заряженного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = C\varphi^2/2 = Q\varphi/2 = Q^2/(2C). \quad (95.3)$$

Формулу (95.3) можно получить и из того, что потенциал проводника во всех его точках одинаков, так как поверхность проводника является эквипотенциальной. Полагая потенциал проводника равным  $\varphi$ , из (95.1) найдем

$$W = \frac{1}{2} \varphi \sum_{i=1}^n Q_i = Q\varphi/2,$$

где  $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$  — заряд проводника.

**3. Энергия заряженного конденсатора.** Как всякий заряженный проводник, конденсатор обладает энергией, которая в соответствии с формулой (95.3) равна

$$W = C(\Delta\varphi)^2/2 = Q\Delta\varphi/2 = Q^2/(2C), \quad (95.4)$$

где  $Q$  — заряд конденсатора,  $C$  — его емкость,  $\Delta\varphi$  — разность потенциалов между обкладками конденсатора.

Используя выражение (95.4), можно найти **механическую (пондеромоторную)** силу, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга. Для этого предположим, что расстояние  $x$  между

пластинами меняется, например, на величину  $dx$ . Тогда действующая сила совершает работу  $dA = Fdx$  вследствие уменьшения потенциальной энергии системы  $Fdx = -dW$ , откуда

$$F = -\frac{dW}{dx}. \quad (95.5)$$

Подставив в (95.4) выражение (94.3), получим

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S} x. \quad (95.6)$$

Производя дифференцирование при конкретном значении энергии (см. (95.5) и (95.6)), найдем искомую силу:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0\epsilon S}$$

где знак минус указывает, что сила  $F$  является силой притяжения.

**4. Энергия электростатического поля.** Преобразуем формулу (95.4), выражающую энергию плоского конденсатора посредством зарядов и потенциалов, воспользовавшись выражением для емкости плоского конденсатора ( $C = \epsilon_0\epsilon S/d$ ) и разности потенциалов между его обкладками ( $\Delta\varphi = Ed$ ). Тогда

$$W = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} V, \quad (95.7)$$

где  $V = Sd$  — объем конденсатора. Формула (95.7) показывает, что энергия конденсатора выражается через величину, характеризующую электростатическое поле, — *напряженность*  $E$ .

**Объемная плотность** энергии электростатического поля (энергия единицы объема)

$$w = W/V = \epsilon_0\epsilon E^2/2 = ED/2. \quad (95.8)$$

Выражение (95.8) справедливо только для **изотропного диэлектрика**, для которого выполняется соотношение (88.2):  $\mathbf{P} = \{\epsilon_0\mathbf{E}$ .

Формулы (95.4) и (95.7) соответственно связывают энергию конденсатора с *зарядом* на его обкладках и с *напряженностью поля*.

## Глава . Постоянный электрический ток

### Электрический ток, сила и плотность тока

В **электродинамике** — разделе учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов или макроскопических заряженных тел, — важнейшим понятием является понятие электрического тока. **Электрическим током** называется любое упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. В проводнике под действием приложенного электрического поля  $\mathbf{E}$  свободные электрические заряды перемещаются: положительные — по полю, отрицательные — против поля (рис. 146, *а*), т. е. в проводнике возникает электрический ток, называемый **током проводимости**. Если же упорядоченное движение электрических зарядов осуществляется перемещением в пространстве заряженного макроскопического тела (рис. 146, *б*), то возникает так называемый **конвекционный ток**.

Для возникновения и существования электрического тока необходимо, с одной стороны, наличие свободных **носителей тока** — заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно, а с другой — *наличие электрического поля*, энергия которого, каким-то образом восполняясь, расходовалась бы на их упорядоченное движение. За направление тока *условно* принимают направление движения *положительных зарядов*.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока**  $I$  скалярная физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Если сила тока и его направление не изменяются со временем, то такой ток называется **постоянным**. Для постоянного тока

$$I = Q/t,$$

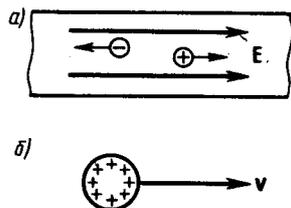


Рис. 146

- Что называется силой тока? плотностью тока? Каковы их единицы? (Дать определения.)
- Назовите условия возникновения и существования электрического тока.

где  $Q$  — электрический заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника. Единица силы тока — ампер (А).

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется **плотностью тока**:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}.$$

Выразим силу и плотность тока через скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения зарядов в проводнике. Если концентрация носителей тока равна  $n$  и каждый носитель имеет элементарный заряд  $e$  (что не обязательно для ионов), то за время  $dt$  через поперечное сечение  $S$  проводника переносится заряд  $dQ = ne \langle v \rangle S dt$ . Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = ne \langle v \rangle S,$$

а плотность тока

$$j = ne \langle v \rangle. \quad (96.1)$$

Плотность тока — *вектор*, ориентированный по направлению тока, т. е. направление вектора  $j$  совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов. Единица плотности тока — ампер на метр в квадрате (А/м<sup>2</sup>).

Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется как поток вектора  $j$ , т. е.

$$I = \int_S j dS, \quad (96.2)$$

где  $dS = ndS$  ( $n$  — единичный вектор нормали к площадке  $dS$ , составляющей с вектором  $j$  угол  $\alpha$ ).

### Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей (они предполагаются положительными) от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приведет к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил неэлектростатического происхождения. Такие устройства называются **источниками тока**. Силы *неэлектростатического происхождения*, действующие на заряды со стороны источников тока, называются **сторонними**.

Природа сторонних сил может быть различной. Например, в гальванических элементах они возникают за счет энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе — за счет механической энергии вращения ротора генератора и т. п. Роль источника тока в электрической цепи, образно говоря, такая же, как роль насоса, который необходим для перекачивания жидкости в гидравлической системе. Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течет постоянный электрический ток.

Сторонние силы совершают работу по перемещению электрических зарядов. Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного положительного заряда, называется **электродвижущей силой (э.д.с.)**, действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = A/Q_0. \quad (97.1)$$

Эта работа производится за счет энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину  $\mathcal{E}$  можно также называть электродвижущей силой источника тока, включенного в цепь. Э.д.с., как и потенциал, выражается в **вольтах**.

Сторонняя сила  $\mathbf{F}_{\text{ст}}$ , действующая на заряд  $Q_0$ , может быть выражена как

$$\mathbf{F}_{\text{ст}} = \mathbf{E}_{\text{ст}} Q_0,$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность поля сторонних сил. Работа же сторонних сил по перемещению заряда  $Q_0$  на замкнутом участке цепи равна

$$A = \oint \mathbf{F}_{\text{ст}} d\mathbf{l} = Q_0 \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l}. \quad (97.2)$$

Разделив (97.2) на  $Q_0$ , получим выражение для э. д. с., действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l},$$

т. е. э.д.с., действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил. Э.д.с., действующая на участке  $1-2$ , равна

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l}. \quad (97.3)$$

На заряд  $Q_0$  помимо сторонних сил действуют также силы электростатического поля  $\mathbf{F}_e = Q_0 \mathbf{E}$ . Таким образом, результирующая сила, действующая в цепи на заряд  $Q_0$ , равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ст}} + \mathbf{F}_e = Q_0 (\vec{\mathbf{E}}_{\text{ст}} + \vec{\mathbf{E}})$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом  $Q_0$  на участке  $1-2$ , равна

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \mathbf{E}_{\text{ст}} d\mathbf{l} + Q_0 \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l}.$$

Используя выражения (97.3) и (84.8), можем записать

$$A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12} + Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (97.4)$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю (см. § 83), поэтому в данном случае  $A_{12} = Q_0 \mathcal{E}_{12}$ .

**Напряжением**  $U$  на участке  $1-2$  называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических (кулоновских) и сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на данном участке цепи. Таким образом, согласно (97.4),

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Понятие напряжения является обобщением понятия разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов в том случае, если на этом участке не действует Э.д.с., т. е. сторонние силы отсутствуют.

### Закон Ома. Сопротивление проводников

Немецкий физик Г. Ом (1787;—1854) экспериментально установил, что сила тока  $I$ , текущего по однородному металлическому проводнику (т. е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), пропорциональна напряжению  $U$  на концах проводника:

$$I = U/R, \quad (98.1)$$

где  $R$  — электрическое сопротивление проводника. Уравнение (98.1) выражает **закон Ома для участка цепи** (не содержащего источника тока): сила тока в проводнике прямо пропорциональна приложенному напряжению и обратно пропорциональна сопротивлению проводника. Формула (98.1) позволяет установить единицу сопротивления — **ом** (Ом): 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении 1 В течет постоянный ток 1 А. Величина

$$G = 1/R$$

называется **электрической проводимостью** проводника. Единица проводимости — **сименс** (См): 1 См — проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1 Ом.

Сопротивление проводников зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен. Для однородного линейного проводника сопротивление  $R$  прямо пропорционально его длине  $l$  и обратно пропорционально площади его поперечного сечения  $S$ :

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (98.2)$$

где  $\rho$  — коэффициент пропорциональности, характеризующий материал проводника и называемый **удельным электрическим сопротивлением**. Единица удельного электрического сопротивления — ом·метр (Ом·м). Наименьшим удельным сопротивлением обладают серебро ( $1,6 \cdot 10^{-8}$  Ом·м) и медь ( $1,7 \cdot 10^{-8}$  Ом·м). На практике наряду с медными применяются алюминиевые провода. Хотя алюминий и имеет большее, чем медь, удельное сопротивление ( $2,6 \cdot 10^{-8}$  Ом·м), но зато обладает меньшей плотностью по сравнению с медью.

Закон Ома можно представить в дифференциальной форме. Подставив выражение для сопротивления (98.2) в закон Ома (98.1), получим

$$\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}, \quad (98.3)$$

где величина, обратная удельному сопротивлению,

$$\gamma = 1/\rho$$

называется **удельной электрической проводимостью** вещества проводника. Ее единица — сименс на метр (См/м). Учитывая, что  $U/l = E$  — напряженность электрического поля в проводнике,  $I/S = j$  — плотность тока, формулу (98.3) можно записать в виде

$$j = \gamma E. \quad (98.4)$$

Так как в изотропном проводнике носители тока в каждой точке движутся в направлении вектора  $E$ , то направления  $j$  и  $E$  совпадают. Поэтому формулу (98.4) можно записать в виде

$$j = \gamma E. \quad (98.5)$$

Выражение (98.5) — **закон Ома в дифференциальной форме**, связывающий плотность тока в любой точке внутри проводника с напряженностью электрического поля в этой же точке. Это соотношение справедливо и для переменных полей.

Опыт показывает, что в первом приближении изменение удельного сопротивления, а значит и сопротивления, с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad R = R_0 (1 + \alpha t),$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  — соответственно удельные сопротивления и сопротивления проводника при  $t$  и  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  — **температурный коэффициент сопротивления**, для чистых металлов (при не очень низких температурах) близкий к  $1/273 \text{ K}^{-1}$ . Следовательно, температурная зависимость сопротивления может быть представлена в виде

$$R = \alpha R_0 T,$$

где  $T$  — термодинамическая температура.

Качественный ход температурной зависимости сопротивления металла представлен на рис. 147 (кривая 1). Впоследствии было обнаружено, что сопротивление многих металлов (например, Al, Pb, Zn и др.) и их сплавов при очень низких температурах  $T_K$  (0,14—20 К), называемых **критическими**, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля (кривая 2), т. е. металл становится абсолютным проводником. Впервые это явление, названное сверхпроводимостью, обнаружено в 1911 г. **Г. Камерлинг-Оннесом** для ртути. Явление сверхпроводимости объясняется на основе квантовой теории. Практическое использование сверхпроводящих материалов (в обмотках сверхпроводящих магнитов, в системах памяти ЭВМ и др.) затруднено из-за их низких критических температур. В настоящее время обнаружены и активно исследуются керамические материалы, обладающие сверхпроводимостью при температуре выше 100 К.

На зависимости электрического сопротивления металлов от температуры основано действие **термометров сопротивления**, которые позволяют по градуированной взаимосвязи сопротивления от температуры измерять температуру с точностью до 0,003 К. Термометры сопротивления, в которых в качестве рабочего вещества используются полупроводники, изготовленные по специальной технологии, называются **термисторами**. Они позволяют измерять температуры с точностью до миллионных долей кельвин.

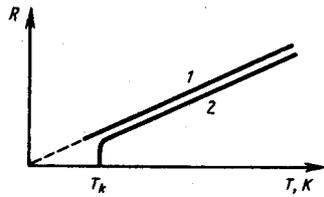


Рис. 147

- В чем заключается явление сверхпроводимости? Каковы его перспективы?
- На чем основано действие термометров сопротивления?

### Работа и мощность тока. Закон Джоуля — Ленца

Рассмотрим однородный проводник, к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечение проводника переносится заряд  $dq = Idt$ . Так как ток представляет собой перемещение заряда  $dq$  под действием электрического поля, то, по формуле (84.6), работа тока

$$dA = U dq = IU dt. \quad (99.1)$$

Если сопротивление проводника  $R$ , то, используя закон Ома (98.1), получим

$$dA = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (99.2)$$

Из (99.1) и (99.2) следует, что мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = U^2/R. \quad (99.3)$$

Если сила тока выражается в амперах, напряжение — в вольтах, сопротивление — в омах, то работа тока выражается в джоулях, а мощность — в ваттах. На практике применяются также внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). 1 Вт·ч — работа тока мощностью 1 Вт в течение 1 ч; 1 Вт·ч = 3600 Вт·с =  $3,6 \cdot 10^3$  Дж; 1 кВт·ч =  $10^3$  Вт·ч =  $3,6 \cdot 10^6$  Дж.

Если ток проходит по *неподвижному* металлическому проводнику, то вся работа тока идет на его нагревание и, по закону сохранения энергии,

$$dQ = dA. \quad (99.4)$$

Таким образом, используя выражения (99.4), (99.1) и (99.2), получим

$$dQ = IU dt = I^2 R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (99.5)$$

Выражение (99.5) представляет собой **закон Джоуля—Ленца**, экспериментально установленный независимо друг от друга Дж. Джоулем и Э. Х. Ленцем.\*

Выделим в проводнике элементарный цилиндрический объем  $dV = dS dl$  (ось цилиндра совпадает с направлением тока), сопротивление которого  $R = \rho \frac{dl}{dS}$ . По закону Джоуля — Ленца, за время  $dt$  в этом объеме выделится теплота

$$w = \rho j^2. \quad (99.6)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома ( $j = \gamma E$ ) и соотношение  $\rho = 1/\gamma$ , получим

$$w = jE = \gamma E^2. \quad (99.7)$$

Формулы (99.6) и (99.7) являются обобщенным выражением **закона Джоуля—Ленца в дифференциальной форме**, пригодным для любого проводника.

Тепловое действие тока находит широкое применение в технике, которое началось с открытия в 1873 г. русским инженером **А. Н. Лодыгиным** (1847—1923) лампы накаливания. На нагревании проводников электрическим током основано действие электрических муфельных печей,

электрической дуги (открыта русским инженером В. В. Петровым (1761—1834)), контактной электросварки, бытовых электронагревательных приборов и т. д.

### Закон Ома для неоднородного участка цепи

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}_{12}, \quad (100.3)$$

откуда

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}}{R}. \quad (100.4)$$

Выражение (100.3) или (100.4) представляет собой **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме**, который является **обобщенным законом Ома**.

Если на данном участке цепи *источник тока отсутствует* ( $\mathcal{E}_{12} = 0$ ), то из (100.4) приходим к **закону Ома для однородного участка цепи** (98.1):

$$I = (\varphi_1 - \varphi_2) / R = U / R$$

(при отсутствии сторонних сил напряжение на концах участка равно разности потенциалов (см. § 97)).

Если же электрическая цепь *замкнута*, то выбранные точки 1 и 2 совпадают,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ; тогда из (100.4) получаем **закон Ома для замкнутой цепи**:

$$I = \mathcal{E} / R,$$

где  $\mathcal{E}$  - э.д.с., действующая в цепи,  $R$  — суммарное сопротивление всей цепи. В общем случае  $R = r + R_1$ , где  $r$  — внутреннее сопротивление источника тока,  $R_1$  — сопротивление внешней цепи. Поэтому закон Ома для замкнутой цепи будет иметь вид

$$I = \mathcal{E} / (r + R_1).$$

Если цепь *разомкнута* и, следовательно, в ней ток отсутствует ( $I = 0$ ), то из закона Ома (100.4) получим, что  $\mathcal{E}_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ , т. е. э.д.с., действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на ее концах. Следовательно, для того чтобы найти э.д.с. источника тока, надо измерить разность потенциалов на его клеммах при разомкнутой цепи.

### Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Обобщенный закон Ома позволяет рассчитать практически любую сложную цепь. Однако непосредственный расчет разветвленных цепей, содержащих несколько замкнутых контуров (контуры могут иметь общие участки, каждый из контуров может иметь несколько источников тока и т. д.), довольно сложен. Эта задача решается более просто с помощью **двух правил Кирхгофа**.\*

Любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током, называется узлом. При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, — отрицательным.

**Первое правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Например, для рис. 148 первое правило Кирхгофа запишется так:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда. Действительно, в случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными.

Второе правило Кирхгофа получается из обобщенного закона Ома для разветвленных цепей. Рассмотрим контур, состоящий из трех участков (рис. 149). Направление обхода по часовой стрелке примем за положительное, отметив, что выбор этого направления совершенно произволен. Все токи, совпадающие по направлению с направлением обхода контура, считаются положительными, не

совпадающие с направлением обхода — отрицательными. Источники тока считаются положительными, если они создают ток, направленный в сторону обхода контура. Применяя к участкам закон Ома (100.3), можно записать:

$$\begin{cases} I_1 R_1 = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}_1, \\ -I_2 R_2 = \varphi_B - \varphi_C - \mathcal{E}_2, \\ I_3 R_3 = \varphi_C - \varphi_A + \mathcal{E}_3. \end{cases}$$

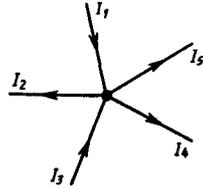


Рис. 148

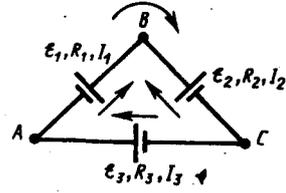


Рис. 149

Складывая почленно эти уравнения, получим

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (101.1)$$

Уравнение (101.1) выражает **второе правило Кирхгофа**: в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивления  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме э.д.с., встречающихся в этом контуре:

$$\sum_i I_i R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (101.2)$$

При расчете сложных цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать *произвольно* направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, отрицательным — его истинное направление противоположно выбранному.
2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение  $IR$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода, и, наоборот, э.д.с., действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против — отрицательными.
3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и э.д.с. рассматриваемой цепи); каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, иначе получатся уравнения, являющиеся простой комбинацией уже составленных.

## Электрические токи в металлах, вакууме и газах

### Элементарная классическая теория электропроводности металлов

Носителями тока в металлах являются свободные электроны, т. е. электроны, слабо связанные с ионами кристаллической решетки металла. Это представление о природе носителей тока в металлах основывается на электронной теории проводимости металлов, созданной немецким физиком П. Друде (1863—1906) и разработанной впоследствии нидерландским физиком Х. Лоренцем, а также на ряде классических опытов, подтверждающих положения электронной теории.

Первый из таких опытов — **опыт Рикке\*** (1901), в котором в течение года электрический ток пропусклся через три последовательно соединенных с тщательно отшлифованными торцами металлических цилиндра (Cu, Al, Cu) одинакового радиуса. Несмотря на то что общий заряд, прошедший через эти цилиндры, достигал огромного значения ( $\approx 3,5 \cdot 10^6$  Кл), никаких, даже микроскопических, следов переноса вещества не обнаружилось. Это явилось экспериментальным доказательством того, что ионы в металлах не участвуют в переносе электричества, а перенос заряда в металлах осуществляется частицами, которые являются общими для всех металлов. Такими

частицами могли быть открытые в 1897 г. английским физиком Д. Томсоном (1856—1940) электроны.

Для доказательства этого предположения необходимо было определить знак и величину удельного заряда носителей (отношение заряда носителя к его массе). Идея подобных опытов заключалась в следующем: если в металле имеются подвижные, слабо связанные с решеткой носители тока, то при резком торможении проводника эти частицы должны по инерции смещаться вперед, как смещаются вперед пассажиры, стоящие в вагоне при его торможении. Результатом смещения зарядов должен быть импульс тока; по направлению тока можно определить знак носителей тока, а зная размеры и сопротивление проводника, можно вычислить удельный заряд носителей. Идея этих опытов (1913) и их качественное воплощение принадлежат российским физикам С. Л. **Мандельштаму** (1879—1944) и Н. Д. **Папалекси** (1880—1947). Эти опыты в 1916 г. были усовершенствованы и проведены американским физиком Р. Толменом (1881—1948) и ранее шотландским физиком Б. Стюартом (1828—1887). Ими экспериментально доказано, что носители тока в металлах имеют отрицательный заряд, а их удельный заряд приблизительно одинаков для всех исследованных металлов. По значению удельного заряда носителей электрического тока и по определенному ранее Р. **Милликеном** элементарному электрическому заряду была определена их масса. Оказалось, что значения удельного заряда и массы носителей тока и электронов, движущихся в вакууме, совпадали. Таким образом, было окончательно доказано, что носителями электрического тока в металлах являются *свободные электроны*.

Существование свободных электронов в металлах можно объяснить следующим образом: при образовании кристаллической решетки металла (в результате сближения изолированных атомов) валентные электроны, сравнительно слабо связанные с атомными ядрами, отрываются от атомов металла, становятся «свободными» и могут перемещаться по всему объему. Таким образом, в узлах кристаллической решетки располагаются ионы металла, а между ними хаотически движутся свободные электроны, образуя своеобразный электронный газ, обладающий, согласно электронной теории металлов, свойствами идеального газа.

Электроны проводимости при своем движении сталкиваются с ионами решетки, в результате чего устанавливается термодинамическое равновесие между электронным газом и решеткой. По теории Друде—Лоренца, электроны обладают такой же энергией теплового движения, как и молекулы одноатомного газа. Поэтому, применяя выводы молекулярно-кинетической теории (см. (44.3)), можно найти среднюю скорость теплового движения электронов

$$\langle u \rangle = \sqrt{8kT/(\pi m_e)},$$

которая для  $T=300$  К равна  $1,1 \cdot 10^5$  м/с. Тепловое движение электронов, являясь хаотическим, не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник кроме теплового движения электронов возникает их упорядоченное движение, т. е. возникает электрический ток. Среднюю скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов можно оценить согласно формуле (96.1) для плотности тока:  $j = ne\langle v \rangle$ . Выбрав допустимую плотность тока, например для медных проводов  $10^7$  А/м<sup>2</sup>, получим, что при концентрации носителей тока  $n = 8 \cdot 10^{28}$  м<sup>-3</sup> средняя скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов равна  $7,8 \cdot 10^{-4}$  м/с. Следовательно,  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , т. е. даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов, обуславливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения. Поэтому при вычислениях результирующую скорость  $\langle v \rangle + \langle u \rangle$  можно заменять скоростью теплового движения  $\langle u \rangle$ .

### Вывод основных законов электрического тока в классической теории электропроводности металлов

**1. Закон Ома.** Пусть в металлическом проводнике существует электрическое поле напряженностью  $E = \text{const}$ . Со стороны поля заряд  $e$  испытывает действие силы  $F = eE$  и приобретает ускорение  $a = F/m = eE/m$ . Таким образом, во время свободного пробега электроны движутся равноускоренно, приобретая к концу свободного пробега скорость

$$v_{\text{max}} = eE \langle t \rangle / m,$$

где  $\langle t \rangle$  — среднее время между двумя последовательными соударениями электрона с ионами решетки.

Согласно теории Друде, в конце свободного пробега электрон, сталкиваясь с ионами решетки, отдает им накопленную в поле энергию, поэтому скорость его упорядоченного движения становится равной нулю. Следовательно, средняя скорость направленного движения электрона

$$\langle v \rangle = (v_{\max} + 0)/2 = eE \langle t \rangle / (2m). \quad (103.1)$$

Классическая теория металлов не учитывает распределения электронов по скоростям, поэтому среднее время  $\langle t \rangle$  свободного пробега определяется средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решетки проводника, равной  $\langle u \rangle + \langle v \rangle$  ( $\langle u \rangle$  — средняя скорость теплового движения электронов). Было показано, что  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ , поэтому

$$\langle t \rangle = \langle l \rangle / \langle u \rangle.$$

Подставив значение  $\langle t \rangle$  в формулу (103.1), получим

$$\langle v \rangle = eE \langle l \rangle / (2m \langle u \rangle).$$

Плотность тока в металлическом проводнике, по (96.1),

$$j = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E,$$

откуда видно, что плотность тока пропорциональна напряженности поля, т. е. получили закон Ома в дифференциальной форме. Коэффициент пропорциональности между  $j$  и  $E$  есть не что иное, как удельная проводимость материала

$$\gamma = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle}, \quad (103.2)$$

которая тем больше, чем больше концентрация свободных электронов и средняя длина их свободного пробега.

**2. Закон Джоуля — Ленца.** К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_x \rangle = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \langle l \rangle^2}{2m \langle u \rangle^2} E^2. \quad (103.3)$$

При соударении электрона с ионом эта энергия полностью передается решетке и идет на увеличение внутренней энергии металла, т. е. на его нагревание.

За единицу времени электрон испытывает с узлами решетки в среднем  $\langle z \rangle$  столкновений:

$$\langle z \rangle = \langle u \rangle / \langle l \rangle. \quad (103.4)$$

Если  $n$  — концентрация электронов, то в единицу времени происходит  $n \langle z \rangle$  столкновений и решетке передается энергия

$$w = n \langle z \rangle \langle E_x \rangle, \quad (103.5)$$

которая идет на нагревание проводника. Подставив (103.3) и (103.4) в (103.5), получим таким образом энергию, передаваемую решетке в единице объема проводника за единицу времени,

$$w = \frac{ne^2 \langle l \rangle}{2m \langle u \rangle} E^2. \quad (103.6)$$

Величина  $w$  является удельной тепловой мощностью тока. Коэффициент пропорциональности между  $w$  и  $E^2$  по (103.6) есть удельная проводимость  $\gamma$ , следовательно, выражение (103.6)—закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

**3. Закон Видемана — Франца.** Металлы обладают как большой электропроводностью, так и высокой теплопроводностью. Это объясняется тем, что носителями тока и теплоты в металлах являются одни и те же частицы—свободные электроны, которые, перемещаясь в металле, переносят не только электрический заряд, но и присущую им энергию хаотического (теплового) движения, т. е. осуществляют перенос теплоты.

Видеманом и Францем в 1853 г. экспериментально установлен закон, согласно которому отношение теплопроводности ( $\lambda$ ) к удельной проводимости ( $\gamma$ ) для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально термодинамической температуре:

$$\lambda/\gamma = \beta T,$$

где  $\beta$  — постоянная, не зависящая от рода металла.

Элементарная классическая теория электропроводности металлов позволила найти значение  $\beta$ :  $\beta = 3(k/e)^2$ , где  $k$ —постоянная Больцмана. Это значение хорошо согласуется с опытными данными.

Однако, как оказалось впоследствии, это согласие теоретического значения с опытным случайно. Лоренц, применив к электронному газу статистику Максвелла — Больцмана, учтя тем самым распределение электронов по скоростям, получил  $\beta=2(k/e)^2$ , что привело к резкому расхождению теории с опытом.

Таким образом, классическая теория электропроводности металлов объяснила законы Ома и Джоуля — Ленца, а также дала качественное объяснение закона Видемана — Франца. Однако она помимо рассмотренных противоречий в законе Видемана — Франца столкнулась еще с рядом трудностей при объяснении различных опытных данных. Рассмотрим некоторые из них.

**Температурная зависимость сопротивления.** Из формулы удельной проводимости (103.2) следует, что сопротивление металлов, т. е. величина, обратно пропорциональная  $\gamma$ , должна возрастать пропорционально  $\sqrt{T}$  и  $\langle l \rangle$  от температуры не зависят, а  $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ . Этот вывод электронной теории противоречит опытным данным, согласно которым  $R \sim T$ .

**Оценка средней длины свободного пробега электронов в металлах.** Чтобы по формуле (103.2) получить  $\gamma$ , совпадающие с опытными значениями, надо принимать  $\langle l \rangle$  значительно больше истинных, иными словами, предполагать, что электрон проходит без соударений с ионами решетки сотни междоузельных расстояний, что не согласуется с теорией Друде — Лоренца.

**Теплоемкость металлов.** Теплоемкость металла складывается из теплоемкости его кристаллической решетки и теплоемкости электронного газа. Поэтому атомная (т. е. рассчитанная на 1 моль) теплоемкость металла должна быть значительно большей, чем атомная теплоемкость диэлектриков, у которых нет свободных электронов. Согласно закону Дюлонга и Пти, теплоемкость одноатомного кристалла равна  $3R$ . Учтем, что теплоемкость одноатомного электронного газа равна  $3/2R$ . Тогда атомная теплоемкость металлов должна быть близка к  $4,5R$ . Однако опыт доказывает, что она равна  $3R$ , т. е. для металлов, так же как и для диэлектриков, хорошо выполняется закон Дюлонга и Пти. Следовательно, наличие электронов проводимости практически не сказывается на значении теплоемкости, что не объясняется классической электронной теорией.

### Работа выхода электронов из металла

Как показывает опыт, свободные электроны при обычных температурах практически не покидают металл. Следовательно, в поверхностном слое металла должно быть задерживающее электрическое поле, препятствующее выходу электронов из металла в окружающий вакуум. Работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум, называется **работой выхода**. Укажем две вероятные причины появления работы выхода:

1. Если электрон по какой-то причине удаляется из металла, то в том месте, которое электрон покинул, возникает избыточный положительный заряд и электрон притягивается к индуцированному им самим положительному заряду.
2. Отдельные электроны, покидая металл, удаляются от него на расстояния порядка атомных и создают тем самым над поверхностью металла «электронное облако», плотность которого быстро убывает с расстоянием. Это облако вместе с наружным слоем положительных ионов решетки образует *двойной электрический слой*, поле которого подобно полю плоского конденсатора. Толщина этого слоя равна нескольким межатомным расстояниям ( $10^{-10}$ — $10^{-9}$  м). Он не создает электрического поля во внешнем пространстве, но препятствует выходу свободных электронов из металла.

Таким образом, электрон при вылете из металла должен преодолеть задерживающее его электрическое поле двойного слоя. Разность потенциалов  $\Delta\varphi$  в этом слое, называемая **поверхностным скачком потенциала**, определяется работой выхода ( $A$ ) электрона из металла:

$$\Delta\varphi = A/e,$$

где  $e$  — заряд электрона. Так как вне двойного слоя электрическое поле отсутствует, то потенциал среды равен нулю, а внутри металла потенциал положителен и равен  $\Delta\varphi$ . Потенциальная энергия свободного электрона внутри металла равна  $-e\Delta\varphi$  и является относительно вакуума отрицательной. Исходя из этого можно считать, что весь объем металла для электронов проводимости представляет потенциальную яму с плоским дном, глубина которой равна работе выхода  $A$ .

Работа выхода выражается в **электрон-вольтах** (эВ): 1 эВ равен работе, совершаемой силами поля при перемещении элементарного электрического заряда (заряда, равного заряду электрона) при прохождении им разности потенциалов в 1 В. Так как заряд электрона равен  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл, то  $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности и колеблется в пределах нескольких электрон-вольт (например, у калия  $A = 2,2$  эВ, у платины  $A = 6,3$  эВ). Подобранным образом покрытие поверхности, можно значительно уменьшить работу выхода. Например, если нанести на поверхность вольфрама ( $A = 4,5$  эВ) слой оксида щелочно-земельного металла (Са, Sr, Ва), то работа выхода снижается до 2 эВ.

### Эмиссионные явления и их применение

Если сообщить электронам в металлах энергию, необходимую для преодоления работы выхода, то часть электронов может покинуть металл, в результате чего наблюдается явление испускания электронов, или **электронной эмиссии**. В зависимости от способа сообщения электронам энергии различают термоэлектронную, фотоэлектронную, вторичную электронную и автоэлектронную эмиссии.

**1. Термоэлектронная эмиссия** — это испускание электронов нагретыми металлами. Концентрация свободных электронов в металлах достаточно высока, поэтому даже при средних температурах вследствие распределения электронов по скоростям (по энергиям) некоторые электроны обладают энергией, достаточной для преодоления потенциального барьера на границе металла. С повышением температуры число электронов, кинетическая энергия теплового движения которых больше работы выхода, растет и явление термоэлектронной эмиссии становится заметным.

Исследование закономерностей термоэлектронной эмиссии можно провести с помощью простейшей двухэлектродной лампы — **вакуумного диода**, представляющего собой откачанный баллон, содержащий два электрода: катод  $K$  и анод  $A$ . В простейшем случае катодом служит нить из тугоплавкого металла (например, вольфрама), накаливаемая электрическим током. Анод чаще всего имеет форму металлического цилиндра, окружающего катод. Если диод включить в цепь, как это показано на рис. 152, то при накаливании катода и подаче на анод положительного напряжения (относительно катода) в анодной цепи диода возникает ток. Если поменять полярность батареи  $B_a$ , то ток прекращается, как бы сильно катод ни накаливали. Следовательно, катод испускает отрицательные частицы — электроны.

Если поддерживать температуру накаленного катода постоянной и снять зависимость анодного тока  $I_a$  от анодного напряжения  $U_a$ , — **вольт-амперную характеристику** (рис. 153), то оказывается, что она не является линейной, т. е. для вакуумного диода закон Ома не выполняется. Зависимость термоэлектронного тока  $I$  от анодного напряжения в области малых положительных значений  $U$  описывается **законом трех вторых** (установлен русским физиком С. А. Богуславским (1883—1923) и американским физиком И. Ленгмюром (1881—1957)):

$$I = BU^{3/2},$$

где  $B$  — коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

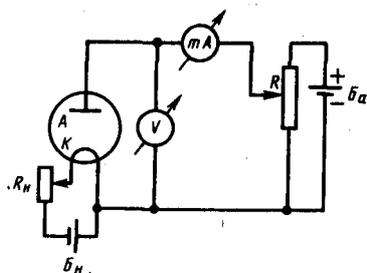


Рис. 152

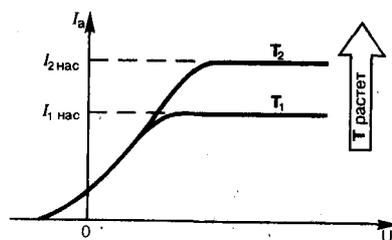


Рис. 153

При увеличении анодного напряжения ток возрастает до некоторого максимального значения  $I_{\text{нас}}$ , называемого **током насыщения**. Это означает, что почти все электроны, покидающие катод, достигают анода, поэтому дальнейшее увеличение напряженности поля не может привести к увеличению термоэлектронного тока. Следовательно, плотность тока насыщения характеризует эмиссионную способность материала катода.

Плотность тока насыщения определяется **формулой Ричардсона — Дешмана**, выведенной теоретически на основе квантовой статистики:

$$j_{\text{нас}} = CT^2 e^{-A/(kT)},$$

где  $A$  — работа выхода электронов из катода,  $T$  — термодинамическая температура,  $C$  — постоянная, теоретически одинаковая для всех металлов (это не подтверждается экспериментом, что, по-видимому, объясняется поверхностными эффектами). Уменьшение работы выхода приводит к резкому увеличению плотности тока насыщения. Поэтому применяются оксидные катоды.

Явление термоэлектронной эмиссии используется в приборах, в которых необходимо получить поток электронов в вакууме, например в электронных лампах, рентгеновских трубках, электронных микроскопах и т. д. Электронные лампы широко применяются в электро- и радиотехнике, автоматике и телемеханике для выпрямления переменных токов, усиления электрических сигналов и переменных токов, генерирования электромагнитных колебаний в т. д. В зависимости от назначения в лампах используются дополнительные управляющие электроды.

**2. Фотоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов из металла под действием света, а также коротковолнового электромагнитного излучения (например, рентгеновского). Основные закономерности этого явления будут разобраны при рассмотрении фотоэлектрического эффекта.

**3. Вторичная электронная эмиссия** — это испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Вторичный электронный поток состоит из электронов, отраженных поверхностью (упруго и неупруго отраженные электроны), и «истинно» вторичных электронов — электронов, выбитых из металла, полупроводника или диэлектрика первичными электронами.

Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется **коэффициентом вторичной электронной эмиссии**:

$$\delta = n_2/n_1.$$

Коэффициент  $\delta$  зависит от природы материала поверхности, энергии бомбардирующих частиц и их угла падения на поверхность. У полупроводников и диэлектриков  $\delta$  больше, чем у металлов. Это объясняется тем, что в металлах, где концентрация электронов проводимости велика, вторичные электроны, часто сталкиваясь с ними, теряют свою энергию и не могут выйти из металла. В полупроводниках и диэлектриках же из-за малой концентрации электронов проводимости столкновения вторичных электронов с ними происходят гораздо реже и вероятность выхода вторичных электронов из эмиттера возрастает в несколько раз.

Явление вторичной электронной эмиссии используется в **фотоэлектронных умножителях (ФЭУ)**, применимых для усиления слабых электрических токов.

**4. Автоэлектронная эмиссия** — это эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля. Эти явления можно наблюдать в откачанной трубке, конфигурация электродов которой (катод — острие, анод — внутренняя поверхность трубки) позволяет при напряжениях примерно  $10^3$  В получать электрические поля напряженностью примерно  $10^7$  В/м.

### Понятие о зонной теории твердых тел

Используя уравнение Шредингера — основное уравнение динамики в нерелятивистской квантовой механике, — в принципе можно рассмотреть задачу о кристалле, например найти возможные значения его энергии, а также соответствующие энергетические состояния. Однако как в классической, так и в квантовой механике отсутствуют методы точного решения динамической задачи для системы многих частиц. Поэтому эта задача решается приближенно сведением задачи многих частиц к одноэлектронной задаче об одном электроне, движущемся в заданном внешнем поле. Подобный путь приводит к **зонной теории твердого тела**.

В основе зонной теории лежит так называемое адиабатическое **приближение**. Квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы — ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Принимая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривается в *постоянном периодическом поле ядер*.

Далее используется приближение самосогласованного поля. Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и всех ядер. Таким образом, в рамках зонной теории многоэлектронная задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле — усредненном и согласованном поле всех ядер и электронов.

Рассмотрим мысленно «процесс образования» твердого тела из изолированных атомов. Пока атомы изолированы, т. е. находятся друг от друга на макроскопических расстояниях, они имеют совпадающие схемы энергетических уровней (рис. 313). По мере «сжатия» нашей модели до кристаллической решетки, т. е. когда расстояния между атомами станут равными межатомным расстояниям в твердых телах, взаимодействие между атомами приводит к тому, что энергетические уровни атомов *смещаются, расщепляются и расширяются в зоны*, образуется **зонный энергетический спектр**.

Из рис. 313, на котором показано расщепление энергетических уровней в зависимости от расстояния  $r$  между атомами, видно, что заметно расщепляются и расширяются лишь уровни внешних, валентных электронов, наиболее слабо связанных с ядром и имеющих наибольшую энергию, а также более высокие уровни, которые в основном состоянии атома вообще электронами не заняты. Уровни же внутренних электронов либо совсем не расщепляются, либо расщепляются слабо. Таким образом, в твердых телах внутренние электроны ведут себя так же, как в изолированных атомах, валентные же электроны «коллективизированы» — принадлежат всему твердому телу.

Образование зонного энергетического спектра в кристалле является квантово-механическим эффектом в вытекает из соотношения неопределенностей. В кристалле валентные электроны атомов, связанные слабее с ядрами, чем внутренние электроны, могут переходить от атома к атому сквозь потенциальные барьеры, разделяющие атомы, т. е. перемещаться без изменений полной энергии (туннельный эффект, см. § 221). Это приводит к тому, что среднее время жизни  $\tau$  валентного электрона в данном атоме по сравнению с изолированным атомом существенно уменьшается и составляет примерно  $10^{-15}$  с (для изолированного атома оно примерно  $10^{-8}$  с). Время же жизни электрона в каком-либо состоянии связано с неопределенностью его энергии (шириной уровня) соотношением неопределенностей  $\Delta E \sim h/\tau$  (см. (215.5)). Следовательно, если естественная ширина спектральных линий составляет примерно  $10^{-7}$  эВ, то в кристаллах  $\Delta E \approx 1 \div 10$  эВ, т. е. энергетические уровни валентных электронов расширяются в зону дозволённых значений энергии.

Энергия внешних электронов может принимать значения в пределах закрашенных на рис. 313 областей, называемых **разрешенными энергетическими зонами**. Каждая разрешенная зона «вмещает» в себя столько близлежащих дискретных уровней, сколько атомов содержит кристалл: чем больше в кристалле атомов, тем теснее расположены уровни в зоне. Расстояние между соседними энергетическими уровнями в зоне составляет приблизительно  $10^{-22}$  эВ. Так как оно столь ничтожно, то зоны можно считать практически непрерывными, однако факт конечного числа уровней в зоне играет важную роль для распределения электронов по состояниям.

Разрешенные энергетические зоны разделены зонами запрещенных значений энергии, называемыми **запрещенными энергетическими зонами**. В них электроны находиться не могут. Ширина зон (разрешенных и запрещенных) не зависит от размера кристалла. Разрешенные зоны тем шире, чем слабее связь валентных электронов с ядрами.

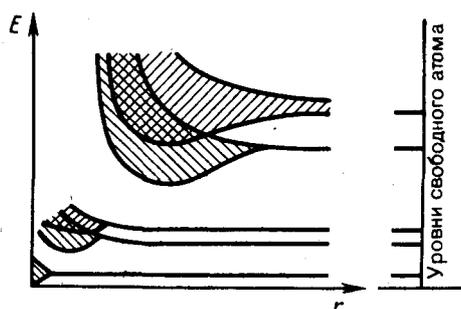


Рис. 313

- Чем различаются по зонной теории полупроводники и диэлектрики? металлы и диэлектрики?
- Когда по зонной теории твердое тело является проводником электрического тока?
- В чем суть адиабатического приближения и приближения самосогласованного поля?
- Чем отличаются энергетические состояния электронов в изолированном атоме и кристалле? Что такое запрещенные и разрешенные энергетические зоны?

## Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории

Зонная теория твердых тел позволила с единой точки зрения истолковать существование металлов, диэлектриков и полупроводников, объясняя различие в их электрических свойствах, во-первых, неодинаковым заполнением электронами разрешенных зон и, во-вторых, шириной запрещенных зон.

Степень заполнения электронами энергетических уровней в зоне определяется заполнением соответствующих атомных уровней. Если при этом какой-то энергетический уровень полностью заполнен, то образующаяся энергетическая зона также заполнена целиком. В общем случае можно говорить о **валентной зоне**, которая полностью заполнена электронами и образована из энергетических уровней внутренних электронов свободных атомов, и о **зоне проводимости (свободной зоне)**, которая либо частично заполнена электронами, либо свободна и образована из энергетических уровней внешних «коллективизированных» электронов изолированных атомов.

Твердое тело является проводником электрического тока и в том случае, когда валентная зона перекрывается свободной зоной, что в конечном счете приводит к не полностью заполненной зоне (рис. 314, б). Это имеет место для щелочноземельных элементов, образующих II группу таблицы Менделеева (Be, Mg, Ca, Zn, ...). В данном случае образуется так называемая «гибридная» зона, которая заполняется валентными электронами лишь частично. Следовательно, в данном случае металлические свойства щелочноземельных элементов обусловлены перекрытием валентной и свободной зон.

Если ширина запрещенной зоны кристалла порядка нескольких электрон-вольт, то тепловое движение не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости и кристалл является диэлектриком, оставаясь им при всех реальных температурах (рис. 314, в). Если запрещенная зона достаточно узка ( $\Delta E$  порядка 1 эВ), то переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости может быть осуществлен сравнительно легко либо путем теплового возбуждения, либо за счет внешнего источника, способного передать электронам энергию  $\Delta E$ , и кристалл является полупроводником (рис. 314, г).

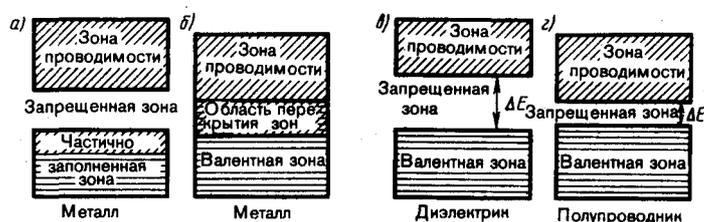


Рис. 314

Различие между металлами и диэлектриками с точки зрения зонной теории состоит в том, что при 0 К в зоне проводимости металлов имеются электроны, а в зоне проводимости диэлектриков они отсутствуют. Различие же между диэлектриками и полупроводниками определяется шириной запрещенных зон: для диэлектриков она довольно широка (например, для NaCl  $\Delta E=6$  эВ), для полупроводников — достаточно узка (например, для германия  $\Delta E=0,72$  эВ). При температурах, близких к 0 К, полупроводники ведут себя как диэлектрики, так как переброса электронов в зону проводимости не происходит. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости, т. е. электрическая проводимость проводников в этом случае увеличивается.

### Собственная проводимость полупроводников

Полупроводниками являются твердые тела, которые при  $T=0$  характеризуются полностью занятой электронами валентной зоной, отделенной от зоны проводимости сравнительно узкой ( $\Delta E$  порядка 1 эВ) запрещенной зоной (рис. 314, г). Своим названием они обязаны тому, что их электропроводность меньше электропроводности металлов и больше электропроводности диэлектриков.

В природе полупроводники существуют в виде элементов (элементы IV, V и VI групп Периодической системы элементов Менделеева), например Si, Ge, As, Se, Te, и химических соединений, например оксиды, сульфиды, селениды, сплавы элементов различных групп. Различают **собственные** и **примесные полупроводники**. **Собственными полупроводниками** являются химически чистые

полупроводники, а их проводимость называется собственной проводимостью. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Se, а также многие химические. Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются два механизма проводимости: электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, возбужденным в зону проводимости. Следовательно, если концентрации электронов проводимости и дырок обозначить соответственно  $n_e$  и  $n_p$ , то

$$(242.2)$$

где  $E_2$  — энергия, соответствующая дну зоны проводимости (рис. 316),  $E_F$  — энергия Ферми,  $T$  — термодинамическая температура,  $C_1$  — постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы электрона проводимости. **Эффективная масса** — величина, имеющая размерность массы и характеризующая динамические свойства квазичастиц — электронов проводимости и дырок. Введение в зонную теорию эффективной массы электрона проводимости позволяет, с одной стороны, учитывать действие на электроны проводимости не только внешнего поля, но и внутреннего периодического поля кристалла, а с другой стороны, абстрагируясь от взаимодействия электронов проводимости с решеткой, рассматривать их движение во внешнем поле как движение свободных частиц.

Концентрация дырок в валентной зоне

$$n_p = C_2 e^{(E_1 - E_F)/(kT)}, \quad (242.3)$$

где  $C_2$  — постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы дырки,  $E_1$  — энергия, соответствующая верхней границе валентной зоны. Энергия возбуждения в данном случае отсчитывается вниз от уровня Ферми (рис. 316), поэтому величины в экспоненциальном множителе (242.3) имеют знак, обратный знаку экспоненциального множителя в (242.2). Так как для собственного полупроводника  $n_e = n_p$  (242.1), то

$$C_1 e^{-(E_2 - E_F)/(kT)} = C_2 e^{(E_1 - E_F)/(kT)}.$$

Если эффективные массы электронов и дырок равны ( $m_e^* = m_p^*$ ), то  $C_1 = C_2$  и, следовательно,  $-(E_2 - E_F) = E_1 - E_F$ , откуда

$$E_F = \Delta E/2,$$

т. е. уровень Ферми в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны.

Так как для собственных полупроводников  $\Delta E \gg kT$ , то распределение Ферми — Дирака (235.2) переходит в распределение Максвелла — Больцмана. Положив в (236.2)  $E - E_F \approx \Delta E/2$ , получим

$$\langle N(E) \rangle \approx c e^{-\Delta E/(2kT)}. \quad (242.4)$$

Количество электронов, перебросившихся в зону проводимости, а следовательно, и количество образовавшихся дырок пропорциональны  $\langle N(E) \rangle$ . Таким образом, удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta E/(2kT)}, \quad (242.5)$$

где  $\gamma_0$  — постоянная, характерная для данного полупроводника.

Одним из наиболее широко распространенных полупроводниковых элементов является германий, имеющий решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными связями (см. § 71) с четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge дана на рис. 318, где каждая черточка обозначает связь, осуществляемую одним электроном. В идеальном кристалле при 0 К такая структура представляет собой диэлектрик, так как все валентные электроны участвуют в образовании связей и, следовательно, не участвуют в проводимости.

При повышении температуры (или под действием других внешних факторов) тепловые колебания решетки могут привести к разрыву некоторых валентных связей, в результате чего часть электронов отщепляется и они становятся свободными. В покинутом электроном месте возникает дырка (она изображена белым кружком), заполнить которую могут электроны из соседней пары. В результате дырка, так же как и освободившийся электрон, будет двигаться по кристаллу. Движение электронов проводимости и дырок в отсутствие электрического поля является хаотическим. Если же на кристалл наложить электрическое поле, то электроны начнут двигаться против поля, дырки — по полю, что

приведет к возникновению собственной проводимости германия, обусловленной как электронами, так и дырками.

В полупроводниках наряду с процессом генерации электронов и дырок идет процесс **рекомбинации**: электроны переходят из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке и испуская кванты электромагнитного излучения. В результате для каждой температуры устанавливается определенная равновесная концентрация электронов и дырок, изменяющаяся с температурой согласно выражению (242.4).

Таким образом, в полупроводниках с примесью, *валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, носителями тока являются дырки*; возникает **дырочная проводимость (проводность  $p$ -типа)**. Полупроводники с такой проводимостью называются **дырочными (или полупроводниками  $p$ -типа)**. Примеси, захватывающие электроны из валентной зоны полупроводника, называются **акцепторами**, а энергетические уровни этих примесей — **акцепторными уровнями**.

В отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно электронами и дырками, примесная проводимость полупроводников обусловлена в основном носителями одного знака: электронами—в случае донорной примеси, дырками — в случае акцепторной. Эти носители тока называются **основными**. Кроме основных носителей в полупроводнике имеются и неосновные носители: в полупроводниках  $n$ -типа — дырки, в полупроводниках  $p$ -типа — электроны.

Наличие примесных уровней в полупроводниках существенно изменяет положение уровня Ферми  $E_F$ . Расчеты показывают, что в случае полупроводников  $n$ -типа уровень Ферми  $E_{F0}$  при 0 К расположен посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем (рис. 321), С повышением температуры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, но, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергий. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для собственного полупроводника.

Уровень Ферми в полупроводниках  $p$ -типа при 0 К  $E_{F0}$  располагается посередине между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем (рис. 322). Сплошная кривая опять-таки показывает его смещение с температурой. При температурах, при которых примесные атомы оказываются полностью истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.

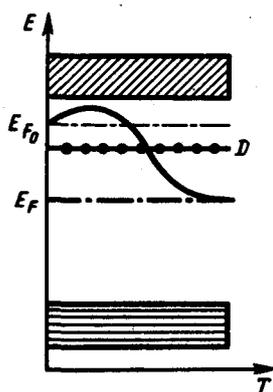


Рис. 321

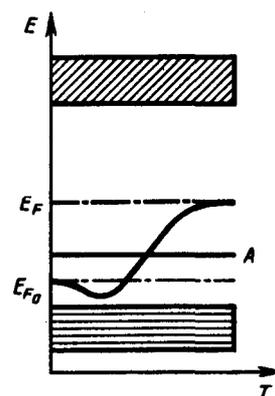


Рис. 322

Проводимость примесного полупроводника, как и проводимость любого проводника, определяется концентрацией носителей и их подвижностью. С изменением температуры подвижность носителей меняется по сравнительно слабому степенному закону, а концентрация носителей — по очень сильному экспоненциальному закону, поэтому проводимость примесных полупроводников от температуры определяется в основном температурной зависимостью концентрации носителей тока в нем. На рис. 323 дан примерный график зависимости  $\ln \gamma$  от  $1/T$  для примесных полупроводников. Участок  $AB$  описывает примесную проводимость полупроводника. Рост примесной проводимости полупроводника с повышением температуры обусловлен в основном ростом концентрации

примесных носителей. Участок  $BC$  соответствует области истощения примесей (это подтверждают и эксперименты), участок  $CD$  описывает собственную проводимость полупроводника.

### Контакт двух металлов по зонной теории

Если два различных металла привести в соприкосновение, то между ними возникает разность потенциалов, называемая контактной разностью потенциалов. Итальянский физик А. **Вольт** (1745—1827) установил, что если металлы  $Al, Zn, Sn, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd$  привести в контакт в указанной последовательности, то каждый предыдущий при соприкосновении с одним из следующих зарядится положительно. Этот ряд называется рядом Вольты. Контактная разность потенциалов для различных металлов составляет от десятых до целых вольт.

**Вольт** экспериментально установил два закона:

1. Контактная разность потенциалов зависит лишь от химического состава и температуры соприкасающихся металлов.
2. Контактная разность потенциалов последовательно соединенных различных проводников, находящихся *при одинаковой температуре*, не зависит от химического состава промежуточных проводников и равна контактной разности потенциалов, возникающей при непосредственном соединении крайних проводников.

Для объяснения возникновения контактной разности потенциалов воспользуемся представлениями зонной теории

$$(246.1)$$

Разность потенциалов (246.1), обусловленная различием работ выхода контактирующих металлов, называется **внешней контактной разностью потенциалов**. Чаще говорят просто о контактной разности потенциалов, подразумевая под ней внешнюю.

Если уровни Ферми для двух контактирующих металлов не одинаковы, то между внутренними точками металлов наблюдается **внутренняя контактная разность потенциалов**, которая, как следует из рисунка, равна

$$\Delta\varphi'' = (E_{F1} - E_{F2})/e. \quad (246.2)$$

В квантовой теории доказывается, что причиной возникновения внутренней контактной разности потенциалов является различие концентраций электронов в контактирующих металлах.  $\Delta\varphi''$  зависит от температуры  $T$  контакта металлов (поскольку наблюдается зависимость  $E_F$  от  $T$ ), обуславливая термоэлектрические явления. Как правило,  $\Delta\varphi'' \ll \Delta\varphi'$ .

Внутренняя контактная разность потенциалов возникает в двойном электрическом слое, образующемся в приконтактной области и называемом **контактным слоем**. Толщина контактного слоя в металлах составляет примерно  $10^{-10}$  м, т. е. соизмерима с междоузельными расстояниями в решетке металла. Число электронов, участвующих в диффузии через контактный спой, составляет примерно 2% от общего числа электронов, находящихся на поверхности металла.

