Линейная алгебра и математический анализ

1. По определению, если равенство $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=0$ выполняется при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то векторы $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис.
Учитывая данные, получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=0\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=0\end{cases}$$

Из 3-го уравнения получаем $\lambda_1=-4\lambda_3$. Учитывая, что в 1-ом и 2-ом уравнениях, получаем

$$\begin{cases}-8\lambda_3+5\lambda_2+3\lambda_3=0\\-12\lambda_3+7\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}.\quad \text{Отсюда}\quad \begin{cases}5\lambda_2-5\lambda_3=0\\7\lambda_2-14\lambda_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2-\lambda_3=0\\\lambda_2-2\lambda_3=0\end{cases}$$

Если из 1-го уравнения почленно вычесть 2-ое уравнение, получим $\lambda_3=0$. Учитывая это в других уравнениях, получаем $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Следовательно, эти векторы образуют базис.

Чтобы найти разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$, надо решить уравнение $\lambda_1\overline{a}+\lambda_2\overline{b}+\lambda_3\overline{c}=\overline{d}$.

Учитывая данные задачи, получим $\begin{cases}2\lambda_1+5\lambda_2+3\lambda_3=4\\3\lambda_1+7\lambda_2-2\lambda_3=12\\\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\end{cases}$.

Сохраним последнее уравнение без изменений. Умножим это уравнение на 2 и прибавим к 1-ому уравнению, затем умножим на 3 и прибавим ко 2-ому уравнению. Получим

$$\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\5\lambda_2-5\lambda_3=10\\7\lambda_2-14\lambda_3=21\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1+0\cdot\lambda_2+4\lambda_3=-3\\\lambda_2-\lambda_3=2\\\lambda_2-2\lambda_3=3\end{cases}$$

Если из 2-го уравнения почленно вычесть последнее, получим $\lambda_3=-1$. Учитывая это во втором уравнении получим $\lambda_2+1=2\Rightarrow\lambda_2=1$ Учитывая $\lambda_3=-1$ в уравнении $\lambda_1+4\lambda_3=-3$ получим $\lambda_1=1$.

И так, получаем новые координаты $\overline{d}(1;1;-1)$. Напишем разложение вектора $\overline{d}$ по векторам $\overline{a},\overline{b}$ и $\overline{c}$. $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$

2. Если $|\overline{a}|=2,\ |\overline{b}|=3,\ |\overline{c}|=5,\ (\wedge)=60^0\ (\overline{b}\overline{c})=60^0$, найти длину вектора $\overline{d}=\overline{a}+\overline{b}-\overline{c}$. Известно, что $|\overline{d}|=\sqrt{(\overline{d},\overline{d})}$. Отсюда получаем

$(a;a)=|a|^2, (b;b)=|b|^2, (\bar{c};\bar{c})=(\bar{c})$

$$|d|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b}-\bar{c};\bar{a}+\bar{b}-c)}=\sqrt{(a;a)+2(a;b)+(\bar{b};\bar{b})-2(\bar{a};\bar{c})-2(\bar{b};\bar{c})+(\bar{c};\bar{c})}=$$

$$=\sqrt{|a|^2+2|a||b|Cos(a;b)+|b|^2-2|a||c|Cos(a;c)-2|b||c|Cos(b;c)+|c|^2}=$$

$$=\sqrt{4+2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}+9-2\cdot2\cdot5\cdot\frac{1}{2}-2\cdot3\cdot5\cdot\frac{1}{2}+25}=\sqrt{4+6+9-10-15+25}=\sqrt{19}$$

Итак, $|d|=\sqrt{19}$.

3. $|\bar{a}+\bar{b}|=?$ Мы знаем, что $|a|=\sqrt{a;a}$. Кроме того,

$$|\bar{a}-\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}-\bar{b};\bar{a}-\bar{b})}=\sqrt{|a|^2-2(a;b)+|b|^2}=30$$

$$\sqrt{|2|-2(a;b)+529}=30\Rightarrow650-2(\bar{a};\bar{b})=900\Rightarrow2(\bar{a};\bar{b})=-250$$

$$(\bar{a};\bar{b})=-125$$

Тогда получаем

$$|\bar{a}+\bar{b}|=\sqrt{(\bar{a}+\bar{b};\bar{a}+\bar{b})}=\sqrt{|a|^2+2(\bar{a};\bar{b})+|\bar{b}|^2}=\sqrt{121+2\cdot(-125)+529}=$$

$$\sqrt{650-250}=\sqrt{400}=20 \qquad |\bar{a}+\bar{b}|=20$$

4. Чтобы проверить образуют ли, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ базис, из равенства

$\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=0$ получаем систему уравнений: $\begin{cases}2\lambda_1+2\lambda_2=0\\-2\lambda_1-\lambda_2=0\end{cases}$

Почленно сложив эти уравнения , получим $\lambda_2=0$. Учитывая это в одном из уравнений, получаем $\lambda_1=0$.