### Термоэлектрические явления и их применение

Согласно второму закону Вольты, в замкнутой цепи, состоящей из нескольких металлов, находящихся при одинаковой температуре, э.д.с. не возникает, т. е. не происходит возбуждения электрического тока. Однако если температура контактов не одинакова, то в цепи возникает электрический ток, называемый **термоэлектрическим**. Явление возбуждения термоэлектрического тока (**явление Зеебека**), а также тесно связанные с ним **явления Пельте и Томсона** называются **термоэлектрическими явлениями**.

**1. Явление Зеебека** (1821). Немецкий физик Т. Зеебек (1770—1831) обнаружил, что в замкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных разнородных проводников, контакты между которыми имеют различную температуру, возникает электрический ток.

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух металлических проводников  $1$  и  $2$  с температурами спаев  $T_1$  (контакт  $A$ ) и  $T_2$  (контакт  $B$ ), причем  $T_1 > T_2$  (рис. 331).

Не вдаваясь в подробности, отметим, что в замкнутой цепи для многих пар металлов (например,  $Cu-Bi$ ,  $Ag-Cu$ ,  $Au-Cu$ ) электродвижущая сила прямо пропорциональна разности температур в контактах:

$$\varepsilon = \alpha(T_1 - T_2).$$

Эта э.д.с. называется **термоэлектродвижущей силой**. Направление тока при  $T_1 > T_2$  на рис. 331 показано стрелкой. Термоэлектродвижущая сила, например для пары металлов медь — константан, для разности температур 100 К составляет всего 4,25 мВ.

Причина возникновения термоэлектродвижущей э.д.с. ясна уже из формулы, определяющей внутреннюю контактную разность потенциалов на границе двух металлов.

$$\Delta\varphi' = (E_{F1} - E_{F2})/e.$$

Дело в том, что положение уровня Ферми зависит от температуры. Поэтому если температуры контактов разные, то разными будут и внутренние контактные разности потенциалов. Таким образом, сумма скачков потенциала отлична от нуля, что и приводит к возникновению термоэлектрического тока. Отметим также, что при градиенте температуры происходит и диффузия электронов, которая тоже обуславливает термо-э.д.с.

Явление Зеебека не противоречит второму началу термодинамики, так как в данном случае внутренняя энергия преобразуется в электрическую, для чего используется два источника теплоты (два контакта). Следовательно, для поддержания постоянного тока в рассматриваемой цепи необходимо поддерживать постоянство разности температур контактов: к более нагретому контакту непрерывно подводить теплоту, а от холодного — непрерывно ее отводить.

Явление Зеебека используется для измерения температуры. Для этого применяются **термоэлементы**, или **термопары**—датчики температур, состоящие из двух соединенных между собой разнородных металлических проводников. Явление Зеебека в принципе может быть использовано для генерации электрического тока. Так, уже сейчас к.п.д. полупроводниковых термобатарей достигает  $\approx 18\%$ . Следовательно, совершенствуя полупроводниковые термоэлектрогенераторы, можно добиться эффективного прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

**2. Явление Пельтье (1834).** Французский физик Ж. Пельтье (1785—1845) обнаружил, что при прохождении через контакт двух различных проводников электрического тока в зависимости от его направления помимо джоулевой теплоты выделяется или поглощается дополнительная теплота. Таким образом, явление Пельтье является обратным по отношению к явлению Зеебека. В отличие от джоулевой теплоты, которая пропорциональна квадрату силы тока, теплота Пельтье пропорциональна первой степени силы тока и меняет знак при изменении направления тока.

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из двух разнородных металлических проводников 1 и 2 (рис. 332), по которым пропускается ток  $I'$  (его направление в данном случае выбрано совпадающим с направлением термотока (на рис. 331 при условии  $T_1 > T_2$ )). Согласно наблюдениям Пельтье, спай  $A$ , который при явлении Зеебека поддерживался бы при более высокой температуре, будет теперь охлаждаться, а спай  $B$  — нагреваться. При изменении направления тока  $I'$  спай  $A$  будет нагреваться, спай  $B$  — охлаждаться.

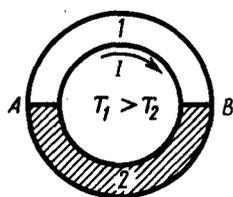


Рис. 331

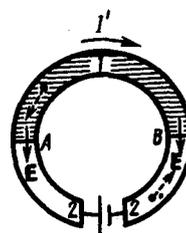


Рис. 332

Явление Пельтье используется в термоэлектрических полупроводниковых холодильниках, созданных впервые в 1954 г. под руководством А. Ф. Иоффе, и в некоторых электронных приборах.

**1. Явление Томсона (1856).** Вильям Томсон (Кельвин), исследуя термоэлектрические явления, пришел к заключению, подтвердив его экспериментально, что при прохождении тока по *неравномерно* нагретому проводнику должно происходить дополнительное выделение (поглощение) теплоты, аналогичной теплоте Пельтье. Это явление получило название явления Томсона. Его можно объяснить следующим образом. Так как в более нагретой части проводника электроны имеют большую среднюю энергию, чем в менее нагретой, то, двигаясь в направлении

убывания температуры, они отдают часть своей энергии решетке, в результате чего происходит выделение теплоты Томсона. Если же электроны движутся в сторону возрастания температуры, то они, наоборот, пополняют свою энергию за счет энергии решетки, в результате чего происходит поглощение теплоты Томсона.

### Ионизация газов. Несамостоятельный газовый разряд

Газы при не слишком высоких температурах и при давлениях, близких к атмосферному, являются хорошими изоляторами. Газы при обычных условиях состоят из нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных зарядов (электронов и ионов). Газ становится проводником электричества, когда некоторая часть его молекул *ионизируется*, т. е. произойдет расщепление нейтральных атомов и молекул на ионы и свободные электроны. Для этого газ надо подвергнуть действию какого-либо **ионизатора** (например, поднеся к заряженному электрометру пламя свечи, наблюдаем спад его заряда; здесь электропроводность газа вызвана нагреванием).

При ионизации газов, таким образом, под действием какого-либо ионизатора происходит вырывание из электронной оболочки атома или молекулы одного или нескольких электронов, что приводит к образованию свободных электронов и положительных ионов. Электроны могут присоединяться к нейтральным молекулам и атомам, превращая их в отрицательные ионы. Следовательно, в ионизованном газе имеются положительные и отрицательные ионы и свободные электроны.

Прохождение электрического тока через газы называется **газовым разрядом**.

Ионизация газов может происходить под действием различных ионизаторов: сильный нагрев (столкновения быстрых молекул становятся настолько сильными, что они разбиваются на ионы), короткое электромагнитное излучение (ультрафиолетовое, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения), корпускулярное излучение (потoki электронов, протонов,  $\alpha$ -частиц) и т. д. Для того чтобы выбить из молекулы (атома) один электрон, необходимо затратить определенную энергию, называемую **энергией ионизации**, значения которой для атомов различных веществ лежат в пределах  $4 \div 25$  эВ.

Одновременно с процессом ионизации газа всегда идет и обратный процесс — **процесс рекомбинации**: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул. Чем больше ионов возникает под действием ионизатора, тем интенсивнее идет и процесс рекомбинации.

Характер газового разряда определяется составом газа, его температурой и давлением, размерами, конфигурацией и материалом электродов, приложенным напряжением, плотностью тока.

### Самостоятельный газовый разряд и его типы

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется **самостоятельным**.

При больших напряжениях возникающие под действием внешнего ионизатора электроны, сильно ускоренные электрическим полем, сталкиваясь с нейтральными молекулами газа, ионизируют их, в результате чего образуются вторичные электроны и положительные ионы (процесс *1* на рис. 158). Положительные ионы движутся к катоду, а электроны — к аноду. Вторичные электроны вновь ионизируют молекулы газа, и, следовательно, общее количество электронов и ионов будет возрастать по мере продвижения электронов к аноду лавинообразно. Это является причиной увеличения электрического тока. Описанный процесс называется **ударной ионизацией**.

В результате описанных процессов (*1—6*) число ионов и электронов в объеме газа лавинообразно возрастает и разряд становится самостоятельным, т. е. сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный разряд, называется — **напряжением пробоя**.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырех типах самостоятельного разряда: *тлеющем, искровом, дуговом и коронном*.

**2. Тлеющий разряд** возникает при низких давлениях. Если к электродам, впаянным в стеклянную трубку длиной 30—50 см, приложить постоянное напряжение в несколько сотен вольт, постепенно откачивая из трубки воздух, то при давлении  $\approx 5,3 \div 6,7$  кПа возникает разряд в виде светящегося извилистого шнура красноватого цвета, идущего от катода к аноду.

Тлеющий разряд широко используется в технике. Так как свечение положительного столба имеет характерный для каждого газа цвет, то его используют в газосветных трубках для светящихся надписей и реклам (например, неоновые газоразрядные трубки дают красное свечение, аргоновые — синевато-зеленое). В лампах дневного света, более экономичных, чем лампы накаливания, излучение тлеющего разряда, происходящее в парах ртути, поглощается нанесенным на внутреннюю поверхность трубки флуоресцирующим веществом (люминофором), начинающим под воздействием поглощенного излучения светиться. Спектр свечения при соответствующем подборе люминофоров близок к спектру солнечного излучения. Тлеющий разряд используется для **катодного напыления** металлов. Вещество катода в тлеющем разряде вследствие бомбардировки положительными ионами, сильно нагреваясь, переходит в парообразное состояние. Помещая вблизи катода различные предметы, их можно покрыть равномерным слоем металла.

**2. Искровой разряд** возникает при больших напряженностях электрического поля ( $\approx 3 \cdot 10^6$  В/м) в газе, находящемся под давлением порядка атмосферного. Искра имеет вид ярко светящегося тонкого канала, сложным образом изогнутого и разветвленного.

Объяснение искрового разряда дается на основе **стримерной теории**, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабосветящихся скоплений ионизованного газа — **стримеров**. Быстрый нагрев газа ведет к повышению давления и возникновению ударных волн, объясняющих звуковые эффекты при искровом разряде — характерное потрескивание в слабых разрядах и мощные раскаты грома в случае молнии, являющейся примером мощного искрового разряда между грозовым облаком и Землей или между двумя грозовыми облаками.

Искровой разряд используется для воспламенения горючей смеси в двигателях внутреннего сгорания и предохранения электрических линий передачи от перенапряжения (искровые разрядники). При малой длине разрядного промежутка искровой разряд вызывает разрушение (эрозию) поверхности металла, поэтому он применяется для электроискровой точной обработки металлов (резание, сверление). Его используют в спектральном анализе для регистрации заряженных частиц (искровые счетчики).

**3. Дуговой разряд.** Если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами, то разряд становится непрерывным — возникает дуговой разряд. При этом сила тока резко возрастает, достигая сотен ампер, а напряжение на разрядном промежутке падает до нескольких десятков вольт. Дуговой разряд можно получить от источника низкого напряжения минуя стадию искры. По современным представлениям, дуговой разряд поддерживается за счет высокой температуры катода из-за интенсивной термоэлектронной эмиссии, а также термической ионизации молекул, обусловленной высокой температурой газа.

Дуговой разряд находит широкое применение для сварки и резки металлов, получения высококачественных сталей (дуговая печь) и освещения (прожекторы, проекционная аппаратура). Широко применяются также дуговые лампы с ртутными электродами в кварцевых баллонах, где дуговой разряд возникает в ртутном паре при откачанном воздухе. Дуга, возникающая в ртутном паре, является мощным источником ультрафиолетового излучения и используется в медицине (например, кварцевые лампы). Дуговой разряд при низких давлениях в парах ртути используется в ртутных выпрямителях для выпрямления переменного тока.

**4. Коронный разряд** — высоковольтный электрический разряд при высоком (например, атмосферном) давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности (например, острия). Когда напряженность поля вблизи острия достигает 30 кВ/см, то вокруг него возникает свечение, имеющее вид короны, чем и вызвано название этого вида разряда.

В зависимости от знака коронирующего электрода различают отрицательную или положительную корону. В случае отрицательной короны рождение электронов, вызывающих ударную ионизацию молекул газа, происходит за счет эмиссии их из катода под действием положительных ионов, в случае положительной — вследствие ионизации газа вблизи анода. В естественных условиях корона возникает под влиянием атмосферного электричества у вершин мачт (на этом основано действие молниеотводов), деревьев.\* Вредное действие короны вокруг проводов высоковольтных линий передачи проявляется в возникновении вредных токов утечки. Для их снижения провода высоковольтных линий делают толстыми. Коронный разряд, являясь прерывистым, становится также источником радиопомех.

Используется коронный разряд в электрофильтрах, применяемых для очистки промышленных газов от примесей. Газ, подвергаемый очистке, движется снизу вверх в вертикальном цилиндре, по оси которого расположена коронирующая проволока. Ионы, имеющиеся в большом количестве во внешней части короны, оседают на частицах примеси и увлекаются полем к внешнему некоронирующему электроду и на нем оседают. Коронный разряд применяется также при нанесении порошковых и лакокрасочных покрытий.

### Плазма и ее свойства

**Плазмой** называется сильно ионизованный газ, в котором концентрации положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы. Различают **высокотемпературную плазму**, возникающую при сверхвысоких температурах, и **газоразрядную плазму**, возникающую при газовом разряде. Плазма характеризуется **степенью ионизации**  $\alpha$  — отношением числа ионизованных частиц к полному их числу в единице объема плазмы. В зависимости от величины  $\alpha$  говорят о **слабо** ( $\alpha$  составляет доли процента), **умеренно** ( $\alpha$  — несколько процентов) и **полностью** ( $\alpha$  близко к 100%) **ионизованной плазме**.

Условием существования плазмы является некоторая минимальная плотность заряженных частиц, начиная с которой можно говорить о плазме как таковой. Эта плотность определяется в физике плазмы из неравенства  $L \gg D$ , где  $L$  — линейный размер системы заряженных частиц,  $D$  — так называемый **дебаевский радиус экранирования**, представляющий собой то расстояние, на котором происходит экранирование кулоновского поля любого заряда плазмы.

Плазма обладает следующими основными свойствами: высокой степенью ионизации газа, в пределе — полной ионизацией; равенством нулю результирующего пространственного заряда (концентрация положительных и отрицательных частиц в плазме практически одинакова); большой электропроводностью, причем ток в плазме создается в основном электронами, как наиболее подвижными частицами; свечением; сильным взаимодействием с электрическим и магнитным полями; колебаниями электронов в плазме с большой частотой ( $\approx 10^8$  Гц), вызывающими общее вибриационное состояние плазмы; «коллективным» — одновременным взаимодействием громадного числа частиц (в обычных газах частицы взаимодействуют друг с другом попарно). Эти свойства определяют качественное своеобразие плазмы, позволяющее считать ее *особым, четвертым, состоянием вещества*.

## Магнитное поле

### Магнитное поле и его характеристики

Опыт показывает, что, подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле, так и в пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, называемое **магнитным**. Наличие магнитного поля обнаруживается по силовому действию на внесенные в него проводники с током или постоянные магниты. Название «магнитное поле» связывают с ориентацией магнитной стрелки под действием поля, создаваемого током (это явление впервые обнаружено датским физиком **Х. Эрстедом** (1777—1851)).

Электрическое поле действует как на неподвижные, так и на движущиеся в нем электрические заряды. **Важнейшая особенность** магнитного поля состоит в том, что оно действует *только на движущиеся* в этом поле электрические заряды. Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. Следовательно, чтобы охарактеризовать магнитное поле, надо рассмотреть его действие на определенный ток.

Подобно тому, как при исследовании электростатического поля использовались точечные заряды, при исследовании магнитного поля используется *замкнутый плоский контур с током (рамка с током)*, линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали к контуру. Направление нормали определяется *правилом правого винта*: за положительное направление нормали принимается направление поступательного движения винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 160).

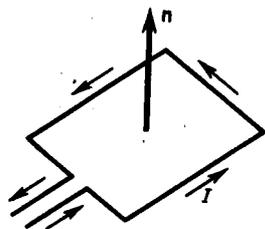


Рис. 160

- Как, пользуясь магнитной стрелкой, можно определить знаки полюсов источников постоянного тока?
- Чему равен и как направлен магнитный момент рамки с током?

Опыты показывают, что магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая ее определенным образом. Этот результат используется для выбора направления магнитного поля. За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к рамке (рис. 161).

Следовательно, на магнитную стрелку действует пара сил, поворачивающая ее так, чтобы ось стрелки, соединяющая южный полюс с северным, совпадала с направлением поля.

Рамкой с током можно воспользоваться также и для количественного описания магнитного поля. Так как рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, то на нее в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки и определяется формулой

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_m \mathbf{B}], \quad (109.1)$$

где  $\mathbf{p}_m$  — вектор магнитного момента рамки с током ( $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции, количественная характеристика магнитного поля). Для плоского контура с током  $I$

$$\mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}, \quad (109.2)$$

где  $S$  — площадь поверхности контура (рамки),  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности рамки.

Направление  $\mathbf{p}_m$  совпадает, таким образом, с направлением положительной нормали.

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение  $M_{\max}/p_m$  ( $M_{\max}$  — максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля, называемой магнитной индукцией:

$$B = M_{\max}/p_m.$$

**Магнитная индукция** в данной точке *однородного* магнитного поля определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению поля. Следует отметить, что вектор  $\mathbf{B}$  может быть выведен также из закона Ампера (см. § 111) и из выражения для силы Лоренца (см. § 114).

Так как магнитное поле является *силовым*, то его, по аналогии с электрическим, изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора  $\mathbf{B}$ . Их направление задается правилом правого винта: головка винта, ввинчиваемого по направлению тока, вращается в направлении линий магнитной индукции.

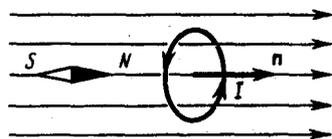


Рис. 161

- Что называют индукцией магнитного поля? Каково направление вектора  $\mathbf{B}$ ?
- Нарисуйте и покажите, как ориентированы линии магнитной индукции поля прямого тока.

Линии магнитной индукции всегда *замкнуты* и охватывают проводники с током. Этим они отличаются от линий напряженности электростатического поля, которые являются *разомкнутыми* (начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных (см. § 79)).

На рис. 163 изображены линии магнитной индукции полосового магнита; они выходят из северного полюса и входят в южный.

До сих пор мы рассматривали макроскопические токи, текущие в проводниках. Однако, согласно предположению французского физика А. Ампера (1775—1836), в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические молекулярные токи создают свое магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определенным образом

ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  характеризует *резльтирующее* магнитное поле, создаваемое всеми *макро- и микротоками*, т. е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор  $\mathbf{B}$  в *различных* средах будет иметь *разные* значения.

Магнитное поле *макродтоков* описывается **вектором напряженности  $\mathbf{H}$** . Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности следующим соотношением:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu$  — безразмерная величина — **магнитная проницаемость среды**, показывающая, во сколько раз магнитное поле макродтоков  $\mathbf{H}$  усиливается за счет поля микродтоков среды.

Сравнивая векторные характеристики электростатического ( $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ) и магнитного ( $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ ) полей, укажем, что аналогом вектора напряженности электростатического поля  $\mathbf{E}$  является вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$ , так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  определяют силовые действия этих полей и зависят от свойств среды. Аналогом вектора электрического смещения  $\mathbf{D}$  является вектор напряженности  $\mathbf{H}$  магнитного поля.

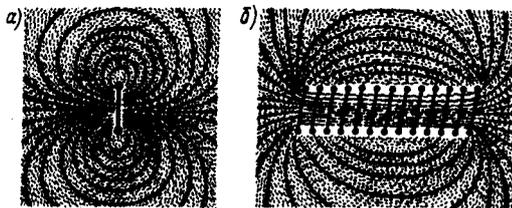


Рис. 162

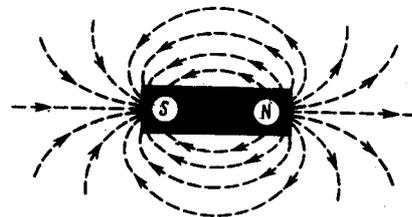


Рис. 163

### Закон Био — Савара — Лапласа и его применение к расчету магнитного поля

Магнитное поле постоянных токов различной формы изучалось французскими учеными Ж. Био (1774—1862) и Ф. Саваром (1791—1841). Результаты этих опытов были обобщены выдающимся французским математиком и физиком П. Лапласом.

**Закон Био — Савара — Лапласа** для проводника с током  $I$ , элемент  $d\mathbf{l}$  которого создает в некоторой точке  $A$  (рис. 164) индукцию поля  $d\mathbf{B}$ , записывается в виде

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I[d\mathbf{l}, \mathbf{r}]}{r^3}, \quad (110.1)$$

где  $d\mathbf{l}$  — вектор, по модулю равный длине  $d\mathbf{l}$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведенный из элемента  $d\mathbf{l}$  проводника в точку  $A$  поля,  $r$  — модуль радиуса-вектора  $\mathbf{r}$ . Направление  $d\mathbf{B}$  перпендикулярно  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ , т. е. перпендикулярно плоскости, в которой они лежат, и совпадает с касательной к линии магнитной индукции. Это направление может быть найдено по правилу нахождения линий магнитной индукции (правилу правого винта): направление вращения головки винта дает направление  $d\mathbf{B}$ , если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Модуль вектора  $d\mathbf{B}$  определяется выражением

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \sin \alpha}{r^2}, \quad (110.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{r}$ .

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i. \quad (110.3)$$

Расчет характеристик магнитного поля ( $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ ) по приведенным формулам в общем случае сложен. Однако если распределение тока имеет определенную симметрию, то применение закона Био — Савара — Лапласа совместно с принципом суперпозиции позволяет просто рассчитать конкретные поля. Рассмотрим два примера.

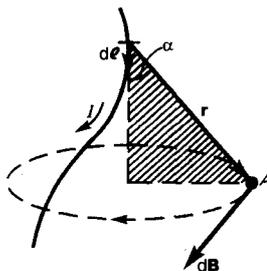


Рис. 164

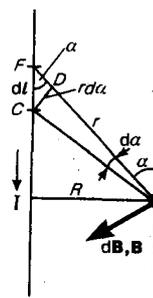


Рис. 165

**1. Магнитное поле прямого тока** — тока, текущего по тонкому прямому проводу бесконечной длины (рис. 165). В произвольной точке  $A$ , удаленной от оси проводника на расстояние  $R$ , векторы  $d\mathbf{B}$  от всех элементов тока имеют одинаковое направление, перпендикулярное плоскости чертежа («к вам»). Поэтому сложение векторов  $d\mathbf{B}$  можно заменить сложением их модулей.

Следовательно, магнитная индукция поля прямого тока

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}. \quad (110.5)$$

**2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током** (рис. 166). Как следует из рисунка, все элементы кругового проводника с током создают в центре магнитные поля одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов  $d\mathbf{B}$  можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ( $\sin\alpha = 1$ ) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно  $R$ , то, согласно (110.2),

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} dl.$$

Тогда

$$B = \int d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Следовательно, магнитная индукция поля в центре кругового проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

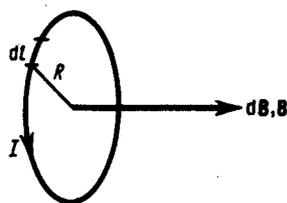


Рис. 166

- Записав закон Био — Савара — Лапласа, объясните его физический смысл.
- Рассчитайте, применяя закон Био — Савара — Лапласа, магнитное поле: 1) прямого тока; 2) в центре кругового проводника с током.

### Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие. Следовательно, вращающий момент, испытываемый рамкой, есть результат действия сил на отдельные ее элементы. Обобщая результаты исследования действия магнитного поля на различные проводники с током. Ампер установил, что сила  $d\mathbf{F}$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $d\mathbf{l}$  с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$d\mathbf{F} = I[d\mathbf{l}, \mathbf{B}], \quad (111.1)$$

где  $d\mathbf{l}$  — вектор, по модулю равный  $dl$  и совпадающий по направлению с током,  $\mathbf{B}$  — вектор магнитной индукции.

Направление вектора  $d\mathbf{F}$  может быть найдено, согласно (111.1), по общим правилам векторного произведения, откуда следует **правило левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы

в нее входил вектор  $\mathbf{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на ток. Модуль силы Ампера вычисляется по формуле

$$dF = IB dl \sin \alpha, \quad (111.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\mathbf{l}$  и  $\mathbf{B}$ .

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов.

(111.3)

Рассуждая аналогично, можно показать,

т. е. два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с силой

$$dF = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl. \quad (111.5)$$

Если токи имеют противоположные направления, то, используя правило левой руки, можно показать, что между ними действует сила отталкивания, определяемая формулой (111.5).

### Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Если два параллельных проводника с током находятся в вакууме ( $\mu=1$ ), то сила взаимодействия на единицу длины проводника, согласно (111.5), равна

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}. \quad (112.1)$$

Для нахождения числового значения  $\mu_0$  воспользуемся определением ампера, согласно

которому  $\frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7}$  Н/м при  $I_1 = I_2 = 1$  А и  $R = 1$  м. Подставив это значение в формулу (112.1), получим

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м},$$

где **генри** (Гн) — единица индуктивности (см. § 126).

Закон Ампера позволяет определить единицу магнитной индукции  $B$ . Предположим, что элемент проводника  $dl$  с током  $I$  перпендикулярен направлению магнитного поля. Тогда закон Ампера (см. (111.2)) запишется в виде  $dF = IBdl$ , откуда

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}.$$

Единица магнитной индукции — **тесла** (Тл): 1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А:

$$1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А} \cdot \text{м}).$$

Так как  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Н/А<sup>2</sup>, а в случае вакуума ( $\mu = 1$ ), согласно (109.3),  $B = \mu_0 H$ , то для данного случая

$$H = B/\mu_0.$$

Единица напряженности магнитного поля — **ампер на метр** (А/м): 1 А/м — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна  $4\pi \cdot 10^{-7}$  Тл.

### Магнитное поле движущегося заряда

Каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Электрический же ток представляет собой упорядоченное движение электрических зарядов. Поэтому можно сказать, что любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле. В результате обобщения опытных данных был установлен закон, определяющий поле  $\mathbf{B}$  точечного заряда  $Q$ , свободно движущегося с нерелятивистской скоростью  $\mathbf{v}$ . Под свободным движением заряда понимается его движение с постоянной скоростью. Этот закон выражается формулой

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\mathbf{v}\mathbf{r}]}{r^3}, \quad (113.1)$$

где  $r$  — радиус-вектор, проведенный от заряда  $Q$  к точке наблюдения  $M$  (рис. 168). Согласно выражению (113.1), вектор  $\mathbf{B}$  направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ , а именно: его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\mathbf{v}$  к  $\mathbf{r}$ .

Модуль магнитной индукции (113.1) вычисляется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha, \quad (113.2)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ .

Сравнивая выражения (110.1) и (113.1), видим, что движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока:

$$I d\mathbf{l} = Q\mathbf{v}.$$

Приведенные закономерности (113.1) и (113.2) справедливы лишь при малых скоростях ( $v \ll c$ ) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени расположен движущийся заряд.

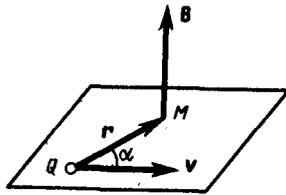


Рис. 168

- Определите числовое значение магнитной постоянной.
- Почему движущийся заряд по своим магнитным свойствам эквивалентен элементу тока?

Формула (113.1) определяет магнитную индукцию положительного заряда, движущегося со скоростью  $v$ . Если движется отрицательный заряд, то  $Q$  надо заменить на  $-Q$ . Скорость  $v$  — относительная скорость, т. е. скорость относительно наблюдателя. Вектор  $\mathbf{B}$  в рассматриваемой системе отсчета зависит как от времени, так и от положения точки  $M$  наблюдения. Поэтому следует подчеркнуть относительный характер магнитного поля движущегося заряда.

Впервые поле движущегося заряда удалось обнаружить американскому физика **Г. Роуланду** (1848—1901). Окончательно этот факт был установлен профессором Московского университета **А. А. Эйхенвальдом** (1863—1944), изучившим магнитное поле конвекционного тока, а также магнитное поле связанных зарядов поляризованного диэлектрика. Магнитное поле свободно движущихся зарядов было измерено академиком **А. Ф. Иоффе**, доказавшим эквивалентность, в смысле возбуждения магнитного поля, электронного пучка и тока проводимости.

### Действие магнитного поля на движущийся заряд

Опыт показывает, что магнитное поле действует не только на проводники с током (см. § 111), но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд  $Q$ , движущийся в магнитном поле со скоростью  $v$ , называется **силой Лоренца** и выражается формулой

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}], \quad (114.1)$$

где  $\mathbf{B}$  — индукция магнитного поля, в котором заряд движется.

Направление силы Лоренца определяется с помощью **правила левой руки**: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входил вектор  $\mathbf{B}$ , а четыре вытянутых пальца направить вдоль вектора  $\mathbf{v}$  (для  $Q > 0$  направления  $I$  и  $\mathbf{v}$  совпадают, для  $Q < 0$  — противоположны), то отогнутый большой палец покажет направление силы, действующей на *положительный заряд*. На рис. 169 показана взаимная ориентация векторов  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  (поле направлено к нам, на рисунке показано точками) и  $\mathbf{F}$  для положительного заряда. На отрицательный заряд сила действует в противоположном направлении. Модуль силы Лоренца (см. (114.1)) равен

$$F = QvB \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .

Отметим еще раз, что магнитное поле *не действует на покоящийся электрический заряд*. В этом существенное отличие магнитного поля от электрического. *Магнитное поле действует только на движущиеся в нем заряды.*

Так как по действию силы Лоренца можно найти модуль и направление вектора  $\mathbf{B}$ , то выражение для силы Лоренца может быть использовано для определения вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ .

Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не изменяя ее модуля. Следовательно, сила Лоренца работы не совершает. Иными словами, постоянное магнитное поле не совершает работы над движущейся в нем

заряженной частицей и кинетическая энергия этой частицы при движении в магнитном поле не изменяется.

Если на движущийся электрический заряд помимо магнитного поля с индукцией  $\mathbf{B}$  действует и электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$ , то результирующая сила  $\mathbf{F}$ , приложенная к заряду, равна векторной сумме сил — силы, действующей со стороны электрического поля, и силы Лоренца:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q[\mathbf{v}\mathbf{B}].$$

Это выражение называется **формулой Лоренца**. Скорость  $\mathbf{v}$  в этой формуле есть скорость заряда относительно магнитного поля.

### Движение заряженных частиц в магнитном поле

Выражение для силы Лоренца (114.1) позволяет найти ряд закономерностей движения заряженных частиц в магнитном поле. Направление силы Лоренца и направление вызываемого ею отклонения заряженной частицы в магнитном поле зависят от знака заряда  $Q$  частицы. На этом основано определение знака заряда частиц, движущихся в магнитных полях.

Для вывода общих закономерностей будем считать, что магнитное поле *однородно* и на частицы электрические поля не действуют. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью  $\mathbf{v}$  вдоль линий магнитной индукции, то угол  $\alpha$  между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  равен 0 или  $\pi$ . Тогда по формуле (114.1) сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.

Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью  $\mathbf{v}$ , перпендикулярной вектору  $\mathbf{B}$ , то сила Лоренца  $\mathbf{F} = Q[\mathbf{v}\mathbf{B}]$  постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Согласно второму закону Ньютона, эта сила создает центростремительное ускорение. Отсюда следует, что частица будет двигаться по окружности, радиус  $r$  которой определяется из условия  $QvB = mv^2/r$  откуда

$$r = \frac{m v}{Q B}. \quad (115.1)$$

*Период вращения частицы*, т. е. время  $T$ , за которое она совершает один полный оборот,

$$T = 2\pi r/v.$$

Подставив сюда выражение (115.1), получим

$$T = \frac{2\pi m}{B Q}. \quad (115.2)$$

т. е. период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется только величиной, обратной удельному заряду ( $Q/m$ ) частицы, и магнитной индукцией поля, но не зависит от ее скорости (при  $v \ll c$ ). На этом основано действие циклических ускорителей заряженных частиц.

### Эффект Холла

Эффект Холла\* (1879) — это возникновение в металле (или полупроводнике) с током плотностью  $\mathbf{j}$ , помещенном в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , электрического поля в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$ .

Поместим металлическую пластинку с током плотностью  $\mathbf{j}$  в магнитное поле  $\mathbf{B}$ , перпендикулярное  $\mathbf{j}$  (рис. 172). При данном направлении  $\mathbf{j}$  скорость носителей тока в металле — электронов — направлена справа налево. Электроны испытывают действие силы Лоренца, которая в данном случае направлена вверх. Таким образом, у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов (он зарядится отрицательно), а у нижнего — их недостаток (зарядится положительно). В результате этого между краями пластинки возникнет дополнительное поперечное электрическое поле, направленное снизу вверх. Когда напряженность  $E_B$  этого поперечного поля достигнет такой величины, что его действие на заряды будет уравновешивать силу Лоренца, то установится стационарное распределение зарядов в поперечном направлении. Тогда

$$eE_B = e\Delta\phi/a = evB, \text{ или } \Delta\phi = vBa,$$

где  $a$  — ширина пластинки,  $\Delta\phi$  — *поперечная (холловская) разность потенциалов*.

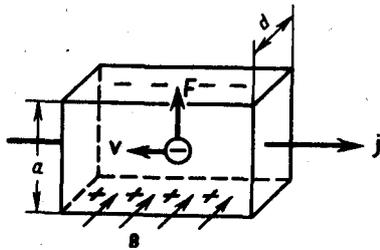


Рис. 172

- Какие данные о проводниках и полупроводниках можно получить на основе экспериментального исследования эффекта Холла?
- В чем заключается эффект Холла? Выведите формулу для холловской разности потенциалов.

Учитывая, что сила тока  $I = jS = nevS$  ( $S$  — площадь поперечного сечения пластинки толщиной  $d$ ,  $n$  — концентрация электронов,  $v$  — средняя скорость упорядоченного движения электронов), получим

$$\Delta\varphi = \frac{I}{nead} Ba = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}, \quad (117.1)$$

т. е. холловская поперечная разность потенциалов прямо пропорциональна магнитной индукции  $B$ , силе тока  $I$  и обратно пропорциональна толщине пластинки  $d$ . В формуле (117.1)  $R = 1/(en)$  — **постоянная Холла**, зависящая от вещества. По измеренному значению постоянной Холла можно: 1) определить концентрацию носителей тока в проводнике (при известных характере проводимости и заряда носителей); 2) судить о природе проводимости полупроводников (см. § 242, 243), так как знак постоянной Холла совпадает со знаком заряда  $e$  носителей тока. Эффект Холла поэтому — наиболее эффективный метод изучения энергетического спектра носителей тока в металлах и полупроводниках. Он применяется также для умножения постоянных токов в аналоговых вычислительных машинах, в измерительной технике (датчики Холла) и т. д.

### Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для поля $\mathbf{B}$

**Потоком вектора магнитной индукции** (магнитным потоком) через площадку  $dS$  называется *скалярная физическая величина*, равная

$$d\Phi_B = \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_n dS, \quad (120.1)$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  — проекция вектора  $\mathbf{B}$  на направление нормали к площадке  $dS$  ( $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{B}$ ),  $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$  — вектор, модуль которого равен  $dS$ , а направление его совпадает с направлением нормали  $\mathbf{n}$  к площадке. Поток вектора  $\mathbf{B}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$  (определяется выбором положительного направления нормали  $\mathbf{n}$ ). Поток вектора  $\mathbf{B}$  связывают с контуром, по которому течет ток. В таком случае положительное направление нормали к контуру нами уже определено: оно связывается с током правилом правого винта. Таким образом, магнитный поток, создаваемый контуром через поверхность, ограниченную им самим, всегда положителен.

Поток вектора магнитной индукции  $\Phi_B$  через произвольную поверхность  $S$  равен

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \int_S B_n dS. \quad (120.2)$$

Для однородного поля и плоской поверхности, расположенной перпендикулярно вектору  $\mathbf{B}$ ,  $B_n = B = \text{const}$  и

$$\Phi_B = BS.$$

Из этой формулы определяется единица магнитного потока **вебер** (Вб): 1 Вб — магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл ( $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ ).

**Теорема Гаусса для поля  $\mathbf{B}$ :** поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (120.3)$$

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

Итак, для потоков векторов  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  сквозь замкнутую поверхность в вихревом и потенциальном полях получаются различные выражения .

В качестве примера рассчитаем поток вектора  $\mathbf{B}$  сквозь соленоид. Магнитная индукция однородного поля внутри соленоида с сердечником с магнитной проницаемостью  $\mu$ , равна

$$B = \mu_0 \mu N I / l.$$

Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен

$$\Phi_1 = BS,$$

а полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида и называемый **потокосцеплением**,

$$\Psi = \Phi_1 N = NBS = \mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S. \quad (120.4)$$

### Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действуют силы, определяемые законом Ампера .Если проводник не закреплен (например, одна из сторон контура изготовлена в виде подвижной перемычки, рис. 177), то под действием силы Ампера он будет в магнитном поле перемещаться. Следовательно, магнитное поле совершает работу по перемещению проводника с током.

Для определения этой работы рассмотрим проводник длиной  $l$  с током  $I$  (он может свободно перемещаться), помещенный в однородное внешнее магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура. Сила, направление которой определяется по правилу левой руки, а значение — по закону Ампера, равна

$$F = IBl.$$

Под действием этой силы проводник переместится параллельно самому себе на отрезок  $dx$  из положения 1 в положение 2. Работа, совершаемая магнитным полем, равна

$$dA = F dx = IBl dx = IB dS = Id\Phi,$$

так как  $l dx = dS$  — площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле,  $BdS = d\Phi$  — поток вектора магнитной индукции, пронизывающий эту площадь. Таким образом,

$$dA = Id\Phi, \quad (121.1)$$

т. е. работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, *пересеченный движущимся проводником*. Полученная формула справедлива и для произвольного направления вектора  $\mathbf{B}$ .

## Электромагнитная индукция

### Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея)

Электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Связь магнитного поля с током привела к многочисленным попыткам возбудить ток в контуре с помощью магнитного поля. Эта фундаментальная задача была блестяще решена в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем, открывшим **явление электромагнитной индукции**. Оно заключается в том, что в замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический ток, получивший название индукционного.

Рассмотрим классические опыты Фарадея, с помощью которых было обнаружено явление электромагнитной индукции.

**Опыт I** (рис. 179, а). Если в замкнутый на гальванометр соленоид вдвигать или выдвигать постоянный магнит, то в моменты его вдвигания или выдвигания наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонений стрелки при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Отклонение стрелки гальванометра тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Для получения индукционного тока магнит можно оставлять неподвижным, тогда нужно относительно магнита передвигать соленоид.

**Опыт II.** Концы одной из катушек, вставленных одна в другую, присоединяются к гальванометру, а через другую катушку пропускается ток. Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения или при перемещении катушек друг относительно друга (рис. 179, б). Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении или выключении тока, его увеличении или уменьшении, сближении или удалении катушек.

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Например, при повороте в однородном магнитном поле замкнутого проводящего контура в нем также возникает индукционный ток. В данном случае индукция магнитного поля вблизи проводника остается постоянной, а меняется только поток магнитной индукции сквозь контур.

Опытным путем было также установлено, что значение индукционного тока совершенно не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения (в опытах Фарадея также доказывается, что отклонение стрелки гальванометра (сила тока) тем больше, чем больше скорость движения магнита, или скорость изменения силы тока, или скорость движения катушек).

Открытие явления электромагнитной индукции имело большое значение, так как была доказана возможность получения электрического тока с помощью магнитного поля. Этим была установлена взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями, что послужило в дальнейшем толчком для разработки теории электромагнитного поля.

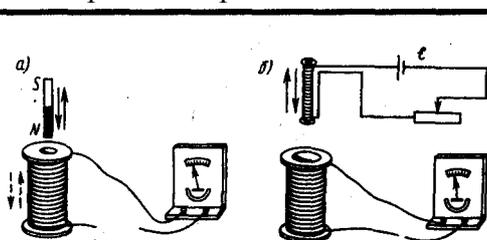


Рис. 179

- Что является причиной возникновения э.д.с. индукции в замкнутом проводящем контуре? От чего и как зависит э.д.с. индукции, возникающая в контуре?
- В чем заключается явление электромагнитной индукции? Проанализируйте опыты Фарадея.

### Закон Фарадея и его вывод из закона сохранения энергии

Фарадей пришел к количественному закону электромагнитной индукции. Он показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток; возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы, называемой **электродвижущей силой электромагнитной индукции**. Значение индукционного тока, а следовательно, и э.д.с. электромагнитной индукции  $\mathcal{E}_i$ , определяются только скоростью изменения магнитного потока, т. е.

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{d\Phi}{dt}.$$

Теперь необходимо выяснить знак  $\mathcal{E}_i$ . Знак магнитного потока зависит от выбора положительной нормали к контуру. В свою очередь, положительное направление нормали определяется правилом правого. Следовательно, выбирая положительное направление нормали, мы определяем как знак потока магнитной индукции, так и направление тока и э.д.с. в контуре. Пользуясь этими представлениями и выводами, можно соответственно прийти к формулировке **закона электромагнитной индукции Фарадея**: какова бы ни была причина изменения потока магнитной индукции, охватываемого замкнутым проводящим контуром, возникающая в контуре э. д. с.

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (123.2)$$

Знак минус показывает, что увеличение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ) вызывает э. д. с.  $\mathcal{E}_i < 0$ , т. е. поле индукционного тока направлено навстречу потоку; уменьшение потока ( $\frac{d\Phi}{dt} < 0$ ) вызывает  $\mathcal{E}_i > 0$ , т.е. направления потока и поля индукционного тока совпадают. Знак минус в формуле (123.2) определяется правилом Ленца — общим правилом для нахождения направления индукционного тока, выведенного в 1833 г.

**Правило Ленца:** индукционный ток в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызвавшему этот индукционный ток.

Закон Фарадея может быть непосредственно получен из закона сохранения энергии, как это впервые сделал Г. Гельмгольц. Рассмотрим проводник с током  $I$ , который помещен в однородное магнитное поле, перпендикулярное плоскости контура, и может свободно перемещаться. Под действием силы Ампера  $F$ , направление которой показано на рисунке, проводник перемещается на отрезок  $dx$ . Таким образом, сила Ампера производит работу  $dA=Id\Phi$ , где  $d\Phi$  — пересеченный проводником магнитный поток.

Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время  $dt$  ( $\mathcal{E}Idt$ ) будет складываться из работы на джоулеву теплоту ( $I^2Rdt$ ) и работы по перемещению проводника в магнитном поле ( $Id\Phi$ ):

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + Id\Phi,$$

где  $R$  — полное сопротивление контура. Тогда

$$I = \left( \mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt} \right) / R,$$

$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{E}_i$ , есть не что иное, как закон Фарадея.

**Закон Фарадея** можно сформулировать еще таким образом: э.д.с.  $\mathcal{E}_i$  электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром. Этот закон является *универсальным*: э. д. с.  $\mathcal{E}_i$  не зависит от способа изменения магнитного потока. Э.д.с. электромагнитной индукции выражается в вольтах. Действительно, учитывая, что единицей магнитного потока является вебер (Вб), получим

$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{\text{Вб}}{\text{с}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{с}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{А} \cdot \text{м} \cdot \text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \frac{\text{А} \cdot \text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{с}} = \text{В}.$$

Какова природа э.д.с. электромагнитной индукции? Если проводник (подвижная перемычка контура на рис. 177) движется в постоянном магнитном поле, то сила Лоренца, действующая на заряды внутри проводника, движущиеся вместе с проводником, будет направлена противоположно току, т. е. она будет создавать в проводнике индукционный ток противоположного направления (за направление электрического тока принимается движение положительных зарядов). Таким образом, возбуждение э.д.с. индукции при движения контура в постоянном магнитном поле объясняется действием силы Лоренца, возникающей при движении проводника.

Согласно закону Фарадея, возникновение э.д.с. электромагнитной индукции возможно и в случае неподвижного контура, находящегося в *переменном* магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение э.д.с. индукции. Максвелл для объяснения э.д.с. индукции в *неподвижных* проводниках предположил, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

### Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются **генераторы**, принцип действия которых можно рассмотреть на примере плоской рамки, вращающейся в однородном магнитном поле (рис. 180).

Предположим, что рамка вращается в однородном магнитном поле ( $B=\text{const}$ ) равномерно с угловой скоростью  $\omega=\text{const}$ . Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$ , согласно (120.1), равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$

где  $\alpha = \omega t$  — угол поворота рамки в момент времени  $t$  (начало отсчета выбрано так, чтобы при  $t=0$  было  $\alpha=0$ ).

При вращении рамки в ней будет возникать переменная э.д.с. индукции

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t, \quad (124.1)$$

изменяющаяся со временем по гармоническому закону. При  $\sin \omega t = 1$  э.д.с.  $\mathcal{E}_i$  максимальна, т. е.

$$\mathcal{E}_{\max} = BS\omega. \quad (124.2)$$

Учитывая (124.2), выражение (124.1) можно записать в виде

$$\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t.$$

Таким образом, если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней возникает переменная э.д.с., изменяющаяся по гармоническому закону.

Из формулы (124.2) вытекает, что  $\mathcal{E}_{\max}$  (следовательно, и э.д.с. индукции) находится в прямой зависимости от величин  $\omega$ ,  $B$  и  $S$ . В России принята стандартная частота тока  $\nu = \omega/(2\pi) = 50$  Гц, поэтому возможно лишь увеличение двух остальных величин. Для увеличения  $B$  применяют мощные постоянные магниты или в электромагнитах пропускают значительный ток, а также внутрь электромагнита помещают сердечники из материалов с большой магнитной проницаемостью  $\mu$ . Если вращать не один, а ряд витков, соединенных последовательно, то тем самым увеличивается  $S$ . Переменное напряжение снимается с вращающегося витка с помощью щеток, схематически изображенных на рис. 180.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если по рамке, помещенной в магнитное поле, пропускать электрический ток, то в соответствии с (109.1) на нее будет действовать вращающий момент и рамка начнет вращаться. На этом принципе основана работа **электродвигателей**, предназначенных для превращения электрической энергии в механическую.

### Вихревые токи (токи Фуко)

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в массивных сплошных проводниках, помещенных в переменное магнитное поле. Эти токи оказываются замкнутыми в толще проводника и поэтому называются **вихревыми**. Их также называют **токами Фуко** — по имени первого исследователя.

Токи Фуко, как и индукционные токи в линейных проводниках, подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Например, если между полюсами невключенного электромагнита массивный медный маятник совершает практически незатухающие колебания (рис. 181), то при включении тока он испытывает сильное торможение и очень быстро останавливается. Это объясняется тем, что возникшие токи Фуко имеют такое направление, что действующие на них со стороны магнитного поля силы тормозят движение маятника. Этот факт используется для успокоения (демпфирования) подвижных частей различных приборов..

Вихревые токи помимо торможения (как правило, нежелательного эффекта) вызывают нагревание проводников. Поэтому для уменьшения потерь на нагревание якоря генераторов и сердечники трансформаторов делают не сплошными, а изготовляют из тонких пластин, отделенных одна от другой слоями изолятора, и устанавливают их так, чтобы вихревые токи были направлены поперек пластин. Джоулева теплота, выделяемая токами Фуко, используется в индукционных металлургических печах.

### Индуктивность контура. Самоиндукция

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого, по закону Био — Савара — Лапласа, пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток  $\Phi$  поэтому пропорционален току  $I$  в контуре:

$$\Phi = LI, \quad (126.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $L$  называется **индуктивностью контура**.

При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и сцепленный с ним магнитный поток; следовательно, в контуре будет индуцироваться э.д.с. Возникновение э.д.с. индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется самоиндукцией.

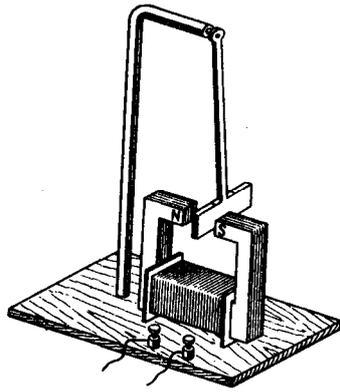


Рис. 181

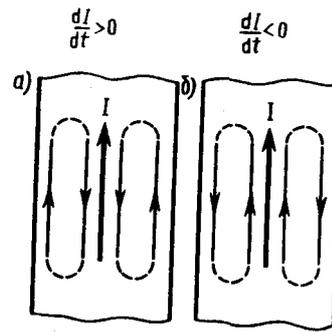


Рис. 182

Из выражения (126.1) определяется единица индуктивности **генри** (Гн): 1 Гн — индуктивность такого контура, магнитный поток самоиндукции которого при токе в 1 А равен 1 Вб:

$$1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}.$$

Рассчитаем индуктивность бесконечно длинного соленоида. Согласно (120.4), полный магнитный поток сквозь соленоид (потокосцепление) равен  $\mu_0 \mu \frac{N^2 I}{l} S$ . Подставив это выражение в формулу (126.1), получим

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \quad (126.2)$$

т. е. индуктивность соленоида зависит от числа витков соленоида  $N$ , его длины  $l$ , площади  $S$  и магнитной проницаемости  $\mu$  вещества, из которого изготовлен сердечник соленоида.

Можно показать, что индуктивность контура в общем случае зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится. В этом смысле индуктивность контура — аналог электрической емкости уединенного проводника, которая также зависит только от формы проводника, его размеров и диэлектрической проницаемости среды.

Применяя к явлению самоиндукции закон Фарадея, получим, что э. д. с. самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d(LI)}{dt} = - \left( L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right).$$

Если контур не деформируется и магнитная проницаемость среды не изменяется (в дальнейшем будет показано, что последнее условие выполняется не всегда), то  $L = \text{const}$  и

$$\mathcal{E}_s = - L \frac{dI}{dt}, \quad (126.3)$$

где знак минус, обусловленный правилом Ленца, показывает, что наличие индуктивности в контуре приводит к *замедлению изменения* тока в нем.

Если ток со временем возрастает, то  $\frac{dI}{dt} > 0$  и  $\mathcal{E}_s < 0$ , т. е. ток самоиндукции направлен навстречу току, обусловленному внешним источником, и замедляет его возрастание. Если ток со временем убывает, то  $\frac{dI}{dt} < 0$  и  $\mathcal{E}_s > 0$ , т. е. индукционный ток имеет такое же направление, как и убывающий ток в контуре, и замедляет его убывание. Таким образом, контур, обладая определенной индуктивностью, приобретает электрическую инертность, заключающуюся в том, что любое изменение тока тормозится тем сильнее, чем больше индуктивность контура.

### Взаимная индукция

Рассмотрим два неподвижных контура (1 и 2), расположенных достаточно близко друг от друга (рис. 184). Если в контуре 1 течет ток  $I_1$ , то магнитный поток, создаваемый этим током (поле, создающее этот поток, на рисунке изображено сплошными линиями), пропорционален  $I_1$ . Обозначим через  $\Phi_{21}$  ту часть потока, которая пронизывает контур 2. Тогда

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1, \quad (128.1)$$

где  $L_{12}$  — коэффициент пропорциональности.

Если ток  $I_1$  изменяется, то в контуре 2 индуцируется э.д.с.  $\mathcal{E}_{12}$ , которая по закону Фарадея (см. (123.2)) равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_{21}$ , созданного током в первом контуре и пронизывающего второй:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}.$$

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока  $I_2$  магнитный поток (его поле изображено на рис. 184 штриховыми линиями) пронизывает первый контур. Если  $\Phi_{12}$  — часть этого потока, пронизывающего контур 1, то

$$\Phi_{12} = L_{12} I_2.$$

Если ток  $I_2$  изменяется, то в контуре 1 индуцируется э.д.с.  $\mathcal{E}_{21}$ , которая равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока  $\Phi_{12}$ , созданного током во втором контуре и пронизывающего первый:

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}.$$

Явление возникновения э.д.с. в одном из контуров при изменении силы тока в другом называется **взаимной индукцией**. Коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  называются **взаимной индуктивностью контуров**. Расчеты, подтверждаемые опытом, показывают, что  $L_{21}$  и  $L_{12}$  равны друг другу, т. е.

$$L_{12} = L_{21}. \quad (128.2)$$

Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  зависят от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Единица взаимной индуктивности та же, что и для индуктивности, — генри (Гн).

Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник. Этот случай имеет большое практическое значение (рис. 185). Магнитная индукция поля, создаваемого первой катушкой с числом витков  $N_1$ , током  $I_1$  и магнитной проницаемостью  $\mu$  сердечника, согласно (119.2),  $B = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l}$ , где  $l$  — длина сердечника по средней линии. Магнитный

поток сквозь один виток второй катушки  $\Phi_2 = BS = \mu_0 \mu \frac{N_1 I_1}{l} S$ .

Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков,

$$\Psi = \Phi_2 N_2 = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S I_1.$$

Поток  $\Psi$  создается током  $I_1$ , поэтому, согласно (128.1), получаем

$$L_{21} = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (128.3)$$

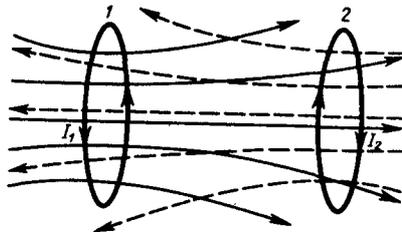


Рис. 184

- В чем заключаются явления самоиндукции и взаимной индукции? Вычислите э.д.с. индукции для обоих случаев.
- В чем заключается физический смысл времени релаксации  $\tau = L/R$ ? Докажите, что оно имеет размерность времени.

Если вычислить магнитный поток, создаваемый катушкой 2 сквозь катушку 1, то для  $L_{12}$  получим выражение в соответствии с формулой (128.3). Таким образом, взаимная индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный сердечник,

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 \mu \frac{N_1 N_2}{l} S.$$

### Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружен магнитным полем, причем магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому, является носителем энергии. Естественно предположить, что энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ . С данным контуром сцеплен магнитный поток  $\Phi = LI$ , причем при изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = LdI$ . Однако для изменения магнитного потока на величину  $d\Phi$  (см. § 121) необходимо совершить работу  $dA = Id\Phi = LI dI$ . Тогда работа по созданию магнитного потока  $\Phi$  будет равна

$$A = \int_0^I LI dI = LI^2/2.$$

Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = LI^2/2. \quad (130.1)$$

Исследование свойств переменных магнитных полей, в частности распространения электромагнитных волн, явилось доказательством того, что энергия магнитного поля локализована в пространстве. Это соответствует представлениям теории поля.