Следовательно, по определению векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{P}$.

$$\bar{P}=2(2;-2)-(2;-1)+(2;4)=(4;-4)-(2;-1)+(2;4)=(4;1)$$

Для того, чтобы написать разложения вектора $\bar{P}$ по векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, требуется выполнение равенства $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}=\bar{p}$.

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{cases}$$ Если почленно сложить эти уравнения получим

$\lambda_2 = 5$. Учитывая это в 1-ом уравнении, получим

$2\lambda_1 + 2\cdot 5 = 4 \Rightarrow 2\lambda_1 = -6 \Rightarrow \lambda_1 = -3$. Итак, $\overline{p} = -3\overline{a} + 5\overline{b}$

5. Написать и доказать теорему о линейной зависимости векторв в R^n.

<u>ТЕОРЕМА 1.</u> Если система содержит не менее двух векторов, то для линейной зависимости этой системы необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов системы являлся линейной комбинацией остальных векторов системы.

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u> Докажем сперва необходимость.

Пусть $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ - линейно зависимые. Тогда по определению линейной зависимости векторов равенство: $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_k\overline{a}_k = 0$

Имеет место при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Допустим $\lambda_k \neq 0$. Тогда обе части равенства разделим на λ_k.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_k}\overline{a}_2 + \ldots + \overline{a}_k = 0 \Rightarrow \overline{a}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\overline{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\overline{a}_{k-1}$$

$$\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$$

А это разложение вектора $\overline{a}_k$ по остальным векторам этой системы.

Теперь докажем достаточность.

Пусть $\overline{a}_k = \lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1}$ Перенесем все в одну сторону, получим $\lambda_1\overline{a}_1 + \lambda_2\overline{a}_2 + \ldots + \lambda_{k-1}\overline{a}_{k-1} - \overline{a}_k = 0$

Как видно, $\lambda_k = -1 \neq 0 \Rightarrow$ по определению линейной зависимости векторов векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$ - линейнозависимы.

Теорема доказана полностью.

6. Проверить для матриц

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ верность

$((AB)C = A(BC))$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -8 \\ 14 & 8 & -3 \\ 11 & 18 & 10 \end{pmatrix}$$

$$((AB)C) = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -8 \\ 14 & 8 & -3 \\ 11 & 18 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 14 \\ 42 & 39 & 23 \\ 46 & 30 & 7 \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A(BC)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 9 & 2 \\ 9 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 25 & 14 \\ 42 & 39 & 23 \\ 46 & 30 & 7 \end{pmatrix}$$

$((AB)C = A(BC))$ -nun doğruluğunu yoxladıq

7. Определители и правила их вычисления. Минор и алгебраическое дополнение. Основные свойства определителей.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Определитель $(n-1)$-го порядка, полученный вычеркиванием строки и столбца определителя n-го порядка, содержащих данный элемент, называют *минором этого элемента*.

Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Например, минором элемента a_{11} в определителе третьего порядка является: $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ.</u> Произведение минора M_{ij} на множитель $(-1)^{i+j}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} и обозначается так:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

<u>Свойство 1.</u> Если заменить все строки столбцами (и наоборот), значение определителя не изменится. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n_1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$

Свойство устанавливает равноправность строк и столбцов.

Свойство 2. Если поменять местами две строки (столбца), полученный новый определитель будет отличаться от предыдущего только знаком *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Следствие. Определитель, у которого две строки (столбца) одинаковы, равен нулю.

Действительно, при перестановке двух одинаковых строк (столбцов) определитель Δ не изменится, а согласно свойству 2 его знак изменится, т.е. получается, что $\Delta = -\Delta$. А это возможно только если $\Delta = 0$.

Свойство 3. Если у элементов какой-либо строки (столба) имеется общий множитель его можно вынести за знак определителя, *Н-р,*

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Для доказательства достаточно разложить определитель по элементам первой строки.

Следствие 1. Определитель, у которого одна строка (столбец) состоит только из нулей, равен нулю.

Следствие 2. Для умножения определителя на число, достаточно на это число умножить все элементы какой-либо строки (столбца), *Н-р*

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & ka_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & ka_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & ka_{n1} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix}$$

Следствие 3. Определитель, у которого две строки (столбца) пропорциональны, равен нулю.

Действительно, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n_n} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$

Свойство 4. Если все элементы, какой- либо строки (столбца) состоят из суммы двух элементов, то этот определитель равен сумме двух определителей в одном из которых за элементы той же строки (столбца) берутся первые слагаемые, а в другом – вторые слагаемые. При этом остальные строки (столбцы) остаются как в данном определителе *Н-р*.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Свойство доказывается прямым вычислением определителей.