Энергию магнитного поля можно представить как функцию величин, характеризующих это поле в окружающем пространстве. Для этого рассмотрим частный случай — однородное магнитное поле внутри длинного соленоида. Подставив в формулу (130.1) выражение (126.2), получим

$$W = \frac{1}{2} \mu_0 \mu \frac{N^2 I^2}{l} S.$$

Так как  $I = Bl/(\mu_0 \mu N)$  и  $B = \mu_0 \mu H$ , то

$$W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V, \quad (130.2)$$

где  $Sl = V$  — объем соленоида.

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной объемной плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (130.3)$$

Выражение (130.3) для объемной плотности энергии магнитного поля имеет вид, аналогичный формуле (95.8) для объемной плотности энергии электростатического поля, с той разницей, что электрические величины заменены в нем магнитными. Формула (130.3) выведена для однородного поля, но она справедлива и для неоднородных полей. Выражение (130.3) справедливо только для сред, для которых зависимость  $B$  от  $H$  линейная, т.е. оно относится только к пара- и диамагнетикам.

### Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Введение Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению созданной им макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения не только объяснить электрические и магнитные явления, но и предсказать новые, существование которых было впоследствии подтверждено.

В основе теории Максвелла лежат рассмотренные выше четыре уравнения:

1. Электрическое поле может быть как потенциальным ( $\mathbf{E}_Q$ ), так и вихревым ( $\mathbf{E}_B$ ), поэтому напряженность суммарного поля  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_B$ .

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}.$$

Это уравнение показывает, что магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля  $\mathbf{D}$ :

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q. \quad (139.1)$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ , то формула (139.1) запишется в виде

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV.$$

4. Теорема Гаусса для поля  $\mathbf{B}$ :

$$\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Итак, полная система уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left( \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0.$$

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями.

Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет зарядов магнитных.

Для стационарных полей ( $E = \text{const}$  и  $B = \text{const}$ ) уравнения Максвелла примут вид

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0; \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q; \quad \oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I; \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0,$$

т.е. источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного — только токи проводимости. В данном случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно постоянные электрическое и магнитное поля.

Воспользовавшись известными из векторного анализа теоремами Стокса и Гаусса

$$\oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} d\mathbf{S}; \quad \oint_S \mathbf{A} d\mathbf{S} = \int_V \text{div } \mathbf{A} dV,$$

можно представить полную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме (характеризующих поле в каждой точке пространства):

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла — интегральная и дифференциальная — эквивалентны.

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое электромагнитное поле.

## Физика -2

### КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

#### Глава Механические и электромагнитные колебания

##### Гармонические колебания и их характеристики

**Колебаниями** называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например качание маятника часов, переменный электрический ток. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями. Например, единый подход к изучению механических и электромагнитных колебаний применялся английским физиком Д. У. Рэлеем (1842—1919), А. Г. Столетовым, русским инженером-экспериментатором П. Н. Лебедевым (1866—1912). Большой вклад в развитие теории колебаний внесли Л. И. Мандельштам (1879—1944) и его ученики.

**Колебания** называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам: 1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому; 2) различные **периодические процессы** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины  $s$  описываются уравнением типа

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

где  $A$  — максимальное значение колеблющейся величины, называемое **амплитудой колебания**,  $\omega_0$  — **круговая (циклическая) частота**,  $\varphi$  — **начальная фаза колебания** в момент времени  $t=0$ ,  $(\omega_0 t + \varphi)$  — **фаза колебания** в момент времени  $t$ . Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от  $+1$  до  $-1$ , то  $s$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$ .

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени  $T$ , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение  $2\pi$ , т. е.

$$\omega_0 (t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi / \omega_0. \quad (2)$$

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = 1/T, \quad (3)$$

т. е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется **частотой колебаний**. Сравнивая (2) и (3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Единица частоты — **герц (Гц)**: 1 Гц — частота периодического процесса, при которой за 1 с совершается один цикл процесса.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$ :

**дифференциальное уравнение гармонических колебаний**

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (4)$$

(где  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ). Решением этого уравнения является выражение (1).

Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды**, или **методом векторных диаграмм**. Гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды  $A$ , отложенного из произвольной точки оси под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг этой точки.

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют **комплексным числом**. Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (5)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (1) можно записать в комплексной форме:

$$\vec{s} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (6)$$

Вещественная часть выражения (6)

$$\text{Re}(\vec{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение  $\text{Re}$  вещественной части условимся опускать и (6) будем записывать в виде

$$s = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина  $s$  равна *вещественной части* комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

### Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат  $x$  около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты  $x$  от времени  $t$  задается уравнением, аналогичным уравнению (140.1), где  $s=x$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (1)$$

Согласно выражениям (4) в (5), скорость  $v$  и ускорение  $a$  колеблющейся точки соответственно равны

$$\begin{aligned} v &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2); \\ a &= -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \end{aligned} \quad (2)$$

Сила  $F=ma$ , действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ , с учетом (1) и (2) равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

**Кинетическая энергия** материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (3)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (4)$$

**Потенциальная энергия** материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы  $F$ , равна

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (5)$$

или

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (6)$$

Сложив (3) и (5), получим формулу для **полной энергии**:

$$E = T + \Pi = mA^2\omega_0^2/2. \quad (7)$$

Полная энергия остается постоянной, так как при гармонических колебаниях справедлив закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна.

Из формул (4) и (6) следует, что  $T$  и  $\Pi$  изменяются с частотой  $2\omega_0$ , т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания. На рис. 200 представлены графики зависимости  $x$ ,  $T$  и  $\Pi$  от времени. Так как  $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ , то из формул (3), (5) и (7) следует, что  $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = 1/2 E$ .

### Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

**Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0$$

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (1)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

**1. Пружинный маятник** — это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ , где  $k$  — жесткость пружины. Уравнение движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (2)$$

и периодом

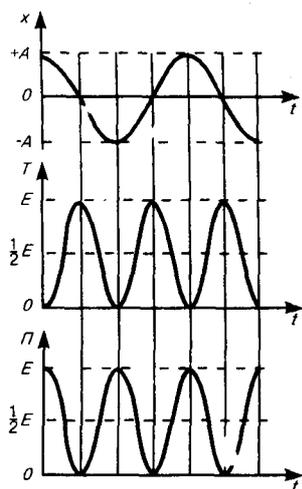
$$T = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (3)$$

Формула (3) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (см. (21.3)), т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела. Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (5) и (142.2), равна

$$\Pi = kx^2/2.$$

**3. Физический маятник** — это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $S$  тела.

Рис. 200



- От чего зависят амплитуда и начальная фаза гармонических механических колебаний?
- Выведите и прокомментируйте формулы для кинетической, потенциальной и полной энергии при гармонических колебаниях.
- Чему равно отношение полной энергии гармонического колебания к максимальному значению возвращающей силы, вызывающей это колебание?

Принимая

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J}, \quad (4)$$

получим уравнение

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0,$$

идентичное с (1), решение которого (140.1) известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (5)$$

Из выражения (5) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  (см. (142.5)) и периодом

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g}, \quad (6)$$

где  $L = J/(ml)$  — приведенная длина физического маятника.

**3. Математический маятник** — это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести. Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Момент инерции математического маятника

$$J = ml^2, \quad (7)$$

где  $l$  — длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс, то, подставив выражение (7) в формулу (6), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}. \quad (8)$$

Сравнивая формулы (6) и (8), видим, что если приведенная длина  $L$  физического маятника равна длине  $l$  математического маятника, то периоды колебаний этих маятников одинаковы. Следовательно, **приведенная длина физического маятника** — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

### Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** — цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью  $L$ , конденсатора емкостью  $C$  и резистора сопротивлением  $R$ .

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ( $R \approx 0$ ).

Так как  $R \approx 0$ , то, согласно закону сохранения энергии, полная энергия

$$W = \frac{Q^2}{2C} + \frac{L\dot{Q}^2}{2} = \text{const},$$

так как она на нагревание не расходуется. Поэтому в момент  $t = \frac{1}{4}T$ , когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а следовательно, и ток) достигает наибольшего значения (рис. 202, б). Начиная с этого момента ток в контуре будет убывать; следовательно, начнет ослабевать магнитное поле катушки, и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в конце концов обратится в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума.

Если бы потерь энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т.е. периодически изменялись (колебались) бы заряд  $Q$  на обкладках конденсатора, напряжение  $U$  на конденсаторе и сила тока  $I$ , текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, причем колебания сопровождаются превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника (рис. 202 внизу), сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника

Индуктивность  $L$  играет роль массы  $m$ , а сопротивление контура — роль силы трения, действующей на маятник.

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью  $L$ , конденсатор емкостью  $C$  и резистор сопротивлением  $R$ ,

$$IR + U_C = \mathcal{E}_s,$$

где  $IR$  — напряжение на резисторе,  $U_C = Q/C$  — напряжение на конденсаторе,  $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$  — э.д.с.

самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней переменного тока ( $\mathcal{E}_s$  — единственная э.д.с. в контуре). Следовательно,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (143.1)$$

Разделив (143.1) на  $L$  и подставив  $I = \dot{Q}$  и  $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$ , получим дифференциальное уравнение колебаний заряда  $Q$  в контуре:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (143.2)$$

В данном колебательном контуре внешние э.д.с. отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой *свободные* колебания (см. §140). Если сопротивление  $R=0$ , то свободные электромагнитные колебания в контуре являются *гармоническими*. Тогда из (143.2) получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре.

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Из выражений (142.1) и (140.1) вытекает, что заряд  $Q$  совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (143.3)$$

где  $Q_m$  — амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой  $\omega_0$ , называемой **собственной частотой контура**, т. е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (143.4)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (143.5)$$

Формула (143.5) впервые была получена У. Томсоном и называется **формулой Томсона**. Сила тока в колебательном контуре (см. (140.4))

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \quad (143.6)$$

где  $I_m = \omega_0 Q_m$  — амплитуда силы тока. Напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (143.7)$$

где  $U_m = Q_m/C$  — амплитуда напряжения.

Из выражений (143.3) и (143.6) вытекает, что колебания тока  $I$  опережают по фазе колебания заряда  $Q$  на  $\pi/2$ , т.е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение (см. (143.7)) обращается в нуль, и наоборот.

### Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (144.1)$$

. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз ( $\varphi_2 - \varphi_1$ ) складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (144.2) в зависимости от разности фаз ( $\varphi_2 - \varphi_1$ ):

- 1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), тогда  $A = A_1 + A_2$ , т.е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний;
- 2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ), тогда  $A = |A_1 - A_2|$ , т.е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

Период биений

$$T_6 = 2\pi/\Delta\omega.$$

### Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты  $\omega$ , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos(\omega t + \alpha), \end{cases} \quad (145.1)$$

где  $\alpha$  — разность фаз обоих колебаний,  $A$  и  $B$  — амплитуды складываемых колебаний. Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (145.1) параметра  $t$ .

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз  $\alpha$ .

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются **фигурами Лиссажу**. \* Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. На рис. 207 представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот (указаны слева) и разностей фаз (указаны вверху; разность фаз принимается равной  $\varphi$ ).

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу — широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

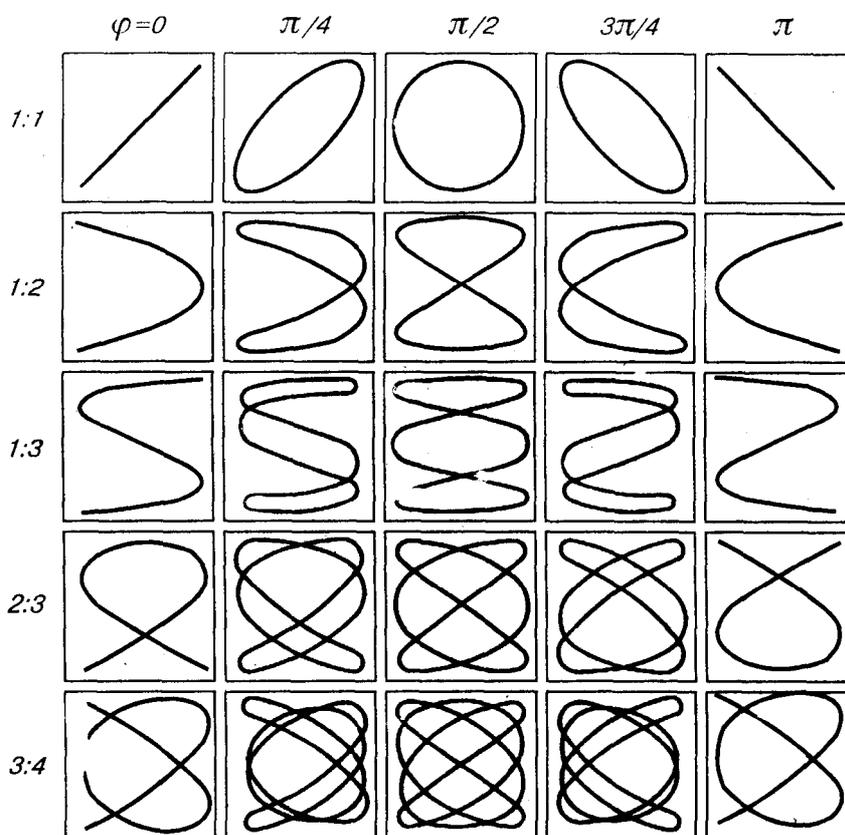


Рис. 207

### Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания

Рассмотрим свободные **затухающие колебания** — колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах, а также омических потерь и излучения электромагнитной энергии в электрических колебательных системах.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие

физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука), колебательный контур, индуктивность, емкость и сопротивление которого не зависят ни от тока в контуре, ни от напряжения.

(при отсутствии потерь энергии) называется **собственной частотой** колебательной системы.

$$A = A_0 e^{-\delta t} \quad (146.6)$$

— **амплитуда затухающих колебаний**, а  $A_0$  — начальная амплитуда. Зависимость (146.5) показана на рис. 208 сплошной линией, а зависимость (146.6) — штриховыми линиями. Промежуток времени  $\tau = 1/\delta$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e$  раз, называется **временем релаксации**.

Тогда период затухающих колебаний с учетом формулы (146.4) равен

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Особенно важны и широко применимы так называемые **автоколебания** — незатухающие колебания, поддерживаемые в диссипативной системе за счет постоянного внешнего источника энергии, причем свойства этих колебаний определяются самой системой.

Автоколебания *принципиально* отличаются от свободных незатухающих колебаний, происходящих без действия сил, а также от вынужденных колебаний (см. § 147), происходящих под действием периодической силы. Автоколебательная система сама управляет внешними воздействиями, обеспечивая согласованность поступления энергии определенными порциями в нужный момент времени (в такт с ее колебаниями).

Примером автоколебательной системы могут служить часы. Храповой механизм подталкивает маятник в такт с его колебаниями. Энергия, передаваемая при этом маятнику, берется либо за счет раскручивающейся пружины, либо за счет опускающегося груза. Колебания воздуха в духовых инструментах и органных трубах также возникают вследствие автоколебаний, поддерживаемых воздушной струей.

Автоколебательными системами являются также двигатели внутреннего сгорания, паровые турбины, ламповый генератор и т. д.

## Глава Упругие волны

### Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться.

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется **волновым процессом** (или **волной**). При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому *основным свойством всех волн*, независимо от их природы, является *перенос энергии без переноса вещества*.

Среди разнообразных волн, встречающихся в природе и технике, выделяются следующие их типы: **волны на поверхности жидкости, упругие и электромагнитные волны**. **Упругими** (или **механическими**) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают продольные и поперечные. В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в **поперечных** — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны.

Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*, т. е. твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы *при деформации сдвига*, т. е. в твердых телах; *в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.*

**Упругая волна** называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны**  $\lambda$ . Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период, т. е.

$$\lambda = vT,$$

или, учитывая, что  $T = 1/\nu$ , где  $\nu$  — частота колебаний,

$$v = \lambda\nu.$$

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно **волна** называется **плоской** или **сферической**.

### Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

**Бегущими волнами** называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Перенос энергии волнами количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии**. Этот вектор для упругих волн называется **вектором Умова** (по имени русского ученого Н. А. Умова (1846—1915), решившего задачу о распространении энергии в среде). Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Так как для прохождения волной расстояния  $x$  требуется время  $\tau = x/v$ , где  $v$  — скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - x/v), \quad (154.1)$$

откуда следует, что  $\xi(x, t)$  является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты  $x$ . Уравнение (154.1) есть **уравнение бегущей волны**. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t + x/v).$$

В общем случае **уравнение плоской волны**, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$  в среде, *не поглощающей* энергию, имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos [\omega(t - x/v) + \varphi_0], \quad (154.2)$$

где  $A = \text{const}$  — **амплитуда волны**,  $\omega$  — **циклическая частота**,  $\varphi_0$  — **начальная фаза волны**, определяемая в общем случае выбором начал отсчета  $x$  и  $t$ ,  $[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$  — **фаза плоской волны**.

Для характеристики волн используется **волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}. \quad (154.3)$$

### Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, *линейна*, т. е. ее свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип**

**суперпозиции (наложения) волн:** при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Исходя из принципа суперпозиции и разложения Фурье (см. (144.5)) любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, т. е. в виде волнового пакета, или группы волн.

**Волновым пакетом** называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

### Интерференция волн

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием **когерентности**. Волны называются **когерентными**, если разность их фаз остается постоянной во времени. Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. При наложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн**.

Так как для когерентных источников разность начальных фаз  $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const}$ , то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины  $\Delta = r_1 - r_2$ , называемой **разностью хода волн**.

В точках, где

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 2m\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (156.1)$$

наблюдается **интерференционный максимум**: амплитуда результирующего колебания  $A = A_0/r_1 + A_0/r_2$ .

В точках, где

$$k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pm (2m+1)\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (156.2)$$

наблюдается **интерференционный минимум**: амплитуда результирующего колебания  $A = |A_0/r_1 + A_0/r_2|$ ;  $m=0, 1, 2, \dots$ , называется соответственно **порядком интерференционного максимума** или **минимума**.

Условия (156.1) в (156.2) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = \text{const}. \quad (156.3)$$

Выражение (156.3) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках  $S_1$  и  $S_2$ . Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой семейство гипербол (рис. 221), отвечающих условию  $(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ . Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 221 сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (на рис. 221 штриховые линии).

### Стоячие волны

Особым случаем интерференции являются **стоячие волны** — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами, а в случае поперечных волн и одинаковой поляризации.

Для вывода уравнения стоячей волны предположим, что две плоские волны распространяются навстречу друг другу вдоль оси  $x$  в среде без затухания, причем обе волны характеризуются одинаковыми амплитудами и частотами.

$$\begin{cases} \xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 = A \cos(\omega t + kx). \end{cases} \quad (157.1)$$

Сложив эти уравнения и учитывая, что  $k = 2\pi/\lambda$  (см. (154.3)), получим **уравнение стоячей волны**:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos(2\pi x/\lambda) \cos \omega t. \quad (157.2)$$

Из уравнения стоячей волны (157.2) вытекает, что в каждой точке этой волны происходят колебания той же частоты  $\omega$  с амплитудой  $A_{\text{ст}} = |2A \cos(2\pi x/\lambda)|$ , зависящей от координаты  $x$  рассматриваемой точки.

В точках среды, где

$$2\pi x/\lambda = \pm m\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (157.3)$$

амплитуда колебаний достигает максимального значения, равного  $2A$ . В точках среды, где

$$2\pi x/\lambda = \pm(m+1/2)\pi \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (157.4)$$

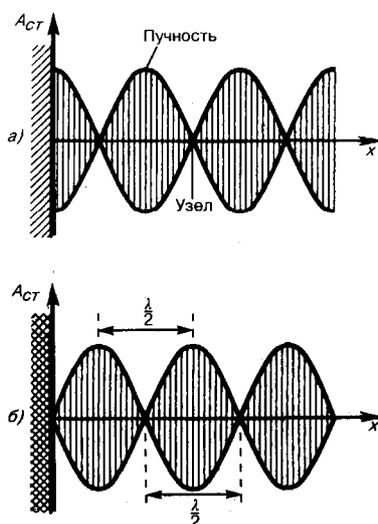
амплитуда колебаний обращается в нуль. Точки, в которых амплитуда колебаний максимальна ( $A_{ст}=2A$ ), называются **пучностями стоячей волны**, а точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю ( $A_{ст}=0$ ), называются **узлами стоячей волны**. Точки среды, находящиеся в узлах, колебаний не совершают.

Из формул (157.5) и (157.6) следует, что расстояния между двумя соседними пучностями и двумя соседними узлами одинаковы и равны  $\lambda/2$ . Расстояние между соседними пучностью и узлом стоячей волны равно  $\lambda/4$ .

Образование стоячих волн наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волн.

Если рассматривать бегущую волну, то в направлении ее распространения переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны *переноса энергии нет*, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях..

Рис. 222



- Всегда ли сохраняется энергия при интерференции двух волн? Ответ обосновать.
- Когда на струне образуется стоячая волна, колебания падающей и отраженной волн в узлах взаимно гасятся. Означает ли это, что исчезает энергия?
- Две волны, распространяющиеся навстречу друг другу, отличаются только амплитудами. Образуют ли они стоячую волну?
- Чем стоячая волна отличается от бегущей?
- Чему равно расстояние между двумя соседними узлами стоячей волны? двумя соседними пучностями? соседними пучностью и узлом?

### Звуковые волны

**Звуковыми (или акустическими) волнами** называются распространяющиеся в среде упругие волны, обладающие частотами в пределах 16—20 000 Гц. Волны указанных частот, воздействуя на слуховой аппарат человека, вызывают ощущение звука. Волны с  $\nu < 16$  Гц (**инфразвуковые**) и  $\nu > 20$  кГц (**ультразвуковые**) органами слуха человека не воспринимаются.

Звуковые волны в газах и жидкостях могут быть только продольными, так как эти среды обладают упругостью лишь по отношению к деформациям сжатия (растяжения). В твердых телах звуковые волны могут быть как продольными, так и поперечными, так как твердые тела обладают упругостью по отношению к деформациям сжатия (растяжения) и сдвига.

**Интенсивностью звука (или силой звука)** называется величина, определяемая средней по времени энергией, переносимой звуковой волной в единицу времени сквозь единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны:

$$I = W/(St).$$

Единица интенсивности звука в СИ — **ватт на метр в квадрате** ( $Вт/м^2$ ).

Физиологической характеристикой звука является **уровень громкости**, который выражается в **фонах** (фон).

Реальный звук является наложением гармонических колебаний с большим набором частот, т. е. звук обладает **акустическим спектром**, который может быть **сплошным** (в некотором интервале присутствуют колебания всех частот) и **линейчатым** (присутствуют колебания отдельных друг от друга определенных частот).

Звук характеризуется помимо громкости еще высотой и тембром. **Высота звука** — качество звука, определяемое человеком субъективно на слух и зависящее от частоты звука. С ростом частоты высота звука увеличивается, т. е. звук становится «выше». Характер акустического спектра и распределения энергии между определенными частотами определяет своеобразие звукового ощущения, называемое **тембром звука**. Так, различные певцы, берущие одну и ту же ноту, имеют различный акустический спектр, т. е. их голоса имеют различный тембр.

Источником звука может быть всякое тело, колеблющееся в упругой среде со звуковой частотой (например, в струнных инструментах источником звука является струна, соединенная с корпусом инструмента).

Совершая колебания, тело вызывает колебания прилегающих к нему частиц среды с такой же частотой.

### Эффект Доплера в акустике

Эффектом Доплера\* называется изменение частоты колебаний, воспринимаемой приемником, при движении источника этих колебаний и приемника друг относительно друга. Например, из опыта известно, что тон гудка поезда повышается по мере его приближения к платформе и понижается при удалении, т. е. движение источника колебаний (гудка) относительно приемника (уха) изменяет частоту принимаемых колебаний.

---

\* Х. Доплер (1803—1853) — австрийский физик, математик и астроном.

### Ультразвук и его применение

По своей природе ультразвук представляет собой упругие волны, и в этом он не отличается от звука (см. § 158). Однако ультразвук, обладая высокими частотами ( $\nu > 20$  кГц) и, следовательно, малыми длинами волн, характеризуется особыми свойствами, что позволяет выделить его в отдельный класс явлений. Из-за малых длин волн ультразвуковые волны, как и свет, могут быть получены в виде строго направленных пучков. Для генерации ультразвука используются в основном два явления. **Обратный пьезоэлектрический эффект** (см. также § 91) — это возникновение деформации в вырезанной определенным образом кварцевой пластинке (в последнее время вместо кварца применяется титанат бария) под действием электрического поля. Если такую пластинку поместить в высокочастотное переменное поле, то можно вызвать ее вынужденные колебания. При резонансе на собственной частоте пластинки получают большие амплитуды колебаний и, следовательно, большие интенсивности излучаемой ультразвуковой волны. Идея кварцевого ультразвукового генератора принадлежит французскому физику П. Ланжевону (1872—1946).

**Магнитострикция** — это возникновение деформации в ферромагнетиках под действием магнитного поля. Поместив ферромагнитный стержень (например, из никеля или железа) в быстропеременное магнитное поле, возбуждают его механические колебания, амплитуда которых максимальна в случае резонанса.

Ультразвуки широко используются в технике, например для направленной подводкой сигнализации, обнаружения подводных предметов и определения глубин (гидролокатор, эхолот). Например, в эхолоте от пьезокварцевого генератора, укрепленного на судне, посылаются направленные ультразвуковые сигналы, которые, достигнув дна, отражаются от него и возвращаются обратно. Зная скорость их распространения в воде и определяя время прохождения (от подачи до возвращения) ультразвукового сигнала, можно вычислить глубину. Прием эха также производится с помощью пьезокварца. Звуковые колебания, дойдя до пьезокварца, вызывают в нем упругие колебания, в результате чего на противоположных поверхностях кварца возникают электрические заряды, которые измеряются.

Если пропускать ультразвуковой сигнал через исследуемую деталь, то можно обнаружить в ней дефекты по характерному рассеянию пучка и по появлению ультразвуковой тени. На этом принципе создана целая отрасль техники — **ультразвуковая дефектоскопия**, начало которой положено С. Я. Соколовым (1897—1957). Применение ультразвука легло также в основу новой области акустики —

**акустоэлектроники**, позволяющей на ее основе разрабатывать приборы для обработки сигнальной информации в микрорадиоэлектронике.

Ультразвук применяют для воздействия на различные процессы (кристаллизацию, диффузию, тепло- и массообмен в металлургии и т. д.) и биологические объекты (повышение интенсивности процессов обмена и т. д.), для изучения физических свойств веществ (поглощения, структуры вещества и т. д.). Ультразвук используется также для механической обработки очень твердых и очень хрупких тел, в медицине (диагностика, ультразвуковая хирургия, микромассаж тканей) и т. д.

## Электромагнитные волны

### Экспериментальное получение электромагнитных волн

Существование **электромагнитных волн** — переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью, — вытекает из уравнений Максвелла (см. § 139). Уравнения Максвелла сформулированы в 1865 г. на основе обобщения эмпирических законов электрических и магнитных явлений. Как уже указывалось, решающую роль для утверждения максвелловской теории сыграли опыты Герца (1888), доказавшие, что электрические и магнитные поля действительно распространяются в виде воли, поведение которых полностью описывается уравнениями Максвелла.

Источником электромагнитных волн в действительности может быть любой электрический колебательный контур или проводник, по которому течет переменный электрический ток, так как для возбуждения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве переменное электрическое поле (ток смещения) или соответственно переменное магнитное поле. Однако излучающая способность источника определяется его формой, размерами и частотой колебаний. Чтобы излучение играло заметную роль, необходимо увеличить объем пространства, в котором переменное электромагнитное поле создается. Поэтому для получения электромагнитных волн непригодны закрытые колебательные контуры, так как в них электрическое поле сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное — внутри катушки индуктивности.

Электромагнитные волны, обладая широким диапазоном частот (или длин волн  $\lambda=c/v$ , где  $c$  — скорость электромагнитных волн в вакууме), отличаются друг от друга по способам их генерации и регистрации, а также по своим свойствам. Поэтому электромагнитные волны делятся на несколько видов: радиоволны, световые волны, рентгеновское и  $\gamma$ -излучения (табл.5). Следует отметить, что границы между различными видами электромагнитных волн довольно условны.

Таблица 5

Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источник излучения
Радиоволны	$10^3 - 10^{-4}$	$3 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^{12}$	Колебательный контур Вибратор Герца Массовый излучатель Ламповый генератор

Продолжение табл. 5

Вид излучения	Длина волны, м	Частота волны, Гц	Источник излучения
Световые волны: инфракрасное излучение	$5 \cdot 10^{-4} - 8 \cdot 10^{-7}$	$6 \cdot 10^{11} - 3,75 \cdot 10^{14}$	Лампы Лазеры
видимый свет	$8 \cdot 10^{-7} - 4 \cdot 10^{-7}$	$3,75 \cdot 10^{14} - 7,5 \cdot 10^{14}$	
ультрафиолетовое излучение	$4 \cdot 10^{-7} - 10^{-9}$	$7,5 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	
Рентгеновское излучение	$2 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	Трубки Рентгена
Гамма-излучение	$< 6 \cdot 10^{-12}$	$> 5 \cdot 10^{19}$	Радиоактивный распад Ядерные процессы Космические процессы

### Дифференциальное уравнение электромагнитной волны

Как уже указывалось (см. § 161), одним из важнейших следствий уравнений Максвелла (см. § 139) является существование электромагнитных волн. Можно показать, что для *однородной* и *изотропной*

среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что векторы напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа (154.9):

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (162.1)$$

$$\Delta \mathbf{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}, \quad (162.2)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  — оператор Лапласа,  $v$  — фазовая скорость.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (162.1) и (162.2), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитные поля действительно могут существовать в виде электромагнитных волн.

В вакууме (при  $\varepsilon=1$  и  $\mu=1$ ) скорость распространения электромагнитных волн совпадает со скоростью  $c$ .

Так как  $\varepsilon\mu > 1$ , то скорость распространения электромагнитных волн в веществе всегда меньше, чем в вакууме.

Следствием теории Максвелла является **поперечность электромагнитных волн**: векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны (на рис. 227 показана моментальная «фотография» плоской электромагнитной волны) и лежат в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{v}$  скорости распространения волны, причем векторы  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{v}$  образуют правинтовую систему. Из уравнений Максвелла следует также, что в электромагнитной волне векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  всегда колеблются в одинаковых фазах (см. рис. 227), причем мгновенные значения  $E$  и  $H$  в любой точке связаны соотношением

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H. \quad (162.4)$$

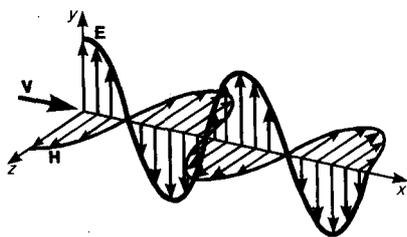


Рис. 227

- Какие характеристики поля периодически изменяются в бегущей электромагнитной волне?
- Почему член  $\partial \mathbf{D} / \partial t$  в уравнении Максвелла  $\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int (\mathbf{j} + \partial \mathbf{D} / \partial t) d\mathbf{S}$  нужен для понимания распространения электромагнитной волны?

Следовательно,  $E$  и  $H$  одновременно достигают максимума, одновременно обращаются в нуль и т. д. От уравнений (162.1) и (162.2) можно перейти к уравнениям

### Энергия электромагнитных волн. Импульс электромагнитного поля

Возможность обнаружения электромагнитных волн указывает на то, что они переносят энергию.

Объемная плотность  $w$  энергии электромагнитной волны складывается из объемных плотностей  $w_{эл}$  (см. (95.8)) и  $w_{м}$ , (см. (130.3)) электрического и магнитного полей:

$$w = w_{эл} + w_{м} = \varepsilon_0 \varepsilon E^2 / 2 + \mu_0 \mu H^2 / 2.$$

Так как векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правинтовую систему, то направление вектора  $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$  совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен  $EH$ . **Вектор плотности потока электромагнитной энергии называется вектором Умова — Пойнтинга:**

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

Вектор  $\mathbf{S}$  направлен в сторону распространения электромагнитной волны, а его модуль равен энергии, переносимой электромагнитной волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны.

Если электромагнитные волны поглощаются или отражаются телами (эти явления подтверждены опытами Г. Герца), то из теории Максвелла следует, что электромагнитные волны должны оказывать на тела давление. Давление электромагнитных волн объясняется тем, что под действием

электрического поля волны заряженные частицы вещества начинают упорядоченно двигаться и подвергаются со стороны магнитного поля волны действию сил Лоренца. Однако значение этого давления ничтожно мало.

Существование давления электромагнитных волн приводит к выводу о том, что электромагнитному полю присущ механический импульс. Импульс электромагнитного поля

$$p = W/c,$$

где  $W$  — энергия электромагнитного поля. Выражая импульс как  $p = mc$  (поле в вакууме распространяется со скоростью  $c$ ), получим  $p = mc = W/c$ , откуда

$$W = mc^2. \quad (163.1)$$

Это соотношение между массой и энергией электромагнитного поля является *универсальным законом* природы (см. также § 40). Согласно специальной теории относительности, выражение (163.1) имеет общее значение и справедливо для любых тел независимо от их внутреннего строения.

Таким образом, рассмотренные свойства электромагнитных волн, определяемые теорией Максвелла, полностью подтверждаются опытами Герца, Лебедева и выводами специальной теории относительности, сыгравшими решающую роль для подтверждения и быстрого признания этой теории.

### Излучение диполя. Применение электромагнитных волн

Простейшим излучателем электромагнитных волн является электрический диполь, электрический момент которого изменяется во времени по гармоническому закону

$$p = p_0 \cos \omega t,$$

где  $p_0$  — амплитуда вектора  $p$ . Примером подобного диполя может служить система, состоящая из покоящегося положительного заряда  $+Q$  и отрицательного заряда  $-Q$ , гармонически колеблющегося вдоль направления  $p$  с частотой  $\omega$ .

Задача об излучении диполя имеет в теории излучающих систем важное значение, так как всякую реальную излучающую систему (например, антенну) можно рассчитывать рассматривая излучение диполя.

Характер электромагнитного поля диполя зависит от выбора рассматриваемой точки. Особый интерес представляет так называемая **волновая зона диполя** — точки пространства, отстоящие от диполя на расстояниях  $r$ , значительно превышающих длину волны ( $r \gg \lambda$ ),

Если волна распространяется в однородной изотропной среде, то время прохождения волны до точек, удаленных от диполя на расстояние  $r$ , одинаково. Поэтому во всех точках сферы, центр которой совпадает с диполем, фаза колебаний одинакова, т. е. в волновой зоне волновой фронт будет сферическим и, следовательно, волна, излучаемая диполем, есть сферическая волна.

В каждой точке векторы  $E$  и  $H$  колеблются по закону  $\cos(\omega t - kr)$ , амплитуды этих векторов пропорциональны  $(1/r) \sin \theta$  (для вакуума), т. е. зависят от расстояния  $r$  до излучателя и угла  $\theta$  между направлением радиуса-вектора и осью диполя. Отсюда следует, что интенсивность излучения диполя в волновой зоне

$$I \sim \frac{\sin^2 \theta}{r^2}. \quad (164.1)$$

Зависимость (164.1)  $I$  от  $\theta$  при заданном значении  $r$ , приводимая в полярных координатах (рис. 228), называется **диаграммой направленности излучения диполя**. Как видно из выражения (164.1) и приведенной диаграммы, диполь сильнее всего излучает в направлениях, перпендикулярных его оси ( $\theta = \pi/2$ ). Вдоль своей оси ( $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$ ) диполь не излучает вообще. Диаграмма направленности излучения диполя позволяет формировать излучение с определенными характеристиками и используется при конструировании антенн.

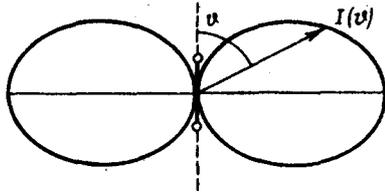


Рис. 228

- Почему важна задача об излучении диполя?
- В чем заключается физический смысл диаграммы направленности излучения диполя?

Впервые электромагнитные волны были использованы через семь лет после опытов Герца. 7 мая 1895 г. преподаватель физики офицерских минных классов А. С. Попов (1859—1906) на заседании Русского физико-химического общества продемонстрировал первый в мире радиоприемник, открывший возможность практического использования электромагнитных волн для беспроводной связи, преобразившей жизнь человечества. Первая переданная в мире радиограмма содержала лишь два слова: «Генрих Герц». Изобретение радио Поповым сыграло огромную роль для распространения и развития теории Максвелла.

Электромагнитные волны сантиметрового и миллиметрового диапазонов, встречая на своем пути преграды, отражаются от них. Это явление лежит в основе радиолокации — обнаружения предметов (например, самолетов, кораблей и т. д.) на больших расстояниях и точного определения их положения. Помимо этого, методы радиолокации используются для наблюдения прохождения и образования облаков, движения метеоритов в верхних слоях атмосферы и т. д.

Для электромагнитных волн характерно явление дифракции — огибания волнами различных препятствий. Именно благодаря дифракции радиоволн возможна устойчивая радиосвязь между удаленными пунктами, разделенными между собой выпуклостью Земли. Длинные волны (сотни и тысячи метров) применяются в фототелеграфии, короткие волны (несколько метров и меньше) применяются в телевидении для передачи изображений на небольшие расстояния (немного больше пределов прямой видимости). Электромагнитные волны используются также в радиогеодезии для очень точного определения расстояний с помощью радиосигналов, в радиоастрономии для исследования радиоизлучения небесных тел и т. д. Полное описание применения электромагнитных волн дать практически невозможно, так как нет областей науки и техники, где бы они не использовались.

## ОПТИКА. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

### Элементы геометрической и электронной оптики

#### Основные законы оптики. Полное отражение

Еще до установления природы света были известны следующие основные законы оптики: закон прямолинейного распространения света в оптически однородной среде; закон независимости световых пучков (справедлив только в линейной оптике); закон отражения света; закон преломления света.

**Закон прямолинейного распространения света:** свет в оптически однородной среде распространяется прямолинейно.

Доказательством этого закона является наличие тени с резкими границами от непрозрачных предметов при освещении их точечными источниками света (источники, размеры которых значительно меньше освещаемого предмета и расстояния до него). Тщательные эксперименты показали, однако, что этот закон нарушается, если свет проходит сквозь очень малые отверстия, причем отклонение от прямолинейности распространения тем больше, чем меньше отверстия.

**Закон независимости световых пучков:** эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно остальные пучки или они устранены. Разбивая световой поток на отдельные световые пучки (например, с помощью диафрагм), можно показать, что действие выделенных световых пучков независимо.

Если свет падает на границу раздела двух сред (двух прозрачных веществ), то падающий луч  $I$  (рис. 229) разделяется на два — отраженный  $II$  и преломленный  $III$ , направления которых задаются законами отражения и преломления.

**Закон отражения:** отраженный луч лежит в одной плоскости с падающим лучом и перпендикуляром, проведенным к границе раздела двух сред в точке падения; угол  $i'_1$  отражения равен углу  $i_1$  падения:

$$i'_1 = i_1.$$

**Закон преломления:** луч падающий, луч преломленный и перпендикуляр, проведенный к границе раздела в точке падения, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для данных сред:

$$\sin i_1 / \sin i_2 = n_{21}, \quad (165.1)$$

где  $n_{21}$  — **относительный показатель преломления** второй среды относительно первой. Индексы в обозначениях углов  $i_1, i'_1, i_2$  указывают, в какой среде (первой или второй) идет луч.

Относительный показатель преломления двух сред равен отношению их абсолютных показателей преломления:

$$n_{21} = n_2 / n_1. \quad (165.2)$$

**Абсолютным показателем преломления** среды называется величина  $n$ , равная отношению скорости  $c$  электромагнитных волн в вакууме к их фазовой скорости  $v$  в среде:

$$n = c/v. \quad (165.3)$$

Сравнение с формулой (162.3) дает, что  $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ , где  $\epsilon$  и  $\mu$  — соответственно электрическая и магнитная проницаемости среды. Учитывая (165.2), закон преломления (165.1) можно записать в виде

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (165.4)$$

Из симметрии выражения (165.4) вытекает обратимость световых лучей. Если обратить луч  $III$  (рис. 229), заставив его падать на границу раздела под углом  $i_2$ , то преломленный луч в первой среде будет распространяться под углом  $i_1$ , т. е. пойдет в обратном направлении вдоль луча  $I$ .

Если свет распространяется из среды с большим показателем преломления  $n_1$  (оптически более плотной) в среду с меньшим показателем преломления  $n_2$  (оптически менее плотную) ( $n_1 > n_2$ ), например из стекла в воду, то, согласно (165.4),

$$\frac{\sin i_2}{\sin i_1} = \frac{n_1}{n_2} > 1.$$

Отсюда следует, что преломленный луч удаляется от нормали и угол преломления  $i_2$  больше, чем угол падения  $i_1$  (рис. 230, *a*). С увеличением угла падения увеличивается угол преломления (рис. 230, *б, в*) до тех пор, пока при некотором угле падения ( $i_1 = i_{\text{пр}}$ ) угол преломления не окажется равным  $\pi/2$ . Угол  $i_{\text{пр}}$  называется **предельным углом**. При углах падения  $i_1 > i_{\text{пр}}$  весь падающий свет полностью отражается (рис. 230, *з*).

По мере приближения угла падения к предельному интенсивность преломленного луча уменьшается, а отраженного — растет (рис. 230, *a—в*). Если  $i_1 = i_{\text{пр}}$ , то интенсивность преломленного луча обращается в нуль, а интенсивность отраженного равна интенсивности падающего (рис. 230, *з*). Таким образом, при углах падения в пределах от  $i_{\text{пр}}$  до  $\pi/2$  луч не преломляется, а полностью отражается в первую среду, причем интенсивности отраженного и падающего лучей одинаковы. Это явление называется **полным отражением**.

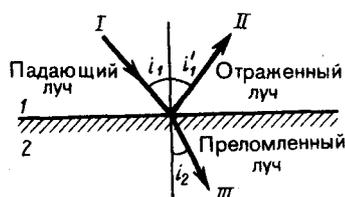


Рис. 229

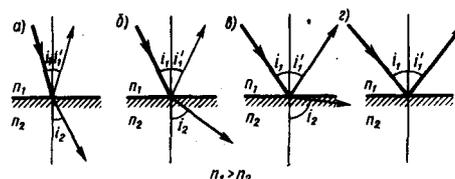


Рис. 230

Предельный угол  $i_{\text{пр}}$  определим из формулы (165.4) при подстановке в нее  $i_2 = \pi/2$ .

Тогда

$$\sin i_{\text{пр}} = n_2/n_1 = n_{21}. \quad (165.5)$$

Уравнение (165.5) удовлетворяет значениям угла  $i_{\text{пр}}$  при  $n_2 \leq n_1$ . Следовательно, явление полного отражения имеет место только при падении света *из среды оптически более плотной в среду оптически менее плотную*.

Явление полного отражения используется в призмах полного отражения. Показатель преломления стекла равен  $n \approx 1,5$ , поэтому предельный угол для границы стекло — воздух равен  $i_{\text{пр}} = \arcsin(1/1,5) = 42^\circ$ . Поэтому при падении света на границу стекло—воздух при  $i > 42^\circ$  всегда будет иметь место полное отражение. На рис. 231, а—в показаны призмы полного отражения, позволяющие: а) повернуть луч на  $90^\circ$ ; б) повернуть изображение; в) обернуть лучи. Такие призмы применяются в оптических приборах (например, в биноклях, перископах), а также в рефрактометрах, позволяющих определять показатели преломления тел (по закону преломления, измеряя  $i_{\text{пр}}$ , находим относительный показатель преломления двух сред, а также абсолютный показатель преломления одной из сред, если показатель преломления другой среды известен).

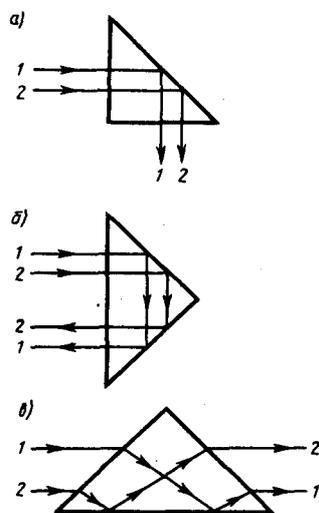


Рис. 231

- Может ли возникнуть явление полного отражения, если свет проходит из воды в стекло?
- Сформулируйте и поясните основные законы оптики.
- В чем заключается физический смысл абсолютного показателя преломления среды? Что такое относительный показатель преломления?
- При каком условии наблюдается полное отражение?
- В чем заключается принцип работы световодов?

Явление полного отражения используется также в световодах (светопроводах), представляющих собой тонкие, произвольным образом изогнутые нити (волокна) из оптически прозрачного материала. В волоконных деталях применяют стеклянное волокно, световедущая жила (сердцевина) которого окружается стеклом — оболочкой из другого стекла с меньшим показателем преломления. Свет, падающий на торец световода под углами, большими предельного, претерпевает на поверхности раздела сердцевинки и оболочки полное отражение и распространяется только по световедущей жиле. Таким образом, с помощью световодов можно как угодно искривлять путь светового пучка. Диаметр световедущих жил лежит в пределах от нескольких микрометров до нескольких миллиметров. Для передачи изображений, как правило, применяются многожильные световоды. Вопросы передачи световых волн и изображений изучаются в специальном разделе оптики — **волоконной оптике**, возникшей в 50-е годы XX столетия. Световоды используются в электронно-лучевых трубках, в электронно-счетных машинах, для кодирования информации, в медицине (например, диагностика желудка), для целей интегральной оптики и т. д.

### Тонкие линзы. Изображение предметов с помощью линз

Раздел оптики, в котором законы распространения света рассматриваются на основе представления о световых лучах, называется **геометрической оптикой**. Под **световыми лучами** понимают нормальные к волновым поверхностям линии, вдоль которых распространяется поток световой энергии..

**Линзы** представляют собой прозрачные тела, ограниченные двумя поверхностями (одна из них обычно сферическая, иногда цилиндрическая, а вторая — сферическая или плоская), преломляющими световые лучи, способные формировать оптические изображения предметов. Материалом для линз служат стекло, кварц, кристаллы, пластмассы и т. п. По внешней форме (рис. 232) линзы делятся на: 1) двояковыпуклые; 2) плосковыпуклые; 3) двояковогнутые; 4) плосковогнутые; 5) выпукло-

вогнутые; б) вогнуто-выпуклые. По оптическим свойствам **линзы** делятся на собирающие и рассеивающие.

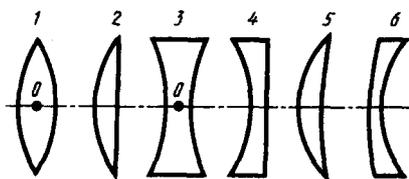


Рис. 232

- Поясните, что вы понимаете под световым лучом?
- Что такое линза? Какие они бывают?

Линза называется **тонкой**, если ее толщина (расстояние между ограничивающими поверхностями) значительно меньше по сравнению с радиусами поверхностей, ограничивающих линзу. Прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы, называется **главной оптической осью**. Для всякой линзы существует точка, называемая **оптическим центром линзы**, лежащая на главной оптической оси и обладающая тем свойством, что лучи проходят сквозь нее не преломляясь.

Для вывода формулы тонкой линзы — соотношения, связывающего радиусы кривизны  $R_1$  и  $R_2$  поверхностей линзы с расстояниями  $a$  и  $b$  от линзы до предмета и его изображения, — воспользуемся **принципом Ферма**,\* или **принципом наименьшего времени**: действительный путь распространения света (траектория светового луча) есть путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками.

\* П. Ферма (1601—1665) — французский математик и физик.

**Параксиальные (приосевые) лучи**, т. е. лучи, образующие с оптической осью малые углы.

$$(N-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad (166.3)$$

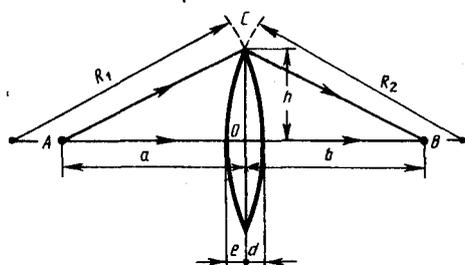


Рис. 233

- В чем заключается принцип Ферма?
- Выведите формулу тонкой линзы.
- Что такое фокусное расстояние линзы? оптическая сила линзы? фокальная плоскость линзы?

Выражение (166.3) представляет собой **формулу тонкой линзы**. Радиус кривизны выпуклой поверхности линзы считается положительным, вогнутой — отрицательным.

Если  $a=\infty$ , т. е. лучи падают на линзу параллельным пучком (рис. 234, а), то

$$\frac{1}{b} = (N-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Соответствующее этому случаю расстояние  $b=OF=f$  называется **фокусным расстоянием линзы**, определяемым по формуле

$$f = \frac{1}{(N-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)}.$$

Оно зависит от относительного показателя преломления и радиусов кривизны.

Если  $b=\infty$ , т. е. изображение находится в бесконечности и, следовательно, лучи выходят из линзы параллельным пучком (рис. 234, б), то  $a=OF=f$ . Таким образом, фокусные расстояния линзы, окруженной с обеих сторон одинаковой средой, равны. Точки  $F$ , лежащие по обе стороны линзы на расстоянии, равном фокусному, называются **фокусами линзы**. Фокус — это точка, в которой после преломления собираются все лучи, падающие на линзу параллельно главной оптической оси.

Величина

$$(N-1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = \Phi \quad (166.4)$$

называется **оптической силой линзы**. Ее единица — диоптрия (дптр). **Диоптрия** — оптическая сила линзы с фокусным расстоянием 1 м: 1 дптр = 1/м.

Линзы с **положительной** оптической силой являются **собирающими**, с **отрицательной** — **рассеивающими**. Плоскости, проходящие через фокусы линзы перпендикулярно ее главной оптической оси, называются **фокальными плоскостями**. В отличие от собирающей рассеивающая линза имеет мнимые фокусы. В мнимом фокусе сходятся (после преломления) воображаемые продолжения лучей, падающих на рассеивающую линзу параллельно главной оптической оси (рис. 235).

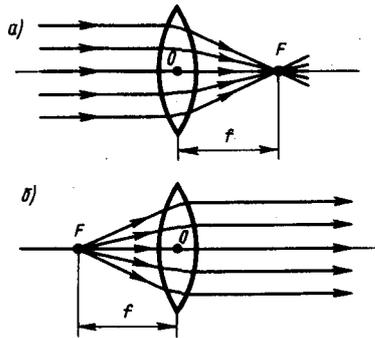


Рис. 234

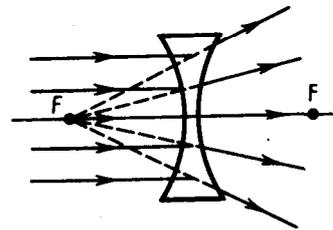


Рис. 235

Учитывая (166.4), формулу линзы (166.3) можно записать в виде

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Для рассеивающей линзы расстояния  $f$  и  $b$  надо считать отрицательными.

Построение изображения предмета в линзах осуществляется с помощью следующих лучей:

- 1) луча, проходящего через оптический центр линзы и не изменяющего своего направления;
- 2) луча, идущего параллельно главной оптической оси; после преломления в линзе этот луч (или его продолжение) проходит через второй фокус линзы;
- 3) луча (или его продолжения), проходящего через первый фокус линзы; после преломления в ней он выходит из линзы параллельно ее главной оптической оси.

Для примера приведены построения изображений в собирающей (рис. 236) и в рассеивающей (рис. 237) линзах: действительное (рис. 236, а) и мнимое (рис. 236, б) изображения — в собирающей линзе, мнимое — в рассеивающей.

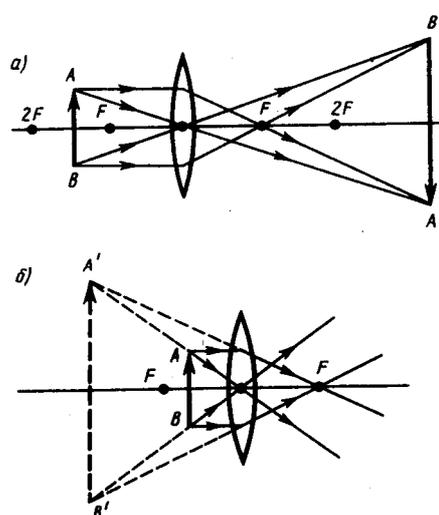


Рис. 236

Отношение линейных размеров изображения и предмета называется **линейным увеличением линзы**.

Отрицательным значениям линейного увеличения соответствует действительное изображение (оно

перевернутое), положительным — мнимое изображение (оно прямое). Комбинации собирающих и рассеивающих линз применяются в оптических приборах, используемых для решения различных научных и технических задач.

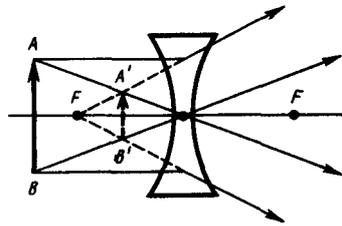


Рис. 237

● Как осуществляется построение изображения предметов в линзах?

### Аберрации (погрешности) оптических систем

Показатель преломления материала линзы считали не зависящим от длины волны падающего света, а падающий свет — монохроматическим. Так как в реальных оптических системах эти условия не выполняются, то в них возникают искажения изображения, называемые «аберрацией» (или погрешностями).

- 1. Сферическая аберрация.** Если расходящийся пучок света падает на линзу, то параксиальные лучи после преломления пересекаются в точке  $S'$  (на расстоянии  $OS'$  от оптического центра линзы), а лучи, более удаленные от оптической оси, — в точке  $S''$ , ближе к линзе (рис. 238). В результате изображение светящейся точки на экране, перпендикулярном оптической оси, будет в виде расплывчатого пятна. Сферическая аберрация является частным случаем астигматизма.
- 2. Кома.** Если через оптическую систему проходит широкий пучок от светящейся точки, расположенной не на оптической оси, то получаемое изображение этой точки будет в виде освещенного пятнышка, напоминающего кометный хвост. Такая погрешность называется поэтому комой. Устранение комы производится теми же приемами, что и сферической аберрации.
- 3. Дисторсия.** Погрешность, при которой при больших углах падения лучей на линзу линейное увеличение для точек предмета, находящихся на разных расстояниях от главной оптической оси, несколько различается, называется дисторсией.
- 4. Хроматическая аберрация.** При падении на оптическую систему белого света отдельные составляющие его монохроматические лучи фокусируются в разных точках (наибольшее фокусное расстояние имеют красные лучи, наименьшее — фиолетовые), поэтому изображение размыто и по краям окрашено. Это явление называется хроматической аберрацией. Так как разные сорта стекол обладают различной дисперсией, то, комбинируя собирающие и рассеивающие линзы из различных стекол, можно совместить фокусы двух (**ахроматы**) и трех (**апохроматы**) различных цветов, устранив тем самым хроматическую аберрацию. Системы, исправленные на сферическую и хроматическую аберрации, называются **апланатами**.
- 5. Астигматизм.** Погрешность, обусловленная неодинаковостью кривизны оптической поверхности в разных плоскостях сечения падающего на нее светового пучка, называется астигматизмом. Астигматизм исправляется подбором радиусов кривизны преломляющих поверхностей и их фокусных расстояний.

Устранение аберраций возможно лишь подбором специально рассчитанных сложных оптических систем. Одновременное исправление всех погрешностей — задача крайне сложная, а иногда даже неразрешимая. Поэтому обычно устраняются полностью лишь те погрешности, которые в том или ином случае особенно вредны.

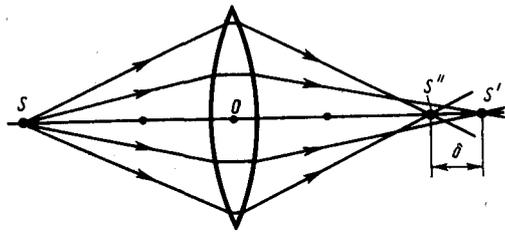


Рис. 238

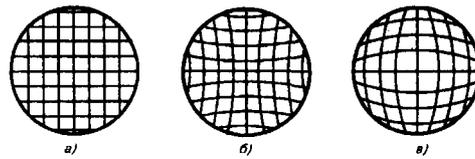


Рис. 239

## Основные фотометрические величины и их единицы

**Фотометрия** — раздел оптики, занимающийся вопросами измерения интенсивности света и его источников. В фотометрии используются следующие величины:

- 1) **энергетические** — характеризуют энергетические параметры оптического излучения безотносительно к его действию на приемники излучения;
- 2) **световые** — характеризуют физиологические действия света и оцениваются по воздействию на глаз (исходят из так называемой средней чувствительности глаза) или другие приемники излучения.

**1. Энергетические величины. Поток излучения  $\Phi_e$**  — величина, равная отношению энергии  $W$  излучения ко времени  $t$ , за которое излучение произошло:

$$\Phi_e = W/t.$$

Единица потока излучения — **ватт (Вт)**.

**Энергетическая светимость (излучательность)  $R_e$**  — величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$ , испускаемого поверхностью, к площади  $S$  сечения, сквозь которое этот поток проходит:

$$R_e = \Phi_e/S,$$

т. е. представляет собой поверхностную плотность потока излучения.

Единица энергетической светимости — **ватт на метр в квадрате (Вт/м<sup>2</sup>)**.

**Энергетическая сила света (сила излучения)  $I_e$**  определяется с помощью понятия о точечном источнике света — источнике, размерами которого по сравнению с расстоянием до места наблюдения можно пренебречь. Энергетическая сила света  $I_e$  — величина, равная отношению потока излучения  $\Phi_e$  источника к телесному углу  $\omega$ , в пределах которого это излучение распространяется:

$$I_e = \Phi_e/\omega.$$

Единица энергетической силы света — **ватт на стерадиан (Вт/ср)**.

**Энергетическая яркость (лучистость)  $B_e$**  — величина, равная отношению энергетической силы света  $\Delta I_e$  элемента излучающей поверхности к площади  $\Delta S$  проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения:

$$B_e = \Delta I_e/\Delta S.$$

Единица энергетической яркости — **ватт на стерадиан-метр в квадрате (Вт/(ср · м<sup>2</sup>))**.

**Энергетическая освещенность (облученность)  $E_e$**  характеризует величину потока излучения, падающего на единицу освещаемой поверхности. Единица энергетической освещенности совпадает с единицей энергетической светимости (Вт/м<sup>2</sup>).

**2. Световые величины.** При оптических измерениях используются различные приемники излучения (например, глаз, фотоэлементы, фотоумножители), которые не обладают одинаковой чувствительностью к энергии различных длин волн, являясь, таким образом, **селективными (избирательными)**. Каждый приемник излучения характеризуется своей кривой чувствительности к свету различных длин волн. Поэтому световые измерения, являясь субъективными, отличаются от объективных, энергетических и для них вводятся световые единицы, используемые только для видимого света. *Основной световой единицей* в СИ является единица силы света — **кандела (кд)**,

определение которой дано выше (см. Введение). Определение световых единиц аналогично энергетическим.

**Световой поток**  $\Phi$  определяется как мощность оптического излучения по вызываемому им световому ощущению (по его действию на селективный приемник света с заданной спектральной чувствительностью).

Единица светового потока — **люмен** (лм): 1 лм — световой поток, испускаемый точечным источником силой света в 1 кд внутри телесного угла в 1 ср (при равномерности поля излучения внутри телесного угла) (1 лм = 1 кд · ср).

**Светимость**  $R$  определяется соотношением

$$R = \Phi/S.$$

Единица светимости — **люмен на метр в квадрате** (лм/м<sup>2</sup>).

**Яркость**  $B_\varphi$  светящейся поверхности в некотором направлении  $\varphi$  есть величина, равная отношению силы света  $I$  в этом направлении к площади  $S$  проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную данному направлению:

$$B_\varphi = I/(S \cos \varphi).$$

Единица яркости — **кандела на метр в квадрате** (кд/м<sup>2</sup>).

**Освещенность**  $E$  — величина, равная отношению светового потока  $\Phi$ , падающего на поверхность, к площади  $S$  этой поверхности:

$$E = \Phi/S.$$

Единица освещенности — **люкс** (лк): 1 лк — освещенность поверхности, на 1 м<sup>2</sup> которой падает световой поток в 1 лм (1 лк = 1 лм/м<sup>2</sup>).

### Элементы электронной оптики

Область физики и техники, в которой изучаются вопросы формирования, фокусировки и отклонения пучков заряженных частиц и получения с их помощью изображений под действием электрических и магнитных полей в вакууме, называется **электронной оптикой**. Комбинируя различные электронно-оптические элементы — электронные линзы, зеркала, призмы, — создают электронно-оптические приборы, например электронно-лучевую трубку, электронный микроскоп, электронно-оптический преобразователь.

**1. Электронные линзы** представляют собой устройства, с помощью электрических и магнитных полей которых формируются и фокусируются пучки заряженных частиц. Существуют электростатические и магнитные линзы.

**Магнитная линза** обычно представляет собой соленоид с сильным магнитным полем, коаксиальным пучку электронов. Чтобы магнитное поле сконцентрировать на оси симметрии, соленоид помещают в железный кожух с узким внутренним кольцевым разрезом.

«Преломление» электростатических и магнитных линз зависит от их фокусных расстояний, которые определяются устройством линзы, скоростью электронов, разностью потенциалов, приложенной к электродам (электростатическая линза), и индукцией магнитного поля (магнитная линза). Изменяя разность потенциалов или регулируя ток в катушке, можно изменить фокусное расстояние линз. Аберрации ухудшают разрешающую способность и качество изображения, а поэтому в каждом конкретном случае необходимо их устранять.

**2. Электронный микроскоп** — устройство, предназначенное для получения изображения микрообъектов; в нем в отличие от оптического микроскопа вместо световых лучей используют ускоренные до больших энергий (30—100 кэВ и более) в условиях глубокого вакуума (примерно 0,1 мПа) электронные пучки, а вместо обычных линз — электронные линзы. В электронных микроскопах предметы рассматриваются либо в проходящем, либо в отраженном потоке электронов, поэтому различают **просвечивающие и отражательные электронные микроскопы**.

С помощью электронных микроскопов можно добиться значительно больших увеличений (до  $10^6$  раз), что позволяет наблюдать детали структур размерами 0,1 нм.

4. **Электронно-оптический преобразователь** — это устройство, предназначенное для усиления яркости светового изображения и преобразования невидимого глазом изображения объекта (например, в инфракрасных или ультрафиолетовых лучах) в видимое. Недостаток этих приборов — малая разрешающая способность и довольно высокий темновой фон, что влияет на качество изображения.

## Интерференция света

### Развитие представлений о природе света

Основные законы оптики известны еще с древних веков. Так, Платон (430 г. до н. э.) установил закон прямолинейного распространения и закон отражения света. Аристотель (350 г. до н. э.) и Птоломей изучали преломление света. Первые представления о природе света возникли у древних греков и египтян, которые в дальнейшем, по мере изобретения и усовершенствования различных оптических инструментов, например параболических зеркал (XIII в.), фотоаппарата и микроскопа (XVI в.), зрительной трубы (XVII в.), развивались и трансформировались. В конце XVII в. на основе многовекового опыта и развития представлений о свете возникли две теории света: **корпускулярная** (И. Ньютон) и **волновая** (Р. Гук и Х. Гюйгенс).

Согласно корпускулярной теории (теории истечения), свет представляет собой поток частиц (корпускул), испускаемых светящимися телами и летящих по прямолинейным траекториям. Движение световых корпускул Ньютон подчинил сформулированным им законам механики. Так, отражение света понималось аналогично отражению упругого шарика при ударе о плоскость, где также соблюдается закон равенства углов падения в отражения. Преломление света Ньютон объяснял притяжением корпускул преломляющей средой, в результате чего скорость корпускул меняется при переходе из одной среды в другую. Из теории Ньютона следовало постоянство синуса угла падения  $i_1$  к синусу угла преломления  $i_2$ :

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{v}{c} = n, \quad (170.1)$$

где  $c$  — скорость распространения света в вакууме,  $v$  — скорость распространения света в среде. Так как  $n$  в среде всегда больше единицы, то, по теории Ньютона,  $v > c$ , т. е. скорость распространения света в среде должна быть всегда больше скорости его распространения в вакууме.

Согласно волновой теории, развитой на основе аналогии оптических и акустических явлений, свет представляет собой упругую волну, распространяющуюся в особой среде — эфире. Эфир заполняет все мировое пространство, пронизывает все тела и обладает механическими свойствами — упругостью и плотностью. Согласно Гюйгенсу, большая скорость распространения света обусловлена особыми свойствами эфира.

Волновая теория основывается на **принципе Гюйгенса**: каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени. Напомним, что волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ . Принцип Гюйгенса позволяет анализировать распространение света и вывести законы отражения и преломления.

Выведем законы отражения и преломления света, исходя из принципа Гюйгенса.

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{c}{v} = n. \quad (170.2)$$

Сравнивая выражения (170.2) и (170.1), видим, что волновая теория приводит к выводу, отличному от вывода теории Ньютона. По теории Гюйгенса,  $v < c$ , т. е. скорость распространения света в среде должна быть всегда меньше скорости его распространения в вакууме.

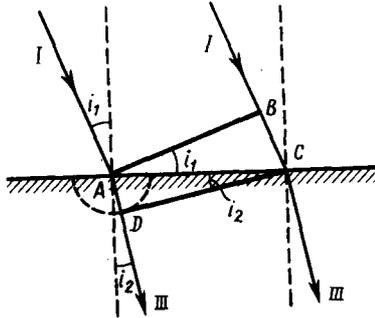


Рис. 244

- Каковы основные положения и выводы корпускулярной и волновой теорий света?
- Почему возникло представление о двойственной корпускулярно-волновой природе света?
- В чем заключается основная идея теории Планка?

Таким образом, к началу XVIII в. существовало два противоположных подхода к объяснению природы света: корпускулярная теория Ньютона и волновая теория Гюйгенса. Обе эти теории объясняли прямолинейное распространение света, законы отражения и преломления. XVIII век стал веком борьбы этих теорий. Экспериментальное доказательство справедливости волновой теории было получено в 1851 г., когда Э. Фуко (и независимо от него А. Физо) измерил скорость распространения света в воде и получил значение, соответствующее формуле (170.2). К началу XIX столетия корпускулярная теория была полностью отвергнута и восторжествовала волновая теория. Большая заслуга в этом отношении принадлежит английскому физику Т. Юнгу, исследовавшему явления дифракции и интерференции, и французскому физику О. Френелю (1788—1827), дополнившему принцип Гюйгенса и объяснившему эти явления.

Несмотря на признание волновой теории, она обладала целым рядом недостатков. Например, явления интерференции, дифракции и поляризации могли быть объяснены только в том случае, если световые волны считать поперечными.

Далее эксперименты показали, что скорость распространения света в разных средах различна. Теория Гюйгенса не могла объяснить также физической природы наличия разных цветов.

Наука о свете накапливала экспериментальные данные, свидетельствующие о взаимосвязи световых, электрических и магнитных явлений, что позволило Максвеллу в 70-х годах прошлого столетия создать электромагнитную теорию света (см. § 139). Согласно электромагнитной теории Максвелла (см. (162.3)),

$$c/v = \sqrt{\varepsilon\mu} = n,$$

где  $c$  и  $v$  — соответственно скорости распространения света в вакууме и в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ . Это соотношение связывает оптические, электрические и магнитные постоянные вещества. По Максвеллу,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — величины, не зависящие от длины волны света, поэтому электромагнитная теория не могла объяснить явление дисперсии (зависимость показателя преломления от длины волны). Эта трудность была преодолена в конце XIX в. Лоренцем, предложившим **электронную теорию**, согласно которой диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  зависит от длины волны падающего света. Теория Лоренца ввела представление об электронах, колеблющихся внутри атома, и позволила объяснить явления испускания и поглощения света веществом.

Несмотря на огромные успехи электромагнитной теории Максвелла и электронной теории Лоренца, они были несколько противоречивы и при их применении встречался ряд затруднений. Перечисленные затруднения и противоречия были преодолены благодаря смелой гипотезе (1900) немецкого физика М. Планка (1858—1947), согласно которой излучение и поглощение света происходит не непрерывно, а дискретно, т. е. **определенными порциями (квантами)**, энергия которых определяется частотой  $\nu$ :

$$\varepsilon_0 = h\nu, \quad (170.3)$$

где  $h$  — постоянная Планка.

Она объяснила тепловое излучение черного тела. Эйнштейн в 1905 г. создал **квантовую теорию света**, согласно которой не только *излучение* света, но и его *распространение* происходит в виде **потока световых квантов — фотонов**, энергия которых определяется соотношением (170.3), а масса

$$m_\phi = \frac{\varepsilon_0}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}. \quad (170.4)$$

Квантовые представления о свете хорошо согласуются с законами излучения и поглощения света, законами взаимодействия света с веществом. Все многообразие изученных свойств и законов распространения света, его взаимодействия с веществом показывает, что свет имеет сложную природу. Он представляет собой *единство противоположных видов движения* — **корпускулярного (квантового) и волнового (электромагнитного)**. Длительный путь развития привел к современным представлениям о **двойственной корпускулярно-волновой природе света**. Выражения (170.3) и (170.4) связывают корпускулярные характеристики излучения — массу и энергию кванта — с волновыми — частотой колебаний и длиной волны. Таким образом, свет представляет собой *единство дискретности и непрерывности*.

### Когерентность и монохроматичность световых волн

Интерференцию света можно объяснить, рассматривая интерференцию волн (см. § 156). Необходимым условием интерференции волн является их **когерентность**, т. е. согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов. Этому условию удовлетворяют **монохроматические волны** — неограниченные в пространстве волны одной определенной и строго постоянной частоты. Так как ни один реальный источник не дает строго монохроматического света, то волны, излучаемые любыми независимыми источниками света, всегда некогерентны. Поэтому на опыте не наблюдается интерференция света от независимых источников, например от двух электрических лампочек.

В двух самостоятельных источниках света атомы излучают независимо друг от друга. В каждом из таких атомов процесс излучения конечен и длится очень короткое время ( $\tau \approx 10^{-8}$  с). За это время возбужденный атом возвращается в нормальное состояние и излучение им света прекращается. Возбудившись вновь, атом снова начинает испускать световые волны, но уже с новой начальной фазой. Так как разность фаз между излучением двух таких независимых атомов изменяется при каждом новом акте испускания, то волны, спонтанно излучаемые атомами любого источника света, некогерентны. Таким образом, волны, испускаемые атомами, лишь в течение интервала времени  $10^{-8}$  с имеют приблизительно постоянные амплитуду и фазу колебаний, тогда как за больший промежуток времени и амплитуда, и фаза изменяются. Прерывистое излучение света атомами в виде отдельных коротких импульсов называется **волновым цугом**.

Любой немонахроматический свет можно представить в виде совокупности сменяющих друг друга независимых гармонических цугов. Средняя продолжительность одного цуга  $\tau_{\text{ког}}$  называется **временем когерентности**. Когерентность существует только в пределах одного цуга, и время когерентности не может превышать время излучения, т. е.  $\tau_{\text{ког}} < \tau$ .

Если волна распространяется в однородной среде, то фаза колебаний в определенной точке пространства сохраняется только в течение времени когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ . За это время волна распространяется в вакууме на расстояние  $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$ , называемое **длиной когерентности** (или **длиной цуга**). Таким образом, длина когерентности есть расстояние, при прохождении которого две или несколько волн утрачивают когерентность. Отсюда следует, что наблюдение интерференции света возможно лишь при оптических разностях хода, меньших длины когерентности для используемого источника света.

Чем ближе волна к монохроматической, тем меньше ширина  $\Delta\omega$  спектра ее частот и, как можно показать, больше ее время когерентности  $\tau_{\text{ког}}$ , а следовательно, и длина когерентности  $l_{\text{ког}}$ . Когерентность колебаний, которые совершаются в одной и той же точке пространства, определяемая степенью монохроматичности волн, называется **временной когерентностью**.

Наряду с временной когерентностью для описания когерентных свойств волн в плоскости, перпендикулярной направлению их распространения, вводится понятие **пространственной когерентности**. Два источника, размеры и взаимное расположение которых позволяют (при необходимой степени монохроматичности света) наблюдать интерференцию, называются **пространственно-когерентными**. **Радиусом когерентности** (или **длиной пространственной когерентности**) называется максимальное поперечное направлению распространения волны

расстояние, на котором возможно проявление интерференции. Таким образом, пространственная когерентность определяется радиусом когерентности. Радиус когерентности

$$r_{\text{ког}} \sim \lambda/\varphi,$$

где  $\lambda$  — длина волны света,  $\varphi$  — угловой размер источника. Так, минимально возможный радиус когерентности для солнечных лучей (при угловом размере Солнца на Земле  $\varphi \approx 10^{-2}$  рад и  $\lambda \approx 0,5$  мкм) составляет  $\approx 0,05$  мм. При таком малом радиусе когерентности невозможно непосредственно наблюдать интерференцию солнечных лучей, поскольку разрешающая способность человеческого глаза на расстоянии наилучшего зрения составляет лишь 0,1 мм. Отметим, что первое наблюдение интерференции провел в 1802 г. Т. Юнг именно с солнечным светом, для чего он предварительно пропускал солнечные лучи через очень малое отверстие в непрозрачном экране (при этом на несколько порядков уменьшался угловой размер источника света и тем самым резко увеличивался радиус когерентности (или длина пространственной когерентности)).

### Интерференция света

Предположим, что две монохроматические световые волны, накладываясь друг на друга, возбуждают в определенной точке пространства колебания одинакового направления:  $x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  и  $x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Под  $x$  понимают напряженность электрического  $E$  или магнитного  $H$  полей волны; векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  колеблются во взаимно перпендикулярных плоскостях (см. § 162). Напряженности электрического и магнитного полей подчиняются принципу суперпозиции (см. § 80 и 110). Амплитуда результирующего колебания в данной точке  $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  (см. 144.2)). Так как волны когерентны, то  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  имеет постоянное во времени (но свое для каждой точки пространства) значение, поэтому интенсивность результирующей волны ( $I \sim A^2$ )

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (172.1)$$

В точках пространства, где  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$ , интенсивность  $I > I_1 + I_2$ , где  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$ , интенсивность  $I < I_1 + I_2$ . Следовательно, при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение светового потока, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется интерференцией света.

Для некогерентных волн разность  $\varphi_2 - \varphi_1$  непрерывно изменяется, поэтому среднее во времени значение  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  равно нулю, и интенсивность результирующей волны всюду одинакова и при  $I_1 = I_2$  равна  $2I_1$  (для когерентных волн при данном условии в максимумах  $I = 4I_1$ , в минимумах  $I = 0$ ).

Пусть разделение на две когерентные волны происходит в определенной точке  $O$ . До точки  $M$ , в которой наблюдается интерференционная картина, одна волна в среде с показателем преломления  $n_1$  прошла путь  $s_1$ , вторая — в среде с показателем преломления  $n_2$  — путь  $s_2$ . Если в точке  $O$  фаза колебаний равна  $\omega t$ , то в точке  $M$  первая волна возбудит колебание  $A_1 \cos(t - s_1/v_1)$ , вторая волна — колебание  $A_2 \cos(t - s_2/v_2)$ , где  $v_1 = c/n_1$ ,  $v_2 = c/n_2$  — соответственно фазовая скорость первой и второй волны. Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в точке  $M$ , равна

$$\delta = \omega \left( \frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (s_2 n_2 - s_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$$

(учли, что  $\omega/c = 2\pi/\lambda_0$ , где  $\lambda_0$  — длина волны в вакууме). Произведение геометрической длины  $s$  пути световой волны в данной среде на показатель  $n$  преломления этой среды называется **оптической длиной пути  $L$** , а  $\Delta = L_2 - L_1$  — разность оптических длин проходимых волнами путей — называется **оптической разностью хода**. Если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме

$$\Delta = \pm m \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (172.2)$$

то  $\delta = \pm 2m\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $M$  обеими волнами, будут происходить в одинаковой фазе. Следовательно, (172.2) является **условием интерференционного максимума**.

Если оптическая разность хода

$$\Delta = \pm (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad (172.3)$$

то  $\delta = \pm 2(m+1)\pi$ , и колебания, возбуждаемые в точке  $M$  обеими волнами, будут происходить в противофазе. Следовательно, (172.3) является **условием интерференционного минимума**.

### Методы наблюдения интерференции света

Для осуществления интерференции света необходимо получить когерентные световые пучки, для чего применяются различные приемы.

#### 1. Метод Юнга.

Т. Юнгу принадлежит первое наблюдение явления интерференции.

#### 2. Зеркала Френеля.

#### 3. Бипризма Френеля.

**Расчет интерференционной картины от двух источников.** Расчет интерференционной картины для рассмотренных выше методов наблюдения интерференции света можно провести, используя две узкие параллельные щели, расположенные достаточно близко друг к другу (рис. 248). Щели  $S_1$  и  $S_2$  находятся на расстоянии  $d$  друг от друга и являются когерентными (реальными или мнимыми изображениями источника  $S$  в какой-то оптической системе) источниками света. Интерференция наблюдается в произвольной точке  $A$  экрана, параллельного обеим щелям и расположенного от них на расстоянии  $l$ , причем  $l \gg d$ . Начало отсчета выбрано в точке  $O$ , симметричной относительно щелей. Интенсивность в любой точке  $A$  экрана, лежащей на расстоянии  $x$  от  $O$ , определяется оптической разностью хода  $\Delta = s_2 - s_1$  (см. § 172). Из рис. 248 имеем

$$s_2^2 = l^2 + (x + d/2)^2; \quad s_1^2 = l^2 + (x - d/2)^2,$$

откуда  $s_2^2 - s_1^2 = 2xd$ , или

$$\Delta = s_2 - s_1 = 2xd/(s_1 + s_2).$$

Из условия  $l \gg d$  следует, что  $s_1 + s_2 \approx 2l$ , поэтому

$$\Delta = xd/l. \quad (173.1)$$

Подставив найденное значение  $\Delta$  (173.1) в условия (172.2) и (172.3), получим, что максимумы интенсивности будут наблюдаться в случае, если

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (173.2)$$

а минимумы — в случае, если

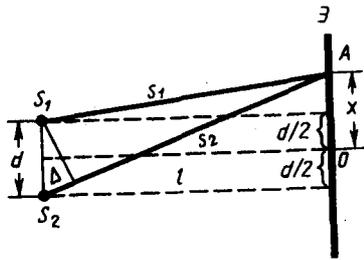
$$x_{\min} = \pm (m + \frac{1}{2}) \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (173.3)$$

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами), называемое **шириной интерференционной полосы**, равно

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0. \quad (173.4)$$

$\Delta x$  не зависит от порядка интерференции (величины  $m$ ) и является постоянной для данных  $l$ ,  $d$  и  $\lambda_0$ . Согласно формуле (173.4),  $\Delta x$  обратно пропорционально  $d$ ; следовательно, при большом расстоянии между источниками, например при  $d \approx l$ , отдельные полосы становятся неразличимыми. Для видимого света  $\lambda_0 \approx 10^{-7}$  м, поэтому четкая, доступная для визуального наблюдения интерференционная картина имеет место при  $l \gg d$  (это условие и принималось при расчете). По измеренным значениям  $l$ ,  $d$  и  $\Delta x$ , используя (173.4), можно экспериментально определить длину волны света. Из выражений (173.2) и (173.3) следует, таким образом, что интерференционная картина, создаваемая на экране двумя когерентными источниками света, представляет собой чередование светлых и темных полос, параллельных друг другу. Главный максимум, соответствующий  $m=0$ , проходит через точку  $O$ . Вверх и вниз от него на равных расстояниях друг от друга располагаются максимумы (минимумы) первого ( $m=1$ ), второго ( $m=2$ ) порядков и т.д.

Рис. 248



- Почему интерференцию можно наблюдать от двух лазеров и нельзя от двух электроламп?
- Как изменится интерференционная картина в опыте Юнга (см. рис. 245), если эту систему поместить в воду?
- Будут ли отличаться интерференционные картины от двух узких близлежащих параллельных щелей при освещении их монохроматическим и белым светом? Почему?

Описанная картина, однако, справедлива лишь при освещении монохроматическим светом ( $\lambda_0 = \text{const}$ ). Если использовать белый свет, представляющий собой непрерывный набор длин волн от 0,39 мкм (фиолетовая граница спектра) до 0,75 мкм (красная граница спектра), то интерференционные максимумы для каждой длины волны будут, согласно формуле (173.4), смещены друг относительно друга и иметь вид радужных полос. Только для  $m=0$  максимумы всех длин волн совпадают, и в середине экрана будет наблюдаться белая полоса, по обе стороны которой симметрично расположатся спектрально окрашенные полосы максимумов первого, второго порядков и т. д. (ближе к белой полосе будут находиться зоны фиолетового цвета, дальше — зоны красного цвета).

### Интерференция света в тонких пленках

В природе часто можно наблюдать радужное окрашивание тонких пленок (масляные пленки на воде, мыльные пузыри, оксидная пленка на металлах), возникающее в результате интерференции света, отраженного двумя поверхностями пленки.

Пусть на плоскопараллельную прозрачную пленку с показателем преломления  $n$  и толщиной  $d$  под углом  $i$  (рис. 249) падает плоская монохроматическая волна (для простоты рассмотрим один луч). На поверхности пленки в точке  $O$  луч разделится на два: частично отразится от верхней поверхности пленки, а частично преломится. Преломленный луч, дойдя до точки  $C$ , частично преломится в воздух ( $n_0=1$ ), а частично отразится и пойдет к точке  $B$ . Здесь он опять частично отразится (этот ход луча в дальнейшем из-за малой интенсивности не рассматриваем) и преломится, выходя в воздух под углом  $i$ . Вышедшие из пленки лучи 1 и 2 когерентны, если оптическая разность их хода мала по сравнению с длиной когерентности падающей волны. Если на их пути поставить собирающую линзу, то они сойдутся в одной из точек  $P$  фокальной плоскости линзы. В результате возникает интерференционная картина, которая определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами.

Оптическая разность хода, возникающая между двумя интерферирующими лучами от точки  $O$  до плоскости  $AB$ ,

$$\Delta = n(OC + CB) - (OA \pm \lambda_0/2),$$

где показатель преломления окружающей пленку среды принят равным 1, а член  $\pm \lambda_0/2$  обусловлен потерей полуволны при отражении света от границы раздела. Если  $n > n_0$ , то потеря полуволны произойдет в точке  $O$  и вышеупомянутый член будет иметь знак минус; если же  $n < n_0$ , то потеря полуволны произойдет в точке  $C$  и  $\lambda_0/2$  будет иметь знак плюс. Согласно рис. 249,  $OC = CB = d/\cos r$ ,  $OA = OB \sin i = 2d \operatorname{tg} r \sin i$ . Учитывая для данного случая закон преломления  $\sin i = n \sin r$ , получим

$$\Delta = 2dn \cos r = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 r} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}.$$

С учетом потери полуволны для оптической разности хода получим

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \lambda_0/2. \quad (174.1)$$

Для случая, изображенного на рис. 249 ( $n > n_0$ ),

$$\Delta = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda_0/2.$$

В точке  $P$  будет интерференционный максимум, если (см. (172.2))

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \lambda_0/2 = m\lambda_0 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (174.2)$$

и минимум, если (см. (172.3))

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda_0}{2} = (2m+1) \frac{\lambda_0}{2} \quad (m=0, 1, 2, \dots). \quad (174.3)$$

Интерференция, как известно, наблюдается, только если удвоенная толщина пластинки меньше длины когерентности падающей волны.

**1. Полосы равного наклона (интерференция от плоскопараллельной пластинки).** Из выражений (174.2) и (174.3) следует, что интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (пленках) определяется величинами  $\lambda_0$ ,  $d$ ,  $n$  и  $i$ . Для данных  $\lambda_0$ ,  $d$ , и  $n$  каждому наклону  $i$  лучей соответствует своя интерференционная полоса. Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются **полосами равного наклона**.

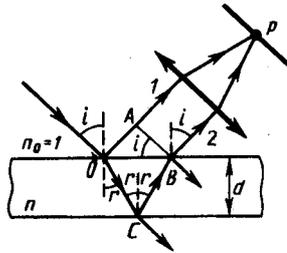


Рис. 249

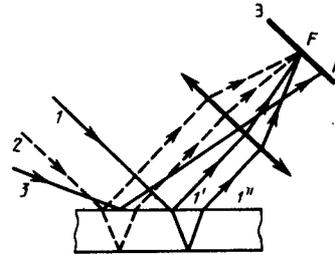


Рис. 250

**2. Полосы равной толщины (интерференция от пластинки переменной толщины).** Таким образом, на экране возникает система интерференционных полос. Каждая из полос возникает при отражении от мест пластинки, имеющих одинаковую толщину (в общем случае толщина пластинки может изменяться произвольно). Интерференционные полосы, возникающие в результате интерференции от мест одинаковой толщины, называются **полосами равной толщины**.

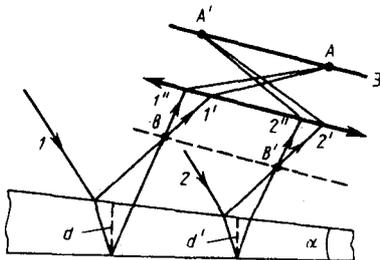


Рис. 251

- Что такое полосы равной толщины и равно-го наклона? Где они локализованы?
- Освещая тонкую пленку из прозрачного ма-териала монохроматическим светом, пада-ющим нормально к поверхности пленки, на ней наблюдают параллельные чередующи-еся равноудаленные темные и светлые по-лосы. Одинакова ли толщина отдельных участков пленки?

**3. Кольца Ньютона.** Кольца Ньютона, являющиеся классическим примером полос равной толщины, наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны (рис. 252). Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины, при нормальном падении света имеющие вид концентрических окружностей.

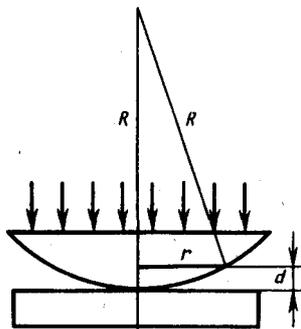


Рис. 252

- Почему центр колец Ньютона, наблюдае-мых в проходящем свете, обычно светлый?
- Между двумя пластинками имеется возду-шный клин, освещая который монохромати-ческим светом наблюдают интерференци-онные полосы. Как изменится расстояние между полосами, если пространство запол-нить прозрачной жидкостью?

Измеряя радиусы соответствующих колец, можно (зная радиус кривизны линзы  $R$ ) определить  $\lambda_0$  и, наоборот, по известной  $\lambda_0$  найти радиус кривизны  $R$  линзы.

Как для полос равного наклона, так и для полос равной толщины положение максимумов зависит от длины волны  $\lambda_0$  (см. (174.2)). Поэтому система светлых и темных полос получается только при освещении монохроматическим светом. При наблюдении в белом свете получается совокупность смещенных друг относительно друга полос, образованных лучами разных длин волн, и интерференционная картина приобретает радужную окраску..

### Применение интерференции света

Явление интерференции обусловлено волновой природой света; его количественные закономерности зависят от длины волны  $\lambda_0$ . Поэтому это явление применяется для подтверждения волновой природы света и для измерения длин волн (**интерференционная спектроскопия**).

Явление интерференции применяется также для улучшения качества оптических приборов (**просветление оптики**) и получения высокоотражающих покрытий. Прохождение света через каждую преломляющую поверхность линзы, например через границу стекло–воздух, сопровождается отражением  $\approx 4\%$  падающего потока (при показателе преломления стекла  $\approx 1,5$ ). Так как современные объективы содержат большое количество линз, то число отражений в них велико, а поэтому велики и потери светового потока. Таким образом, интенсивность прошедшего света ослабляется и светосила оптического прибора уменьшается. Кроме того, отражения от поверхностей линз приводят к возникновению бликов, что часто (например, в военной технике) демаскирует положение прибора.

Для устранения указанных недостатков осуществляют так называемое *просветление оптики*. Для этого на свободные поверхности линз наносят тонкие пленки с показателем преломления, меньшим, чем у материала линзы. При отражении света от границ раздела воздух–пленка и пленка–стекло возникает интерференция когерентных лучей  $1'$  и  $2'$  (рис. 253). Толщину пленки  $d$  и показатели преломления стекла  $n_c$  и пленки  $n$  можно подобрать так, чтобы волны, отраженные от обеих поверхностей пленки, гасили друг друга. Для этого их амплитуды должны быть равны, а оптическая разность хода равна  $(2m+1)\frac{\lambda_0}{2}$  (см. (172.3)). Расчет показывает, что амплитуды отраженных лучей равны, если

$$n = \sqrt{n_c}. \quad (175.1)$$

Так как  $n_c$ ,  $n$  и показатель преломления воздуха  $n_0$  удовлетворяют условиям  $n_c > n > n_0$ , то потеря полуволны происходит на обеих поверхностях; следовательно, условие минимума (предполагаем, что свет падает нормально, т. е.  $i=0$ )

$$2nd = (2m+1)\frac{\lambda_0}{2},$$

где  $nd$  — **оптическая толщина пленки**. Обычно принимают  $m=0$ , тогда

$$nd = \lambda_0/4.$$

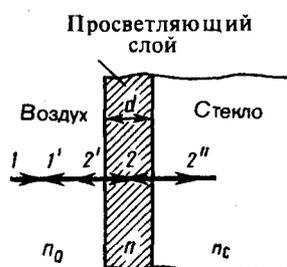


Рис. 253

- В чем заключается суть просветления оптики?
- Когда и почему слой (слои) с оптической толщиной в четверть длины волны служат для полного гашения отраженных лучей и для получения высокоотражающих покрытий?

Таким образом, если выполняется условие (175.1) и оптическая толщина пленки равна  $\lambda_0/4$ , то в результате интерференции наблюдается гашение отраженных лучей. Так как добиться одновременного гашения для всех длин волны невозможно, то это обычно делается для наиболее восприимчивой глазом длины волны  $\lambda_0 \approx 0,55$  мкм. Поэтому объективы с просветленной оптикой имеют синевато-красный оттенок.

Создание высокоотражающих покрытий стало возможным лишь на основе **многолучевой интерференции**. В отличие от двухлучевой интерференции, которую мы рассматривали до сих пор,

многолучевая интерференция возникает при наложении большого числа когерентных световых пучков.

Явление интерференции также применяется в очень точных измерительных приборах, называемых интерферометрами. Все интерферометры основаны на одном и том же принципе и различаются лишь конструкционно. На рис. 255 представлена упрощенная схема **интерферометра Майкельсона**.

Монохроматический свет от источника  $S$  падает под углом  $45^\circ$  на плоскопараллельную пластинку  $P_1$ . Российский физик В. П. Линник (1889—1984) использовал принцип действия интерферометра Майкельсона для создания **микроинтерферометра** (комбинация интерферометра и микроскопа), служащего для контроля чистоты обработки поверхности.

Интерферометры — очень чувствительные оптические приборы, позволяющие определять незначительные изменения показателя преломления прозрачных тел (газов, жидких и твердых тел) в зависимости от давления, температуры, примесей и т. д. Такие интерферометры получили название

#### **интерференционных рефрактометров.**

Интерференционные рефрактометры позволяют измерять изменение показателя преломления с очень высокой точностью (до  $1/1\,000\,000$ ).

Применение интерферометров очень многообразно. Кроме перечисленного, они применяются для изучения качества изготовления оптических деталей, измерения углов, исследования быстропротекающих процессов, происходящих в воздухе, обтекающем летательные аппараты, и т. д. Применяя интерферометр, Майкельсон впервые провел сравнение международного эталона метра с длиной стандартной световой волны. С помощью интерферометров исследовалось также распространение света в движущихся телах, что привело к фундаментальным изменениям представлений о пространстве и времени.

## **Дифракция света**

### **§ 176. Принцип Гюйгенса — Френеля**

**Дифракцией** называется огибание волнами препятствий, встречающихся на их пути, или в более широком смысле — любое отклонение распространения волн вблизи препятствий от законов геометрической оптики. Благодаря дифракции волны могут попадать в область геометрической тени, огибать препятствия, проникать через небольшие отверстия в экранах и т. д. Например, звук хорошо слышен за углом дома, т. е. звуковая волна его огибает.

Явление дифракции объясняется с помощью *принципа Гюйгенса* (см. § 170), согласно которому каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн задает положение волнового фронта в следующий момент времени.

Пусть плоская волна нормально падает на отверстие в непрозрачном экране (рис. 256). Согласно Гюйгенсу, каждая точка выделяемого отверстием участка волнового фронта служит источником вторичных волн (в однородной изотропной среде они сферические). Построив огибающую вторичных волн для некоторого момента времени, видим, что фронт волны заходит в область геометрической тени, т. е. волна огибает края отверстия.

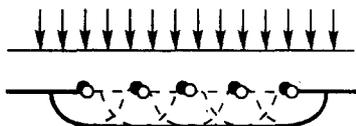


Рис. 256

- Почему дифракция звука повседневно более очевидна, чем дифракция света?
- Каковы дополнения Френеля к принципу Гюйгенса?

Явление дифракции характерно для волновых процессов. Поэтому если свет является волновым процессом, то для него должна наблюдаться дифракция, т. е. световая волна, падающая на границу какого-либо непрозрачного тела, должна огибать его (проникать в область геометрической тени). Из опыта, однако, известно, что предметы, освещаемые светом, идущим от точечного источника, дают резкую тень и, следовательно, лучи не отклоняются от их прямолинейного распространения. Почему

же возникает резкая тень, если свет имеет волновую природу? К сожалению, теория Гюйгенса ответить на этот вопрос не могла.

Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопроса об амплитуде, а следовательно, и об интенсивности волн, распространяющихся по разным направлениям. Френель вложил в принцип Гюйгенса физический смысл, дополнив его идеей интерференции вторичных волн.

Согласно **принципу Гюйгенса — Френеля**, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником  $S$ , может быть представлена как *результат суперпозиции когерентных вторичных волн*, «излучаемых» фиктивными источниками. Такими источниками могут служить бесконечно малые элементы любой замкнутой поверхности, охватывающей источник  $S$ . Обычно в качестве этой поверхности выбирают одну из волновых поверхностей, поэтому все фиктивные источники действуют синфазно. Таким образом, волны, распространяющиеся от источника, являются результатом интерференции всех когерентных вторичных волн. Френель исключил возможность возникновения обратных вторичных волн и предположил, что если между источником и точкой наблюдения находится непрозрачный экран с отверстием, то на поверхности экрана амплитуда вторичных волн равна нулю, а в отверстии — такая же, как при отсутствии экрана.

Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет в каждом конкретном случае найти амплитуду (интенсивность) результирующей волны в любой точке пространства, т. е. определить закономерности распространения света. В общем случае расчет интерференции вторичных волн довольно сложный и громоздкий, однако, как будет показано ниже, для некоторых случаев нахождение амплитуды результирующего колебания осуществляется алгебраическим суммированием.

### Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света

Принцип Гюйгенса — Френеля в рамках волновой теории должен был ответить на вопрос о прямолинейном распространении света. Френель решил эту задачу, рассмотрев взаимную интерференцию вторичных волн и применив прием, получивший название **метода зон Френеля**.

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}} m\lambda. \quad (177.7)$$

При  $a=b=10$  см и  $\lambda=0,5$  мкм радиус первой (центральной) зоны  $r_1 = 0,158$  мм. Следовательно, распространение света от  $S$  к  $M$  происходит так, будто световой поток распространяется внутри очень узкого канала вдоль  $SM$ , т.е. *прямолинейно*. Таким образом, принцип Гюйгенса — Френеля позволяет объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.

Правомерность деления волнового фронта на зоны Френеля подтверждена экспериментально. Для этого используются **зонные пластинки**

### Дифракция Фраунгофера на одной щели

Немецкий физик И. Фраунгофер (1787—1826) рассмотрел **дифракцию плоских световых волн**, или **дифракцию в параллельных лучах**. **Дифракция Фраунгофера**, имеющая большое практическое значение, наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию. Чтобы этот тип дифракции осуществить, достаточно точечный источник света поместить в фокусе собирающей линзы, а дифракционную картину исследовать в фокальной плоскости второй собирающей линзы, установленной за препятствием.

Рассмотрим дифракцию Фраунгофера от бесконечно длинной щели (для этого практически достаточно, чтобы длина щели была значительно больше ее ширины). Пусть плоская монохроматическая световая волна падает нормально плоскости узкой щели шириной  $a$  (рис. 261,  $a$ ). Оптическая разность хода между крайними лучами  $MC$  и  $ND$ , идущими от щели в произвольном направлении  $\varphi$ ,

$$\Delta = NF = a \sin \varphi, \quad (179.1)$$

где  $F$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на луч  $ND$ .

Разобьем открытую часть волновой поверхности в плоскости щели  $MN$  на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру  $M$  щели. Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна  $\lambda/2$ , т. е. всего на ширине щели уместится  $\Delta:\lambda/2$  зон. Так как свет на щель

падает нормально, то плоскость щели совпадает с волновым фронтом; следовательно, все точки волнового фронта в плоскости щели будут колебаться в одинаковой фазе. Амплитуды вторичных волн в плоскости щели будут равны, так как выбранные зоны Френеля имеют одинаковые площади и одинаково наклонены к направлению наблюдения.

Из выражения (179.1) вытекает, что число зон Френеля, укладывающихся на ширине щели, зависит от угла  $\varphi$ . От числа зон Френеля, в свою очередь, зависит результат наложения всех вторичных волн. Из приведенного построения следует, что при интерференции света от каждой пары *соседних* зон Френеля амплитуда результирующих колебаний равна нулю, так как колебания от каждой пары соседних зон взаимно гасят друг друга. Следовательно, если *число зон Френеля четное*, то

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (179.2)$$

и в точке  $B$  наблюдается **дифракционный минимум** (полная темнота), если же *число зон Френеля нечетное*, то

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (179.3)$$

и наблюдается **дифракционный максимум**, соответствующий действию одной нескомпенсированной зоны Френеля. Отметим, что в направлении  $\varphi=0$  щель действует как одна зона Френеля, и в этом направлении свет распространяется с наибольшей интенсивностью, т. е. в точке  $B_0$  наблюдается **центральный дифракционный максимум**.

Из условий (179.2) и (179.3) можно найти направления на точки экрана, в которых амплитуда (а следовательно, и интенсивность) равна нулю ( $\sin \varphi_{min} = \pm m\lambda/a$ ) или максимальна ( $\sin \varphi_{max} = \pm(2m+1)\lambda/(2a)$ ). Распределение интенсивности на экране, получаемое вследствие дифракции (**дифракционный спектр**), приведено на рис. 261, б. Расчеты показывают, что интенсивности в центральном и последующих максимумах относятся как  $1 : 0,047 : 0,017 : 0,0083 : \dots$  т.е. основная часть световой энергии сосредоточена в центральном максимуме. Из опыта и соответствующих расчетов следует, что сужение щели приводит к тому, что центральный максимум расплывается, а интенсивность уменьшается (это, естественно, относится и к другим максимумам). Наоборот, чем щель шире ( $a > \lambda$ ), тем картина ярче, но дифракционные полосы уже, а число самих полос больше. При  $a \gg \lambda$  в центре получается резкое изображение источника света, т. е. имеет место прямолинейное распространение света.

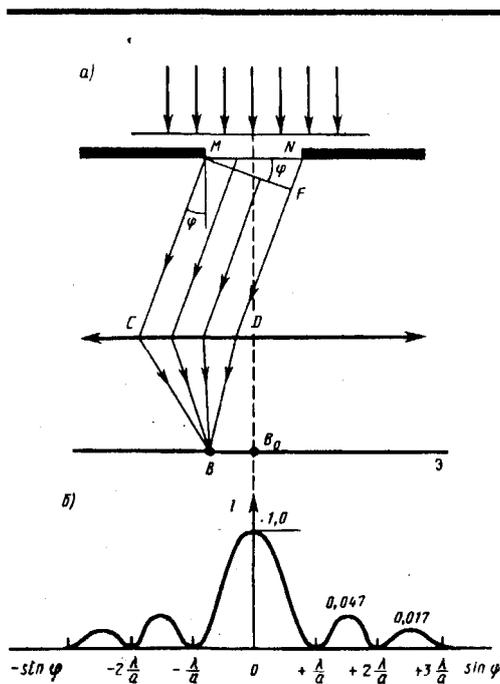


Рис. 261

- Найдите направления на точки экрана в случае дифракции на щели, в которых интенсивность равна нулю; интенсивность максимальна.
- Отличается ли дифракция на щели при освещении ее монохроматическим и белым светом?
- Какова предельная ширина щели, при которой еще будут наблюдаться минимумы интенсивности?
- Как влияет на дифракцию Фраунгофера от одной щели увеличение длины волны и ширины щели?

Положение дифракционных максимумов зависит от длины волны  $\lambda$ , поэтому рассмотренная выше дифракционная картина имеет место лишь для монохроматического света. При освещении щели белым светом центральный максимум наблюдается в виде белой полоски; он общий для всех длин волн (при  $\varphi = 0$  разность хода равна нулю для всех  $\lambda$ ). Боковые максимумы радужно окрашены, так как условие максимума при любых  $m$  различно для разных  $\lambda$ . Таким образом, справа и слева от

центрального максимума наблюдаются максимумы первого ( $m=1$ ), второго ( $m=2$ ) и других порядков, обращенные фиолетовым краем к центру дифракционной картины. Однако они настолько расплывчаты, что отчетливого разделения различных длин волн с помощью дифракции на одной щели получить невозможно.

### Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Большое практическое значение имеет дифракция, наблюдаемая при прохождении света через **одномерную дифракционную решетку** — систему параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. Рассматривая дифракцию Фраунгофера на щели, мы видели, что распределение интенсивности на экране определяется направлением дифрагированных лучей. Это означает, что перемещение щели параллельно самой себе влево или вправо не изменит дифракционной картины. Следовательно, если перейти от одной щели ко многим (к дифракционной решетке), то дифракционные картины, создаваемые каждой щелью в отдельности, будут одинаковыми.

Дифракционная картина на решетке определяется как результат взаимной интерференции волн, идущих от всех щелей, т. е. *в дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей.*

Рассмотрим дифракционную решетку. На рис. 262 для наглядности показаны только две соседние щели  $MN$  и  $CD$ . Если ширина каждой щели равна  $a$ , а ширина непрозрачных участков между щелями  $b$ , то величина  $d=a+b$  называется **постоянной (периодом) дифракционной решетки**. Пусть плоская монохроматическая волна падает нормально к плоскости решетки. Так как щели находятся друг от друга на одинаковых расстояниях, то разности хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будут для данного направления  $\varphi$  одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = CF = (a + b) \sin \varphi = d \sin \varphi. \quad (180.1)$$

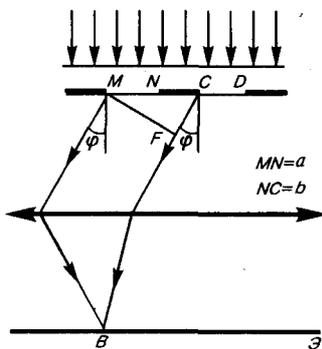


Рис. 262

- Как изменится дифракционная картина, если увеличить общее число штрихов решетки, не меняя постоянную решетки?
- Сколько дополнительных минимумов и максимумов возникнет при дифракции на шести щелях?
- Почему дифракционная решетка разлагает белый свет в спектр?

Очевидно, что в тех направлениях, в которых *ни одна* из щелей не распространяет свет, он не будет распространяться и при двух щелях, т. е. *прежние (главные) минимумы* интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием (179.2):

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (180.2)$$

Кроме того, вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых двумя щелями, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т. е. возникнут **дополнительные минимумы**. Очевидно, что эти дополнительные минимумы будут наблюдаться в тех направлениях, которым соответствует разность хода лучей  $\lambda/2, 3\lambda/2, \dots$ , посылаемых, например, от крайних левых точек  $M$  и  $C$  обеих щелей. Таким образом, с учетом (180.1) **условие дополнительных минимумов:**

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

Наоборот, действие одной щели будет усиливать действие другой, если

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m \lambda \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad (180.3)$$

т. е. выражение (180.3) задает условие **главных максимумов**.

Таким образом, полная дифракционная картина, для двух щелей определяется из условий:

$a \sin \varphi = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  — главные минимумы;

$d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}, \frac{3}{2}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, \dots$  — дополнительные минимумы;

$d \sin \varphi = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$  — главные максимумы,

т. е. между двумя главными максимумами располагается один дополнительный минимум. Аналогично можно показать, что между каждыми двумя главными максимумами при трех щелях располагается два дополнительных минимума, при четырех щелях — три и т. д.

Если дифракционная решетка состоит из  $N$  щелей, то условием главных минимумов является условие (180.2), условием главных максимумов — условие (180.3), а условием дополнительных минимумов

$$d \sin \varphi = \pm m' \lambda / N \quad (m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1, \dots), \quad (180.4)$$

где  $m'$  может принимать все целочисленные значения, кроме 0,  $N$ ,  $2N$ , .... т. е. кроме тех, при которых условие (180.4) переходит в (180.3). Следовательно, в случае  $N$  щелей между двумя главными максимумами располагается  $N-1$  дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими весьма слабый фон.

Чем больше щелей  $N$ , тем большее количество световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов образуется между соседними главными максимумами, тем, следовательно, более интенсивными и более острыми будут максимумы. На рис. 263 качественно представлена дифракционная картина от восьми щелей. Так как модуль  $\sin \varphi$  не может быть больше единицы, то из (180.3) следует, что число главных максимумов

$$m \leq d/\lambda,$$

т. е. определяется отношением периода решетки к длине волны.

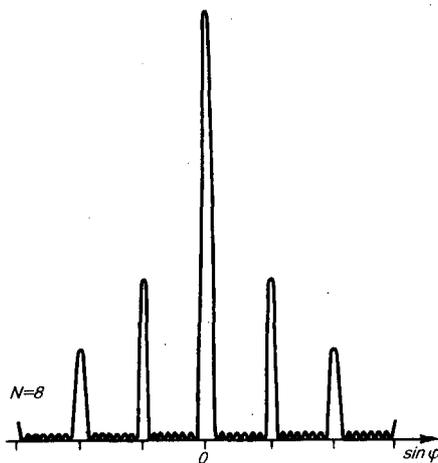


Рис. 263

- Как определить наибольший порядок спектра дифракционной решетки?
- Как изменится дифракционная картина при удалении экрана от решетки?
- Почему при использовании белого света только центральный максимум белый, а боковые максимумы радужно окрашены?
- Почему штрихи на дифракционной решетке должны быть тесно расположены друг к другу?
- Почему их должно быть большое число?
- Запишите условия дифракционных минимумов для одной щели и главных максимумов для решетки. Каков характер этих дифракционных картин?

Положение главных максимумов зависит от длины волны  $\lambda$  (см. (180.3)). Поэтому при пропускании через решетку белого света все максимумы, кроме центрального ( $m=0$ ), разложатся в спектр, фиолетовая область которого будет обращена к центру дифракционной картины, красная — наружу. Это свойство дифракционной решетки используется для исследования спектрального состава света (определения длин волн и интенсивностей всех монохроматических компонентов), т. е. *дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор.*

Дифракционные решетки, используемые в различных областях спектра, отличаются размерами, формой, материалом поверхности, профилем штрихов и их частотой (от 6000 до 0,25 штрих/мм, что позволяет перекрывать область спектра от ультрафиолетовой его части до инфракрасной). Например, ступенчатый профиль решетки позволяет концентрировать основную часть падающей энергии в направлении одного определенного ненулевого порядка.

### Пространственная решетка. Рассеяние света

Дифракция света наблюдается не только на плоской **одномерной решетке** (штрихи нанесены перпендикулярно некоторой прямой линии), но и на **двумерной решетке** (штрихи нанесены во взаимно перпендикулярных направлениях в одной и той же плоскости). Большой интерес представляет также дифракция на **пространственных (трехмерных) решетках** — пространственных образованиях, в которых элементы структуры подобны по форме, имеют геометрически правильное и периодически повторяющееся расположение, а также постоянные

(периоды) решеток, соизмеримые с длиной волны электромагнитного излучения. Иными словами, подобные пространственные образования должны иметь периодичность по трем не лежащим в одной плоскости направлениям. В качестве пространственных дифракционных решеток могут быть использованы кристаллические тела, так как в них неоднородности (атомы, молекулы, ионы) регулярно повторяются в трех направлениях.

Дифракция света может происходить также в так называемых **мутных средах** — средах с явно выраженными оптическими неоднородностями. К мутным средам относятся аэрозоли (облака, дым, туман), эмульсия, коллоидные растворы и т. д., т. е. такие среды, в которых взвешено множество очень мелких частиц инородных веществ. Свет, проходя через мутную среду, дифрагирует от беспорядочно расположенных микрон неоднородностей, давая равномерное распределение интенсивностей по всем направлениям, не создавая какой-либо определенной дифракционной картины. Происходит так называемое **рассеяние света в мутной среде**. Это явление можно наблюдать, например, когда узкий пучок солнечных лучей, проходя через запыленный воздух, рассеивается на пылинках и тем самым становится видимым.

Рассеяние света (как правило, слабое) наблюдается также и *в чистых средах*, не содержащих посторонних частиц. Л. И. Мандельштам объяснил рассеяние света в средах нарушением их оптической однородности, при котором показатель преломления среды не постоянен, а меняется от точки к точке. В дальнейшем польский физик М. Смолуховский (1872—1917) указал, что причиной рассеяния света могут быть также флуктуации плотности, возникающие в процессе хаотического (теплого) движения молекул среды. Рассеяние света в чистых средах, обусловленное флуктуациями плотности, анизотропии или концентрации, называется **молекулярным рассеянием**.

Молекулярным рассеянием объясняется, например, голубой цвет неба. Согласно закону Д. Рэлея, интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны ( $I \sim \lambda^{-4}$ ), поэтому голубые и синие лучи рассеиваются сильнее, чем желтые и красные, обуславливая тем самым голубой цвет неба. По этой же причине свет, прошедший через значительную толщину атмосферы, оказывается обогащенным более длинноволновой частью спектра (сине-фиолетовая часть спектра полностью рассеивается) и поэтому при закате и восходе Солнце кажется красным. Флуктуации плотности и интенсивность рассеяния света возрастают с увеличением температуры. Поэтому в ясный летний день цвет неба является более насыщенным по сравнению с таким же зимним днем.

### Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа — Брэггов

Для наблюдения дифракционной картины необходимо, чтобы постоянная решетки была того же порядка, что и длина волны падающего излучения (см. (180.3)). Кристаллы, являясь трехмерными пространственными решетками (см. § 181), имеют постоянную порядка  $10^{-10}$  м и, следовательно, непригодны для наблюдения дифракции в видимом свете ( $\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7}$  м). Эти факты позволили немецкому физiku М. Лауэ (1879—1960) прийти к выводу, что в качестве естественных дифракционных решеток для рентгеновского излучения можно использовать кристаллы, поскольку расстояние между атомами в кристаллах одного порядка с  $\lambda$  рентгеновского излучения ( $\approx 10^{-12} \div 10^{-8}$  м).

Простой метод расчета дифракции рентгеновского излучения от кристаллической решетки предложен независимо друг от друга Г. В. Вульфом (1863—1925) и английскими физиками Г. и Л. Брэггами (отец (1862—1942) и сын (1890—1971)). Они предположили, что дифракция рентгеновского излучения является результатом его отражения от системы параллельных кристаллографических плоскостей (плоскостей, в которых лежат узлы (атомы) кристаллической решетки).

Представим кристаллы в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей (рис. 264), отстоящих друг от друга на расстоянии  $d$ . Пучок параллельных монохроматических рентгеновских лучей (1, 2) падает под **углом скольжения**  $\theta$  (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн 1' и 2', интерферирующих между собой, подобно вторичным волнам, от щелей дифракционной решетки. Максимумы интенсивности (дифракционные максимумы) наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют **формуле Вульфа — Брэггов**

$$2d \sin \theta = m\lambda \quad (m=1, 2, 3, \dots), \quad (182.1)$$

т. е. при разности хода между двумя лучами, отраженными от соседних кристаллографических плоскостей, кратной целому числу длин волн  $\lambda$ , наблюдается дифракционный максимум.

При произвольном направлении падения монохроматического рентгеновского излучения на кристалл дифракция не возникает. Чтобы ее наблюдать, надо, поворачивая кристалл, найти угол скольжения. Дифракционная картина может быть получена и при произвольном положении кристалла, для чего нужно пользоваться непрерывным рентгеновским спектром, испускаемым рентгеновской трубкой. Тогда для таких условий опыта всегда найдутся длины волн  $\lambda$ , удовлетворяющие условию (182.1).

Формула Вульфа — Брэггов используется при решении двух важных задач:

1. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей известной длины волны на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя  $\theta$  и  $m$ , можно найти межплоскостное расстояние ( $d$ ), т. е. определить структуру вещества. Этот метод лежит в основе **рентгеноструктурного анализа**. Формула Вульфа — Брэггов остается справедливой и при дифракции электронов и нейтронов. Методы исследования структуры вещества, основанные на дифракции электронов и нейтронов, называются соответственно **электронографией** и **нейтронографией**.
2. Наблюдая дифракцию рентгеновских лучей неизвестной длины волны на кристаллической структуре при известном  $d$  и измеряя  $\theta$  и  $m$ , можно найти длину волны падающего рентгеновского излучения. Этот метод лежит в основе **рентгеновской спектроскопии**.

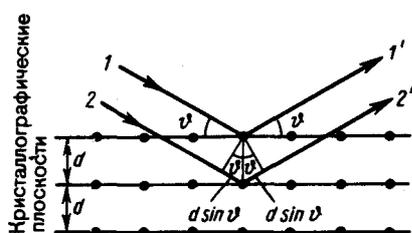


Рис. 264

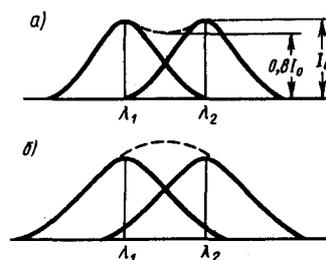


Рис. 265

### Понятие о голографии

Голография (от греч. «полная запись») — особый способ записи и последующего восстановления волнового поля, основанный на регистрации интерференционной картины. Она обязана своим возникновением законам волновой оптики — законам интерференции и дифракции.

Этот принципиально новый способ фиксирования и воспроизведения пространственного изображения предметов изобретен английским физиком Д. Габором (1900—1979) в 1947 г. (Нобелевская премия 1971 г.). Экспериментальное воплощение и дальнейшая разработка этого способа (Ю. Н. Денисюком в 1962 г. и американскими физиками Э. Лейтом и Ю. Упатниексом в 1963 г.) стали возможными после появления в 1960 г. источников света высокой степени когерентности — лазеров (см. § 233).

Рассмотрим элементарные основы принципа голографии, т. е. регистрации и восстановления информации о предмете. Для регистрации и восстановления волны необходимо уметь регистрировать и восстанавливать амплитуду и фазу идущей от предмета волны. **Голограмма** — зарегистрированная на фотопластинке интерференционная картина, образованная при сложении опорной и предметной волн.

Методы голографии (запись голограммы в трехмерных средах, цветное и панорамное голографирование и т. д.) находят все большее развитие. Применения голографии разнообразны, но наиболее важными, приобретающими все большее значение, являются запись и хранение информации. Методы голографии позволяют записывать в сотни раз больше страниц печатного текста, чем методы обычной микрофотографии. По подсчетам, на фотопластинку размером 32×32 мм можно записать 1024 голограммы (площадь каждой из них 1 мм<sup>2</sup>), т. е. на одной фотопластинке можно «разместить» книгу объемом свыше тысячи страниц. В качестве будущих разработок могут служить ЭВМ с

голографической памятью, голографический электронный микроскоп, голографические кино в телевидение, голографическая интерферометрия и т. д.

### Дисперсия света

**Дисперсией света** называется зависимость показателя преломления  $n$  вещества от частоты  $\nu$  (длины волны  $\lambda$ ) света или зависимость фазовой скорости  $v$  световых волн (см. § 154) от его частоты  $\nu$ . Дисперсия света представляется в виде зависимости

$$n=f(\lambda). \quad (185.1)$$

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. Первые экспериментальные наблюдения дисперсии света принадлежат И. Ньютону (1672 г.). Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает на призму с преломляющим углом  $A$  и показателем преломления  $n$  (рис. 268) под углом  $\alpha_1$ . После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч оказывается отклоненным от первоначального направления на угол  $\varphi$ . Из рисунка следует, что

$$(185.3)$$

следует, что

$$\varphi = A(n-1), \quad (185.4)$$

т. е. угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы.

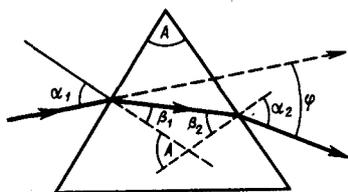


Рис. 268

- Что такое дисперсия света?
- Как связаны между собой преломляющий угол призмы и угол отклонения лучей ею?
- Что показывает дисперсия вещества?

Из выражения (185.4) вытекает, что угол отклонения лучей призмой зависит от величины  $n-1$ , а  $n$  — функция длины волны, поэтому лучи разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т. е. пучок белого света за призмой разлагается в спектр, что и наблюдалось И. Ньютоном. Таким образом, с помощью призмы, так же как и с помощью дифракционной решетки, разлагая свет в спектр, можно определить его спектральный состав.

Рассмотрим *различия в дифракционном и призматическом спектрах.*

1. Дифракционная решетка разлагает падающий свет непосредственно по длинам волн (см. (180.3)), поэтому по измеренным углам (по направлениям соответствующих максимумов) можно вычислить длину волны. Разложение света в спектр в призме происходит по значениям показателя преломления, поэтому для определения длины волны света надо знать зависимость  $n=f(\lambda)$  (185.1).
2. Составные цвета в дифракционном и призматическом спектрах располагаются различно. Из (180.3) следует, что в дифракционной решетке синус угла отклонения пропорционален длине волны. Следовательно, красные лучи, имеющие большую длину волны, чем фиолетовые, отклоняются дифракционной решеткой сильнее. Призма же разлагает лучи в спектр по значениям показателя преломления, который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны уменьшается (рис. 269). Поэтому красные лучи отклоняются призмой слабее, чем фиолетовые.

Величина

$$D = \frac{dn}{d\lambda},$$

называемая **дисперсией вещества**, показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волны. Из рис. 269 следует, что показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны увеличивается; следовательно, величина  $dn/d\lambda$  по модулю также увеличивается с уменьшением  $\lambda$ . Такая дисперсия называется **нормальной**. Как будет показано ниже, ход кривой  $n(\lambda)$  — **кривой дисперсии** — вблизи линий и полос поглощения будет иным:  $n$  уменьшается с уменьшением  $\lambda$ . Такой ход зависимости  $n$  от  $\lambda$  называется **аномальной дисперсией**.

На явлении нормальной дисперсии основано действие **призменных спектрографов**. Несмотря на их некоторые недостатки (например, необходимость градуировки, различная дисперсия в разных

участках спектра) при определении спектрального состава света, призменные спектрографы находят широкое применение в спектральном анализе. Это объясняется тем, что изготовление хороших призм значительно проще, чем изготовление хороших дифракционных решеток. В призменных спектрографах также легче получить большую светосилу.

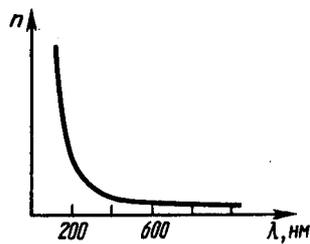


Рис. 269

- Чем отличается нормальная дисперсия от аномальной?
- По каким признакам можно отличить спектры, полученные с помощью призмы и дифракционной решетки?

### Электронная теория дисперсии света

Из макроскопической электромагнитной теории Максвелла следует, что абсолютный показатель преломления среды

$$n = \sqrt{\epsilon\mu},$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\mu$  — магнитная проницаемость. В оптической области спектра для всех веществ  $\mu \approx 1$ , поэтому

$$n = \sqrt{\epsilon}. \quad (186.1)$$

Из формулы (186.1) выявляются некоторые противоречия с опытом: величина  $n$ , являясь переменной (см. § 185), остается в то же время равной определенной постоянной  $\sqrt{\epsilon}$ . Кроме того, значения  $n$ , получаемые из этого выражения, не согласуются с опытными значениями. Трудности объяснения дисперсии света с точки зрения электромагнитной теории Максвелла устраняются электронной теорией Лоренца. В теории Лоренца дисперсия света рассматривается как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны.

Применим электронную теорию дисперсии света для однородного диэлектрика, предположив формально, что дисперсия света является следствием зависимости  $\epsilon$  от частоты  $\omega$  световых волн. Диэлектрическая проницаемость вещества, по определению (см. (88.6) и (88.2)), равна

$$\epsilon = 1 + \alpha = 1 + P/(e_0 E),$$

где  $\alpha$  — диэлектрическая восприимчивость среды,  $e_0$  — электрическая постоянная,  $P$  — мгновенное значение поляризованности. Следовательно,

$$n^2 = 1 + P/(e_0 E), \quad (186.2)$$

т.е. зависит от  $P$ . В данном случае основное значение имеет электронная поляризация, т.е. вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля волны, так как для ориентационной поляризации молекул частота колебаний в световой волне очень высока ( $\nu \approx 10^{15}$  Гц).

### Поглощение (абсорбция) света

**Поглощением (абсорбцией) света** называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии. В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается.

Поглощение света в веществе описывается **законом Бугера\***:

$$I = I_0 e^{-\alpha x}, \quad (187.1)$$

где  $I_0$  и  $I$  — интенсивности плоской монохроматической световой волны на входе и выходе слоя поглощающего вещества толщиной  $x$ ,  $\alpha$  — **коэффициент поглощения**, зависящий от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света. При  $x=1/\alpha$  интенсивность света  $I$  по сравнению с  $I_0$  уменьшается в  $e$  раз.

\* П. Бугер (1698—1758) — французский ученый.

Коэффициент поглощения зависит от длины волны  $\lambda$  (или частоты  $\omega$ ) и для различных веществ различен. Например, одноатомные газы и пары металлов (т.е. вещества, в которых атомы расположены на значительных расстояниях друг от друга и их можно считать изолированными) обладают близким к нулю коэффициентом поглощения и лишь для очень узких спектральных областей (примерно  $10^{-12}$ — $10^{-11}$  м) наблюдаются резкие максимумы (так называемый **линейчатый спектр поглощения**). Эти линии соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Спектр поглощения молекул, определяемый колебаниями атомов в молекулах, характеризуется **полосами поглощения** (примерно  $10^{-10}$ — $10^{-7}$  м).

Коэффициент поглощения для диэлектриков невелик (примерно  $10^{-3}$ — $10^{-5}$  см $^{-1}$ ), однако у них наблюдается селективное поглощение света в определенных интервалах длин волн, когда  $\alpha$  резко возрастает, и наблюдаются сравнительно широкие полосы поглощения, т.е. диэлектрики имеют **сплошной спектр поглощения**. Это связано с тем, что в диэлектриках нет свободных электронов и поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика.

Коэффициент поглощения для металлов имеет большие значения (примерно  $10^3$ — $10^5$  см $^{-1}$ ) и поэтому металлы являются непрозрачными для света. В металлах из-за наличия свободных электронов, движущихся под действием электрического поля световой волны, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Поэтому энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла. Чем выше проводимость металла, тем сильнее в нем поглощение света.

На рис. 271 представлены типичная зависимость коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны света  $\lambda$  и зависимость показателя преломления  $n$  от  $\lambda$  в области полосы поглощения. Из рисунка следует, что внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия ( $n$  убывает с уменьшением  $\lambda$ ). Однако поглощение вещества должно быть значительным, чтобы повлиять на ход показателя преломления.

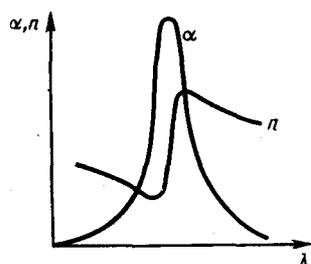


Рис. 271

- Почему металлы сильно поглощают свет?
- В чем основное отличие эффекта Доплера для световых волн от эффекта Доплера в акустике?
- Почему поперечный эффект Доплера является релятивистским эффектом? Чем он обусловлен?
- Когда возникает излучение Вавилова — Черенкова?

Зависимостью коэффициента поглощения от длины волны объясняется окрашенность поглощающих тел. Например, стекло, слабо поглощающее красные и оранжевые лучи и сильно поглощающее зеленые и синие, при освещении белым светом будет казаться красным. Если на такое стекло направить зеленый и синий свет, то из-за сильного поглощения света этих длин волн стекло будет казаться черным. Это явление используется для изготовления **светофильтров**, которые в зависимости от химического состава (стекла с присадками различных солей, пленки из пластмасс, содержащие красители, растворы красителей и т. д.) пропускают свет только определенных длин волн, поглощая остальные. Разнообразие пределов селективного (избирательного) поглощения у различных веществ объясняет разнообразие и богатство цветов и красок, наблюдающееся в окружающем мире.

Явление поглощения широко используется в **абсорбционном спектральном анализе** смеси газов, основанном на измерениях спектров частот и интенсивностей линий (полос) поглощения. Структура спектров поглощения определяется составом и строением молекул, поэтому изучение спектров поглощения является одним из основных методов количественного и качественного исследования веществ.

## Эффект Доплера

Эффект Доплера в акустике (см. § 159) объясняется тем, что частота колебаний, воспринимаемых приемником, определяется скоростями движения источника колебаний и приемника относительно среды, в которой происходит распространение звуковых волн. Эффект Доплера наблюдается также и при движении относительно друг друга источника и приемника электромагнитных волн.

Формула (188.2) определяет так называемый **продольный эффект Доплера**, наблюдаемый при движении приемника вдоль линии, соединяющей его с источником. При малых относительных скоростях  $v$  ( $v \ll c$ ), разлагая (188.2) в ряд по степеням  $\beta$  и пренебрегая членом порядка  $\beta^2$ , получим

$$v = v_0(1 - \beta) = v_0(1 - v/c). \quad (188.3)$$

Следовательно, при удалении источника и приемника друг от друга (при их положительной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более длинноволновую область ( $v < v_0$ ,  $\lambda > \lambda_0$ ) — так называемое **красное смещение**. При сближении же источника и приемника (при их отрицательной относительной скорости) наблюдается сдвиг в более коротковолновую область ( $v > v_0$ ,  $\lambda < \lambda_0$ ) — так называемое **фиолетовое смещение**.

Если  $\theta = \pi/2$ , то выражение (188.1) примет вид

$$v = v_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} = v_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (188.4)$$

Формула (188.4) определяет так называемый **поперечный эффект Доплера**, наблюдаемый при движении приемника перпендикулярно линии, соединяющей его с источником.

## Излучение Вавилова — Черенкова

Российский физик П. А. Черенков (1904—1990), работавший под руководством Вавилова, показал, что при движении релятивистских заряженных частиц в среде с *постоянной скоростью  $v$ , превышающей фазовую скорость света в этой среде*, т. е. при условии  $v > c/n$  ( $n$  — показатель преломления среды), возникает электромагнитное излучение, названное впоследствии **излучением (эффектом) Вавилова — Черенкова**. Природа данного излучения, обнаруженного для разнообразных веществ, в том числе и для чистых жидкостей, подробно изучалась С. И. Вавиловым. Он показал, что данное свечение не является люминесценцией (см. § 245), как считалось ранее, и высказал предположение, что оно связано с движением свободных электронов сквозь вещество.

Излучение Вавилова — Черенкова в 1937 г. было теоретически объяснено российскими учеными И. Е. Таммом (1895—1971) и И. М. Франком (р. 1908) (Черенков, Тамм и Франк в 1958 г. удостоены Нобелевской премии).

Согласно электромагнитной теории, заряженная частица (например, электрон) излучает электромагнитные волны лишь при движении с ускорением. Тамм и Франк показали, что это утверждение справедливо только до тех пор, пока скорость заряженной частицы не превышает фазовой скорости  $c/n$  электромагнитных волн в среде, в которой частица движется. Если частица обладает скоростью  $v > c/n$ , то, даже двигаясь равномерно, она будет излучать электромагнитные волны. Таким образом, согласно теории Тамма и Франка, электрон, движущийся в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, должен сам излучать свет.

Отличительной особенностью излучения Вавилова — Черенкова является его распространение не по всем направлениям, а лишь по направлениям, составляющим острый угол  $\theta$  с траекторией частицы, т. е. вдоль образующих конуса, ось которого совпадает с направлением скорости частицы. Определим угол  $\theta$ :

$$\cos \theta = (c/n)/v = c/(nv). \quad (189.1)$$

Возникновение излучения Вавилова — Черенкова и его направленность истолкованы Франком и Таммом на основе представлений об интерференции света с использованием принципа Гюйгенса.

На основе излучения Вавилова — Черенкова разработаны широко используемые экспериментальные методы для регистрации частиц высоких энергий и определения их свойств (направление движения, величина и знак заряда, энергия). Счетчики для регистрации заряженных частиц, в которых используется излучение Вавилова — Черенкова, получили название **черенковских счетчиков**. В этих счетчиках частица регистрируется практически мгновенно (при движении заряженной частицы в среде со скоростью, превышающей фазовую скорость света в данной среде, возникает световая вспышка, преобразуемая с помощью фотоэлектронного умножителя (см. § 105) в импульс тока). Это

позволило в 1955 г. итальянскому физика Э. Серге (р. 1905) открыть в черенковском счетчике короткоживущую античастицу — антипротон.

## Поляризация света

### Естественный и поляризованный свет

Следствием теории Максвелла (см. § 162) является поперечность световых волн: векторы напряженностей электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей волны взаимно перпендикулярны и колеблются перпендикулярно вектору скорости  $\mathbf{v}$  распространения волны (перпендикулярно лучу). Поэтому для описания закономерностей поляризации света достаточно знать поведение лишь одного из векторов. Обычно все рассуждения ведутся относительно **светового вектора** — вектора напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля (это название обусловлено тем, что при действии света на вещество основное значение имеет электрическая составляющая поля волны, действующая на электроны в атомах вещества).

Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая телом в целом, характеризуется всевозможными равновероятными колебаниями светового вектора (рис. 272, а; луч перпендикулярен плоскости рисунка). В данном случае равномерное распределение векторов  $\mathbf{E}$  объясняется большим числом атомарных излучателей, а равенство амплитудных значений векторов  $\mathbf{E}$  — одинаковой (в среднем) интенсивностью излучения каждого из атомов. Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора  $\mathbf{E}$  (и, следовательно,  $\mathbf{H}$ ) называется **естественным**.

Свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, называется **поляризованным**. Так, если в результате каких-либо внешних воздействий появляется преимущественное (но не исключительное!) направление колебаний вектора  $\mathbf{E}$  (рис. 272, б), то имеем дело с **частично поляризованным светом**. Свет, в котором вектор  $\mathbf{E}$  (и, следовательно,  $\mathbf{H}$ ) колеблется только в одном направлении, перпендикулярном лучу (рис. 272, в), называется **плоскополяризованным (линейно поляризованным)**.

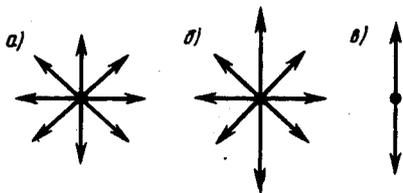


Рис. 272

- Возможна ли поляризация для продольных волн? Почему?
- Что называется естественным светом? плоскополяризованным светом? частично поляризованным светом? эллиптически поляризованным светом?

Плоскость, проходящая через направление колебаний светового вектора плоскополяризованной волны и направление распространения этой волны, называется **плоскостью поляризации**. Плоскополяризованный свет является предельным случаем **эллиптически поляризованного света** — света, для которого вектор  $\mathbf{E}$  (вектор  $\mathbf{H}$ ) изменяется со временем так, что его конец описывает эллипс, лежащий в плоскости, перпендикулярной лучу. Если эллипс поляризации вырождается (см. § 145) в прямую (при разности фаз  $\varphi$ , равной нулю или  $\pi$ ), то имеем дело с рассмотренным выше плоскополяризованным светом, если в окружность (при  $\varphi = \pm\pi/2$  и равенстве амплитуд складываемых волн), то имеем дело с **циркулярно поляризованным (поляризованным по кругу) светом**.

**Степень поляризации** называется величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где  $I_{\max}$ , и  $I_{\min}$  — соответственно максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором. Для естественного света  $I_{\max} = I_{\min}$  и  $P = 0$ , для плоскополяризованного  $I_{\min} = 0$  и  $P = 1$ .

Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя так называемые **поляризаторы**, пропускающие колебания только определенного направления (например, пропускающие колебания, параллельные главной плоскости поляризатора, и полностью задерживающие колебания, перпендикулярные этой плоскости). В качестве поляризаторов могут быть использованы среды, анизотропные в отношении колебаний вектора  $\mathbf{E}$ , например кристаллы (их

анизотропия известна, см. § 70). Из природных кристаллов, давно используемых в качестве поляризатора, следует отметить турмалин.

Рассмотрим классические опыты с турмалином (рис. 273). Направим естественный свет перпендикулярно пластинке турмалина  $T_1$ , вырезанной параллельно так называемой **оптической оси**  $OO'$  (см. § 192). Вращая кристалл  $T_1$  вокруг направления луча, никаких изменений интенсивности прошедшего через турмалин света не наблюдаем. Если на пути луча поставить вторую пластинку турмалина  $T_2$  и вращать ее вокруг направления луча, то интенсивность света, прошедшего через пластинки, меняется в зависимости от угла  $\alpha$  между оптическими осями кристаллов **по закону Малюса\***:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (190.1)$$

где  $I_0$  и  $I$  — соответственно интенсивности света, падающего на второй кристалл и вышедшего из него.

\* Э. Малюс (1775—1812) — французский физик.

Следовательно, интенсивность прошедшего через пластинки света изменится от минимума (полное гашение света) при  $\alpha = \pi/2$  (оптические оси пластинок перпендикулярны) до максимума при  $\alpha = 0$  (оптические оси пластинок параллельны). Однако, как это следует из рис. 274, амплитуда  $E$  световых колебаний, прошедших через пластинку  $T_2$ , будет меньше амплитуды световых колебаний  $E_0$ , падающих на пластинку  $T_2$ .

$$E = E_0 \cos \alpha.$$

Так как интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, то и получается выражение (190.1). Результаты опытов с кристаллами турмалина объясняются довольно просто, если исходить из изложенных выше условий пропускания света поляризатором. Первая пластинка турмалина пропускает колебания только определенного направления (на рис. 273 это направление показано стрелкой  $AB$ ), т. е. преобразует естественный свет в плоскополяризованный. Вторая же пластинка турмалина в зависимости от ее ориентации из поляризованного света пропускает большую или меньшую его часть, которая соответствует компоненту  $E$ , параллельному оси второго турмалина. На рис. 273 обе пластинки расположены так, что направления пропускаемых ими колебаний  $AB$  и  $A'B'$  перпендикулярны друг другу. В данном случае  $T_1$  пропускает колебания, направленные по  $AB$ , а  $T_2$  их полностью гасит, т. е. за вторую пластинку турмалина свет не проходит.

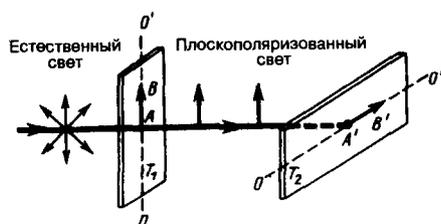


Рис. 273

- Как изменяется интенсивность света за поляризатором при его вращении вокруг пучка естественного света?
- Как практически отличить плоскополяризованный свет от естественного?

Пластинка  $T_1$ , преобразующая естественный свет в плоскополяризованный, является **поляризатором**. Пластинка  $T_2$ , служащая для анализа степени поляризации света, называется **анализатором**. Обе пластинки совершенно одинаковы (их можно поменять местами).

Если пропустить естественный свет через два поляризатора, главные плоскости которых образуют угол  $\alpha$ , то из первого выйдет плоскополяризованный свет, интенсивность которого  $I_0 = 1/2 I_{\text{ест}}$ , из второго, согласно (190.1), выйдет свет интенсивностью  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ . Следовательно, интенсивность света, прошедшего через два поляризатора,

$$I = 1/2 I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha,$$

откуда  $I_0 = 1/2 I_{\text{ест}}$  (поляризаторы параллельны) и  $I_{\text{мин}} = 0$  (поляризаторы скрещены).

### Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

Если естественный свет падает на границу раздела двух диэлектриков (например, воздуха и стекла), то часть его отражается, а часть преломляется и распространяется во второй среде. Устанавливая на пути отраженного и преломленного лучей анализатор (например, турмалин), убеждаемся в том, что отраженный и преломленный лучи частично поляризованы: при поворачивании анализатора вокруг

лучей интенсивность света периодически усиливается и ослабевает (полного гашения не наблюдается!). Дальнейшие исследования показали, что в отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости падения (на рис. 275 они обозначены точками), в преломленном — колебания, параллельные плоскости падения (изображены стрелками).

Степень поляризации (степень выделения световых волн с определенной ориентацией электрического (и магнитного) вектора) зависит от угла падения лучей и показателя преломления. Шотландский физик **Д. Брюстер** (1781—1868) установил **закон**, согласно которому при угле падения  $i_B$  (угол Брюстера), определяемого соотношением

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}$$

( $n_{21}$  — показатель преломления второй среды относительно первой), *отраженный луч является плоскополяризованным* (содержит только колебания, перпендикулярные плоскости падения) (рис. 276). *Преломленный же луч при угле падения  $i_B$  поляризуется максимально, но не полностью.*

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи *взаимно перпендикулярны* ( $\operatorname{tg} i_B = \sin i_B / \cos i_B$ ,  $n_{21} = \sin i_B / \sin i_2$  ( $i_2$  — угол преломления), откуда  $\cos i_B = \sin i_2$ ). Следовательно,  $i_B + i_2 = \pi/2$ , но  $i'_B = i_B$  (закон отражения), поэтому  $i'_B + i_2 = \pi/2$ .

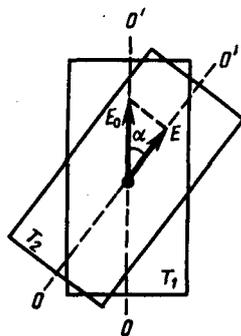


Рис. 274

- Чем замечателен угол Брюстера?
- Покажите, что при выполнении закона Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.
- Интенсивность естественного света, пропущенного через два поляризатора, уменьшилась вдвое. Как ориентированы поляризаторы?

Степень поляризации отраженного и преломленного света при различных углах падения можно рассчитать из уравнений Максвелла, если учесть граничные условия для электромагнитного поля на границе раздела двух изотропных диэлектриков (так называемые **формулы Френеля**).

Степень поляризации преломленного света может быть значительно повышена (многократным преломлением при условии падения света каждый раз на границу раздела под углом Брюстера). Если, например, для стекла ( $n = 1,53$ ) степень поляризации преломленного луча составляет  $\approx 15\%$ , то после преломления на 8—10 наложенных друг на друга стеклянных пластинок вышедший из такой системы свет будет практически полностью поляризованным. Такая совокупность пластинок называется **стопой**. Стопа может служить для анализа поляризованного света как при его отражении, так и при его преломлении.

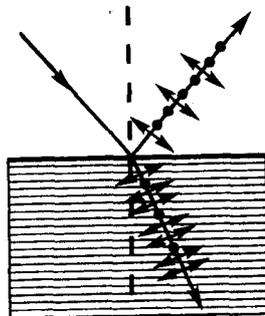


Рис. 275

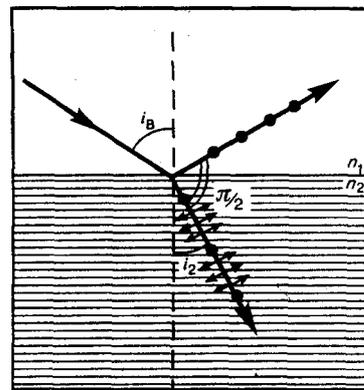


Рис. 276

### Двойное лучепреломление

Все прозрачные кристаллы (кроме кристаллов кубической системы, которые оптически изотропны) обладают способностью **двойного лучепреломления**, т. е. раздваивания каждого падающего на них светового пучка. Это явление, в 1669 г. впервые обнаруженное датским ученым Э. Бартолином (1625—1698) для исландского шпата (разновидность кальцита  $\text{CaCO}_3$ ), объясняется особенностями распространения света в анизотропных средах и непосредственно вытекает из уравнений Максвелла.

Если на толстый кристалл исландского шпата направить узкий пучок света, то из кристалла выйдут два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу (рис. 277). Даже в том случае, когда первичный пучок падает на кристалл нормально, преломленный пучок разделяется на два, причем один из них является продолжением первичного, а второй отклоняется (рис. 278). Второй из этих лучей получил название **необыкновенного** ( $e$ ), а первый — **обыкновенного** ( $o$ ).

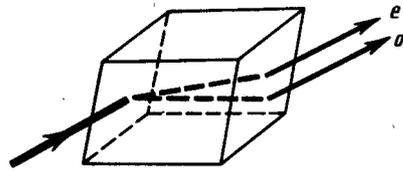


Рис. 277

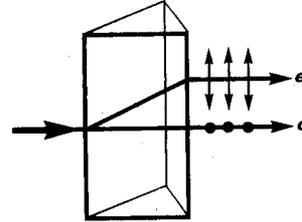


Рис. 278

В кристалле исландского шпата имеется единственное направление, вдоль которого двойное лучепреломление не наблюдается. Направление в оптически анизотропном кристалле, по которому луч света распространяется, не испытывая двойного лучепреломления, называется **оптической осью кристалла**. В данном случае речь идет именно о *направлении*, а не о прямой линии, проходящей через какую-то точку кристалла. Любая прямая, проходящая параллельно данному направлению, является *оптической осью кристалла*. Кристаллы в зависимости от типа их симметрии бывают одноосные и двуосные, т.е. имеют одну или две оптические оси (к первым и относится исландский шпат).

Исследования показывают, что вышедшие из кристалла лучи плоскополяризованы во взаимно перпендикулярных плоскостях. Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется **главной плоскостью** (или **главным сечением** кристалла). Колебания светового вектора (вектора напряженности  $\mathbf{E}$  электрического поля) в обыкновенном луче происходят перпендикулярно главной плоскости, в необыкновенном — в главной плоскости (рис. 278).

Неодинаковое преломление обыкновенного и необыкновенного лучей указывает на различие для них показателей преломления. Обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью и, следовательно, показатель преломления  $n_o$  для него есть величина постоянная. Для необыкновенного же луча угол между направлением колебаний светового вектора и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому необыкновенные лучи распространяются по различным направлениям с разными скоростями. Следовательно, показатель преломления  $n_e$  необыкновенного луча является переменной величиной, зависящей от направления луча. Таким образом, обыкновенный луч подчиняется закону преломления (отсюда и название «обыкновенный»), а для необыкновенного луча этот закон не выполняется. После выхода из кристалла, если не принимать во внимание поляризацию во взаимно перпендикулярных плоскостях, эти два луча ничем друг от друга не отличаются.

Как уже рассматривалось, обыкновенные лучи распространяются в кристалле по всем направлениям с одинаковой скоростью  $v_o=c/n_o$ , а необыкновенные — с разной скоростью  $v_e=c/n_e$  (в зависимости от угла между вектором  $\mathbf{E}$  и оптической осью). Для луча, распространяющегося вдоль оптической оси,  $n_o=n_e$ ,  $v_o=v_e$ , т.е. вдоль оптической оси существует только одна скорость распространения света. Различие в  $v_e$  и  $v_o$  для всех направлений, кроме направления оптической оси, и обуславливает явление двойного лучепреломления света в одноосных кристаллах.

Допустим, что в точке  $S$  внутри одноосного кристалла находится точечный источник света. На рис. 279 показано распространение обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле (главная плоскость совпадает с плоскостью чертежа,  $OO'$  — направление оптической оси). Волновой поверхностью обыкновенного луча (он распространяется с  $v_o=\text{const}$ ) является сфера, необыкновенного луча ( $v_e \neq \text{const}$ ) — эллипсоид вращения. Наибольшее расхождение волновых поверхностей обыкновенного и необыкновенного лучей наблюдается в направлении, перпендикулярном оптической оси. Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках их пересечения с оптической осью  $OO'$ . Если  $v_e < v_o$  ( $n_e > n_o$ ), то эллипсоид необыкновенного луча вписан в сферу обыкновенного луча (эллипсоид скоростей вытянут относительно оптической оси) и **одноосный кристалл** называется **положительным** (рис. 279,  $a$ ). Если  $v_e > v_o$  ( $n_e < n_o$ ), то эллипсоид описан вокруг сферы (эллипсоид

скоростей растянут в направлении, перпендикулярном оптической оси) и одноосный кристалл называется **отрицательным** (рис. 279, б). Рассмотренный выше исландский шпат относится к отрицательным кристаллам.

### Поляризационные призмы и поляриды

В основе работы поляризационных приспособлений, служащих для получения поляризованного света, лежит явление двойного лучепреломления. Наиболее часто для этого применяются **призмы** и **поляриды**. Призмы делятся на два класса:

- 1) призмы, дающие только плоскополяризованный луч (**поляризационные призмы**);
- 2) призмы, дающие два поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях луча (**двойкопреломляющие призмы**).

Поляризационные призмы построены по принципу полного отражения (см. § 165) одного из лучей (например, обыкновенного) от границы раздела, в то время как другой луч с другим показателем преломления проходит через эту границу. Типичным представителем поляризационных призм является **призма Николя**

\* У. Николь (1768—1851) — шотландский ученый.

**Двойкопреломляющие призмы** используют различие в показателях преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, чтобы развести их возможно дальше друг от друга. Примером двойкопреломляющих призм могут служить призмы из исландского шпата и стекла, призмы, составленные из двух призм из исландского шпата со взаимно перпендикулярными оптическими осями.

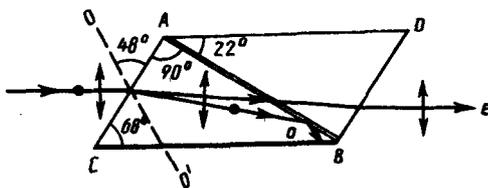


Рис. 281

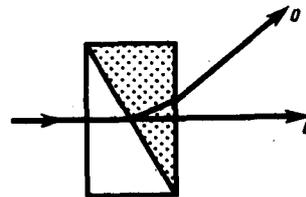


Рис. 282

Двойкопреломляющие кристаллы обладают свойством **дихроизма**, т. е. различного поглощения света в зависимости от ориентации электрического вектора световой волны, и называются **дихроичными кристаллами**. Примером сильно дихроичного кристалла является турмалин, в котором из-за сильного селективного поглощения обыкновенного луча уже при толщине пластинки 1 мм из нее выходит только необыкновенный луч. Такое различие в поглощении, зависящее, кроме того, от длины волны, приводит к тому, что при освещении дихроичного кристалла белым светом кристалл по разным направлениям оказывается различно окрашенным.

Поляриды именуются, например, для защиты от ослепляющего действия солнечных лучей и фар встречного автотранспорта.

Разные кристаллы создают различное по значению и направлению двойное лучепреломление, поэтому, пропуская через них поляризованный свет и измеряя изменение его интенсивности после прохождения кристаллов, можно определить их оптические характеристики и производить **минералогический анализ**. Для этой цели используются **поляризационные микроскопы**.

### Искусственная оптическая анизотропия

Двойное лучепреломление имеет место в естественных анизотропных средах (см. § 192). Существуют, однако, различные способы получения **искусственной оптической анизотропии**, т. е. сообщения оптической анизотропии естественно изотропным веществам.

Оптически изотропные вещества становятся оптически анизотропными под действием: 1) одностороннего сжатия или растяжения (кристаллы кубической системы, стекла и др.); 2) электрического поля (**эффект Керра\***; жидкости, аморфные тела, газы); 3) магнитного поля

(жидкости, стекла, коллоиды). В перечисленных случаях вещество приобретает свойства одноосного кристалла, оптическая ось которого совпадает с направлением деформации, электрического или магнитного полей соответственно указанным выше воздействиям.

\* Д. Керр (1824—1904) — шотландский физик.

Мерой возникающей оптической анизотропии служит разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей в направлении, перпендикулярном оптической оси:

$$\begin{aligned} n_o - n_e &= k_1 \sigma \quad (\text{в случае деформации}); \\ n_o - n_e &= k_2 E^2 \quad (\text{в случае электрического поля}); \\ n_o - n_e &= k_3 H^2 \quad (\text{в случае магнитного поля}), \end{aligned} \quad (195.1)$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — постоянные, характеризующие вещество,  $\sigma$  — нормальное напряжение (см. § 21),  $E$  и  $H$  — соответственно напряженность электрического и магнитного полей.

где  $B = k_2/\lambda$  — постоянная Керра.

**Эффект Керра** — оптическая анизотропия веществ под действием электрического поля — объясняется различной поляризуемостью молекул жидкости по разным направлениям. Это явление практически безынерционно, т. е. время перехода вещества из изотропного состояния в анизотропное при включении поля (и обратно) составляет приблизительно  $10^{-10}$  с. Поэтому ячейка Керра служит идеальным световым затвором и применяется в быстропотекающих процессах (звукозапись, воспроизводство звука, скоростная фото- и киносъемка, изучение скорости распространения света и т. д.), в оптической локации, в оптической телефонии и т. д.

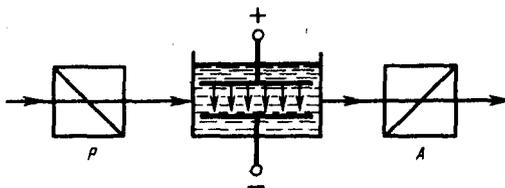


Рис. 284

- Объясните действие светового затвора ячейки Керра в сочетании с поляризатором и анализатором.
- Что такое эффект Керра? Какова физическая причина его возникновения?

Искусственная анизотропия под действием механических воздействий позволяет исследовать напряжения, возникающие в прозрачных телах. В данном случае о степени деформации отдельных участков изделия (например, остаточных деформаций в стекле при закалке) судят по распределению в нем окраски. Так как применяемые обычно в технике материалы (металлы) непрозрачны, то исследование напряжений производят на прозрачных моделях, а потом делают соответствующий пересчет на проектируемую конструкцию.

### Вращение плоскости поляризации

Некоторые вещества (например, из твердых тел — кварц, сахар, киноварь, из жидкостей — водный раствор сахара, винная кислота, скипидар), называемые **оптически активными**, обладают способностью вращать плоскость поляризации.

Вращение плоскости поляризации можно наблюдать на следующем опыте (рис. 285). Если между скрещенными поляризатором  $P$  и анализатором  $A$ , дающими темное поле зрения, поместить оптически активное вещество (например, кювету с раствором сахара), то поле зрения анализатора просветляется. При повороте анализатора на некоторый угол  $\varphi$  можно вновь получить темное поле зрения. Угол  $\varphi$  и есть угол, на который оптически активное вещество поворачивает плоскость поляризации света, прошедшего через поляризатор. Так как поворотом анализатора можно получить темное поле зрения, то свет, прошедший через оптически активное вещество, является плоскополяризованным.

Опыт показывает, что угол поворота плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей

$$\varphi = \alpha d,$$

для оптически активных растворов

$$\varphi = [\alpha] C d, \quad (196.1)$$

где  $d$  — расстояние, пройденное светом в оптически активном веществе,  $\alpha([\alpha])$  — так называемое **удельное вращение**, численно равное углу поворота плоскости поляризации света слоем оптически

активного вещества единичной толщины (единичной концентрации — для растворов),  $C$  — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе,  $\text{кг/м}^3$ . Удельное вращение зависит от природы вещества, температуры и длины волны света в вакууме.

Опыт показывает, что все вещества, оптически активные в жидком состоянии, обладают таким же свойством и в кристаллическом состоянии. Однако если вещества активны в кристаллическом состоянии, то не всегда активны в жидком (например, расплавленный кварц). Следовательно, оптическая активность обуславливается как строением молекул вещества (их асимметрией), так и особенностями расположения частиц в кристаллической решетке.

**Оптически активные вещества** в зависимости от направления вращения плоскости поляризации разделяются на **право-** и **левоповорачивающие**. В первом случае плоскость поляризации, если смотреть навстречу лучу, вращается вправо (по часовой стрелке), во втором — влево (против часовой стрелки). Вращение плоскости поляризации объяснено О. Френелем (1817 г.). Согласно теории Френеля, скорость распространения света в оптически активных веществах различна для лучей, поляризованных по кругу вправо и влево.

Явление вращения плоскости поляризации и, в частности, формула (196.1) лежат в основе точного метода определения концентрации растворов оптически активных веществ, называемого **поляризиметрией (сахариметрией)**. Для этого используется установка, показанная на рис. 285. По найденному углу поворота плоскости поляризации  $\varphi$  и известному значению  $[\alpha]$  из (196.1) находится концентрация растворенного вещества.

Впоследствии М. Фарадеем было обнаружено вращение плоскости поляризации в оптически неактивных телах, возникающее под действием магнитного поля. Это явление получило название **эффект Фарадея (или магнитного вращения плоскости поляризации)**. Оно имело огромное значение для науки, так как было первым явлением, в котором обнаружилась связь между оптическими и электромагнитными процессами.

## Квантовая природа излучения

### Тепловое излучение и его характеристики

Тела, нагретые до достаточно высоких температур, светятся. Свечение тел, обусловленное нагреванием, называется **тепловым (температурным) излучением**. Тепловое излучение, являясь самым распространенным в природе, совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т. е. за счет его внутренней энергии) и свойственно всем телам при температуре выше 0 К. Тепловое излучение характеризуется сплошным спектром, положение максимума которого зависит от температуры. При высоких температурах излучаются короткие (видимые и ультрафиолетовые) электромагнитные волны, при низких — преимущественно длинные (инфракрасные).

Тепловое излучение — практически единственный вид излучения, который может быть **равновесным**. Предположим, что нагретое (излучающее) тело помещено в полость, ограниченную идеально отражающей оболочкой. С течением времени, в результате непрерывного обмена энергией между телом и излучением, наступит равновесие, т. е. тело в единицу времени будет поглощать столько же энергии, сколько и излучать. Допустим, что равновесие между телом и излучением по какой-либо причине нарушено и тело излучает энергии больше, чем поглощает. Если в единицу времени тело больше излучает, чем поглощает (или наоборот), то температура тела начнет понижаться (или повышаться). В результате будет ослабляться (или возрастать) количество излучаемой телом энергии, пока, наконец, не установится равновесие. Все другие виды излучения неравновесны.

Количественной характеристикой теплового излучения служит **спектральная плотность энергетической светимости (излучательности) тела** — мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$R_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu,T}^{\text{изл}}}{d\nu},$$

где  $dW_{\nu,T}^{\text{изл}}$  — энергия электромагнитного излучения, испускаемого за единицу времени (мощность излучения) с единицы площади поверхности тела в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ .

Единица спектральной плотности энергетической светимости ( $R_{\nu,T}$ ) — джоуль на метр в квадрате ( $\text{Дж}/\text{м}^2$ ).

Записанную формулу можно представить в виде функции длины волны:

$$dW_{\nu, \nu+d\nu}^{\text{нор}} = R_{\nu,T} d\nu = R_{\lambda,T} d\lambda.$$

Так как  $c = \lambda\nu$ , то

$$\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c},$$

где знак минус указывает на то, что с возрастанием одной из величин ( $\nu$  или  $\lambda$ ) другая величина убывает. Поэтому в дальнейшем знак минус будем опускать. Таким образом,

$$R_{\nu,T} = R_{\lambda,T} \frac{\lambda^2}{c}. \quad (197.1)$$

С помощью формулы (197.1) можно перейти от  $R_{\nu,T}$  к  $R_{\lambda,T}$  и наоборот.

Зная спектральную плотность энергетической светимости, можно вычислить **интегральную энергетическую светимость (интегральную излучательность)** (ее называют просто энергетической светимостью тела), просуммировав по всем частотам:

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu,T} d\nu. \quad (197.2)$$

Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется **спектральной поглощательной способностью**

$$A_{\nu,T} = \frac{dW_{\nu, \nu+d\nu}^{\text{нор}}}{dW_{\nu, \nu+d\nu}},$$

показывающей, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , поглощается телом. Спектральная поглощательная способность — величина безразмерная. Величины  $R_{\nu,T}$  и  $A_{\nu,T}$  зависят от природы тела, его термодинамической температуры и при этом различаются для излучений с различными частотами. Поэтому эти величины относят к определенным  $T$  и  $\nu$  (вернее, к достаточно узкому интервалу частот от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ ).

Тело, способное поглощать полностью при любой температуре все падающее на него излучение любой частоты, называется черным. Следовательно, спектральная поглощательная способность черного тела для всех частот и температур тождественно равна единице ( $A_{\nu,T}^{\text{ч}} \equiv 1$ ). Абсолютно черных тел в природе нет, однако такие тела, как сажа, платиновая чернь, черный бархат и некоторые другие, в определенном интервале частот по своим свойствам близки к ним.

Идеальной моделью черного тела является замкнутая полость с небольшим отверстием  $O$ , внутренняя поверхность которой зачернена (рис. 286). Луч света, попавший внутрь такой полости, испытывает многократные отражения от стенок, в результате чего интенсивность вышедшего излучения оказывается практически равной нулю. Опыт показывает, что при размере отверстия, меньшего 0,1 диаметра полости, падающее излучение всех частот полностью поглощается. Вследствие этого открытые окна домов со стороны улицы кажутся черными, хотя внутри комнат достаточно светло из-за отражения света от стен.

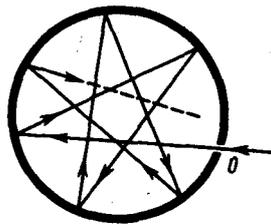


Рис. 286

- На фарфоровой тарелке на светлом фоне имеется темный рисунок. Почему, если ее быстро вынуть из печи, где она нагрелась до высокой температуры, и рассматривать в темноте, наблюдается светлый рисунок на темном фоне?
- Чем отличается серое тело от черного?

Наряду с понятием черного тела используют понятие **серого тела** — тела, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела. Таким образом, для серого тела  $A_{\nu,T}^{\text{с}} = A_T = \text{const} < 1$ .

Исследование теплового излучения сыграло важную роль в создании квантовой теории света, поэтому необходимо рассмотреть законы, которым оно подчиняется.

## Закон Кирхгофа

Кирхгоф, опираясь на второй закон термодинамики и анализируя условия равновесного излучения в изолированной системе тел, установил количественную связь между спектральной плотностью энергетической светимости и спектральной поглотательной способностью тел. Отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглотательной способности не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры (**закон Кирхгофа**):

$$\frac{R_{\nu,T}}{A_{\nu,T}} = r_{\nu,T}. \quad (198.1)$$

Для черного тела  $A_{\nu,T}^{\text{ч}} \equiv 1$ , поэтому из закона Кирхгофа (см. (198.1)) вытекает, что  $R_{\nu,T}$  для черного тела равна  $r_{\nu,T}$ . Таким образом, **универсальная функция Кирхгофа**  $r_{\nu,T}$  есть не что иное, как *спектральная плотность энергетической светимости черного тела*. Следовательно, согласно закону Кирхгофа, для всех тел отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглотательной способности равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела *при той же температуре и частоте*.

Из закона Кирхгофа следует, что спектральная плотность энергетической светимости любого тела в любой области спектра всегда меньше спектральной плотности энергетической светимости черного тела (при тех же значениях  $T$  и  $\nu$ ), так как  $A_{\nu,T} < 1$  и поэтому  $R_{\nu,T} < r_{\nu,T}$ . Кроме того, из (198.1) вытекает, что если тело при данной температуре  $T$  не поглощает электромагнитные волны в интервале частот от  $\nu$  до  $\nu+d\nu$ , то оно их в этом интервале частот при температуре  $T$  и не излучает, так как при  $A_{\nu,T} = 0$   $R_{\nu,T} = 0$ .

Используя закон Кирхгофа, выражение для энергетической светимости тела (197.2) можно записать в виде

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu,T} r_{\nu,T} d\nu.$$

Для серого тела

$$R_T^{\text{с}} = A_T \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = A_T R_e, \quad (198.2)$$

где

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu$$

— **энергетически светимость черного тела** (зависит только от температуры).

Закон Кирхгофа описывает только тепловое излучение, являясь настолько характерным для него, что может служить надежным критерием для определения природы излучения. Излучение, которое закону Кирхгофа не подчиняется, не является тепловым.

## Законы Стефана — Больцмана и смещения Вина

Из закона Кирхгофа (см. (198.1)) следует, что спектральная плотность энергетической светимости черного тела является универсальной функцией, поэтому нахождение ее явной зависимости от частоты и температуры является важной задачей теории теплового излучения.

Австрийский физик И. Стефан (1835—1893), анализируя экспериментальные данные (1879), и Л. Больцман, применяя термодинамический метод (1884), решили эту задачу лишь частично, установив зависимость энергетической светимости  $R_e$  от температуры. Согласно **закону Стефана — Больцмана**,

$$R_e = \sigma T^4, \quad (199.1)$$

т.е. энергетическая светимость черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры;  $\sigma$  — постоянная Стефана — Больцмана: ее экспериментальное значение равно  $5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>).

Закон Стефана — Больцмана, определяя зависимость  $R_e$  от температуры, не дает ответа относительно спектрального состава излучения черного тела. Из экспериментальных кривых зависимости функции  $r_{\lambda,T}$  от длины волны  $\lambda$  ( $r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T}$ ) при различных температурах (рис. 287) следует, что распределение энергии в спектре черного тела является неравномерным. Все кривые имеют явно выраженный

максимум, который по мере повышения температуры смещается в сторону более коротких волн. Площадь, ограниченная кривой зависимости  $r_{\lambda,T}$  от  $\lambda$  и осью абсцисс, пропорциональна энергетической светимости  $R_e$  черного тела и, следовательно, по закону Стефана — Больцмана, четвертой степени температуры.

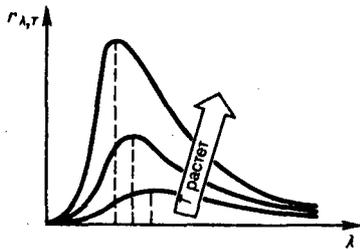


Рис. 287

- В чем заключается физический смысл универсальной функции Кирхгофа?
- Как и во сколько раз изменится энергетическая светимость черного тела, если его термодинамическая температура уменьшится вдвое?
- Как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$  черного тела с повышением температуры?

Немецкий физик В. Вин (1864—1928), опираясь на законы термо- и электродинамики, установил зависимость длины волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующей максимуму функции  $r_{\lambda,T}$ , от температуры  $T$ . Согласно **закону смещения Вина**,

$$\lambda_{\max} = b/T, \quad (199.2)$$

т. е. длина волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующая максимальному значению спектральной плотности энергетической светимости  $r_{\lambda,T}$  черного тела, обратно пропорциональна его термодинамической температуре,  $b$  — постоянная Вина; ее экспериментальное значение равно  $2,9 \cdot 10^{-3}$  м·К. Выражение (199.2) потому называют **законом смещения Вина**, что оно показывает смещение положения максимума функции  $r_{\lambda,T}$  по мере возрастания температуры в область коротких длин волн. Закон Вина объясняет, почему при понижении температуры нагретых тел в их спектре все сильнее преобладает длинноволновое излучение (например, переход белого каления в красное при остывании металла).

### Формулы Рэлея — Джинса и Планка

Из рассмотрения законов Стефана — Больцмана и Вина следует, что термодинамический подход к решению задачи о нахождении универсальной функции Кирхгофа  $r_{\nu,T}$  не дал желаемых результатов. Следующая строгая попытка теоретического вывода зависимости  $r_{\nu,T}$  принадлежит английским ученым Д. Рэлею и Д. Джинсу (1877—1946), которые применили к тепловому излучению методы статистической физики, воспользовавшись классическим законом равномерного распределения энергии по степеням свободы.

**Формула Рэлея — Джинса** для спектральной плотности энергетической светимости черного тела имеет вид

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle \varepsilon \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (200.1)$$

где  $\langle \varepsilon \rangle = kT$  — средняя энергия осциллятора с собственной частотой  $\nu$ . Для осциллятора, совершающего колебания, средние значения кинетической и потенциальной энергий одинаковы (см. § 50), поэтому средняя энергия каждой колебательной степени свободы  $\langle \varepsilon \rangle = kT$ .

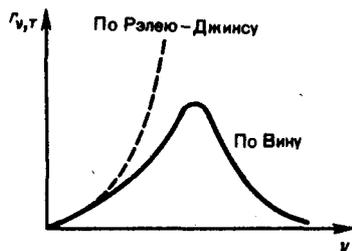


Рис. 288

- Нарисуйте и сопоставьте кривые  $r_{\nu,T}$  и  $r_{\lambda,T}$ .
- Используя формулу Планка, найдите постоянную Стефана — Больцмана.
- При каких условиях из формулы Планка получаются закон смещения Вина и формула Рэлея — Джинса?

В области больших частот хорошее согласие с опытом дает **формула Вина** (закон излучения Вина), полученная им из общих теоретических соображений:

$$r_{\nu,T} = C\nu^3 A e^{-A\nu/T},$$

где  $r_{\nu,T}$  — спектральная плотность энергетической светимости черного тела,  $C$  и  $A$  — постоянные величины. В современных обозначениях с использованием постоянной Планка, которая в то время еще не была известна, закон излучения Вина может быть записан в виде

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/(kT)}.$$

Правильное, согласующееся с опытными данными выражение для спектральной плотности энергетической светимости черного тела было найдено в 1900 г. немецким физиком М. Планком. Для этого ему пришлось отказаться от установившегося положения классической физики, согласно которому энергия любой системы может изменяться *непрерывно*, т. е. может принимать любые сколь угодно близкие значения. Согласно выдвинутой Планком **квантовой гипотезе**, атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а определенными порциями — квантами, причем энергия кванта пропорциональна частоте колебания (см. (170.3)):

$$\varepsilon_0 = h\nu = hc/\lambda, \quad (200.2)$$

где  $h = 6,625 \cdot 10^{-34}$  Дж·с — **постоянная Планка**. Так как излучение испускается порциями, то энергия осциллятора  $\varepsilon$  может принимать лишь определенные *дискретные значения*, кратные целому числу элементарных порций энергии  $\varepsilon_0$ :

$$\varepsilon = n h \nu \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

В данном случае среднюю энергию  $\langle \varepsilon \rangle$  осциллятора нельзя принимать равной  $kT$ . В приближении, что распределение осцилляторов по возможным дискретным состояниям подчиняется распределению Больцмана (§ 45), средняя энергия осциллятора

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1},$$

а спектральная плотность энергетической светимости черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Таким образом, Планк вывел для универсальной функции Кирхгофа формулу

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(kT)} - 1}, \quad (200.3)$$

которая блестяще согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения черного тела *во всем интервале частот и температур*. Теоретический вывод этой формулы М. Планк изложил 14 декабря 1900 г. на заседании Немецкого физического общества. Этот день стал датой рождения квантовой физики.

В области малых частот, т. е. при  $h\nu \ll kT$  (энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения  $kT$ ), формула Планка (200.3) совпадает с формулой Рэля — Джинса (200.1). Подставляя последнее выражение в формулу Планка (200.3), найдем, что

$$r_{\nu,T} \approx \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/(kT)} = \frac{2\pi \nu^2}{c^2} kT,$$

т. е. получили формулу Рэля — Джинса (200.1).

Из формулы Планка можно получить закон Стефана—Больцмана.

Таким образом, действительно формула Планка позволяет получить закон Стефана — Больцмана (ср. формулы (199.1) и (200.4)

Из формулы Планка, зная универсальные постоянные  $h$ ,  $k$  и  $c$ , можно вычислить постоянные Стефана — Больцмана  $\sigma$  и Вина  $b$ . С другой стороны, зная экспериментальные значения  $\sigma$  и  $b$ , можно вычислить значения  $h$  и  $k$  (именно так и было впервые найдено числовое значение постоянной Планка).

Таким образом, формула Планка не только хорошо согласуется с экспериментальными данными, но и содержит в себе частные законы теплового излучения, а также позволяет вычислить постоянные в законах теплового излучения. Следовательно, формула Планка является полным решением основной задачи теплового излучения, поставленной Кирхгофом. Ее решение стало возможным лишь благодаря революционной квантовой гипотезе Планка.

### Виды фотоэлектрического эффекта. Законы внешнего фотоэффекта

Гипотеза Планка, блестяще решившая задачу теплового излучения черного тела, получила подтверждение и дальнейшее развитие при объяснении фотоэффекта — явления, открытие и

исследование которого сыграло важную роль в становлении квантовой теории. Различают фотоэффект внешний, внутренний и вентильный. **Внешним фотоэлектрическим эффектом (фотоэффектом)** называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Внешний фотоэффект наблюдается в твердых телах (металлах, полупроводниках, диэлектриках), а также в газах на отдельных атомах и молекулах (фотоионизация). Фотоэффект обнаружен (1887 г.) Г. Герцем, наблюдавшим усиление процесса разряда при облучении искрового промежутка ультрафиолетовым излучением.

Первые фундаментальные исследования фотоэффекта выполнены русским ученым А. Г. Столетовым. Принципиальная схема для исследования фотоэффекта приведена на рис. 289. Два электрода (катод  $K$  из исследуемого металла и анод  $A$  — в схеме Столетова применялась металлическая сетка) в вакуумной трубке подключены к батарее так, что с помощью потенциометра  $R$  можно изменять не только значение, но и знак подаваемого на них напряжения. Ток, возникающий при освещении катода монохроматическим светом (через кварцевое окошко), измеряется включенным в цепь миллиамперметром. Облучая катод светом различных длин волн, Столетов установил следующие закономерности, не утратившие своего значения до нашего времени: 1) наиболее эффективное действие оказывает ультрафиолетовое излучение; 2) под действием света вещество теряет только отрицательные заряды; 3) сила тока, возникающего под действием света, прямо пропорциональна его интенсивности.

Дж. Дж. Томсон в 1898 г. измерил удельный заряд испускаемых под действием света частиц (по отклонению в электрическом и магнитном полях). Эти измерения показали, что под действием света вырываются электроны.

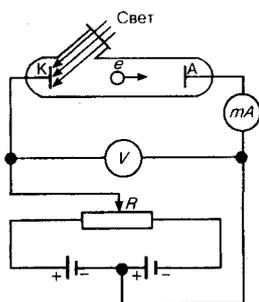


Рис. 289

- Почему фотоэлектрические измерения весьма чувствительны к природе и состоянию поверхности фотокатода?
- Может ли золотая пластинка служить фотосопротивлением?
- Как при заданной частоте света изменится фототок насыщения с уменьшением освещенности катода?
- Как из опытов по фотоэффекту определяется постоянная Планка?

**Внутренний фотоэффект** — это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению **фотопроводимости** (повышению электропроводности полупроводника или диэлектрика при его освещении) или к возникновению э.д.с.

**Вентильный фотоэффект**, являющийся разновидностью внутреннего фотоэффекта, — возникновение э.д.с. (фото-э.д.с.) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля). Вентильный фотоэффект открывает, таким образом, пути для прямого преобразования солнечной энергии в электрическую.

На рис. 289 приведена экспериментальная установка для исследования **вольт-амперной характеристики фотоэффекта** — зависимости фототока  $I$ , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения  $U$  между электродами. Такая зависимость, соответствующая двум различным освещенностям  $E$ , катода (частота света в обоих случаях одинакова), приведена на рис. 290. По мере увеличения  $U$  фототок постепенно возрастает, т. е. все большее число фотоэлектронов достигает анода. Пологий характер кривых показывает, что электроны вылетают из катода с различными скоростями. Максимальное значение тока  $I_{\text{нас}}$  — **фототок насыщения** — определяется таким значением  $U$ , при котором все электроны, испускаемые катодом, достигают анода:

$$I_{\text{нас}} = en,$$

где  $n$  — число электронов, испускаемых катодом в 1 с.  
(202.1)

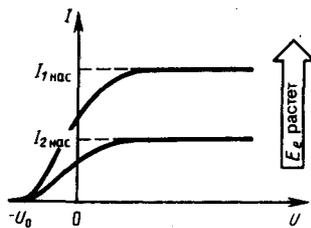


Рис. 290

- При замене одного металла другим длина волны, соответствующая красной границе, уменьшается. Что можно сказать о работе выхода этих металлов?
- Как с помощью уравнения Эйнштейна объяснить I и II законы фотоэффекта?
- Нарисуйте и объясните вольт-амперные характеристики, соответствующие двум различным освещенностям катода при заданной частоте света и двум различным частотам при заданной освещенности.

Из вольт-амперной характеристики следует, что при  $U=0$  фототок не исчезает. Следовательно, электроны, выбитые светом из катода, обладают некоторой начальной скоростью  $v$ , а значит, и отличной от нуля кинетической энергией и могут достигнуть анода без внешнего поля. Для того чтобы фототок стал равным нулю, необходимо приложить **задерживающее напряжение**  $U_0$ . При  $U=U_0$  ни один из электронов, даже обладающий при вылете из катода максимальной скоростью  $v_{\max}$ , не может преодолеть задерживающего поля и достигнуть анода. Следовательно,

$$mv_{\max}^2/2 = eU_0,$$

т. е., измерив задерживающее напряжение  $U_0$ , можно определить максимальные значения скорости и кинетической энергии фотоэлектронов.

При изучении вольт-амперных характеристик разнообразных материалов (важна чистота поверхности, поэтому измерения проводятся в вакууме и на свежих поверхностях) при различных частотах падающего на катод излучения и различных энергетических освещенностях катода и обобщения полученных данных были установлены следующие **три закона внешнего фотоэффекта**.

- I. **Закон Столетова:** при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света (сила фототока насыщения пропорциональна энергетической освещенности  $E_e$  катода).
- II. Максимальная начальная скорость (максимальная начальная кинетическая энергия) фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой  $\nu$ .
- III. Для каждого вещества существует *красная граница* фотоэффекта, т. е. минимальная частота  $\nu_0$  света (зависящая от химической природы вещества и состояния его поверхности), ниже которой фотоэффект невозможен.

Качественное объяснение фотоэффекта с волновой точки зрения на первый взгляд не должно было бы представлять трудностей. Действительно, под действием поля световой волны в металле возникают вынужденные колебания электронов, амплитуда которых (например, при резонансе) может быть достаточной для того, чтобы электроны покинули металл; тогда и наблюдается фотоэффект. Кинетическая энергия вырываемого из металла электрона должна была бы зависеть от интенсивности падающего света, так как с увеличением последней электрону передавалась бы большая энергия. Однако этот вывод противоречит II закону фотоэффекта. Так как, по волновой теории, энергия, передаваемая электронам, пропорциональна интенсивности света, то свет любой частоты, но достаточно большой интенсивности должен был бы вырывать электроны из металла; иными словами, красной границы фотоэффекта не должно быть, что противоречит III закону фотоэффекта. Кроме того, волновая теория не смогла объяснить **безынерционность фотоэффекта**, установленную опытами. Таким образом, фотоэффект необъясним с точки зрения волновой теории света.

### Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта. Экспериментальное подтверждение квантовых свойств света

A. Эйнштейн в 1905 г. показал, что явление фотоэффекта и его закономерности могут быть объяснены на основе предложенной им *квантовой теории фотоэффекта*. Согласно Эйнштейну, свет частотой  $\nu$  не только *испускается*, как это предполагал Планк (см. § 200), но и *распространяется* в пространстве и *поглощается* веществом отдельными порциями (квантами), энергия которых  $\varepsilon_0 = h\nu$ . Таким образом, распространение света нужно рассматривать не как непрерывный волновой процесс, а как поток локализованных в пространстве дискретных световых квантов, движущихся со скоростью  $c$  распространения света в вакууме. Кванты электромагнитного излучения получили название **фотонов**.

По Эйнштейну, каждый квант поглощается только одним электроном. Поэтому число вырванных фотоэлектронов должно быть пропорционально интенсивности света (I закон фотоэффекта). Безынерционность фотоэффекта объясняется тем, что передача энергии при столкновении фотона с электроном происходит почти мгновенно.

Энергия падающего фотона расходуется на совершение электроном работы выхода  $A$  из металла (см. § 104) и на сообщение вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии  $mv_{\max}^2/2$ . По закону сохранения энергии,

$$h\nu = A + mv_{\max}^2/2. \quad (203.1)$$

Уравнение (203.1) называется **уравнением Эйнштейна для внешнего фотоэффекта**.

Уравнение Эйнштейна позволяет объяснить II и III законы фотоэффекта. Из (203.1) непосредственно следует, что максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно возрастает с увеличением частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности (числа фотонов), так как ни  $A$ , ни  $\nu$  от интенсивности света не зависят (II закон фотоэффекта). Так как с уменьшением частоты света кинетическая энергия фотоэлектронов уменьшается (для данного металла  $A = \text{const}$ ), то при некоторой достаточно малой частоте  $\nu = \nu_0$  кинетическая энергия фотоэлектронов станет равной нулю и фотоэффект прекратится (III закон фотоэффекта). Согласно изложенному, из (203.1) получим, что

$$\nu_0 = A/h \quad (203.2)$$

и есть красная граница фотоэффекта для данного металла. Она зависит лишь от работы выхода электрона, т. е. от химической природы вещества и состояния его поверхности.

Выражение (203.1) можно записать, используя (202.1) и (203.2), в виде

$$eU_0 = h(\nu - \nu_0).$$

Уравнение Эйнштейна было подтверждено опытами Милликена. В его приборе (1916 г.) поверхность исследуемого металла подвергалась очистке в вакууме. Исследовалась зависимость максимальной кинетической энергии фотоэлектронов (изменялось задерживающее напряжение  $U_0$  (см. (202.1)) от частоты  $\nu$  и определялась постоянная Планка. В 1926 г. российские физики П. И. Лукирский (1894—1954) и С. С. Прилежаев для исследования фотоэффекта применили **метод вакуумного сферического конденсатора**. Анодом в их установке служили посеребренные стенки стеклянного сферического баллона, а катодом — шарик ( $R \approx 1,5$  см) из исследуемого металла, помещенный в центр сферы. В остальном схема принципиально не отличается от описанной на рис. 289. Такая форма электродов позволила увеличить наклон вольт-амперных характеристик и тем самым более точно определять задерживающее напряжение  $U_0$  (а следовательно, и  $h$ ). Значение  $h$ , полученное из данных опытов, согласуется со значениями, найденными другими методами (по излучению черного тела (§ 200) и по коротковолновой границе сплошного рентгеновского спектра (§ 299)). Все это является доказательством правильности уравнения Эйнштейна, а вместе с тем и его квантовой теории фотоэффекта.

Если интенсивность света очень большая (лазерные пучки; см. § 233), то возможен **многофотонный (нелинейный) фотоэффект**, при котором электрон, испускаемый металлом, может одновременно получить энергию не от одного, а от  $N$  фотонов ( $N=2\div 7$ ). Уравнение Эйнштейна для многофотонного фотоэффекта

$$N h \nu = A + mv_{\max}^2/2.$$

В опытах с фокусируемыми лазерными пучками плотность фотонов очень большая, поэтому электрон может поглотить не один, а несколько фотонов. При этом электрон может приобрести энергию, необходимую для выхода из вещества, даже под действием света с частотой, меньшей красной границы — порога однофотонного фотоэффекта. В результате красная граница смещается в сторону более длинных волн.

Идея Эйнштейна о распространении света в виде потока отдельных фотонов и квантовом характере взаимодействия электромагнитного излучения с веществом подтверждена в 1922 г. опытами А. Ф. Иоффе и Н. И. Добронравова.

### Применение фотоэффекта

На явлении фотоэффекта основано действие фотоэлектронных приборов, получивших разнообразное применение в различных областях науки и техники. В настоящее время практически невозможно указать отрасли производства, где бы не использовались фотоэлементы — приемники излучения, работающие на основе фотоэффекта и преобразующие энергию излучения в электрическую.

Простейшим фотоэлементом с внешним фотоэффектом является **вакуумный фотоэлемент**. Он представляет собой откачанный стеклянный баллон, внутренняя поверхность которого (за исключением окошка для доступа излучения) покрыта фоточувствительным слоем, служащим фотокатодом

Для усиления фототока применяются уже рассмотренные выше (см. рис. 155) **фотоэлектронные умножители**, в которых наряду с фотоэффектом используется явление вторичной электронной эмиссии (см. § 105).

Фотоэлементы с внутренним фотоэффектом, называемые **полупроводниковыми фотоэлементами** или **фотосопротивлениями (фоторезисторами)**, обладают гораздо большей интегральной чувствительностью, чем вакуумные.

Фотоэлементы с вентильным фотоэффектом, называемые **вентильными фотоэлементами (фотоэлементами с запирающим слоем)**,

Кремниевые и другие вентильные фотоэлементы применяются для создания солнечных батарей, непосредственно преобразующих световую энергию в электрическую. Эти батареи уже в течение многих лет работают на космических спутниках и кораблях. К.п.д. этих батарей составляет  $\approx 10\%$  и, как показывают теоретические расчеты, может быть доведен до  $\approx 22\%$ , что открывает широкие перспективы их использования в качестве источников электроэнергии для бытовых и производственных нужд.

Рассмотренные виды фотоэффекта используются также в производстве для контроля, управления и автоматизации различных процессов, в военной технике для сигнализации и локации невидимым излучением, в технике звукового кино, в различных системах связи и т. д.

### Масса и импульс фотона. Давление света

Согласно гипотезе световых квантов Эйнштейна, свет испускается, поглощается и распространяется дискретными порциями (квантами), названными **фотонами**. Энергия фотона  $\varepsilon_0 = h\nu$ . Его масса находится из закона взаимосвязи массы и энергии (см. (40.8)):

$$m_\gamma = h\nu/c^2. \quad (205.1)$$

Фотон — элементарная частица, которая всегда (в любой среде!) движется со скоростью света  $c$  и имеет массу покоя, равную нулю. Следовательно, масса фотона отличается от массы таких элементарных частиц, как электрон, протон и нейтрон, которые обладают отличной от нуля массой покоя и могут находиться в состоянии покоя.

Импульс фотона  $p_\gamma$  получим, если в общей формуле (40.7) теории относительности положим массу покоя фотона  $m_{0\gamma} = 0$ :

$$p_\gamma = \varepsilon_0/c = h\nu/c. \quad (205.2)$$

Из приведенных рассуждений следует, что фотон, как и любая другая частица, характеризуется энергией, массой и импульсом. Выражения (205.1), (205.2) и (200.2) связывают *корпускулярные* характеристики фотона — массу, импульс и энергию — с *волновой* характеристикой света — его частотой  $\nu$ .

Если фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на тело, должен оказывать на него давление. Согласно квантовой теории, давление света на поверхность обусловлено тем, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс.

### Эффект Комптона и его элементарная теория

Наиболее полно корпускулярные свойства света проявляются в эффекте Комптона. Американский физик А. Комптон (1892—1962), исследуя в 1923 г. рассеяние монохроматического рентгеновского излучения веществами с легкими атомами (парафин, бор), обнаружил, что в составе рассеянного излучения наряду с излучением первоначальной длины волны наблюдается также более длинноволновое излучение. Опыты показали, что разность  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$  не зависит от длины волны  $\lambda$  падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния  $\theta$ :

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2(\theta/2), \quad (206.1)$$

где  $\lambda'$  — длина волны рассеянного излучения,  $\lambda_C$  — **комптоновская длина волны** (при рассеянии фотона на электроне  $\lambda_C = 2,426$  пм).

**Эффектом Комптона** называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и  $\gamma$ -излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Этот эффект не укладывается в рамки волновой теории, согласно которой длина волны при рассеянии изменяться не должна: под действием периодического поля световой волны электрон колеблется с частотой поля и поэтому излучает рассеянные волны той же частоты.

Объяснение эффекта Комптона дано на основе квантовых представлений о природе света. Если считать, как это делает квантовая теория, что излучение имеет корпускулярную природу, т. е. представляет собой поток фотонов, то эффект Комптона — результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества (для легких атомов электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому их можно считать свободными). В процессе этого столкновения фотон передает электрону часть своих энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения.

Из приведенных рассуждений следует также, что эффект Комптона не может наблюдаться в видимой области спектра, поскольку энергия фотона видимого света сравнима с энергией связи электрона с атомом, при этом даже внешний электрон нельзя считать свободным.

Эффект Комптона наблюдается не только на электронах, но и на других заряженных частицах, например протонах, однако из-за большой массы протона его отдача «просматривается» лишь при рассеянии фотонов очень высоких энергий.

Как эффект Комптона, так и фотоэффект на основе квантовых представлений обусловлены взаимодействием фотонов с электронами. В первом случае фотон рассеивается, во втором — поглощается. Рассеяние происходит при взаимодействии фотона со свободным электроном, а фотоэффект — со связанными электронами. Можно показать, что при столкновении фотона со свободным электроном не может произойти поглощения фотона, так как это находится в противоречии с законами сохранения импульса и энергии. Поэтому при взаимодействии фотонов со свободными электронами может наблюдаться только их рассеяние, т. е. эффект Комптона.

### Единство корпускулярных и волновых свойств электромагнитного излучения

Рассмотренные в этой главе явления — излучение черного тела, фотоэффект, эффект Комптона — служат доказательством квантовых (корпускулярных) представлений о свете как о потоке фотонов. С другой стороны, такие явления, как интерференция, дифракция и поляризация света, убедительно подтверждают волновую (электромагнитную) природу света. Наконец, давление и преломление света объясняются как волновой, так и квантовой теориями. Таким образом, электромагнитное излучение обнаруживает удивительное единство, казалось бы, взаимоисключающих свойств — непрерывных (волны) и дискретных (фотоны), которые взаимно дополняют друг друга.

Основные уравнения (см. § 205), связывающие корпускулярные свойства электромагнитного излучения (энергия и импульс фотона) с волновыми свойствами (частота или длина волны):

$$\epsilon_{\gamma} = h\nu, \quad p_{\gamma} = h\nu/c = h/\lambda.$$

Более детальное рассмотрение оптических явлений приводит к выводу, что свойства непрерывности, характерные для электромагнитного поля световой волны, не следует противопоставлять свойствам дискретности, характерным для фотонов. Свет, обладая *одновременно* корпускулярными и волновыми свойствами, обнаруживает определенные закономерности в их проявлении. Так, волновые свойства света проявляются в закономерностях его распространения, интерференции, дифракции, поляризации, а корпускулярные — в процессах взаимодействия света с веществом. Чем больше длина волны, тем меньше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются квантовые свойства света (с этим связано, например, существование красной границы фотоэффекта). Наоборот, чем меньше длина волны, тем больше энергия и импульс фотона и тем труднее обнаруживаются волновые свойства света (например, волновые свойства (дифракция) рентгеновского излучения обнаружены лишь после применения в качестве дифракционной решетки кристаллов).

Взаимосвязь между двойственными корпускулярно-волновыми свойствами света можно объяснить, если использовать, как это делает квантовая оптика, *статистический подход* к рассмотрению закономерностей распространения света. Например, дифракция света на щели состоит в том, что при прохождении света через щель происходит *перераспределение* фотонов в пространстве. Так как

вероятность попадания фотонов в различные точки экрана неодинакова, то и возникает дифракционная картина. Освещенность экрана пропорциональна вероятности попадания фотонов на единицу площади экрана. С другой стороны, по волновой теории, освещенность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны в той же точке экрана. Следовательно, *квадрат амплитуды световой волны в данной точке пространства является мерой вероятности попадания фотонов в данную точку.*

## ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ ФИЗИКИ АТОМОВ, МОЛЕКУЛ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

### Теория атома водорода по Бору

#### Модели атома Томсона и Резерфорда

Представление об атомах как неделимых мельчайших частицах вещества («атомос» — неразложимый) возникло еще в античные времена (Демокрит, Эпикур, Лукреций). В средние века, во времена безграничного господства церкви, учение об атомах, будучи материалистическим, естественно, не могло получить признания, а тем более дальнейшего развития. К началу XVIII в. атомистическая теория приобретает все большую популярность, так как к этому времени в работах А. Лавуазье (1743—1794, французский химик), М. В. Ломоносова и Д. Дальтона была доказана реальность существования атомов. Однако в это время вопрос о внутреннем строении атомов даже не возникал, так как атомы по-прежнему считались неделимыми.

Большую роль в развитии атомистической теории сыграл Д. И. Менделеев, разработавший в 1869 г. Периодическую систему элементов, в которой впервые на научной основе был поставлен вопрос о единой природе атомов. Во второй половине XIX в. экспериментально было доказано, что электрон является одной из основных составных частей любого вещества. Эти выводы, а также многочисленные экспериментальные данные привели к тому, что в начале XX в. серьезно встал вопрос о строении атома.

Первая попытка создания на основе накопленных экспериментальных данных модели атома принадлежит Дж. Дж. Томсону (1903). Согласно этой модели, атом представляет собой непрерывно заряженный положительным зарядом шар радиусом порядка  $10^{-10}$  м, внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны; суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара, поэтому атом в целом нейтрален. Через несколько лет было доказано, что представление о непрерывно распределенном внутри атома положительном заряде ошибочно.

В развитии представлений о строении атома велико значение опытов английского физика Э. Резерфорда (1871—1937) по рассеянию  $\alpha$ -частиц в веществе. Альфа-частицы возникают при радиоактивных превращениях; они являются положительно заряженными частицами с зарядом  $2e$  и массой, примерно в 7300 раз большей массы электрона. Пучки  $\alpha$ -частиц обладают высокой монохроматичностью (для данного превращения имеют практически одну и ту же скорость (порядка  $10^7$  м/с)).

Резерфорд, исследуя прохождение  $\alpha$ -частиц в веществе (через золотую фольгу толщиной примерно 1 мкм), показал, что основная их часть испытывает незначительные отклонения, но некоторые  $\alpha$ -частицы (примерно одна из 20 000) резко отклоняются от первоначального направления (углы отклонения достигали даже  $180^\circ$ ). Так как электроны не могут существенно изменить движение столь тяжелых и быстрых частиц, как  $\alpha$ -частицы, то Резерфордом был сделан вывод, что значительное отклонение  $\alpha$ -частиц обусловлено их взаимодействием с положительным зарядом большой массы. Однако значительное отклонение испытывают лишь немногие  $\alpha$ -частицы; следовательно, лишь некоторые из них проходят вблизи данного положительного заряда. Это, в свою очередь, означает, что положительный заряд атома сосредоточен в объеме, очень малом по сравнению с объемом атома.

На основании своих исследований Резерфорд в 1911 г. предложил **ядерную (планетарную) модель атома**. Согласно этой модели, вокруг положительного ядра, имеющего заряд  $Ze$  ( $Z$  — порядковый номер элемента в системе Менделеева,  $e$  — элементарный заряд), размер  $10^{-15}$ — $10^{-14}$  м и массу, практически равную массе атома, в области с линейными размерами порядка  $10^{-10}$  м по замкнутым орбитам движутся электроны, образуя электронную оболочку атома. Так как атомы нейтральны, то заряд ядра равен суммарному заряду электронов, т. е. вокруг ядра должно вращаться  $Z$  электронов.

Для простоты предположим, что электрон движется вокруг ядра по круговой орбите радиуса  $r$ . При этом кулоновская сила взаимодействия между ядром и электроном сообщает электрону центростремительное ускорение. Второй закон Ньютона для электрона, движущегося по окружности под действием кулоновской силы, имеет вид

$$\frac{Zee}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}, \quad (208.1)$$

где  $m_e$  и  $v$  — масса и скорость электрона на орбите радиуса  $r$ ,  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Уравнение (208.1) содержит два неизвестных:  $r$  и  $v$ . Следовательно, существует бесчисленное множество значений радиуса и соответствующих ему значений скорости (а значит, и энергии), удовлетворяющих этому уравнению. Поэтому величины  $r$ ,  $v$  (следовательно, и  $E$ ) могут меняться непрерывно, т. е. может испускаться любая, а не вполне определенная порция энергии. Тогда спектры атомов должны быть сплошными. В действительности же опыт показывает, что атомы имеют линейчатый спектр. Из выражения (208.1) следует, что при  $r \approx 10^{-10}$  м скорость движения электронов  $v = 10^6$  м/с, а ускорение  $v^2/r = 10^{22}$  м/с<sup>2</sup>. Согласно классической электродинамике, ускоренно движущиеся электроны должны излучать электромагнитные волны и вследствие этого непрерывно терять энергию. В результате электроны будут приближаться к ядру и в конце концов упадут на него. Таким образом, атом Резерфорда оказывается неустойчивой системой, что опять-таки противоречит действительности.

Попытки построить модель атома в рамках классической физики не привели к успеху: модель Томсона была опровергнута опытами Резерфорда, ядерная же модель оказалась неустойчивой электродинамически и противоречила опытным данным. Преодоление возникших трудностей потребовало создания качественно новой — *квантовой* — теории атома.

### Линейчатый спектр атома водорода

Исследования спектров излучения разреженных газов (т. е. спектров излучения отдельных атомов) показали, что каждому газу присущ определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных спектральных линий или групп близко расположенных линий. Самым изученным является спектр наиболее простого атома — атома водорода.

Швейцарский ученый И. Бальмер (1825—1898) подобрал эмпирическую формулу, описывающую все известные в то время спектральные линии атома водорода в *видимой области спектра*:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=3, 4, 5, \dots), \quad (209.1)$$

где  $R'=1,10 \cdot 10^7$  м<sup>-1</sup> — постоянная Ридберга.\* Так как  $\nu = c/\lambda$ , то формула (209.1) может быть переписана для частот:

$$\nu = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=3, 4, 5, \dots), \quad (209.2)$$

где  $R=R'c=3,29 \cdot 10^{15}$  с<sup>-1</sup> — также постоянная Ридберга.

---

\* И. Ридберг (1854—1919) — шведский ученый, специалист в области спектроскопии.

Из выражений (209.1) и (209.2) вытекает, что спектральные линии, отличающиеся различными значениями  $n$ , образуют группу или серию линий, называемую **серией Бальмера**. С увеличением  $n$  линии серии сближаются; значение  $n = \infty$  определяет **границу серии**, к которой со стороны больших частот примыкает сплошной спектр.

В дальнейшем (в начале XX в.) в спектре атома водорода было обнаружено еще несколько серий. В *ультрафиолетовой области спектра* находится **серия Лаймана**:

$$\nu = R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=2, 3, 4, \dots).$$

В *инфракрасной области спектра* были также обнаружены:

$$\text{серия Пашена } \nu = R \left( \frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=4, 5, 6, \dots);$$

$$\text{серия Брэкета } \nu = R \left( \frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=5, 6, 7, \dots);$$

$$\text{серия Пфунда } \nu = R \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=6, 7, 8, \dots);$$

$$\text{серия Хэмфри } \nu = R \left( \frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n=7, 8, 9, \dots).$$

Все приведенные выше серии в спектре атома водорода могут быть описаны одной формулой, называемой обобщенной формулой Бальмера:

$$\nu = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (209.3)$$

где  $m$  имеет в каждой данной серии постоянное значение,  $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  (определяет серию),  $n$  принимает целочисленные значения начиная с  $m+1$  (определяет отдельные линии этой серии).

Исследование более сложных спектров — спектров паров щелочных металлов (например, Li, Na, K) — показало, что они представляются набором незакономерно расположенных линий. Ридбергу удалось разделить их на три серии, каждая из которых располагается подобно линиям бальмеровской серии.

Приведенные выше сериальные формулы подобраны эмпирически и долгое время не имели теоретического обоснования, хотя и были подтверждены экспериментально с очень большой точностью. Приведенный выше вид сериальных формул, удивительная повторяемость в них целых чисел, универсальность постоянной Ридберга свидетельствуют о глубоком физическом смысле найденных закономерностей, вскрыть который в рамках классической физики оказалось невозможным.

### Постулаты Бора

Первая попытка построить качественно новую — квантовую — теорию атома была предпринята в 1913 г. датским физиком Нильсом Бором (1885—1962). Он поставил перед собой цель связать в единое целое эмпирические закономерности линейчатых спектров, ядерную модель атома Резерфорда и квантовый характер излучения и поглощения света. В основу своей теории Бор положил два постулата.

**Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний):** в атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн.

В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию

$$m_e v r_n = n \hbar \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (210.1)$$

где  $m_e$  — масса электрона,  $v$  — его скорость по  $n$ -й орбите радиуса  $r_n$ ,  $\hbar = h/(2\pi)$ .

**Второй постулат Бора (правило частот):** при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (210.2)$$

равной разности энергий соответствующих стационарных состояний ( $E_n$  и  $E_m$  — соответственно энергии стационарных состояний атома до и после излучения (поглощения)). При  $E_m < E_n$  происходит излучение фотона (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т. е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на более близлежащую), при  $E_m > E_n$  — его поглощение (переход атома в состояние с большей энергией, т. е. переход электрона на более удаленную от ядра орбиту). Набор возможных дискретных частот  $\nu = (E_n - E_m)/h$  квантовых переходов и определяет линейчатый спектр атома.

### Опыты Франка и Герца

Изучая методом задерживающего потенциала столкновения электронов с атомами газов (1913), Д. Франк и Г. Герц экспериментально доказали дискретность значений энергии атомов. Принципиальная схема их установки приведена на рис. 292. Вакуумная трубка, заполненная парами

ртути (давление приблизительно равно 13 Па), содержала катод (К), две сетки ( $C_1$  и  $C_2$ ) и анод (А). Электроны, эмиттируемые катодом, ускорялись разностью потенциалов, приложенной между катодом и сеткой  $C_1$ . Между сеткой  $C_2$  и анодом приложен небольшой (примерно 0,5 В) задерживающий потенциал.

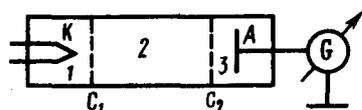


Рис. 292

- Почему ядерная модель атома оказалась несостоятельной?

Электроны, ускоренные в области 1, попадают в область 2 между сетками, где испытывают соударения с атомами паров ртути. Электроны, которые после соударений имеют достаточную энергию для преодоления задерживающего потенциала в области 3, достигают анода. При неупругих соударениях электронов с атомами ртути последние могут возбуждаться. Согласно боровской теории, каждый из атомов ртути может получить лишь вполне определенную энергию, переходя при этом в одно из возбужденных состояний. Поэтому если в атомах действительно существуют стационарные состояния, то электроны, сталкиваясь с атомами ртути, должны терять энергию дискретно, определенными порциями, равными разности энергий соответствующих стационарных состояний атома.

Из опыта следует (рис. 293), что при увеличении ускоряющего потенциала вплоть до 4,86 В анодный ток возрастает монотонно, его значение проходит через максимум (4,86 В), затем резко уменьшается и возрастает вновь. Дальнейшие максимумы наблюдаются при 2·4,86 и 3·4,86 В.

Ближайшим к основному, невозбужденному, состоянию атома ртути является возбужденное состояние, отстоящее от основного по шкале энергий на 4,86 эВ. Пока разность потенциалов между катодом и сеткой меньше 4,86 В, электроны, встречая на своем пути атомы ртути, испытывают с ними только упругие соударения. При  $e\varphi = 4,86$  эВ энергия электрона становится достаточной, чтобы вызвать неупругий удар, при котором электрон отдает атому ртути всю кинетическую энергию, возбуждая переход одного из электронов атома из нормального энергетического состояния на возбужденный энергетический уровень. Электроны, потерявшие свою кинетическую энергию, уже не смогут преодолеть тормозящего поля и достигнуть анода. Этим и объясняется первое резкое падение анодного тока при  $e\varphi = 4,86$  эВ. При значениях энергии, кратных 4,86 эВ, электроны могут испытать с атомами ртути 2, 3, ... неупругих соударения, потеряв при этом полностью свою энергию, и не достигнуть анода, т. е. должно наблюдаться резкое падение анодного тока. Это действительно наблюдается на опыте (рис. 293).

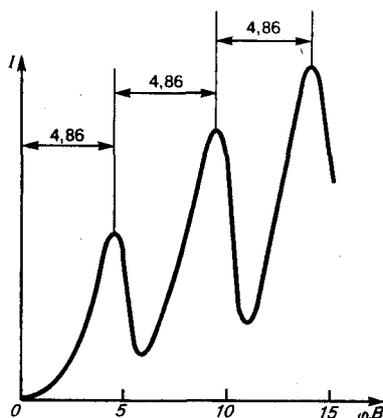


Рис. 293

- Почему из различных серий спектральных линий атома водорода первой была изучена серия Бальмера?
- Какой смысл имеют числа  $m$  и  $n$  в обобщенной формуле Бальмера?
- Чему равна частота излучения атома водорода, соответствующая коротковолновой границе серии Брэгкета?
- Разъясните смысл постулатов Бора. Как с их помощью объясняется линейчатый спектр атома?
- На каких участках кривой рис. 293 наблюдаются упругие и на каких — неупругие столкновения электронов с атомами?
- Какие основные выводы можно сделать на основании опытов Франка и Герца?

Таким образом, опыты Франка и Герца показали, что электроны при столкновении с атомами ртути передают атомам только определенные порции энергии, причем 4,86 эВ — наименьшая возможная порция энергии (наименьший квант энергии), которая может быть поглощена атомом ртути в основном энергетическом состоянии. Следовательно, идея Бора о существовании в атомах стационарных состояний блестяще выдержала экспериментальную проверку.

Атомы ртути, получившие при соударении с электронами энергию  $\Delta E$ , переходят в возбужденное состояние и должны возвратиться в основное, излучая при этом, согласно второму постулату Бора (см. (210.2)), световой квант с частотой  $\nu = \Delta E/h$ . По известному значению  $\Delta E = 4,86$  эВ можно

вычислить длину волны излучения:  $\lambda = hc/\Delta E \approx 255$  нм. Таким образом, если теория верна, то атомы ртути, бомбардируемые электронами с энергией 4,86 эВ, должны являться источником ультрафиолетового излучения с  $\lambda \approx 255$  нм. Опыт действительно обнаруживает одну ультрафиолетовую линию с  $\lambda \approx 254$  нм. Таким образом, опыты Франка и Герца экспериментально подтвердили не только первый, но и второй постулат Бора. Эти опыты сыграли огромное значение в развитии атомной физики.

### Спектр атома водорода по Бору

Постулаты, выдвинутые Бором, позволили рассчитать спектр атома водорода и **водородоподобных систем** — систем, состоящих из ядра с зарядом  $Ze$  и одного электрона (например, ионы  $\text{He}^+$ ,  $\text{Li}^{2+}$ ), а также теоретически вычислить постоянную Ридберга.

Из формулы (212.3) следует, что энергетические состояния атома образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от значения  $n$ . Целое число  $n$  в выражении (212.3), определяющее энергетические уровни атома, называется **главным квантовым числом**. Энергетическое состояние с  $n=1$  является **основным (нормальным)** состоянием; состояния с  $n > 1$  являются **возбужденными**. Энергетический уровень, соответствующий основному состоянию атома, называется **основным (нормальным)** уровнем; все остальные уровни являются **возбужденными**. откуда частота излучения

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \varepsilon_0^2} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (212.4)$$

где  $R = m_e e^4 / (8h^3 \varepsilon_0^2)$ .

Воспользовавшись при вычислении  $R$  современными значениями универсальных постоянных, получим величину, совпадающую с экспериментальным значением постоянной Ридберга в эмпирических формулах для атома водорода (см. § 209). Это совпадение убедительно доказывает правильность полученной Бором формулы (212.3) для энергетических уровней водородоподобной системы.

Подставляя, например, в формулу (212.4)  $m=1$  и  $n=2, 3, 4, \dots$ , получим группу линий, образующих серию Лаймана (см. § 209) и соответствующих переходам электронов с возбужденных уровней ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) на основной ( $m = 1$ ). Аналогично, при подстановке  $m = 2, 3, 4, 5, 6$  и соответствующих им значений  $n$  получим серии Бальмера, Пашена, Брэггета, Пфунда и Хэмфри (часть из них схематически представлена на рис. 294), описанные в § 209. Следовательно, по теории Бора, количественно объяснившей спектр атома водорода, спектральные серии соответствуют излучению, возникающему в результате перехода атома в данное состояние из возбужденных состояний, расположенных выше данного.

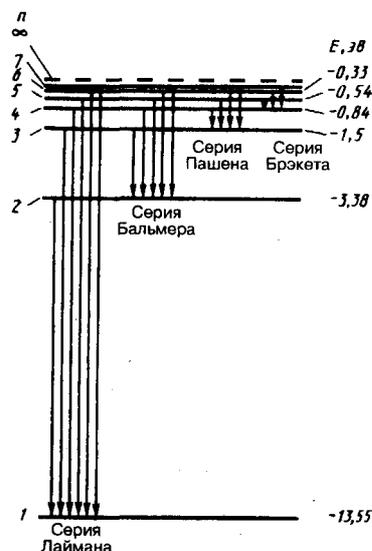


Рис. 294

- Атом водорода находится в состоянии с  $n=5$ . Сколько линий содержит его спектр излучения?
- Пользуясь моделью Бора, укажите спектральные линии, которые могут возникнуть при переходе атома водорода в состояния с  $n=3$  и  $n=4$ .
- Нанесите на шкалу длин волн три линии каждой из первых двух спектральных серий атома водорода.
- Почему спектр поглощения атома водорода содержит только серию Лаймана?
- Покажите, что формулу (212.3) можно записать в виде  $E_n = -13,55/n^2$ , где  $E_n$  выражается в электрон-вольтах.

Спектр поглощения атома водорода является линейчатым, но содержит при нормальных условиях только серию Лаймана. Он также объясняется теорией Бора. Так как свободные атомы водорода обычно находятся в основном состоянии (стационарное состояние с наименьшей энергией при  $n = 1$ ),

то при сообщении атомам извне определенной энергии могут наблюдаться лишь переходы атомов из основного состояния в возбужденные (возникает серия Лаймана).

Теория Бора была крупным шагом в развитии атомной физики и явилась важным этапом в создании квантовой механики. Однако эта теория обладает внутренними противоречиями (с одной стороны, применяет законы классической физики, а с другой — основывается на квантовых постулатах). В теории Бора рассмотрены спектры атома водорода и водородоподобных систем и вычислены частоты спектральных линий, однако эта теория не смогла объяснить интенсивности спектральных линий и ответить на вопрос: почему совершаются те или иные переходы? Серьезным недостатком теории Бора была невозможность описания с ее помощью спектра атома гелия — одного из простейших атомов, непосредственно следующего за атомом водорода.

## Элементы квантовой механики

### Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества

Французский ученый Луи де Бройль (1892—1987), осознавая существующую в природе симметрию и развивая представления о двойственной корпускулярно-волновой природе света, выдвинул в 1923 г. гипотезу об универсальности корпускулярно-волнового дуализма. Де Бройль утверждал, что не только фотоны, но и электроны и любые другие частицы материи наряду с корпускулярными обладают также волновыми свойствами.

Итак, согласно де Бройлю, с каждым микрообъектом связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики — энергия  $E$  и импульс  $p$ , а с другой — волновые характеристики — частота  $\nu$  и длина волны  $\lambda$ . Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов:

$$E = h\nu, \quad p = h/\lambda. \quad (213.1)$$

Смелость гипотезы де Бройля заключалась именно в том, что соотношение (213.1) постулировалось не только для фотонов, но и для других микрочастиц, в частности для таких, которые обладают массой покоя. Таким образом, любой частице, обладающей импульсом, сопоставляют волновой процесс с длиной волны, определяемой по формуле де Бройля:

$$\lambda = h/p. \quad (213.2)$$

Это соотношение справедливо для любой частицы с импульсом  $p$ .

Вскоре гипотеза де Бройля была подтверждена экспериментально. В 1927 г. американские физики К. Дэвиссон (1881—1958) и Л. Джермер (1896—1971) обнаружили, что пучок электронов, рассеивающийся от естественной дифракционной решетки — кристалла никеля, — дает отчетливую дифракционную картину. Дифракционные максимумы соответствовали формуле Вульфа — Брэггов (182.1), а брэгговская длина волны оказалась в точности равной длине волны, вычисленной по формуле (213.2). В дальнейшем формула де Бройля была подтверждена опытами П. С. Тартаковского и Г. Томсона, наблюдавших дифракционную картину при прохождении пучка быстрых электронов (энергия  $\approx 50$  кэВ) через металлическую фольгу (толщиной  $\approx 1$  мкм).

Так как дифракционная картина исследовалась для потока электронов, то необходимо было доказать, что волновые свойства присущи не только потоку большой совокупности электронов, но и каждому электрону в отдельности. Это удалось экспериментально подтвердить в 1948 г. российскому физическому В. А. Фабриканту (р. 1907). Он показал, что даже в случае столь слабого электронного пучка, когда каждый электрон проходит через прибор независимо от других (промежуток времени между двумя электронами в  $10^4$  раз больше времени прохождения электроном прибора), возникающая при длительной экспозиции дифракционная картина не отличается от дифракционных картин, получаемых при короткой экспозиции для потоков электронов, в десятки миллионов раз более интенсивных. Следовательно, волновые свойства частиц не являются свойством их коллектива, а присущи каждой частице в отдельности.

Впоследствии дифракционные явления обнаружили также для нейтронов, протонов, атомных и молекулярных пучков. Это окончательно послужило доказательством наличия волновых свойств микрочастиц и позволило описывать движение микрочастиц в виде волнового процесса, характеризующегося определенной длиной волны, рассчитываемой по формуле де Бройля (213.2). Открытие волновых свойств микрочастиц привело к появлению и развитию новых методов

исследования структуры веществ, таких, как электронография и нейтронография (см. § 182), а также к возникновению новой отрасли науки — электронной оптики (см. § 169).

Представление о двойственной корпускулярно-волновой природе частиц вещества углубляется еще тем, что на частицы вещества переносится связь между полной энергией частицы  $\varepsilon$  и частотой  $\nu$  волн де Бройля:

$$\varepsilon = h\nu. \quad (213.3)$$

Это свидетельствует о том, что соотношение между энергией и частотой в формуле (213.3) имеет характер *универсального соотношения*, справедливого как для фотонов, так и для любых других микрочастиц. Справедливость же соотношения (213.3) вытекает из согласия с опытом тех теоретических результатов, которые получены с его помощью в квантовой механике, атомной и ядерной физике.

Подтвержденная экспериментально гипотеза да Бройля о корпускулярно-волновом дуализме свойств вещества коренным образом изменила представления о свойствах микрообъектов. Всем микрообъектам присущи и корпускулярные, и волновые свойства; в то же время любую из микрочастиц нельзя считать ни частицей, ни волной в классическом понимании

### Соотношение неопределенностей

В. Гейзенберг, учитывая волновые свойства микрочастиц и связанные с волновыми свойствами ограничения в их поведении, пришел в 1927 г. к выводу, что объект микромира невозможно одновременно с любой наперед заданной точностью характеризовать и координатой и импульсом. Согласно **соотношению неопределенностей Гейзенберга**, микрочастица (микрообъект) не может иметь одновременно и определенную координату ( $x, y, z$ ), и определенную соответствующую проекцию импульса ( $p_x, p_y, p_z$ ), причем неопределенности этих величин удовлетворяют условиям

$$\Delta x \Delta p_x \geq h, \quad \Delta y \Delta p_y \geq h, \quad \Delta z \Delta p_z \geq h, \quad (215.1)$$

т. е. произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка  $h$ .

Из соотношения неопределенностей (215.1) следует, что, например, если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты ( $\Delta x = 0$ ), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ( $\Delta p_x \rightarrow \infty$ ), и наоборот

Соотношение неопределенностей, отражая специфику физики микрочастиц, позволяет оценить, например, в какой мере можно применять понятия классической механики к микрочастицам, в частности, с какой степенью точности можно говорить о траекториях микрочастиц. Известно, что движение по траектории характеризуется в любой момент времени определенными значениями координат и скорости. Выразим соотношение неопределенностей (215.1) в виде

$$\Delta x \Delta v_x \geq h/m. \quad (215.4)$$

Из этого выражения следует, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью можно применять к этой частице понятие траектории.

В квантовой теории рассматривается также соотношение неопределенностей для энергии  $E$  и времени  $t$ , т. е. неопределенности этих величины удовлетворяют условию

$$\Delta E \Delta t \geq h. \quad (215.5)$$

Подчеркнем, что  $\Delta E$  — неопределенность энергии некоторого состояния системы,  $\Delta t$  — промежуток времени, в течение которого оно существует. Следовательно, система, имеющая среднее время жизни  $\Delta t$ , не может быть охарактеризована определенным значением энергии; разброс энергии  $\Delta E = h/\Delta t$  возрастает с уменьшением среднего времени жизни. Из выражения (215.5) следует, что частота излученного фотона также должна иметь неопределенность  $\Delta \nu = \Delta E/h$ , т. е. линии спектра должны характеризоваться частотой, равной  $\nu \pm \Delta E/h$ . Опыт действительно показывает, что все спектральные линии размыты; измеряя ширину спектральной линии, можно оценить порядок времени существования атома в возбужденном состоянии.

### Волновая функция и ее статистический смысл

Экспериментальное подтверждение идеи де Бройля об универсальности корпускулярно-волнового дуализма, ограниченность применения классической механики к микрообъектам, диктуемая соотношением неопределенностей, а также противоречие целого ряда экспериментов с применяемыми в начале XX в. теориями привели к новому этапу развития квантовой теории — созданию **квантовой механики**, описывающей законы движения и взаимодействия микрочастиц с учетом их волновых свойств. Ее создание и развитие охватывает период с 1900 г. (формулировка Планком квантовой гипотезы; см. § 200) до 20-х годов XX в.; оно связано прежде всего с работами австрийского физика Э. Шредингера (1887—1961), немецкого физика В. Гейзенберга и английского физика П. Дирака (1902—1984).

Чтобы устранить эти трудности, немецкий физик М. Борн (1882—1970) в 1926 г. предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а величина, названная **амплитудой вероятности** и обозначаемая  $\Psi(x, y, z, t)$ . Эту величину называют также **волновой функцией** (или  **$\Psi$ -функцией**). Амплитуда вероятности может быть комплексной, и вероятность  $W$  пропорциональна квадрату ее модуля:

$$W \sim |\Psi(x, y, z, t)|^2 \quad (216.1)$$

( $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ ,  $\Psi^*$  — функция, комплексно сопряженная с  $\Psi$ ). Таким образом, описание состояния микрообъекта с помощью волновой функции имеет **статистический, вероятностный характер**: квадрат модуля волновой функции (квадрат модуля амплитуды волн де Бройля) определяет вероятность нахождения частицы в момент времени  $t$  в области с координатами  $x$  и  $x+dx$ ,  $y$  и  $y+dy$ ,  $z$  и  $z+dz$ .

Итак, в квантовой механике состояние микрочастиц описывается принципиально по-новому — с помощью волновой функции, которая является *основным носителем информации об их корпускулярных и волновых свойствах*. Вероятность нахождения частицы в элементе объемом  $dV$  равна

$$dW = |\Psi|^2 dV. \quad (216.2)$$

Величина

$$|\Psi|^2 = dW/dV$$

(квадрат модуля  $\Psi$ -функции) имеет смысл **плотности вероятности**, т. е. определяет вероятность нахождения частицы в единичном объеме в окрестности точки с координатами  $x, y, z$ . Таким образом, физический смысл имеет не сама  $\Psi$ -функция, а квадрат ее модуля  $|\Psi|^2$ , которым задается *интенсивность волн де Бройля*.

Вероятность найти частицу в момент времени  $t$  в конечном объеме  $V$ , согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$W = \int_V dW = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Так как  $|\Psi|^2 dV$  определяется как вероятность, то необходимо волновую функцию  $\Psi$  нормировать так, чтобы вероятность достоверного события обращалась в единицу, если за объем  $V$  принять бесконечный объем всего пространства. Это означает, что при данном условии частица должна находиться где-то в пространстве. Следовательно, условие нормировки вероятностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1, \quad (216.3)$$

где данный интеграл (216.3) вычисляется по всему бесконечному пространству, т. е. по координатам  $x, y, z$  от  $-\infty$  до  $\infty$ . Таким образом, условие (216.3) говорит об объективном существовании частицы в пространстве.

Чтобы волновая функция являлась объективной характеристикой состояния микрочастиц, она должна удовлетворять ряду ограничительных условий. Функция  $\Psi$ , характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объема, должна быть *конечной* (вероятность не может быть больше единицы), *однозначной* (вероятность не может быть неоднозначной величиной) и *непрерывной* (вероятность не может изменяться скачком).

Волновая функция удовлетворяет **принципу суперпозиции**: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n, \dots$  то она также может находиться в состоянии  $\Psi$ , описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\Psi = \sum_n C_n \Psi_n,$$

где  $C_n$  ( $n=1, 2, \dots$ )—произвольные, вообще говоря, комплексные числа. Сложение *волновых функций* (амплитуд вероятностей), а не *вероятностей* (определяемых квадратами модулей волновых функций) принципиально отличает квантовую теорию от классической статистической теории, в которой для независимых событий справедлива *теорема сложения вероятностей*.

Волновая функция  $\Psi$ , являясь основной характеристикой состояния микрообъектов, позволяет в квантовой механике вычислять средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект. Например, среднее расстояние  $\langle r \rangle$  электрона от ядра вычисляют по формуле

$$\langle r \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} r |\Psi|^2 dV,$$

где интегрирование производится, как и в случае (216.3).

### Общее уравнение Шредингера. Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Статистическое толкование волн де Бройля (см. § 216) и соотношение неопределенностей Гейзенберга (см. § 215) привели к выводу, что уравнением движения в квантовой механике, описывающим движение микрочастиц в различных силовых полях, должно быть уравнение, из которого бы вытекали наблюдаемые на опыте волновые свойства частиц. Основное уравнение должно быть уравнением относительно волновой функции  $\Psi(x, y, z, t)$ , так как именно она, или, точнее, величина  $|\Psi|^2$ , определяет вероятность пребывания частицы в момент времени  $t$  в объеме  $dV$ , т. е. в области с координатами  $x$  и  $x+dx$ ,  $y$  и  $y+dy$ ,  $z$  и  $z+dz$ . Так как искомое уравнение должно учитывать волновые свойства частиц, то оно должно быть **волновым уравнением**, подобно уравнению, описывающему электромагнитные волны.

Основное уравнение *нерелятивистской квантовой механики* сформулировано в 1926 г. Э. Шредингером. Уравнение Шредингера, как и все основные уравнения физики (например, уравнения Ньютона в классической механике и уравнения Максвелла для электромагнитного поля), не выводится, а постулируется. Правильность этого уравнения подтверждается согласием с опытом получаемых с его помощью результатов, что, в свою очередь, придает ему характер закона природы. Уравнение Шредингера имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (217.1)$$

где  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $m$ —масса частицы,  $\Delta$ —оператор Лапласа ( $\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$ ),  $i$  — мнимая единица,  $U(x, y, z, t)$  — потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется,  $\Psi(x, y, z, t)$  — искомая волновая функция частицы.

Уравнение (217.1) является **общим уравнением Шредингера**. Его также называют **уравнением Шредингера, зависящим от времени**. Для многих физических явлений, происходящих в микромире, уравнение (217.1) можно упростить, исключив зависимость  $\Psi$  от времени, иными словами, найти уравнение Шредингера для *стационарных состояний* — *состояний с фиксированными значениями энергии*. Это возможно, если силовое поле, в котором частица движется, стационарно, т. е. функция  $U=U(x, y, z)$  не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии. В данном случае решение уравнения Шредингера может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых есть функция только координат, другая — только времени, причем зависимость от времени выражается множителем  $e^{-i\omega t} = e^{-i(E/\hbar)t}$ , так что

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-i(E/\hbar)t}, \quad (217.4)$$

где  $E$  — полная энергия частицы, постоянная в случае стационарного поля. Подставляя (217.4) в (217.1), получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i(E/\hbar)t} \Delta \psi + U \psi e^{-i(E/\hbar)t} = i\hbar (-iE/\hbar) \psi e^{-i(E/\hbar)t};$$

откуда после деления на общий множитель  $e^{-i(E/\hbar)t}$  и соответствующих преобразований приходим к уравнению, определяющему функцию  $\psi$ :

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U)\psi = 0. \quad (217.5)$$

Уравнение (217.5) называется **уравнением Шредингера для стационарных состояний**. В это уравнение в качестве параметра входит полная энергия  $E$  частицы. В теории дифференциальных уравнений доказывается, что подобные уравнения имеют бесчисленное множество решений, из которых посредством наложения граничных условий отбирают решения, имеющие физический смысл. Для уравнения Шредингера такими условиями являются условия регулярности волновых функций: волновые функции должны быть конечными, однозначными и непрерывными вместе со своими первыми производными. Таким образом, реальный физический смысл имеют только такие решения, которые выражаются регулярными функциями  $\psi$ . Но регулярные решения имеют место не при любых значениях параметра  $E$ , а лишь при определенном их наборе, характерном для данной задачи. Эти значения энергии называются **собственными**. Решения же, которые соответствуют **собственным** значениям энергии, называются **собственными функциями**. Собственные значения  $E$  могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о **непрерывном**, или **сплошном**, спектре, во втором — о **дискретном спектре**.

## Элементы современной физики атомов и молекул

### Атом водорода в квантовой механике

Решение задачи об энергетических уровнях электрона для атома водорода (а также водородоподобных систем: иона гелия  $\text{He}^+$ , двукратно ионизованного лития  $\text{Li}^{++}$  и др.) сводится к задаче о движении электрона в кулоновском поле ядра.

Потенциальная энергия взаимодействия электрона с ядром, обладающим зарядом  $Ze$  (для атома водорода  $Z = 1$ ),

$$U(r) = - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (223.1)$$

где  $r$  — расстояние между электроном и ядром. Графически функция  $U(r)$  изображена жирной кривой на рис. 302.  $U(r)$  с уменьшением  $r$  (при приближении электрона к ядру) неограниченно убывает.

Состояние электрона в атоме водорода описывается волновой функцией  $\psi$ , удовлетворяющей стационарному уравнению Шредингера (217.5), учитывающему значение (223.1):

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2} \left( E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \psi = 0, \quad (223.2)$$

где  $m$  — масса электрона,  $E$  — полная энергия электрона в атоме. Так как поле, в котором движется электрон, является центрально-симметричным, то для решения уравнения (223.2) обычно используют сферическую систему координат:  $r$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$ . Не вдаваясь в математическое решение этой задачи, ограничимся рассмотрением важнейших результатов, которые из него следуют, пояснив их физический смысл.

**1. Энергия.** В теории дифференциальных уравнений доказывается, что уравнения типа (223.2) имеют решения, удовлетворяющие требованиям однозначности, конечности и непрерывности волновой функции  $\psi$ , только при собственных значениях энергии

$$E_n = - \frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m e^4}{8 \hbar^2 \epsilon_0^2} \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (223.3)$$

т. е. для дискретного набора отрицательных значений энергии.

Таким образом, как и в случае «потенциальной ямы» с бесконечно высокими «стенками» (см. § 220) и гармонического осциллятора (см. § 222), решение уравнения Шредингера для атома водорода приводит к появлению дискретных энергетических уровней. Возможные значения  $E_1, E_2, E_3, \dots$  показаны на рис. 302 в виде горизонтальных прямых. Самый нижний уровень  $E_1$ , отвечающий минимальной возможной энергии, — **основной**, все остальные ( $E_n > E_1, n = 2, 3, \dots$ ) — **возбужденные** (см. § 212). При  $E < 0$  движение электрона является **связанным** — он находится внутри гиперболической «потенциальной ямы». Из рисунка следует, что по мере роста главного квантового числа  $n$  энергетические уровни располагаются теснее и при  $n \rightarrow \infty$   $E_\infty = 0$ . При  $E > 0$  движение электрона является **свободным**; область непрерывного спектра  $E > 0$  (заштрихована на рис. 302) соответствует **ионизованному атому**. Энергия ионизации атома водорода равна

$$E_1 = -E_1 = me^4 / (8h^2 \epsilon_0^2) = 13,55 \text{ эВ.}$$

Выражение (223.3) совпадает с формулой (212.3), полученной Бором для энергии атома водорода. Однако если Бору пришлось вводить дополнительные гипотезы (постулаты), то в квантовой механике дискретные значения энергии, являясь следствием самой теории, вытекают непосредственно из решения уравнения Шредингера.

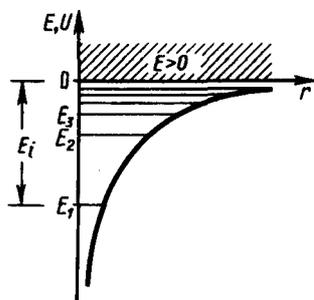


Рис. 302

- Что характеризуют квантовые числа: главное, орбитальное и магнитное? Какие значения они могут принимать?
- Каковы возможные значения  $l$  и  $m_l$  для главного квантового числа  $n=5$ ?
- Сколько различных состояний соответствует  $n=4$ ?

**2. Квантовые числа.** В квантовой механике доказывается, что уравнению Шредингера (223.2) удовлетворяют собственные функции  $\psi_{nlm_l}(r, \theta, \varphi)$ , определяемые тремя квантовыми числами: главным  $n$ , орбитальным  $l$  и магнитным  $m_l$ .

**Главное квантовое число  $n$ ,** согласно (223.3), определяет энергетические уровни электрона в атоме и может принимать любые целочисленные значения начиная с единицы:

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Из решения уравнения Шредингера вытекает, что *момент импульса* (механический орбитальный момент) электрона квантуется, т. е. не может быть произвольным, а принимает дискретные значения, определяемые формулой

$$L_l = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad (223.4)$$

где  $l$  — **орбитальное квантовое число**, которое при заданном  $n$  принимает значения

$$l = 0, 1, \dots, (n-1), \quad (223.5)$$

т. е. всего  $n$  значений, и определяет момент импульса электрона в атоме.

Из решения уравнений Шредингера следует также, что вектор  $L_l$  момента импульса электрона может иметь лишь такие ориентации в пространстве, при которых его проекция  $L_{lx}$  на направление  $z$  внешнего магнитного поля принимает квантованные значения, кратные  $\hbar$ :

$$L_{lx} = \hbar m_l, \quad (223.6)$$

где  $m_l$  — **магнитное квантовое число**, которое при заданном  $l$  может принимать значения

$$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l, \quad (223.7)$$

т. е. всего  $2l+1$  значений. Таким образом, **магнитное квантовое число  $m_l$**  определяет **проекцию момента импульса электрона на заданное направление**, причем вектор момента импульса электрона в атоме может иметь в пространстве  $2l+1$  ориентации.

Наличие квантового числа  $m_l$  должно привести в магнитном поле к расщеплению уровня с главным квантовым числом  $n$  на  $2l+1$  подуровней. Соответственно в спектре атома должно наблюдаться расщепление спектральных линий. Действительно, расщепление энергетических уровней в магнитном поле было обнаружено в 1896 г. голландским физиком П. Зеemanом (1865—1945) и получило название **эффекта Зеемана**. Расщепление уровней энергии во внешнем электрическом поле, тоже доказанное экспериментально, называется **эффектом Штарка\***.

\* И. Штарк (1874—1957) — немецкий физик.

Хотя энергия электрона (223.3) и зависит только от главного квантового числа  $n$ , но каждому собственному значению  $E_n$  (кроме  $E_1$ ) соответствует несколько собственных функций  $\psi_{nlm_l}$ , отличающихся значениями  $l$  и  $m_l$ . Следовательно, атом водорода может иметь одно и то же значение энергии, находясь в нескольких различных состояниях. Так как при данном  $n$  орбитальное квантовое число  $l$  может изменяться от 0 до  $n-1$  (см. (223.5)), а каждому значению  $l$  соответствует  $2l+1$  различных значений  $m_l$  (223.7), то число различных состояний, соответствующих данному  $n$ , равно

$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2. \quad (223.8)$$

Квантовые числа и их значения являются следствием решений уравнений Шредингера и условий однозначности, непрерывности и конечности, налагаемых на волновую функцию  $\psi$ . Кроме того, так как при движении электрона в атоме существенны волновые свойства электрона, то квантовая механика вообще отказывается от классического представления об электронных орбитах. Согласно квантовой механике, каждому энергетическому состоянию соответствует волновая функция, квадрат модуля которой определяет вероятность обнаружения электрона в единице объема.

Вероятность обнаружения электрона в различных частях атома различна. Электрон при своем движении как бы «размазан» по всему объему, образуя электронное облако, плотность (густота) которого характеризует вероятность нахождения электрона в различных точках объема атома. *Квантовые числа  $n$  и  $l$  характеризуют размер и форму электронного облака, а квантовое число  $m_l$  характеризует ориентацию электронного облака в пространстве.*

В атомной физике, по аналогии со спектроскопией, состояние электрона, характеризующееся квантовыми числами  $l=0$ , называют  $s$ -состоянием (электрон в этом состоянии называют  $s$ -электроном),  $l=1$  —  $p$ -состоянием,  $l=2$  —  $d$ -состоянием,  $l=3$  —  $f$ -состоянием и т. д. Значение главного квантового числа указывается перед условным обозначением орбитального квантового числа. Например, электроны в состояниях  $n=2$  и  $l=0$  и  $1$  обозначаются соответственно символами  $2s$  и  $2p$ .

На рис. 303 для примера приведено распределение электронной плотности (формы электронного облака) для состояний атома водорода при  $n=1$  и  $n=2$ , определяемое  $|\psi_{nlm_l}|^2$ . Как видно из рисунка, оно зависит от  $n$ ,  $l$  и  $m_l$ . Так, при  $l=0$  электронная плотность отлична от нуля в центре и не зависит от направления (сферически-симметрична), а для остальных состояний в центре равна нулю и зависит от направления.

**3. Спектр.** Квантовые числа  $n$ ,  $l$  и  $m_l$  позволяют более полно описать спектр испускания (поглощения) атома водорода, полученный в теории Бора (см. рис. 294).

В квантовой механике вводятся **правила отбора**, ограничивающие число возможных переходов электронов в атоме, связанных с испусканием и поглощением света. Теоретически доказано и экспериментально подтверждено, что для дипольного излучения электрона, движущегося в центрально-симметричном поле ядра, могут осуществляться только такие переходы, для которых: 1) изменение орбитального квантового числа  $\Delta l$  удовлетворяет условию

$$\Delta l = \pm 1; \quad (223.9)$$

2) изменение магнитного квантового числа  $\Delta m_l$  удовлетворяет условию

$$\Delta m_l = 0, \pm 1.$$

В оптических спектрах указанные правила отбора в основном выполняются. Однако в принципе могут наблюдаться и слабые «запрещенные» линии, например возникающие при переходах с  $\Delta l = 2$ . Появление этих линий объясняется тем, что строгая теория, запрещая дипольные переходы, разрешает переходы, соответствующие излучению более сложных систем зарядов, например квадруполь. Вероятность же квадрупольных переходов (переходы с  $\Delta l=2$ ) во много раз меньше вероятности дипольных переходов, поэтому «запрещенные» линии и являются слабыми.

Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному  $n$ , и правило отбора (223.9), рассмотрим спектральные линии атома водорода (рис. 304): серии Лаймана соответствуют переходы

$$np \rightarrow 1s \quad (n=2, 3, \dots);$$

серии Бальмера —

$$np \rightarrow 2s, \quad ns \rightarrow 2p, \quad nd \rightarrow 2p \quad (n=3, 4, \dots)$$

и т. д.

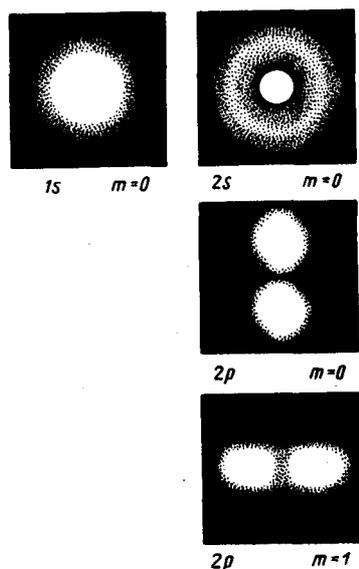


Рис. 303



Рис. 304

Переход электрона из основного состояния в возбужденное обусловлен увеличением энергии атома и может происходить только при сообщении атому энергии извне, например за счет поглощения атомом фотона. Так как поглощающий атом находится обычно в основном состоянии, то спектр атома водорода должен состоять из линий, соответствующих переходам  $1s \rightarrow np$  ( $n = 2, 3, \dots$ ), что находится в полном согласии с опытом.

### Спин электрона. Спиновое квантовое число

О. Штерн и В. Герлах, проводя прямые измерения магнитных моментов (см. § 131), обнаружили в 1922 г., что узкий пучок атомов водорода, заведомо находящихся в  $s$ -состоянии, в неоднородном магнитном поле расщепляется на два пучка. В этом состоянии момент импульса электрона равен нулю (см. (223.4)). Магнитный момент атома, связанный с орбитальным движением электрона, пропорционален механическому моменту (см. (131.3)), поэтому он равен нулю и магнитное поле не должно оказывать влияния на движение атомов водорода в основном состоянии, т. е. расщепления быть не должно. Однако в дальнейшем при применении спектральных приборов с большой разрешающей способностью было доказано, что спектральные линии атома водорода обнаруживают тонкую структуру (являются дублетами) *даже* в отсутствие магнитного поля.

Для объяснения тонкой структуры спектральных линий, а также ряда других трудностей в атомной физике американские физики Д. Уленбек (1900—1974) и С. Гаудсмит (1902—1979) предположили, что электрон обладает **собственным неуничтожимым механическим моментом импульса**, не связанным с движением электрона в пространстве, **спином** (см. § 131).

Спин электрона (и всех других микрочастиц) — квантовая величина, у нее нет классического аналога; это внутреннее неотъемлемое свойство электрона, подобное его заряду и массе.

Если электрону приписывается собственный механический момент импульса (спин)  $L_s$ , то ему соответствует собственный магнитный момент  $\mu_{ms}$ . Согласно общим выводам квантовой механики, *спин квантуется по закону*

$$L_s = \hbar \sqrt{s(s+1)},$$

где  $s$  — **спиновое квантовое число**.

По аналогии с орбитальным моментом импульса, проекция  $L_{sz}$  спина квантуется так, что вектор  $L_s$  может принимать  $2s+1$  ориентации. Так как в опытах Штерна и Герлаха наблюдались только две ориентации, то  $2s+1=2$ , откуда  $s = 1/2$ . Проекция спина на направление внешнего магнитного поля, являясь квантованной величиной, определяется выражением, аналогичным (223.6):

$$L_{sz} = \hbar m_s,$$

где  $m_s$  — **магнитное спиновое квантовое число**; оно может иметь только два значения:  $m_s = \pm 1/2$ .

Таким образом, опытные данные привели к необходимости характеризовать электроны (и микрочастицы вообще) добавочной внутренней степенью свободы. Поэтому для полного описания состояния электрона в атоме необходимо наряду с главным, орбитальным и магнитным квантовыми числами задавать еще магнитное спиновое квантовое число.

### Принцип Паули. Распределение электронов в атоме по состояниям

Если тождественные частицы имеют одинаковые квантовые числа, то их волновая функция симметрична относительно перестановки частиц. Отсюда следует, что два одинаковых фермиона, входящих в одну систему, не могут находиться в одинаковых состояниях, так как для фермионов волновая функция должна быть антисимметричной. Обобщая опытные данные, В. Паули сформулировал принцип, согласно которому системы фермионов встречаются в природе только в состояниях, описываемых антисимметричными волновыми функциями (квантово-механическая формулировка **принципа Паули**).

Из этого положения вытекает более простая формулировка принципа Паули, которая и была введена им в квантовую теорию (1925) еще до построения квантовой механики: в системе одинаковых фермионов любые два из них не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии. Отметим, что число однотипных бозонов, находящихся в одном и том же состоянии, не лимитируется.

Напомним, что состояние электрона в атоме однозначно определяется набором четырех квантовых чисел:

$$\begin{aligned} &\text{главного } n \ (n=1, 2, 3, \dots), \\ &\text{орбитального } l \ (l=0, 1, 2, \dots, n-1), \\ &\text{магнитного } m_l \ (m_l=-l, \dots, -1, 0, +1, \dots, +l), \\ &\text{магнитного спинового } m_s \ (m_s=+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Распределение электронов в атоме подчиняется принципу Паули, который может быть использован в его простейшей формулировке: в одном и том же атоме не может быть более одного электрона с одинаковым набором четырех квантовых чисел  $n, l, m_l$  и  $m_s$  т. е.

$$Z(n, l, m_l, m_s) = 0 \text{ или } 1,$$

где  $Z(n, l, m_l, m_s)$  — число электронов, находящихся в квантовом состоянии, описываемом набором четырех квантовых чисел:  $n, l, m_l, m_s$ . Таким образом, принцип Паули утверждает, что два электрона, связанные в одном и том же атоме, различаются значениями по крайней мере одного квантового числа.

Согласно формуле (223.8), данному  $n$  соответствует  $n^2$  различных состояний, отличающихся значениями  $l$  и  $m_l$ . Квантовое число  $m_s$  может принимать лишь два значения ( $\pm \frac{1}{2}$ ). Поэтому максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом, равно

$$Z(n) = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2.$$

Совокупность электронов в многоэлектронном атоме, имеющих одно и то же главное квантовое число  $n$ , называют **электронной оболочкой**. В каждой из оболочек электроны распределяются по **подоболочкам**, соответствующим данному  $l$ . Поскольку орбитальное квантовое число принимает значения от 0 до  $n-1$ , число подоболочек равно порядковому номеру  $n$  оболочки. Количество электронов в подоболочке определяется магнитным и магнитным спиновым квантовыми числами: максимальное число электронов в подоболочке с данным  $l$  равно  $2(2l+1)$ . Обозначения оболочек, а также распределение электронов по оболочкам и подоболочкам представлены в табл. 6.

Таблица 6

Главное квантовое число $n$	1	2		3			4				5				
Символ оболочки	$K$	$L$		$M$			$N$				$O$				
Максимальное число электронов в оболочке	2	8		18			32				50				
Орбитальное квантовое число $l$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
Символ подоболочки	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$3d$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$
Максимальное число электронов в подоболочке	2	2	6	2	6	10	2	6	10	14	2	6	10	14	18

### Периодическая система элементов Менделеева

Принцип Паули, лежащий в основе систематики заполнения электронных состояний в атомах, позволяет объяснить **Периодическую систему элементов Д. И. Менделеева (1869)** — фундаментального закона природы, являющегося основой современной химии, атомной и ядерной физики.

Д. И. Менделеев ввел понятие порядкового номера  $Z$  химического элемента, равного числу протонов в ядре и соответственно общему числу электронов в электронной оболочке атома. Расположив химические элементы по мере возрастания порядковых номеров, он получил периодичность в изменении химических свойств элементов.

Так как химические и некоторые физические свойства элементов объясняются внешними (валентными) электронами в атомах, то периодичность свойств химических элементов должна быть связана с определенной периодичностью в расположении электронов в атомах. Поэтому для объяснения таблицы будем считать, что каждый последующий элемент образован из предыдущего прибавлением к ядру одного протона и соответственно прибавлением одного электрона в электронной оболочке атома. Взаимодействием электронов пренебрегаем, внося, где это необходимо, соответствующие поправки. Рассмотрим атомы химических элементов, находящиеся в основном состоянии.

Единственный электрон атома водорода находится в состоянии  $1s$ , характеризуемом квантовыми числами  $n=1$ ,  $l=0$ ,  $m_l=0$  и  $m_s=\pm 1/2$ ; (ориентация его спина произвольна). Оба электрона атома He находятся в состоянии  $1s$ , но с антипараллельной ориентацией спина. Электронная конфигурация для атома He записывается как  $1s^2$  (два  $1s$ -электрона). На атоме He заканчивается заполнение  $K$ -оболочки, что соответствует завершению I периода Периодической системы элементов Менделеева (табл. 7).

Таблица 7

Период	Z	Элемент	K			L			M			N				
			1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	4f				
I	1	H	1													
	2	He	2													
II	3	Li	2	1												
	4	Be	2	2												
	5	B	2	2	1											
	6	C	2	2	2											
	7	N	2	2	3											
	8	O	2	2	4											
III	9	F	2	2	5											
	10	Ne	2	2	6											
IV	11	Na	2	2	6	1										
	12	Mg	2	2	6	2										
	13	Al	2	2	6	2	1									
	14	Si	2	2	6	2	2									
	15	P	2	2	6	2	3									
	16	S	2	2	6	2	4									
	17	Cl	2	2	6	2	5									
	18	Ar	2	2	6	2	6									
	IV	19	K	2	2	6	2	6	—	1						
		20	Ca	2	2	6	2	6	—	2						
21		Sc	2	2	6	2	6	1	2							
22		Ti	2	2	6	2	6	2	2							
23		V	2	2	6	2	6	3	2							
24		Cr	2	2	6	2	6	5	1							
25		Mn	2	2	6	2	6	5	2							
26		Fe	2	2	6	2	6	6	2							
27	Co	2	2	6	2	6	7	2								
28	Ni	2	2	6	2	6	8	2								
IV	29	Cu	2	2	6	2	6	10	1							
	30	Zn	2	2	6	2	6	10	2							
	31	Ga	2	2	6	2	6	10	2	1						
	32	Ge	2	2	6	2	6	10	2	2						
	33	As	2	2	6	2	6	10	2	3						
	34	Se	2	2	6	2	6	10	2	4						
	35	Br	2	2	6	2	6	10	2	5						
	36	Kr	2	2	6	2	6	10	2	6						

Третий электрон атома Li ( $Z=3$ ), согласно принципу Паули, уже не может разместиться в целиком заполненной  $K$ -оболочке и занимает наименьшее энергетическое состояние с  $n=2$  ( $L$ -оболочка), т.е.  $2s$ -состояние. Электронная конфигурация для атома Li:  $1s^2 2s$ . Атомом Li начинается II период Периодической системы элементов. Четвертым электроном Be ( $Z=4$ ) заканчивается заполнение

подоболочки  $2s$ . У следующих шести элементов от В ( $Z=5$ ) до Ne ( $Z=10$ ) идет заполнение подоболочки  $2p$  (табл. 7). II период Периодической системы заканчивается неоном — инертным газом, для которого подоболочка  $2p$  целиком заполнена.

Одиннадцатый электрон Na ( $Z=11$ ) размещается в  $M$ -оболочке ( $n=3$ ), занимая наинизшее состояние  $3s$ . Электронная конфигурация имеет вид  $1s^2 2s^2 2p^6 3s$ .  $3s$ -Электрон (как и  $2s$ -электрон Li) является валентным электроном, поэтому оптические свойства Na подобны свойствам Li. С  $Z=12$  идет последовательное заполнение  $M$ -оболочки. Ar ( $Z=18$ ) оказывается подобным He и Ne: в его наружной оболочке все  $s$ - и  $p$ -состояния заполнены. Ar является химически инертным и завершает III период Периодической системы.

Девятнадцатый электрон K ( $Z=19$ ) должен был бы занять  $3d$ -состояние в  $M$ -оболочке. Однако и в оптическом, и в химическом отношении атом K схож с атомами Li и Na, которые имеют внешний валентный электрон в  $s$ -состоянии. Поэтому 19-й валентный электрон K должен также находиться в  $s$ -состоянии, но это может быть только  $s$ -состояние новой оболочки ( $N$ -оболочки), т. е. заполнение  $N$ -оболочки для K начинается при незаполненной  $M$ -оболочке. Это означает, что в результате взаимодействия электронов состояние  $n=4, l=0$  имеет меньшую энергию, чем состояние  $n=3, l=2$ . Спектроскопические и химические свойства Ca ( $Z=20$ ) показывают, что его 20-й электрон также находится в  $4s$ -состоянии  $N$ -оболочки. В последующих элементах происходит заполнение  $M$ -оболочки (от Sc ( $Z=21$ ) до Zn ( $Z=30$ )). Далее  $N$ -оболочка заполняется до Kr ( $Z=36$ ), у которого опять-таки, как и в случае Ne и Ar,

$s$ - и  $p$ -состояния наружной оболочки заполнены целиком. Криптоном заканчивается IV период Периодической системы. Подобные рассуждения применимы и к остальным элементам таблицы Менделеева, однако эти данные можно найти в справочниках. Отметим лишь, что и начальные элементы последующих периодов Rb, Cs, Fr являются щелочными металлами, а их последний электрон находится в  $s$ -состоянии. Кроме того, атомы инертных газов (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) занимают в таблице особое положение — в каждом из них  $s$ - и  $p$ -состояния наружной оболочки целиком заполнены и ими завершаются очередные периоды Периодической системы.

Каждую из двух групп элементов — лантаниды (от лантана ( $Z=57$ ) до лютеция ( $Z=71$ )) и актиниды (от актиния ( $Z=89$ ) до лоуренсия ( $Z=103$ )) — приходится помещать в одну клетку таблицы, так как химические свойства элементов в пределах этих групп очень близки. Это объясняется тем, что для лантанидов заполнение подоболочки  $4f$ , которая может содержать 14 электронов, начинается лишь после того, как целиком заполнятся подоболочки  $5s$ ,  $5p$  и  $6s$ . Поэтому для этих элементов внешняя  $P$ -оболочка ( $6s^2$ ) оказывается одинаковой. Аналогично, одинаковой для актинидов является  $Q$ -оболочка ( $7s^2$ ).

Таким образом, открытая Менделеевым периодичность в химических свойствах элементов объясняется повторяемостью в структуре внешних оболочек у атомов родственных элементов. Так, инертные газы имеют одинаковые внешние оболочки из 8 электронов (заполненные  $s$ - и  $p$ -состояния); во внешней оболочке щелочных металлов (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) имеется лишь один  $s$ -электрон; во внешней оболочке щелочноземельных металлов (Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra) имеется два  $s$ -электрона; галоиды (F, O, Br, I, At) имеют внешние оболочки, в которых недостает одного электрона до оболочки инертного газа, и т. д.

### Молекулярные спектры. Комбинационное рассеяние света

Строение молекул и свойства их энергетических уровней проявляются в **молекулярных спектрах** — спектрах излучения (поглощения), возникающих при квантовых переходах между уровнями энергии молекул. Спектр излучения молекулы определяется структурой ее энергетических уровней и соответствующими правилами отбора (так, например, изменение квантовых чисел, соответствующих как колебательному, так и вращательному движению, должно быть равно  $\pm 1$ ).

Итак, при разных типах переходов между уровнями возникают различные типы молекулярных спектров. Частоты спектральных линий, испускаемых молекулами, могут соответствовать переходам с одного электронного уровня на другой (**электронные спектры**) или с одного колебательного (вращательного) уровня на другой (**колебательные (вращательные) спектры**). Кроме того, возможны и переходы с одними значениями  $\Delta E_{\text{кол}}$  и  $\Delta E_{\text{вращ}}$  на уровни, имеющие другие значения всех трех компонентов, в результате чего возникают **электронно-колебательные и колебательно-вращательные спектры**. Поэтому спектр молекул довольно сложный.

Типичные молекулярные спектры — полосатые, представляющие собой совокупность более или менее узких полос в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях. Применяя спектральные приборы высокой разрешающей способности, можно видеть, что полосы представляют собой настолько тесно расположенные линии, что они с трудом разрешаются. Структура молекулярных спектров различна для разных молекул и с увеличением числа атомов в молекуле усложняется (наблюдаются лишь сплошные широкие полосы). Колебательными и вращательными спектрами обладают только многоатомные молекулы, а двухатомные их не имеют. Это объясняется тем, что двухатомные молекулы не имеют дипольных моментов (при колебательных и вращательных переходах отсутствует изменение дипольного момента, что является необходимым условием отличия от нуля вероятности перехода).

В 1928 г. академики Г. С. Ландсберг (1890—1957) и Л. И. Мандельштам и одновременно индийские физики Ч. Раман (1888—1970) и К. Кришнан (р. 1911) открыли явление **комбинационного рассеяния света**. Если на вещество (газ, жидкость, прозрачный кристалл) падает строго монохроматический свет, то в спектре рассеянного света помимо несмещенной спектральной линии обнаруживаются новые линии, частоты которых представляют собой суммы или разности частоты  $\nu$  падающего света и частот  $\nu_i$  собственных колебаний (или вращений) молекул рассеивающей среды.

Линии в спектре комбинационного рассеяния с частотами  $\nu - \nu_i$ , меньшими частоты  $\nu$  падающего света, называются **стоксовыми (или красными) спутниками**, линии с частотами  $\nu + \nu_i$ , большими  $\nu$ , — **антистоксовыми (или фиолетовыми) спутниками**.

Рассеяние света сопровождается переходами молекулы между различными колебательными или вращательными уровнями, в результате чего и возникает ряд симметрично расположенных спутников. Число спутников, таким образом, определяется энергетическим спектром молекул, т. е. зависит только от природы рассеивающего вещества. Так как число возбужденных молекул гораздо меньше, чем число невозбужденных, то интенсивность антистоксовых спутников меньше, чем стоксовых. С повышением температуры число возбужденных молекул растет, в результате чего возрастает и интенсивность антистоксовых спутников.

Молекулярные спектры (в том числе и спектры комбинационного рассеяния света) применяются для исследования строения и свойств молекул, используются в молекулярном спектральном анализе, лазерной спектроскопии, квантовой электронике и т. д.

### Поглощение. Спонтанное и вынужденное излучения

Как отмечалось выше, атомы могут находиться лишь в квантовых состояниях с дискретными значениями энергии  $E_1, E_2, E_3, \dots$ . Ради простоты рассмотрим только два из этих состояний (1 и 2) с энергиями  $E_1$  и  $E_2$ . Если атом находится в основном состоянии 1, то под действием внешнего излучения может осуществиться вынужденный переход в возбужденное состояние 2 (рис. 309, а), приводящий к поглощению излучения. Вероятность подобных переходов пропорциональна плотности излучения, вызывающего эти переходы.

Атом, находясь в возбужденном состоянии 2, может через некоторый промежуток времени спонтанно, без каких-либо внешних воздействий, перейти в состояние с низшей энергией (в нашем случае в основное), отдавая избыточную энергию в виде электромагнитного излучения (испуская фотон с энергией  $h\nu = E_2 - E_1$ ). Процесс испускания фотона возбужденным атомом (возбужденной микросистемой) без каких-либо внешних воздействий называется **спонтанным (или самопроизвольным) излучением** (рис. 309, б). Чем больше вероятность спонтанных переходов, тем меньше среднее время жизни атома в возбужденном состоянии. Так как спонтанные переходы взаимно не связаны, то спонтанное излучение некогерентно.

В 1916 г. А. Эйнштейн для объяснения наблюдавшегося на опыте термодинамического равновесия между веществом и испускаемым и поглощаемым им излучением постулировал, что помимо поглощения и спонтанного излучения должен существовать третий, качественно иной тип взаимодействия. Если на атом, находящийся в возбужденном состоянии 2, действует внешнее излучение с частотой, удовлетворяющей условию  $h\nu = E_2 - E_1$ , то возникает **вынужденный (индуцированный) переход** в основное состояние 1 с излучением фотона той же энергии  $h\nu = E_2 - E_1$  (рис. 309, в). При подобном переходе происходит излучение атомом *фотона*, *дополнительно* к тому фотону, под действием которого произошел переход. Возникающее в результате таких переходов излучение называется **вынужденным (индуцированным) излучением**. Таким образом, в процесс вынужденного излучения вовлечены два фотона: первичный фотон, вызывающий испускание

излучения возбужденным атомом, и вторичный фотон, испущенный атомом. Существенно, что вторичные фотоны *неотличимы* от первичных, являясь *точной их копией*.

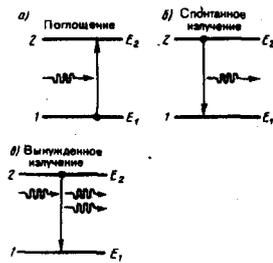


Рис. 309

- Возможно ли было бы вынужденное излучение, если фотоны были бы фермионами? Ответ обосновать.
- Как осуществляются состояния с инверсией населенностей?
- Какое условие необходимо для возникновения вынужденного излучения в веществе?

В статистической физике известен **принцип детального равновесия**, согласно которому при термодинамическом равновесии каждому процессу можно сопоставить обратный процесс, причем скорости их протекания одинаковы. А. Эйнштейн применил этот принцип и закон сохранения энергии при рассмотрении излучения и поглощения электромагнитных волн в случае черного тела. Из условия, что при равновесии полная вероятность испускания (спонтанного и вынужденного) фотонов равна вероятности поглощения фотонов той же частоты, Эйнштейн получил выведенную ранее Планком формулу (200.3).

Эйнштейн и Дирак показали, что вынужденное излучение (вторичные фотоны) *тождественно* вынуждающему излучению (первичным фотонам): оно имеет такие же частоту, фазу, поляризацию и направление распространения, как и вынуждающее излучение. Следовательно, вынужденное излучение *строго когерентно* с вынуждающим излучением, т. е. испущенный фотон неотличим от фотона, падающего на атом.

Испущенные фотоны, двигаясь в одном направлении и встречая другие возбужденные атомы, стимулируют дальнейшие индуцированные переходы, и число фотонов растет лавинообразно. Однако наряду с вынужденным излучением возможен и конкурирующий процесс — поглощение. Поэтому для усиления падающего излучения необходимо, чтобы число актов вынужденного излучения фотонов (оно пропорционально заселенности возбужденных состояний) превышало число актов поглощения фотонов (оно пропорционально заселенности основных состояний). В системе атомов, находящейся в термодинамическом равновесии, поглощение падающего излучения будет преобладать над вынужденным, т. е. падающее излучение при прохождении через вещество будет ослабляться.

Чтобы среда усиливала падающее на нее излучение, необходимо создать *неравновесное состояние системы*, при котором число атомов в возбужденных состояниях было бы больше, чем их число в основном состоянии. Такие состояния называются **состояниями с инверсией населенностей**. Процесс создания неравновесного состояния вещества (перевод системы в состояние с инверсией населенностей) называется **накачкой**. Накачку можно осуществить оптическими, электрическими и другими способами.

В средах с инверсными состоящими вынужденное излучение может превысить поглощение, вследствие чего падающий пучок света при прохождении через эти среды будет усиливаться (эти среды называются **активными**). В данном случае явление протекает так, как если бы в законе Бугера  $I = I_0 e^{-\alpha x}$  (см. (187.1)) коэффициент поглощения  $\alpha$ , зависящий, в свою очередь, от интенсивности излучения, стал отрицательным. Активные среды поэтому можно рассматривать в качестве сред с отрицательным коэффициентом поглощения.

Впервые на возможность получения сред, в которых свет может усиливаться за счет вынужденного излучения, указал в 1939 г. российский физик В. А. Фабрикант, экспериментально обнаружив вынужденное излучение паров ртути, возбужденных при электрическом разряде. Открытие явления усиления электромагнитных волн и изобретенный способ их усиления (В. А. Фабрикант, М. М. Вудынский, ф. А. Бугаева; 1951) легли в основу квантовой электроники, положения которой позволили впоследствии осуществить квантовые усилители и квантовые генераторы света.

### Оптические квантовые генераторы (лазеры)

Практически инверсное состояние среды осуществлено в *принципиально новых* источниках излучения — **оптических квантовых генераторах**, или **лазерах** (от первых букв английского названия Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation — усиление света с помощью вынужденного

излучения). Лазеры генерируют в видимой, инфракрасной и ближней ультрафиолетовой областях (в оптическом диапазоне). Идея качественно нового принципа усиления и генерации электромагнитных волн, примененная в **мазерах** (генераторы и усилители, работающие в сантиметровом диапазоне радиоволн) и лазерах, принадлежит российским ученым Н. Г. Басову (р. 1922) и А. М. Прохорову (р. 1916) и американскому физику Ч. Таунсу (р. 1915), удостоенным Нобелевской премии 1964 г.

Важнейшими из существующих типов лазеров являются **твердотельные, газовые, полупроводниковые** и **жидкостные** (в основу такого деления положен тип активной среды). Более точная классификация учитывает также и методы накачки — оптические, тепловые, химические, электроионизационные и др. Кроме того, необходимо принимать во внимание и режим генерации — непрерывный или импульсный.

Лазер обязательно имеет три основных компонента: 1) *активную среду*, в которой создаются состояния с инверсией населенностей; 2) *систему накачки* (устройство для создания инверсии в активной среде); 3) *оптический резонатор* (устройство, выделяющее в пространство избирательное направление пучка фотонов и формирующее выходящий световой пучок).

Первым твердотельным лазером (1960; США), работающим в видимой области спектра (длина волны излучения 0,6943 мкм), был рубиновый лазер (Т. Мейман (р. 1927)). В нем инверсная населенность уровней осуществляется по трехуровневой схеме, предложенной в 1955 г. Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым.

Для выделения направления лазерной генерации используется принципиально важный элемент лазера — **оптический резонатор**. В простейшем случае им служит пара обращенных друг к другу параллельных (или вогнутых) зеркал на общей оптической оси, между которыми помещается активная среда (кристалл или кювета с газом). Как правило, зеркала изготавливаются так, что от одного из них излучение полностью отражается, а второе — полупрозрачно.

Лазерное излучение обладает следующими свойствами:

1. *Временная и пространственная когерентность* (см. § 171). Время когерентности составляет  $10^{-3}$  с, что соответствует длине когерентности порядка  $10^5$  м ( $l_{\text{кор}} = c\tau_{\text{кор}}$ ), т. е. на семь порядков выше, чем для обычных источников света.
2. *Строгая монохроматичность* ( $\Delta\lambda < 10^{-11}$  м).
3. *Большая плотность потока энергии*. Если, например, рубиновый стержень при накачке получил энергию  $W=20$  Дж и высветился за  $10^{-3}$  с, то поток излучения  $\Phi_e=20/10^{-3}$  Дж/с= $2\cdot 10^4$  Вт. Фокусируя это излучение на площади  $1$  мм<sup>2</sup>, получим плотность потока энергии  $\Phi_e/S = 2\cdot 10^4/10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup> =  $2\cdot 10^{10}$  Вт/м<sup>2</sup>.
4. *Очень малое угловое расхождение в пучке*. Например, при использовании специальной фокусировки луч лазера, направленный с Земли, дал бы на поверхности Луны световое пятно диаметром примерно 3 км (луч прожектора осветил бы поверхность диаметром примерно 40 000 км).

К.п.д. лазеров колеблется в широких пределах — от 0,01% (для гелий-неонового лазера) до 75% (для лазера на стекле с неодимом), хотя у большинства лазеров к.п.д. составляет 0,1—1%. Создан мощный СО<sub>2</sub>-лазер непрерывного действия, генерирующий инфракрасное излучение ( $\lambda=10,6$  мкм), к.п.д. которого (30%) превосходит к.п.д. существующих лазеров, работающих при комнатной температуре.

Необычные свойства лазерного излучения находят в настоящее время широкое применение.

Применение лазеров для обработки, резания и микросварки твердых материалов оказывается экономически более выгодным (например, пробивание калиброванных отверстий в алмазе лазерным лучом сократило время с 24 ч до 6—8 мин). Лазеры применяются для скоростного и точного обнаружения дефектов в изделиях, для тончайших операций (например, луч СО<sub>2</sub>-лазера в качестве бескровного хирургического ножа), для исследования механизма химических реакций и влияния на их ход, для получения сверхчистых веществ. Широко применяется лазерное разделение изотопов, например такого важного в энергетическом отношении элемента, как уран.

Одним из важных применений лазеров является получение и исследование высокотемпературной плазмы. Эта область их применения связана с развитием нового направления — лазерного управляемого термоядерного синтеза.

Лазеры широко применяются в измерительной технике. Лазерные интерферометры (в них источником света служит лазер) используются для сверхточных дистанционных измерений линейных перемещений, коэффициентов преломления среды, давления, температуры. Например, рассмотренный выше гелий-неоновый лазер из-за излучения высокой стабильности, направленности

и монохроматичности (полоса частот 1 Гц при частоте  $10^{14}$  Гц) незаменим при юстировочных и нивелировочных работах.

Интересное применение лазеры нашли в топографии (см. § 184). Для создания систем голографической памяти с высокой степенью считывания и большой емкостью необходимы газовые лазеры видимого диапазона еще более высокой монохроматичности и направленности излучения.

Очень перспективны и интересны полупроводниковые лазеры, так как они обладают широким рабочим диапазоном (0,7—30 мкм) и возможностью плавной перестройки частоты их излучения.

Применения лазеров в настоящее время столь обширны, что даже их перечисление в объеме настоящего курса просто невозможно.

## Элементы физики твердого тела

### Понятие о зонной теории твердых тел

Используя уравнение Шредингера — основное уравнение динамики в нерелятивистской квантовой механике, — в принципе можно рассмотреть задачу о кристалле, например найти возможные значения его энергии, а также соответствующие энергетические состояния. Однако как в классической, так и в квантовой механике отсутствуют методы точного решения динамической задачи для системы многих частиц. Поэтому эта задача решается приближенно сведением задачи многих частиц к одноэлектронной задаче об одном электроне, движущемся в заданном внешнем поле. Подобный путь приводит к **зонной теории твердого тела**.

В основе зонной теории лежит так называемое адиабатическое **приближение**. Квантово-механическая система разделяется на тяжелые и легкие частицы — ядра и электроны. Поскольку массы и скорости этих частиц значительно различаются, можно считать, что движение электронов происходит в поле неподвижных ядер, а медленно движущиеся ядра находятся в усредненном поле всех электронов. Принимая, что ядра в узлах кристаллической решетки неподвижны, движение электрона рассматривается в *постоянном периодическом поле ядер*.

Далее используется приближение самосогласованного поля. Взаимодействие данного электрона со всеми другими электронами заменяется действием на него стационарного электрического поля, обладающего периодичностью кристаллической решетки. Это поле создается усредненным в пространстве зарядом всех других электронов и всех ядер. Таким образом, в рамках зонной теории многоэлектронная задача сводится к задаче о движении одного электрона во внешнем периодическом поле — усредненном и согласованном поле всех ядер и электронов.

Рассмотрим мысленно «процесс образования» твердого тела из изолированных атомов. Пока атомы изолированы, т. е. находятся друг от друга на макроскопических расстояниях, они имеют совпадающие схемы энергетических уровней (рис. 313). По мере «сжатия» нашей модели до кристаллической решетки, т. е. когда расстояния между атомами станут равными межатомным расстояниям в твердых телах, взаимодействие между атомами приводит к тому, что энергетические уровни атомов *сдвигаются, расщепляются и расширяются в зоны*, образуется **зонный энергетический спектр**.

Из рис. 313, на котором показано расщепление энергетических уровней в зависимости от расстояния  $r$  между атомами, видно, что заметно расщепляются и расширяются лишь уровни внешних, валентных электронов, наиболее слабо связанных с ядром и имеющих наибольшую энергию, а также более высокие уровни, которые в основном состоянии атома вообще электронами не заняты. Уровни же внутренних электронов либо совсем не расщепляются, либо расщепляются слабо. Таким образом, в твердых телах внутренние электроны ведут себя так же, как в изолированных атомах, валентные же электроны «коллективизированы» — принадлежат всему твердому телу.

Образование зонного энергетического спектра в кристалле является квантово-механическим эффектом в вытекает из соотношения неопределенностей. В кристалле валентные электроны атомов, связанные слабее с ядрами, чем внутренние электроны, могут переходить от атома к атому сквозь потенциальные барьеры, разделяющие атомы, т. е. перемещаться без изменений полной энергии (туннельный эффект, см. § 221). Это приводит к тому, что среднее время жизни  $\tau$  валентного электрона в данном атоме по сравнению с изолированным атомом существенно уменьшается и составляет примерно  $10^{-15}$  с (для изолированного атома оно примерно  $10^{-8}$  с). Время же жизни электрона в каком-либо состоянии связано с неопределенностью его энергии (шириной уровня)

соотношением неопределенностей  $\Delta E \sim h/\tau$  (см. (215.5)). Следовательно, если естественная ширина спектральных линий составляет примерно  $10^{-7}$  эВ, то в кристаллах  $\Delta E \approx 1 \div 10$  эВ, т. е. энергетические уровни валентных электронов расширяются в зону дозволённых значений энергии.

Энергия внешних электронов может принимать значения в пределах закрашенных на рис. 313 областей, называемых **разрешенными энергетическими зонами**. Каждая разрешенная зона «вмещает» в себя столько близлежащих дискретных уровней, сколько атомов содержит кристалл: чем больше в кристалле атомов, тем теснее расположены уровни в зоне. Расстояние между соседними энергетическими уровнями в зоне составляет приблизительно  $10^{-22}$  эВ. Так как оно столь ничтожно, то зоны можно считать практически непрерывными, однако факт конечного числа уровней в зоне играет важную роль для распределения электронов по состояниям.

Разрешенные энергетические зоны разделены зонами запрещённых значений энергии, называемыми **запрещенными энергетическими зонами**. В них электроны находиться не могут. Ширина зон (разрешенных и запрещенных) не зависит от размера кристалла. Разрешенные зоны тем шире, чем слабее связь валентных электронов с ядрами.

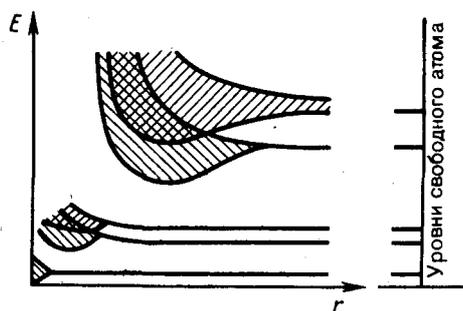


Рис. 313

- Чем различаются по зонной теории полупроводники и диэлектрики? металлы и диэлектрики?
- Когда по зонной теории твердое тело является проводником электрического тока?
- В чем суть адиабатического приближения и приближения самосогласованного поля?
- Чем отличаются энергетические состояния электронов в изолированном атоме и кристалле? Что такое запрещенные и разрешенные энергетические зоны?

### Металлы, диэлектрики и полупроводники по зонной теории

Зонная теория твердых тел позволила с единой точки зрения истолковать существование металлов, диэлектриков и полупроводников, объясняя различие в их электрических свойствах, во-первых, неодинаковым заполнением электронами разрешенных зон и, во-вторых, шириной запрещенных зон.

Степень заполнения электронами энергетических уровней в зоне определяется заполнением соответствующих атомных уровней. Если при этом какой-то энергетический уровень полностью заполнен, то образующаяся энергетическая зона также заполнена целиком. В общем случае можно говорить о **валентной зоне**, которая полностью заполнена электронами и образована из энергетических уровней внутренних электронов свободных атомов, и о **зоне проводимости (свободной зоне)**, которая либо частично заполнена электронами, либо свободна и образована из энергетических уровней внешних «коллективизированных» электронов изолированных атомов.

Твердое тело является проводником электрического тока и в том случае, когда валентная зона перекрывается свободной зоной, что в конечном счете приводит к не полностью заполненной зоне (рис. 314, б). Это имеет место для щелочноземельных элементов, образующих II группу таблицы Менделеева (Be, Mg, Ca, Zn, ...). В данном случае образуется так называемая «гибридная» зона, которая заполняется валентными электронами лишь частично. Следовательно, в данном случае металлические свойства щелочноземельных элементов обусловлены перекрытием валентной и свободной зон.

Если ширина запрещенной зоны кристалла порядка нескольких электрон-вольт, то тепловое движение не может перебросить электроны из валентной зоны в зону проводимости и кристалл является диэлектриком, оставаясь им при всех реальных температурах (рис. 314, в). Если запрещенная зона достаточно узка ( $\Delta E$  порядка 1 эВ), то переброс электронов из валентной зоны в зону проводимости может быть осуществлен сравнительно легко либо путем теплового возбуждения, либо за счет внешнего источника, способного передать электронам энергию  $\Delta E$ , и кристалл является полупроводником (рис. 314, г).

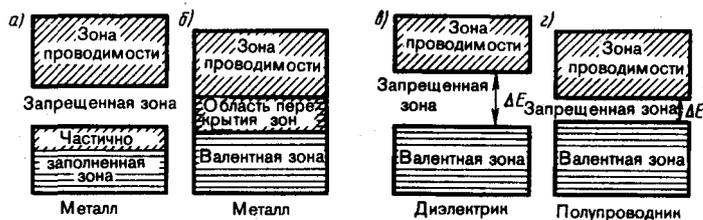


Рис. 314

Различие между металлами и диэлектриками с точки зрения зонной теории состоит в том, что при 0 К в зоне проводимости металлов имеются электроны, а в зоне проводимости диэлектриков они отсутствуют. Различие же между диэлектриками и полупроводниками определяется шириной запрещенных зон: для диэлектриков она довольно широка (например, для NaCl  $\Delta E=6$  эВ), для полупроводников — достаточно узка (например, для германия  $\Delta E=0,72$  эВ). При температурах, близких к 0 К, полупроводники ведут себя как диэлектрики, так как переброса электронов в зону проводимости не происходит. С повышением температуры у полупроводников растет число электронов, которые вследствие теплового возбуждения переходят в зону проводимости, т. е. электрическая проводимость проводников в этом случае увеличивается.

### Собственная проводимость полупроводников

Полупроводниками являются твердые тела, которые при  $T=0$  характеризуются полностью занятой электронами валентной зоной, отделенной от зоны проводимости сравнительно узкой ( $\Delta E$  порядка 1 эВ) запрещенной зоной (рис. 314, г). Своим названием они обязаны тому, что их электропроводность меньше электропроводности металлов и больше электропроводности диэлектриков.

В природе полупроводники существуют в виде элементов (элементы IV, V и VI групп Периодической системы элементов Менделеева), например Si, Ge, As, Se, Te, и химических соединений, например оксиды, сульфиды, селениды, сплавы элементов различных групп. Различают **собственные** и **примесные полупроводники**. **Собственными полупроводниками** являются химически чистые полупроводники, а их проводимость называется собственной проводимостью. Примером собственных полупроводников могут служить химически чистые Ge, Se, а также многие химические соединения. Таким образом, в собственных полупроводниках наблюдаются два механизма проводимости: электронный и дырочный. Число электронов в зоне проводимости равно числу дырок в валентной зоне, так как последние соответствуют электронам, возбужденным в зону проводимости. Следовательно, если концентрации электронов проводимости и дырок обозначить соответственно  $n_e$  и  $n_p$ , то

$$(242.2)$$

где  $E_2$  — энергия, соответствующая дну зоны проводимости (рис. 316),  $E_F$  — энергия Ферми,  $T$  — термодинамическая температура,  $C_1$  — постоянная, зависящая от температуры и эффективной массы электрона проводимости. **Эффективная масса** — величина, имеющая размерность массы и характеризующая динамические свойства квазичастиц — электронов проводимости и дырок. Введение в зонную теорию эффективной массы электрона проводимости позволяет, с одной стороны, учитывать действие на электроны проводимости не только внешнего поля, но и внутреннего периодического поля кристалла, а с другой стороны, абстрагируясь от взаимодействия электронов проводимости с решеткой, рассматривать их движение во внешнем поле как движение свободных электронов. Так как для собственных полупроводников  $\Delta E \gg kT$ , то распределение Ферми — Дирака (235.2) переходит в распределение Максвелла — Больцмана. Положив в (236.2)  $E - E_F \approx \Delta E/2$ , получим

$$\langle N(E) \rangle \approx c e^{-\Delta E/(2kT)}. \quad (242.4)$$

Количество электронов, перебросившихся в зону проводимости, а следовательно, и количество образовавшихся дырок пропорциональны  $\langle N(E) \rangle$ . Таким образом, удельная проводимость собственных полупроводников

$$\gamma = \gamma_0 c e^{-\Delta E/(2kT)}, \quad (242.5)$$

где  $\gamma_0$  — постоянная, характерная для данного полупроводника.

Одним из наиболее широко распространенных полупроводниковых элементов является германий, имеющий решетку типа алмаза, в которой каждый атом связан ковалентными связями (см. § 71) с четырьмя ближайшими соседями. Упрощенная плоская схема расположения атомов в кристалле Ge дана на рис. 318, где каждая черточка обозначает связь, осуществляемую одним электроном. В идеальном кристалле при 0 К такая структура представляет собой диэлектрик, так как все валентные электроны участвуют в образовании связей и, следовательно, не участвуют в проводимости.

При повышении температуры (или под действием других внешних факторов) тепловые колебания решетки могут привести к разрыву некоторых валентных связей, в результате чего часть электронов отщепляется и они становятся свободными. В покинутом электроном месте возникает дырка (она изображена белым кружком), заполнить которую могут электроны из соседней пары. В результате дырка, так же как и освободившийся электрон, будет двигаться по кристаллу. Движение электронов проводимости и дырок в отсутствие электрического поля является хаотическим. Если же на кристалл наложить электрическое поле, то электроны начнут двигаться против поля, дырки — по полю, что приведет к возникновению собственной проводимости германия, обусловленной как электронами, так и дырками.

В полупроводниках наряду с процессом генерации электронов и дырок идет процесс **рекомбинации**: электроны переходят из зоны проводимости в валентную зону, отдавая энергию решетке и испуская кванты электромагнитного излучения. В результате для каждой температуры устанавливается определенная равновесная концентрация электронов и дырок, изменяющаяся с температурой согласно выражению (242.4).

Таким образом, в полупроводниках с примесью, *валентность которой на единицу меньше валентности основных атомов, носителями тока являются дырки*; возникает **дырочная проводимость (проводность  $p$ -типа)**. Полупроводники с такой проводимостью называются **дырочными (или полупроводниками  $p$ -типа)**. Примеси, захватывающие электроны из валентной зоны полупроводника, называются **акцепторами**, а энергетические уровни этих примесей — **акцепторными уровнями**.

В отличие от собственной проводимости, осуществляющейся одновременно электронами и дырками, примесная проводимость полупроводников обусловлена в основном носителями одного знака: электронами — в случае донорной примеси, дырками — в случае акцепторной. Эти носители тока называются **основными**. Кроме основных носителей в полупроводнике имеются и неосновные носители: в полупроводниках  $n$ -типа — дырки, в полупроводниках  $p$ -типа — электроны.

Наличие примесных уровней в полупроводниках существенно изменяет положение уровня Ферми  $E_F$ . Расчеты показывают, что в случае полупроводников  $n$ -типа уровень Ферми  $E_{F0}$  при 0 К расположен посередине между дном зоны проводимости и донорным уровнем (рис. 321). С повышением температуры все большее число электронов переходит из донорных состояний в зону проводимости, но, помимо этого, возрастает и число тепловых флуктуаций, способных возбуждать электроны из валентной зоны и перебрасывать их через запрещенную зону энергий. Поэтому при высоких температурах уровень Ферми имеет тенденцию смещаться вниз (сплошная кривая) к своему предельному положению в центре запрещенной зоны, характерному для собственного полупроводника.

Уровень Ферми в полупроводниках  $p$ -типа при 0 К  $E_{F0}$  располагается посередине между потолком валентной зоны и акцепторным уровнем (рис. 322). Сплошная кривая опять-таки показывает его смещение с температурой. При температурах, при которых примесные атомы оказываются полностью истощенными и увеличение концентрации носителей происходит за счет возбуждения собственных носителей, уровень Ферми располагается посередине запрещенной зоны, как в собственном полупроводнике.

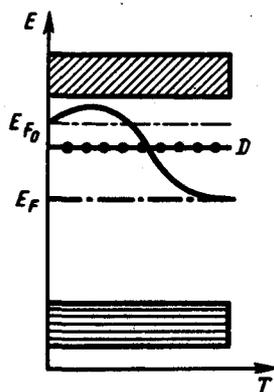


Рис. 321

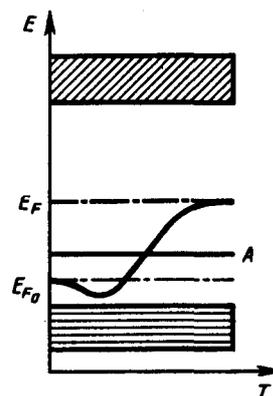


Рис. 322

Проводимость примесного полупроводника, как и проводимость любого проводника, определяется концентрацией носителей и их подвижностью. С изменением температуры подвижность носителей меняется по сравнительно слабому степенному закону, а концентрация носителей — по очень сильному экспоненциальному закону, поэтому проводимость примесных полупроводников от температуры определяется в основном температурной зависимостью концентрации носителей тока в нем. На рис. 323 дан примерный график зависимости  $\ln \gamma$  от  $1/T$  для примесных полупроводников. Участок  $AB$  описывает примесную проводимость полупроводника. Рост примесной проводимости полупроводника с повышением температуры обусловлен в основном ростом концентрации примесных носителей. Участок  $BC$  соответствует области истощения примесей (это подтверждают и эксперименты), участок  $CD$  описывает собственную проводимость полупроводника.

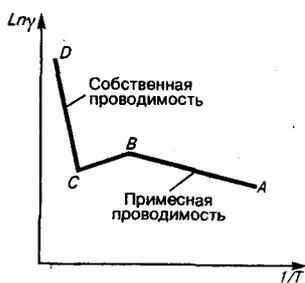


Рис. 323

- Почему экситонное поглощение света не сопровождается увеличением фотопроводимости?
- Каков механизм собственной фотопроводимости? примесной фотопроводимости?
- Что такое красная граница фотопроводимости?

### Фотопроводимость полупроводников

**Фотопроводимость** (см. § 202) полупроводников — увеличение электропроводности полупроводников под действием электромагнитного излучения — может быть связана со свойствами как основного вещества, так и содержащихся в нем примесей. В первом случае при поглощении фотонов, соответствующих собственной полосе поглощения полупроводника, т. е. когда энергия фотонов равна или больше ширины запрещенной зоны ( $h\nu \geq \Delta E$ ), могут совершаться перебросы электронов из валентной зоны в зону проводимости (рис. 324, а), что приведет к появлению добавочных (неравновесных) электронов (в зоне проводимости) и дырок (в валентной зоне). В результате возникает **собственная фотопроводимость**, обусловленная как электронами, так и дырками.

Таким образом, если

$$h\nu \geq \Delta E \quad \text{для собственных полупроводников,}$$

$$h\nu \geq \Delta E_{\text{п}} \quad \text{для примесных полупроводников}$$

$$(244.1)$$

( $\Delta E_{\text{п}}$  — в общем случае энергия активации примесных атомов), то в полупроводнике возбуждается фотопроводимость. Из (244.1) можно определить **красную границу фотопроводимости** — максимальную длину волны, при которой еще фотопроводимость возбуждается:

$$\lambda_0 = ch/\Delta E \quad \text{для собственных полупроводников,}$$

$$\lambda_0 = ch/\Delta E_{\text{п}} \quad \text{для примесных полупроводников.}$$

Учитывая значения  $\Delta E$  и  $\Delta E_{\text{п}}$  для конкретных полупроводников, можно показать, что красная граница фотопроводимости для собственных полупроводников приходится на видимую область спектра, для примесных же полупроводников — на инфракрасную.

На рис. 325 представлена типичная зависимость фотопроводимости  $j$  и коэффициента поглощения  $\alpha$  от длины волны  $\lambda$  падающего на полупроводник света. Из рисунка следует, что при  $\lambda > \lambda_0$  фотопроводимость действительно не возбуждается. Спад фотопроводимости в коротковолновой части полосы поглощения объясняется большой скоростью рекомбинации в условиях сильного поглощения в тонком поверхностном слое толщиной  $x \approx 1$  мкм (коэффициент поглощения  $\approx 10^6 \text{ м}^{-1}$ ).

Наряду с поглощением, приводящим к появлению фотопроводимости, может иметь место экситонный механизм поглощения. Экситоны представляют собой квазичастицы — электрически нейтральные связанные состояния электрона и дырки, образующиеся в случае возбуждения с энергией, меньшей ширины запрещенной зоны. Уровни энергии экситонов располагаются у дна зоны проводимости. Так как экситоны электрически нейтральны, то их возникновение в полупроводнике не приводит к появлению дополнительных носителей тока, вследствие чего экситонное поглощение света не сопровождается увеличением фотопроводимости.

### Люминесценция твердых тел

В природе давно известно излучение, отличное по своему характеру от всех известных видов излучения (теплового излучения, отражения, рассеяния света и т. д.). Этим излучением является люминесцентное излучение, примерами которого может служить свечение тел при облучении их видимым, ультрафиолетовым и рентгеновским излучением,  $\gamma$ -излучением и т. д. Вещества, способные под действием различного рода возбуждений светиться, получили название **люминофоров**.

**Люминесценция** — неравновесное излучение, избыточное при данной температуре над тепловым излучением тела и имеющее длительность, большую периода световых колебаний. Первая часть этого определения приводит к выводу, что люминесценция не является тепловым излучением (см. § 197), поскольку любое тело при температуре выше 0 К излучает электромагнитные волны, а такое излучение является тепловым. Вторая часть показывает, что люминесценция не является таким видом свечения, как отражение и рассеяние света, тормозное излучение заряженных частиц и т. д. Период световых колебаний составляет примерно  $10^{-15}$  с, поэтому длительность, по которой свечение можно отнести к люминесценции, больше — примерно  $10^{-10}$  с. Признак длительности свечения дает возможность отличить люминесценцию от других неравновесных процессов. Так, по этому признаку удалось установить, что излучение Вавилова — Черенкова (см. § 189) нельзя отнести к люминесценции

В зависимости от способов возбуждения различают: **фотолюминесценцию** (под действием света), **рентгенолюминесценцию** (под действием рентгеновского излучения), **катодолюминесценцию** (под действием электронов), **электролюминесценцию** (под действием электрического поля), **радиолюминесценцию** (при возбуждении ядерным излучением, например  $\gamma$ -излучением, нейтронами, протонами), **хемилюминесценцию** (при химических превращениях), **триболюминесценцию** (при растирании и раскалывании некоторых кристаллов, например сахара). По длительности свечения условно различают: **флуоресценцию** ( $t \leq 10^{-8}$  с) и **фосфоресценцию** — свечение, продолжающееся заметный промежуток времени после прекращения возбуждения.

Первое количественное исследование люминесценции проведено более ста лет назад Дж. Стоксом,\* сформулировавшим в 1852 г. следующее правило: длина волны люминесцентного излучения всегда больше длины волны света, возбудившего его

Основной энергетической характеристикой люминесценции является **энергетический выход**, введенный С. И. Вавиловым в 1924 г., — отношение энергии, излученной люминофором при полном высвечивании, к энергии, поглощенной им. Типичная для органических люминофоров (на примере раствора флуоресцина) зависимость энергетического выхода  $\eta$  от длины волны  $\lambda$  возбуждающего света представлена на рис. 327. Из рисунка следует, что вначале  $\eta$  растет пропорционально  $\lambda$ , а затем, достигая максимального значения, быстро спадает до нуля при дальнейшем увеличении  $\lambda$  (**закон Вавилова**). Величина энергетического выхода для различных люминофоров колеблется в довольно широких пределах, максимальное ее значение может достигать примерно 80%.

Твердые тела, представляющие собой эффективно люминесцирующие искусственно приготовленные кристаллы с чужеродными примесями, получили название **кристаллофосфоров**.

Явление люминесценции получило широкое применение в практике, например **люминесцентный анализ** — метод определения состава вещества по характерному его свечению. Этот метод, являясь весьма чувствительным (примерно  $10^{-10}$  г/см<sup>3</sup>), позволяет обнаруживать наличие ничтожных примесей и применяется при тончайших исследованиях в биологии, медицине, пищевой промышленности и т. д. **Люминесцентная дефектоскопия** позволяет обнаружить тончайшие трещины на поверхности деталей машин и других изделий (исследуемая поверхность покрывается для этого люминесцентным раствором, который после удаления остается в трещинах).

Люминофоры используются в люминесцентных лампах, являются активной средой оптических квантовых генераторов (см. § 233) и сцинтилляторов (будут рассмотрены ниже), применяются в электронно-оптических преобразователях (см. § 169), для создания аварийного и маскировочного освещения и для изготовления светящихся указателей различных приборов.

## ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

### Элементы физики атомного ядра

#### Размер, состав и заряд атомного ядра. Массовое и зарядовое числа

Э. Резерфорд, исследуя прохождение  $\alpha$ -частиц с энергией в несколько мегаэлектрон-вольт через тонкие пленки золота (см. § 208), пришел к выводу о том, что атом состоит из положительно заряженного ядра и окружающих его электронов. Проанализировав эти опыты, Резерфорд также показал, что атомные ядра имеют размеры примерно  $10^{-14}$  —  $10^{-15}$  м (линейные размеры атома примерно  $10^{-10}$  м).

Атомное ядро состоит из элементарных частиц — **протонов и нейтронов** (протонно-нейтронная модель ядра была предложена российским физиком Д. Д. Иваненко (р. 1904), а впоследствии развита В. Гейзенбергом).

Протон ( $p$ ) имеет положительный заряд, равный заряду электрона, и массу покоя  $m_p = 1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1836 m_e$ , где  $m_e$  — масса электрона. Нейтрон ( $n$ ) — нейтральная частица с массой покоя  $m_n = 1,6749 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1839 m_e$ . Протоны и нейтроны называются **нуклонами** (от лат. nucleus — ядро). Общее число нуклонов в атомном ядре называется массовым числом  $A$ .

Атомное ядро характеризуется **зарядом  $Ze$** , где  $Z$  — **зарядовое число** ядра, равное числу протонов в ядре и совпадающее с порядковым номером химического элемента в Периодической системе элементов Менделеева. Известные в настоящее время 107 элементов таблицы Менделеева имеют зарядовые числа ядер от  $Z=1$  до  $Z=107$ .

Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом:  ${}^A_Z X$ , где  $X$  — символ химического элемента,  $Z$  атомный номер (число протонов в ядре),  $A$  — массовое число (число нуклонов в ядре).

Так как атом нейтрален, то заряд ядра определяет и число электронов в атоме. От числа же электронов зависит их распределение по состояниям в атоме, от которого, в свою очередь, зависят химические свойства атома. Следовательно, заряд ядра определяет специфику данного химического элемента, т.е. определяет число электронов в атоме, конфигурацию их электронных оболочек, величину и характер внутриатомного электрического поля.

Ядра с одинаковыми  $Z$ , но разными  $A$  (т. е. с разными числами нейтронов  $N=A-Z$ ) называются **изотопами**, а ядра с одинаковыми  $A$ , но разными  $Z$  — **изобарами**. Например, водород ( $Z=1$ ) имеет три изотопа:  ${}^1_1\text{H}$  — протий ( $Z=1, N=0$ ),  ${}^2_1\text{H}$  — дейтерий ( $Z=1, N=1$ ),  ${}^3_1\text{H}$  — тритий ( $Z=1, N=2$ ), олово — десять, и т. д. В подавляющем большинстве случаев изотопы одного и того же химического элемента обладают одинаковыми химическими и почти одинаковыми физическими свойствами (исключение составляют, например, изотопы водорода), определяющимися в основном структурой электронных оболочек, которая является одинаковой для всех изотопов данного элемента. Примером ядер-изобар могут служить ядра  ${}^{10}_4\text{Be}$ ,  ${}^{10}_5\text{B}$ ,  ${}^{10}_6\text{C}$ . В настоящее время известно более 2500 ядер, отличающихся либо  $Z$ , либо  $A$ , либо тем и другим.

**Радиус ядра** задается эмпирической формулой

$$R = R_0 A^{1/3}, \quad (251.1)$$

где  $R_0 = (1,3 \div 1,7) 10^{-15}$  м. Однако при употреблении этого понятия необходимо соблюдать осторожность (из-за его неоднозначности, например из-за размытости границы ядра). Из формулы (251.1) вытекает, что объем ядра пропорционален числу нуклонов в ядре. Следовательно, плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер ( $\approx 10^{17}$  кг/м<sup>3</sup>).

### Дефект массы и энергия связи ядра

Исследования показывают, что атомные ядра являются устойчивыми образованиями. Это означает, что в ядре между нуклонами существует определенная связь.

Массу ядер очень точно можно определить с помощью масс-спектрометров — измерительных приборов, разделяющих с помощью электрических и магнитных полей пучки заряженных частиц (обычно ионов) с разными удельными зарядами  $Q/m$ . Масс-спектрометрические измерения показали, что *масса ядра меньше, чем сумма масс составляющих его нуклонов*. Но так как всякому изменению массы (см. § 40) должно соответствовать изменение энергии, то, следовательно, при образовании ядра должна выделяться определенная энергия. Из закона сохранения энергии вытекает и обратное: для разделения ядра на составные части необходимо затратить такое же количество энергии, которое выделяется при его образовании. Энергия, которую необходимо затратить, чтобы расщепить ядро на отдельные нуклоны, называется **энергией связи ядра** (см. § 40).

Согласно выражению (40.9), энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}]c^2, \quad (252.1)$$

где  $m_p$ ,  $m_n$ ,  $m_{\text{я}}$  — соответственно массы протона, нейтрона и ядра. В таблицах обычно приводятся не массы  $m_{\text{я}}$  ядер, а массы  $m$  атомов. Поэтому для энергии связи ядра пользуются формулой

$$E_{\text{св}} = [Zm_{\text{H}} + (A - Z)m_n - m]c^2, \quad (252.2)$$

где  $m_{\text{H}}$  — масса атома водорода. Так как  $m_{\text{H}}$  больше  $m_p$  на величину  $m_e$ , то первый член в квадратных скобках включает в себя массу  $Z$  электронов. Но так как масса атома  $m$  отличается от массы ядра  $m_{\text{я}}$  как раз на массу  $Z$  электронов, то вычисления по формулам (252.1) и (252.2) приводят к одинаковым результатам.

Величина

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_{\text{я}}$$

называется **дефектом массы** ядра. На эту величину уменьшается масса всех нуклонов при образовании из них атомного ядра.

Часто вместо энергии связи рассматривают **удельную энергию связи**  $\delta E_{\text{св}}$  — энергию связи, отнесенную к одному нуклону. Она характеризует устойчивость (прочность) атомных ядер, т. е. чем больше  $\delta E_{\text{св}}$ , тем устойчивее ядро. Удельная энергия связи зависит от массового числа  $A$  элемента (рис. 342). Для легких ядер ( $A \leq 12$ ) удельная энергия связи круто возрастает до  $6 \div 7$  МэВ, претерпевая целый ряд скачков (например, для  ${}^2_1\text{H}$   $\delta E_{\text{св}} = 1,1$  МэВ, для  ${}^4_2\text{He}$  —  $7,1$  МэВ, для  ${}^6_3\text{Li}$  —  $5,3$  МэВ), затем более медленно возрастает до максимальной величины  $8,7$  МэВ у элементов с  $A = 50 \div 60$ , а потом постепенно уменьшается у тяжелых элементов (например, для  ${}^{238}_{92}\text{U}$  она составляет  $7,6$  МэВ). Отметим для сравнения, что энергия связи валентных электронов в атомах составляет примерно  $10$  эВ (в  $10^6$  раз меньше).

Уменьшение удельной энергии связи при переходе к тяжелым элементам объясняется тем, что с возрастанием числа протонов в ядре увеличивается и энергия их *кулоновского отталкивания*. Поэтому связь между нуклонами становится менее сильной, а сами ядра менее прочными.

Наиболее устойчивыми оказываются так называемые **магические ядра**, у которых число протонов или число нейтронов равно одному из магических чисел: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126. Особенно стабильны **дважды магические ядра**, у которых магическими являются и число протонов, и число нейтронов (этих ядер насчитывается всего пять:  ${}^4_2\text{He}$ ,  ${}^{16}_8\text{O}$ ,  ${}^{40}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ ,  ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ ).

Из рис. 342 следует, что наиболее устойчивыми с энергетической точки зрения являются ядра средней части таблицы Менделеева. Тяжелые и легкие ядра менее устойчивы. Это означает, что энергетически выгодны следующие процессы: 1) деление тяжелых ядер на более легкие; 2) слияние легких ядер друг с другом в более тяжелые. При обоих процессах выделяется огромное количество

энергии; эти процессы в настоящее время осуществлены практически: реакции деления и термоядерные реакции.

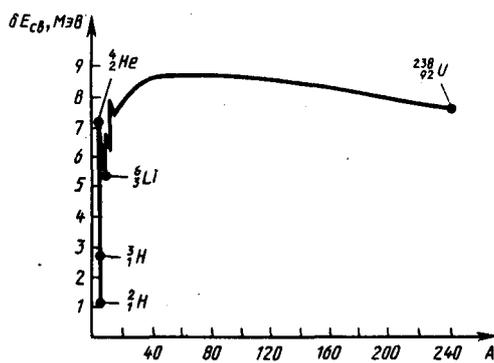


Рис. 342

- Какие частицы образуют ядро атома цинка? Сколько их?
- Атомное ядро «составили» из  $N$  свободных нуклонов (масса каждого нуклона равна  $m$ ). Чему равны масса и удельная энергия связи этого ядра?
- Чем отличаются изобары от изотопов?
- Почему прочность ядер уменьшается при переходе к тяжелым элементам?

### Спин ядра и его магнитный момент

Использование приборов высокой разрешающей способности и специальных источников возбуждения спектра позволило обнаружить сверхтонкую структуру спектральных линий. Ее существование В. Паули объяснил (1924) наличием у атомных ядер собственного момента импульса (спина) и магнитного момента.

**Собственный момент импульса ядра — спин ядра** — складывается из спинов нуклонов и из орбитальных моментов импульса нуклонов (моментов импульса, обусловленных движением нуклонов внутри ядра). Обе эти величины являются векторами, поэтому спин ядра представляет их векторную сумму. Спин ядра *квантуется по закону*

$$L_{\text{я}} = \hbar \sqrt{I(I+1)},$$

где  $I$  — **спиновое ядерное квантовое число** (его часто называют просто спином ядра), которое принимает целые или полуцелые значения  $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Ядра с четными  $A$  имеют целые  $I$ , с нечетными — полуцелые  $I$ .

Атомное ядро кроме спина обладает **магнитным моментом**  $\mathbf{p}_{\text{мя}}$ . Магнитный момент ядра связан со спином ядра (см. аналогичное выражение (131.5) для электрона):  $\mathbf{p}_{\text{мя}} = g_{\text{я}} \mathbf{L}_{\text{я}}$ , где  $g_{\text{я}}$  — коэффициент пропорциональности, называемый **ядерным гиромагнитным отношением**.

Единицей магнитных моментов ядер служит **ядерный магнетон**

$$\mu_{\text{я}} = e\hbar/(2m_p) = 5,0508 \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}, \quad (253.1)$$

где  $m_p$  — масса протона (ср. эту формулу с магнетоном Бора (§ 131)). Ядерный магнетон в  $m_p/m_e \approx 1836$  раз меньше магнетона Бора, поэтому магнитные свойства атомов определяются в основном магнитными свойствами его электронов.

В случае эффекта Зеемана (см. § 223) при помещении атома в магнитное поле наблюдается расщепление энергетических уровней и спектральных линий (**тонкая структура**), обусловленное спин-орбитальным взаимодействием электронов. Во внешнем магнитном поле также наблюдается расщепление уровней энергии атома на близко расположенные подуровни (**сверхтонкая структура**), обусловленное взаимодействием магнитного момента ядра с магнитным полем электронов в атоме.

Магнитные моменты ядер могут, таким образом, определяться спектроскопическим методом по сверхтонкой структуре спектральных линий. Однако магнитные моменты ядер примерно на три порядка меньше магнитных моментов электронов (см. (253.1) и (§ 131)), поэтому расщепление спектральных линий, соответствующее сверхтонкой структуре, значительно меньше расщепления за счет взаимодействия между спиновым и орбитальным моментами электрона (тонкая структура). Таким образом, из-за малости эффекта, даже при использовании спектральных приборов очень большой разрешающей способности, точность этого метода невелика. Поэтому были разработаны более точные (не оптические) методы определения магнитных моментов ядер, одним из которых является **метод ядерного магнитного резонанса**.

Явление ядерного магнитного резонанса заключается в следующем: если на вещество, находящееся в сильном постоянном магнитном поле, действовать слабым переменным радиочастотным магнитным полем, то при частотах, соответствующих частотам переходов между ядерными подуровнями, возникает резкий (резонансный) максимум поглощения. Ядерный магнитный резонанс обусловлен

происходящими под влиянием переменного магнитного поля квантовыми переходами между ядерными подуровнями. Точность метода задается точностью измерения напряженности постоянного магнитного поля и резонансной частоты, так как по их значениям вычисляются магнитные моменты ядер. Так как для измерения этих величин применяются прецизионные методы, то  $p_{\text{мя}}$  можно определять с высокой точностью (до шести знаков).

Метод ядерного магнитного резонанса позволяет наблюдать ядерный резонанс на ядрах, обладающих магнитным моментом порядка  $0,1\mu_{\text{я}}$ . Количество вещества, необходимое для измерений, должно составлять  $10^{-3}$ — $10$  г (в зависимости от значения  $p_{\text{мя}}$ ). Измерение значений магнитных моментов ядер часто сводится к сравнению резонансных частот исследуемых ядер с резонансной частотой протонов, что позволяет освободиться от точной калибровки магнитного поля, которая является довольно трудоемкой.

### Ядерные силы. Модели ядра

Между составляющими ядро нуклонами действуют особые, специфические для ядра силы, значительно превышающие кулоновские силы отталкивания между протонами. Они называются **ядерными силами**.

С помощью экспериментальных данных по рассеянию нуклонов на ядрах, ядерным превращениям и т.д. доказано, что ядерные силы намного превышают гравитационные, электрические и магнитные взаимодействия и не сводятся к ним. Ядерные силы относятся к классу так называемых **сильных взаимодействий**.

Перечислим основные свойства ядерных сил:

- 1) ядерные силы являются *силами притяжения*;
- 2) ядерные силы являются *короткодействующими* — их действие проявляется только на расстояниях примерно  $10^{-15}$  м. При увеличении расстояния между нуклонами ядерные силы быстро уменьшаются до нуля, а при расстояниях, меньших их радиуса действия, оказываются примерно в 100 раз больше кулоновских сил, действующих между протонами на том же расстоянии;
- 3) ядерным силам свойственна *зарядовая независимость*: ядерные силы, действующие между двумя протонами, или двумя нейтронами, или, наконец, между протоном и нейтроном, одинаковы по величине. Отсюда следует, что ядерные силы имеют неэлектрическую природу;
- 4) ядерным силам свойственно *насыщение*, т. е. каждый нуклон в ядре взаимодействует только с ограниченным числом ближайших к нему нуклонов. Насыщение проявляется в том, что удельная энергия связи нуклонов в ядре (если не учитывать легкие ядра) при увеличении числа нуклонов не растет, а остается приблизительно постоянной;
- 5) ядерные силы зависят от взаимной *ориентации спинов* взаимодействующих нуклонов. Например, протон и нейтрон образуют дейтрон (ядро изотопа  ${}^2_1\text{H}$ ) только при условии параллельной ориентации их спинов;
- 6) ядерные силы *не являются центральными*, т. е. действующими по линии, соединяющей центры взаимодействующих нуклонов.

Сложный характер ядерных сил и трудность точного решения уравнений движения всех нуклонов ядра (ядро с массовым числом  $A$  представляет собой систему из  $A$  тел) не позволили до настоящего времени разработать единую последовательную теорию атомного ядра. Поэтому на данной стадии прибегают к рассмотрению приближенных ядерных моделей, в которых ядро заменяется некоторой модельной системой, довольно хорошо описывающей только определенные свойства ядра и допускающей более или менее простую математическую трактовку. Из большого числа моделей, каждая из которых обязательно использует подобранные произвольные параметры, согласующиеся с экспериментом, рассмотрим две: **капельную** и **оболочечную**.

1. **Капельная модель ядра** (1936; Н. Бор и Я. И. Френкель). Капельная модель ядра является первой моделью.
2. **Оболочечная модель ядра** (1949—1950; американский физик М. Гепперт-Майер (1906—1975) и немецкий физик Х. Иенсен (1907—1973)). Оболочечная модель предполагает распределение нуклонов в ядре по дискретным энергетическим уровням (оболочкам), заполняемым нуклонами согласно принципу Паули, и связывает устойчивость ядер с заполнением этих уровней. Считается, что ядра с полностью заполненными оболочками являются наиболее устойчивыми. Такие особо устойчивые (магические) ядра действительно существуют (см. § 252).

### Радиоактивное излучение и его виды

Французский физик А. Беккерель (1852—1908) в 1896 г. при изучении люминесценции солей урана случайно обнаружил *самопроизвольное* испускание ими излучения неизвестной природы, которое действовало на фотопластинку, ионизировало воздух, проникало сквозь тонкие металлические пластинки, вызывало люминесценцию ряда веществ. Продолжая исследование этого явления, супруги Кюри — Мария (1867—1934) и Пьер — обнаружили, что беккерелевское излучение свойственно не только урану, но и многим другим тяжелым элементам, таким, как торий и актиний. Они показали также, что урановая смоляная обманка (руда, из которой добывается металлический уран) испускает излучение, интенсивность которого во много раз превышает интенсивность излучения урана. Таким образом удалось выделить два новых элемента — носителя беккерелевского излучения: полоний  ${}_{84}^{210}\text{Po}$  и радий  ${}_{88}^{226}\text{Ra}$ .

Обнаруженное излучение было названо **радиоактивным излучением**, а само явление — испускание радиоактивного излучения — **радиоактивностью**.

Дальнейшие опыты показали, что на характер радиоактивного излучения препарата не оказывают влияния вид химического соединения, агрегатное состояние, механическое давление, температура, электрические и магнитные поля, т. е. все те воздействия, которые могли бы привести к изменению состояния электронной оболочки атома. Следовательно, радиоактивные свойства элемента обусловлены лишь структурой его ядра.

В настоящее время под **радиоактивностью** понимают способность некоторых атомных ядер самопроизвольно (спонтанно) превращаться в другие ядра с испусканием различных видов радиоактивных излучений и элементарных частиц. Радиоактивность подразделяется на **естественную** (наблюдается у неустойчивых изотопов, существующих в природе) и **искусственную** (наблюдается у изотопов, полученных посредством ядерных реакций). Принципиального различия между этими двумя типами радиоактивности нет, так как законы радиоактивного превращения в обоих случаях одинаковы.

Радиоактивное излучение бывает трех типов:  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучение. Подробное их исследование позволило выяснить природу и основные свойства.

$\alpha$ -Излучение отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает высокой ионизирующей способностью и малой проникающей способностью (например, поглощаются слоем алюминия толщиной примерно 0,05 мм).  $\alpha$ -Излучение представляет собой поток ядер гелия; заряд  $\alpha$ -частицы равен  $+2e$ , а масса совпадает с массой ядра изотопа гелия  ${}^4_2\text{He}$ . По отклонению  $\alpha$ -частиц в электрическом и магнитном полях был определен их удельный заряд  $Q/m_\alpha$ , значение которого подтвердило правильность представлений об их природе.

$\beta$ -Излучение отклоняется электрическим и магнитным полями; его ионизирующая способность значительно меньше (примерно на два порядка), а проникающая способность гораздо больше (поглощается слоем алюминия толщиной примерно 2 мм), чем у  $\alpha$ -частиц.  $\beta$ -Излучение представляет собой поток быстрых электронов (это вытекает из определения их удельного заряда).

Поглощение потока электронов с одинаковыми скоростями в однородном веществе подчиняется экспоненциальному закону  $N=N_0e^{-\mu x}$ , где  $N_0$  и  $N$  — число электронов на входе и выходе слоя вещества толщиной  $x$ ,  $\mu$  — коэффициент поглощения.  $\beta$ -Излучение сильно рассеивается в веществе, поэтому  $\mu$  зависит не только от вещества, но и от размеров и формы тел, на которые  $\beta$ -излучение падает.

$\gamma$ -Излучение не отклоняется электрическим и магнитным полями, обладает относительно слабой ионизирующей способностью и очень большой проникающей способностью (например, проходит через слой свинца толщиной 5 см), при прохождении через кристаллы обнаруживает дифракцию.  $\gamma$ -Излучение представляет собой коротковолновое электромагнитное излучение с чрезвычайно малой длиной волны  $\lambda < 10^{-10}$  м и вследствие этого — ярко выраженными корпускулярными свойствами, т. е. является потоком частиц —  $\gamma$ -квантов (фотонов).

### Закон радиоактивного распада. Правила смещения

Под радиоактивным распадом, или просто распадом, понимают естественное радиоактивное превращение ядер, происходящее самопроизвольно. Атомное ядро, испытывающее радиоактивный распад, называется **материнским**, возникающее ядро — **дочерним**.

Теория радиоактивного распада строится на предположении о том, что радиоактивный распад является спонтанным процессом, подчиняющимся законам статистики. Так как отдельные радиоактивные ядра распадаются независимо друг от друга, то можно считать, что число ядер  $dN$ , распавшихся в среднем за интервал времени от  $t$  до  $t+dt$ , пропорционально промежутку времени  $dt$  и числу  $N$  нераспавшихся ядер к моменту времени  $t$ :

$$dN = -\lambda N dt, \quad (256.1)$$

где  $\lambda$  — постоянная для данного радиоактивного вещества величина, называемая **постоянной радиоактивного распада**; знак минус указывает, что общее число радиоактивных ядер в процессе распада уменьшается. Разделив переменные и интегрируя:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt, \quad \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\lambda \int_0^t dt, \quad \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t,$$

получим

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (256.2)$$

где  $N_0$  — начальное число *нераспавшихся* ядер (в момент времени  $t=0$ ),  $N$  — число *нераспавшихся* ядер в момент времени  $t$ . Формула (256.2) выражает **закон радиоактивного распада**, согласно которому число нераспавшихся ядер убывает со временем по экспоненциальному закону.

Интенсивность процесса радиоактивного распада характеризуют две величины: период полураспада  $T_{1/2}$  и среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра. **Период полураспада**  $T_{1/2}$  — время, за которое исходное число радиоактивных ядер в *среднем* уменьшается вдвое. Тогда, согласно (256.2),

$$N_0/2 = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}},$$

откуда

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693/\lambda.$$

Периоды полураспада для естественно-радиоактивных элементов колеблются от десятиллионных долей секунды до многих миллиардов лет.

Суммарная продолжительность жизни  $dN$  ядер равна  $t|dN| = \lambda N t dt$ . Проинтегрировав это выражение по всем возможным  $t$  (т. е. от 0 до  $\infty$ ) и разделив на начальное число ядер  $N_0$ , получим **среднее время жизни**  $\tau$  радиоактивного ядра:

$$\tau = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N t dt = \frac{1}{N_0} \int_0^{\infty} \lambda N_0 t e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

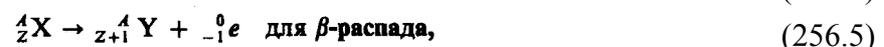
(учтено (256.2)). Таким образом, среднее время жизни  $\tau$  радиоактивного ядра есть величина, обратная постоянной радиоактивного распада  $\lambda$ .

**Активностью  $A$  нуклида** (общее название атомных ядер, отличающихся числом протонов  $Z$  и нейтронов  $N$ ) в радиоактивном источнике называется число распадов, происходящих с ядрами образца в 1 с:

$$A = \left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N. \quad (256.3)$$

Единица активности в СИ — **беккерель (Бк)**: 1 Бк — активность нуклида, при которой за 1 с происходит один акт распада. До сих пор в ядерной физике применяется и внесистемная единица активности нуклида в радиоактивном источнике — **кюри (Ки)**: 1 Ки =  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк.

Радиоактивный распад происходит в соответствии с так называемыми **правилами смещения**, позволяющими установить, какое ядро возникает в результате распада данного материнского ядра. Правила смещения:



где  ${}^A_Z X$  — материнское ядро,  $Y$  — символ дочернего ядра,  ${}^4_2 \text{He}$  — ядро гелия ( $\alpha$ -частица),  ${}^0_{-1} e$  — символическое обозначение электрона (заряд его равен  $-1$ , а массовое число — нулю). Правила смещения являются ничем иным, как следствием двух законов, выполняющихся при радиоактивных распадах, — сохранения электрического заряда и сохранения массового числа: сумма зарядов (массовых чисел) возникающих ядер и частиц равна заряду (массовому числу) исходного ядра.

Возникающие в результате радиоактивного распада ядра могут быть, в свою очередь, радиоактивными. Это приводит к возникновению **цепочки**, или **ряда, радиоактивных превращений**, заканчивающихся стабильным элементом. Совокупность элементов, образующих такую цепочку, называется **радиоактивным семейством**.

при  $\beta$ -распаде не меняется. Поэтому для всех ядер одного и того же радиоактивного семейства остаток от деления массового числа на 4 одинаков.

Если энергия  $\gamma$ -кванта превышает энергию связи нуклонов в ядре (7—8 МэВ), то в результате поглощения  $\gamma$ -кванта может наблюдаться **ядерный фотоэффект** — выброс из ядра одного из нуклонов, чаще всего нейтрона.

Воздействие  $\gamma$ -излучения (а также других видов ионизирующего излучения) на вещество характеризуют **дозой ионизирующего излучения**. Различаются:

**Поглощенная доза излучения** — физическая величина, равная отношению энергии излучения к массе облучаемого вещества.

Единица поглощенной дозы излучения — **грей (Гр)\***: 1 Гр = 1 Дж/кг — доза излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия любого ионизирующего излучения 1 Дж.

\* С. Грей (1666—1736) — английский физик.

**Экспозиционная доза излучения** — физическая величина, равная отношению суммы электрических зарядов всех ионов одного знака, созданных электронами, освобожденными в облученном воздухе (при условии полного использования ионизирующей способности электронов), к массе этого воздуха.

Единица экспозиционной дозы излучения — кулон на килограмм (Кл/кг); внесистемной единицей является **рентген (Р)**: 1 Р =  $2,58 \cdot 10^{-4}$  Кл/кг.

**Биологическая доза** — величина, определяющая воздействие излучения на организм.

Единица биологической дозы — **биологический эквивалент рентгена (бэр)**: 1 бэр — доза любого вида ионизирующего излучения, производящая такое же биологическое действие, как и доза рентгеновского или  $\gamma$ -излучения в 1 Р (1 бэр =  $10^{-2}$  Дж/кг).

**Мощность дозы излучения** — величина, равная отношению дозы излучения к времени облучения. Различают: 1) **мощность поглощенной дозы** (единица — грей на секунду (Гр/с)); 2) **мощность экспозиционной дозы** (единица — ампер на килограмм (А/кг)).

### Резонансное поглощение $\gamma$ -излучения (эффект Мёссбауэра\*)

Как уже указывалось, дискретный спектр  $\gamma$ -излучения обусловлен дискретностью энергетических уровней ядер атомов. Однако, как следует из соотношения неопределенностей (215.5), энергия возбужденных состояний ядра принимает значения в пределах  $\Delta E \approx h/\Delta t$ , где  $\Delta t$  — время жизни ядра в возбужденном состоянии. Следовательно, чем меньше  $\Delta t$ , тем больше неопределенность энергии  $\Delta E$  возбужденного состояния.  $\Delta E = 0$  только для основного состояния стабильного ядра (для него  $\Delta t \rightarrow \infty$ ). Неопределенность энергии квантово-механической системы (например, атома), обладающей дискретными уровнями энергии, определяет **естественную ширину энергетического уровня ( $\Gamma$ )**. Например, при времени жизни возбужденного состояния, равного  $10^{-13}$  с, естественная ширина энергетического уровня примерно  $10^{-2}$  эВ.

\* Р. Мёссбауэр (р. 1929) — немецкий физик.

Неопределенность энергии возбужденного состояния, обуславливаемая конечным временем жизни возбужденных состояний ядра, приводит к немонохроматичности  $\gamma$ -излучения, испускаемого при переходе ядра из возбужденного состояния в основное. Эта немонохроматичность называется **естественной шириной линии  $\gamma$ -излучения**.

При прохождении  $\gamma$ -излучения в веществе помимо описанных выше (см. § 259) процессов (фотоэффект, комптоновское рассеяние, образование электронно-позитронных пар) должны в принципе наблюдаться также резонансные эффекты. Если ядро облучить  $\gamma$ -квантами с энергией, равной разности одного из возбужденных и основного энергетических состояний ядра, то может иметь место **резонансное поглощение  $\gamma$ -излучения ядрами**: ядро поглощает  $\gamma$ -квант той же частоты, что и

частота излучаемого ядром  $\gamma$ -кванта при переходе ядра из данного возбужденного состояния в основное.

Наблюдение резонансного поглощения  $\gamma$ -квантов ядрами считалось долгое время невозможным, так как при переходе ядра из возбужденного состояния с энергией  $E$  в основное (его энергия принята равной нулю) излучаемый  $\gamma$ -квант имеет энергию  $E_\gamma$  несколько меньшую, чем  $E$ , из-за отдачи ядра в процессе излучения:

$$E_\gamma = E - E_\pi,$$

где  $E_\pi$  — кинетическая энергия отдачи ядра. При возбуждении же ядра и переходе его из основного состояния в возбужденное с энергией  $E$   $\gamma$ -квант должен иметь энергию

$$E'_\gamma = E + E_\pi,$$

где  $E_\pi$  — энергия отдачи, которую  $\gamma$ -квант должен передать поглощающему ядру.

Таким образом, максимумы линий излучения и поглощения сдвинуты друг относительно друга на величину  $2E_\pi$  (рис. 344). Используя закон сохранения импульса, согласно которому в рассмотренных процессах излучения и поглощения импульсы  $\gamma$ -кванта и ядра должны быть равны, получим

$$E_\pi = \frac{p_\pi^2}{2m_\pi} = \frac{p_\gamma^2}{2m_\pi} = \frac{E_\gamma^2}{2m_\pi c^2} \approx \frac{E^2}{2m_\pi c^2}. \quad (260.1)$$

Например, возбужденное состояние изотопа иридия  $^{191}_{77}\text{Ir}$  имеет энергию 129 кэВ, а время его жизни порядка  $10^{-10}$  с, так что ширина уровня  $\Gamma \approx 4 \cdot 10^{-5}$  эВ. Энергия же отдачи при излучении с этого уровня, согласно (260.1), приблизительно равна  $5 \cdot 10^{-2}$  эВ, т. е. на три порядка больше ширины уровня. Естественно, что никакое резонансное поглощение в таких условиях невозможно (для наблюдения резонансного поглощения линия поглощения должна совпадать с линией излучения). Из опытов также следовало, что на свободных ядрах резонансное поглощение не наблюдается.

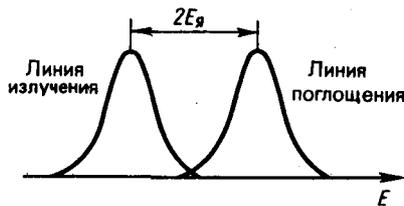


Рис. 344

- Изменится ли химическая природа элемента при испускании его ядром  $\gamma$ -кванта?
- Какие явления сопровождают прохождение  $\gamma$ -излучения через вещество и в чем их суть?
- В чем суть эффекта Мёссбауэра? Каковы его возможные применения?

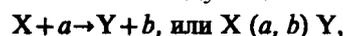
Резонансное поглощение  $\gamma$ -излучения в принципе может быть получено только при компенсации потери энергии на отдачу ядра. Эту задачу решил в 1958 г. Р. Мёссбауэр (Нобелевская премия 1961 г.). Он исследовал излучение и поглощение  $\gamma$ -излучения в ядрах, находящихся в кристаллической решетке, т. е. в связанном состоянии (опыты проводились при низкой температуре).

Явление упругого испускания (поглощения)  $\gamma$ -квантов атомными ядрами, связанными в твердом теле, не сопровождающееся изменением внутренней энергии тела, называется **эффектом Мёссбауэра**. При рассмотренных условиях линии излучения и поглощения  $\gamma$ -излучения практически совпадают и имеют весьма малую ширину, равную естественной ширине  $\Gamma$ . Эффект Мёссбауэра был открыт на глубоко охлажденном  $^{191}_{77}\text{Ir}$  (с понижением температуры колебания решетки «замораживаются»), а впоследствии обнаружен более чем на 20 стабильных изотопах (например,  $^{57}\text{Fe}$ ,  $^{67}\text{Zn}$ ).

Мёссбауэр вооружил экспериментальную физику новым методом измерений невиданной прежде точности. Эффект Мёссбауэра позволяет измерять энергии (частоты) излучения с относительной точностью  $\Gamma/E = 10^{-15} \div 10^{-17}$ , поэтому во многих областях науки и техники может служить тончайшим «инструментом» различного рода измерений. Появилась возможность измерять тончайшие детали  $\gamma$ -линий, внутренние магнитные и электрические поля в твердых телах и т. д.

### Ядерные реакции и их основные типы

**Ядерные реакции** — это превращения атомных ядер при взаимодействии с элементарными частицами (в том числе и с  $\gamma$ -квантами) или друг с другом. Наиболее распространенным видом ядерной реакции является реакция, записываемая символически следующим образом:



где  $X$  и  $Y$  — исходное и конечное ядра,  $a$  и  $b$  — бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

В ядерной физике эффективность взаимодействия характеризуют **эффективным сечением**  $\sigma$ . С каждым видом взаимодействия частицы с ядром связывают свое эффективное сечение: эффективное сечение рассеяния определяет процессы рассеяния, эффективное сечение поглощения — процессы поглощения. Эффективное сечение ядерной реакции

$$\sigma = \frac{dN}{nNdx},$$

где  $N$  — число частиц, падающих за единицу времени на единицу площади поперечного сечения вещества, имеющего в единице объема  $n$  ядер,  $dN$  — число этих частиц, вступающих в ядерную реакцию в слое толщиной  $dx$ . Эффективное сечение  $\sigma$  имеет размерность площади и характеризует вероятность того, что при падении пучка частиц на вещество произойдет реакция.

Единица эффективного сечения ядерных процессов — барн ( $1 \text{ барн} = 10^{-28} \text{ м}^2$ ). В любой ядерной реакции выполняются *законы сохранения электрических зарядов и массовых чисел*: сумма зарядов (и сумма массовых чисел) ядер и частиц, вступающих в ядерную реакцию, равна сумме зарядов (и сумме массовых чисел) конечных продуктов (ядер и частиц) реакции. Выполняются также *законы сохранения энергии, импульса и момента импульса*.

В отличие от радиоактивного распада, который протекает всегда с выделением энергии, ядерные реакции могут быть как **экзотермическими** (с выделением энергии), так и **эндотермическими** (с поглощением энергии).

В ядерной физике вводится **характерное ядерное время** — время, необходимое для пролета частицей расстояния порядка величины, равной диаметру ядра ( $d \approx 10^{-15} \text{ м}$ ). Так, для частицы с энергией 1 МэВ (что соответствует ее скорости  $v \approx 10^7 \text{ м/с}$ ) характерное ядерное время  $\tau = 10^{-15} \text{ м} / 10^7 \text{ м/с} = 10^{-22} \text{ с}$ . С другой стороны, доказано, что время жизни составного ядра равно  $10^{-16}—10^{-12} \text{ с}$ , т. е. составляет ( $10^6—10^{10}$ )  $\tau$ . Это же означает, что за время жизни составного ядра может произойти очень много столкновений нуклонов между собой, т. е. перераспределение энергии между нуклонами действительно возможно. Следовательно, составное ядро живет настолько долго, что полностью «забывает», каким образом оно образовалось. Поэтому характер распада составного ядра (испускание им частицы  $b$ ) — вторая стадия ядерной реакции — не зависит от способа образования составного ядра — первой стадии.

Если испущенная частица тождественна с захваченной ( $b \equiv a$ ), то схема (262.1) описывает **рассеяние** частицы: **упругое** — при  $E_b = E_a$ , **неупругое** — при  $E_b \neq E_a$ . Если же испущенная частица не тождественна с захваченной ( $b \neq a$ ), то имеем дело с ядерной реакцией в прямом смысле слова.

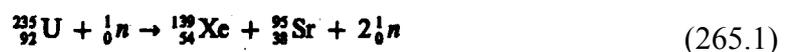
Некоторые реакции протекают без образования составного ядра, они называются **прямыми ядерными взаимодействиями** (например, реакции, вызываемые быстрыми нуклонами и дейтронами).

### Реакция деления ядра

К началу 40-х годов работами многих ученых—Э. Ферми (Италия), О. Гана (1879—1968), Ф. Штрассмана (1902—1980) (ФРГ), О. Фриша (1904—1979) (Великобритания), Л. Мейтнер (1878—1968) (Австрия), Г.Н. Флерова (р. 1913), К.Н. Петржака (Россия) — было доказано, что при облучении урана нейтронами образуются элементы из середины Периодической системы — лантан и барий. Этот результат положил начало ядерным реакциям совершенно нового типа — **реакциям деления ядра**, заключающимся в том, что тяжелое ядро под действием нейтронов, а как впоследствии оказалось и других частиц делится на несколько более легких ядер (осколков), чаще всего на два ядра, близких по массе.

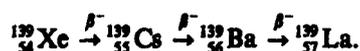
Замечательной особенностью деления ядер является то, что оно сопровождается испусканием двух-трех вторичных нейтронов, называемых **нейтронами деления**.

. Например, при делении ядра урана  ${}_{92}^{235}\text{U}$



осколок деления  ${}_{54}^{139}\text{Xe}$  в результате трех актов  $\beta^-$ -распада превращается в стабильный изотоп лантана

${}_{57}^{139}\text{La}$ :



Осколки деления могут быть разнообразными, поэтому реакция (265.1) не единственная приводящая к делению  $^{235}_{92}\text{U}$ . Возможна, например, реакция



Большинство нейтронов при делении испускается практически мгновенно ( $t \leq 10^{-14}$  с), а часть (около 0,7%) испускается осколками деления спустя некоторое время после деления ( $0,05 \text{ с} \leq t \leq 60 \text{ с}$ ). Первые из них называются **мгновенными**, вторые — **запаздывающими**. В среднем на каждый акт деления приходится 2,5 испущенных нейтронов. Они имеют сравнительно широкий энергетический спектр в пределах от 0 до 7 МэВ, причем на один нейтрон в среднем приходится энергия около 2 МэВ.

Эксперименты подтверждают, что при каждом акте деления действительно выделяется огромная энергия, которая распределяется между осколками (основная доля), нейтронами деления, а также между продуктами последующего распада осколков деления.

### Цепная реакция деления

Испускаемые при делении ядер вторичные нейтроны могут вызвать новые акты деления, что делает возможным осуществление **цепной реакции деления** — ядерной реакции, в которой частицы, вызывающие реакцию, образуются как продукты этой реакции. Цепная реакция деления характеризуется **коэффициентом размножения**  $k$  нейтронов, который равен отношению числа нейтронов в данном поколении к их числу в предыдущем поколении. *Необходимым условием* для развития цепной реакции деления является *требование*  $k \geq 1$ .

Оказывается, что не все образующиеся вторичные нейтроны вызывают последующее деление ядер, что приводит к уменьшению коэффициента размножения. Во-первых, из-за конечных размеров **активной зоны** (пространство, где происходит цепная реакция) и большой проникающей способности нейтронов часть из них покинет активную зону раньше, чем будет захвачена каким-либо ядром. Во-вторых, часть нейтронов захватывается ядрами неделящихся примесей, всегда присутствующих в активной зоне. Кроме того, наряду с делением могут иметь место конкурирующие процессы радиационного захвата и неупругого рассеяния.

Коэффициент размножения зависит от природы делящегося вещества, а для данного изотопа — от его количества, а также размеров и формы активной зоны. Минимальные размеры активной зоны, при которых возможно осуществление цепной реакции, называются **критическими размерами**. Минимальная масса делящегося вещества, находящегося в системе критических размеров, необходимая для осуществления **цепной реакции**, называется **критической массой**.

Скорость развития цепных реакций различна. Пусть  $T$  — среднее время жизни одного поколения, а  $N$  — число нейтронов в данном поколении. В следующем поколении их число равно  $kN$ , т. е. прирост числа нейтронов за одно поколение  $dN = kN - N = N(k-1)$ . Прирост же числа нейтронов за единицу времени, т. е. скорость нарастания цепной реакции,

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}. \quad (266.1)$$

Интегрируя (266.1), получим

$$N = N_0 e^{(k-1)t/T},$$

где  $N_0$  — число нейтронов в начальный момент времени, а  $N$  — их число в момент времени  $t$ .  $N$  определяется знаком  $(k-1)$ . При  $k > 1$  идет **развивающаяся реакция**, число делений непрерывно растет и реакция может стать взрывной. При  $k = 1$  идет **самоподдерживающаяся реакция**, при которой число нейтронов с течением времени не изменяется. При  $k < 1$  идет затухающая реакция.

Цепные реакции делятся на **управляемые** и **неуправляемые**. Взрыв атомной бомбы, например, является неуправляемой реакцией. Чтобы атомная бомба при хранении не взорвалась, в ней  $^{235}_{92}\text{U}$  (или  $^{239}_{94}\text{Pu}$ ) делится на две удаленные друг от друга части с массами ниже критических. Затем с помощью обычного взрыва эти массы сближаются, общая масса делящегося вещества становится больше критической и возникает взрывная цепная реакция, сопровождающаяся мгновенным выделением огромного количества энергии и большими разрушениями. Взрывная реакция начинается за счет имеющихся нейтронов спонтанного деления или нейтронов космического излучения. Управляемые цепные реакции осуществляются в ядерных реакторах (см. § 267).

В природе имеется три изотопа, которые могут служить ядерным топливом ( $^{235}_{92}\text{U}$ : в естественном уране его содержится примерно 0,7%) или сырьем для его получения ( $^{232}_{90}\text{Th}$  и  $^{238}_{92}\text{U}$ : в естественном уране его содержится примерно 99,3%).  $^{232}_{90}\text{Th}$  служит исходным продуктом для получения искусственного ядерного топлива  $^{233}_{92}\text{U}$  (см. реакцию (265.2)), а  $^{238}_{92}\text{U}$ , поглощая нейтроны, посредством двух последовательных  $\beta^-$ -распадов — для превращения в ядро  $^{239}_{94}\text{Pu}$ :



Реакции (266.2) и (265.2), таким образом, открывают реальную возможность воспроизводства ядерного горючего в процессе цепной реакции деления.

### § 267. Понятие о ядерной энергетике

Большое значение в ядерной энергетике приобретает не только осуществление цепной реакции деления, но и управление ею. Устройства, в которых осуществляется и поддерживается управляемая цепная реакция деления, называются **ядерными реакторами**. Пуск первого реактора в мире осуществлен в Чикагском университете (1942) под руководством Э. Ферми, в России (и в Европе) — в Москве (1946) под руководством И. В. Курчатова.

Ядерный реактор является мощным источником проникающей радиации (нейтроны,  $\gamma$ -излучение), примерно в  $10^{11}$  раз превышающей санитарные нормы. Поэтому любой реактор имеет биологическую защиту — систему экранов из защитных материалов (например, бетон, свинец, вода), располагающуюся за его отражателем, и пульт дистанционного управления.

#### Реакция синтеза атомных ядер. Проблема управляемых термоядерных реакций

Источником огромной энергии может служить реакция синтеза атомных ядер — образование из легких ядер более тяжелых.

Реакции синтеза легких атомных ядер в более тяжелые, происходящие при сверхвысоких температурах (примерно  $10^7$  К и выше), называются **термоядерными реакциями**.

Термоядерные реакции являются, по-видимому, одним из источников энергии Солнца и звезд. В принципе высказаны два предположения о возможных способах протекания термоядерных реакций на Солнце:

Термоядерные реакции дают наибольший выход энергии на единицу массы «горючего», чем любые другие превращения, в том числе и деление тяжелых ядер. Например, количество дейтерия в стакане простой воды энергетически эквивалентно примерно 60 л бензина. Поэтому заманлива перспектива осуществления термоядерных реакций искусственным путем.

Впервые искусственная термоядерная реакция осуществлена в нашей стране (1953), а затем (через полгода) в США в виде взрыва водородной (термоядерной) бомбы, являющегося неуправляемой реакцией. Взрывчатым веществом служила смесь дейтерия и трития, а запалом — «обычная» атомная бомба, при взрыве которой возникает необходимая для протекания термоядерной реакции температура.

Особый интерес представляет осуществление управляемой термоядерной реакции, для обеспечения которой необходимо создание и поддержание в ограниченном объеме температуры порядка  $10^8$  К странность (см. § 274), очарование (см. § 275) и т. Д