Следствие. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на одно и то же число и сложить или вычесть из соответствующих элементов другой строки (столбца), определитель не изменится. *Н-р*, пусть

Свойство 5. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя с алгебраическими дополнениями соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю. *Н-р*, для определителя 3-го порядка: $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$

8. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^2 - 3x + 2$, найти $f(A) = ?$

$$f(A) = A^2 - 3A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0 & -3-6+0 & 0-3+0 \\ 0+0+3 & 0+4-3 & 0+2+2 \\ 3+0+6 & -9-6-6 & 0-3+4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -9 & -3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 9 & -21 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 9 & -9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$$

9. Если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, найти

$f(A) = 4A^3 - 2A^2 + 3A - 2E$.

$$f(A)=4\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}+$$

$$+3\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}4+3 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}7 & -6\\ -2 & 3\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$4\begin{pmatrix}-14-6 & 21+0\\ 4+3 & -6+0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-80 & 84\\ 28 & -24\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}14 & -12\\ -4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 9\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-102 & 105\\ 35 & -32\end{pmatrix}$$

10. Если все элементы какого-либо столбца представлячет собой суммы двух слагаемых , то этот определитель можно написать в виде суммы двух определителей..

$$\begin{vmatrix}a & a^2+1 & (a+1)^2\\ b & b^2+1 & (b+1)^2\\ c & c^2+1 & (c+1)^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2+2a+1\\ b & b^2 & b^2+2b+1\\ c & c^2 & c^2+2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a+1\\ b & 1 & b^2+2b+1\\ c & 1 & c^2+2c+1\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & a^2\\ b & b^2 & b^2\\ c & c^2 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a+1\\ b & b^2 & 2b+1\\ c & c^2 & 2c+1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2+2a\\ b & 1 & b^2+2b\\ c & 1 & c^2+2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ b & 1 & 1\\ c & 1 & 1\end{vmatrix}$$

Первый и последний определители равны нулю, так как по свойству определителя, определитель с двумя одинаковыми и пропорциональными столбцами равен нулю.

Разложим оставшиеся определители

$$\begin{vmatrix}a & a^2 & 2a\\ b & b^2 & 2b\\ c & c^2 & 2c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & 2a\\ b & 1 & 2b\\ c & 1 & 2c\end{vmatrix}=$$

$$0+\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1 & a^2\\ b & 1 & b^2\\ c & 1 & c^2\end{vmatrix}+0=2\cdot\begin{vmatrix}a & a^2 & 1\\ b & b^2 & 1\\ c & c^2 & 1\end{vmatrix}$$

Отсюда

$$2\left(ab^2+bc^2+ca^2-cb^2-ac^2-ba^2\right)=2\left(ab(b-a)+bc(c-b)+ac(a-c)\right).$$

11. Доказать равенство и написать свойства определителя, которые используются в этом доказательстве.

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

Если все элементы какой-либо строки (столбца) представляют собой суммы двух слагаемых, то этот определитель равен сумме двух определителей, в первом, из которых элементами этой строки (столбца)будут первые слагаемые, а во втором элементами этой строки (столбца) будут вторые слагаемые. При этом остальные элементы остаются такими как в данном определителе. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Если все элементы какой-либо строки (столбца) имеют общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

Если поменять местами две строки или два столбца, то определитель поменяет знак на противоположный. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцам) равен нулю.

Используя эти свойства, напишем

$$\begin{vmatrix} a+bx & ax+b & c \\ d+ex & dx+e & f \\ k+px & kx+p & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & ax+b & c \\ d & dx+e & f \\ k & kx+p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax+b & c \\ ex & dx+e & f \\ px & kx+p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & ax & c \\ d & dx & f \\ k & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & ax & c \\ ex & dx & f \\ px & kx & m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bx & b & c \\ ex & e & f \\ px & p & m \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix} + x^2\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ p & k & m \end{vmatrix} = \left(1-x^2\right)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ k & p & m \end{vmatrix}$$

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Мы знаем, что рангом называется наивысший порядок минора, отличного от нуля. Чтобы найти ранг, воспользуемся методом окаймляющих миноров.

$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0$ $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -1-4+6-3-2-4 = 8 \neq 0$

Следовательно ранг матрицы $r(A) = 3$. Тогда

$$M_3=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&1&-1\\3&-2&-1\end{vmatrix}$$ является базисным минором..

13. Ранг матрицы и его вычисления.

Пусть дана прямоугольная матрица: $A=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{n_n}\end{vmatrix}$

Выделим в этой матрице k произвольных строк и столбцов. Определитель k-го порядка, составленный из элементов матрицы А, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется минором k-го порядка матрицы А.

Матрица размерности $m\times n$ имеет $C_m^k\cdot C_n^k$ миноров k-го порядка.

$$\left(C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!};\qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$$

<u>*ОПРЕДЕЛЕНИЕ.*</u> *Рангам матрицы А* называется наибольший порядок минора этой матрицы, отличный от нуля.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимают равным нулю.

Всякий отличный от нуля минор матрицы, порядок которого равен рангу этой матрицы, называется *базисным минором.*

$$0\le r(A)\le\min(m,n)$$

В матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок.

Столбцы и строки матрицы, на пересечении которых расположен базисный минор, называется *базисными столбцами и строками.*

<u>ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ.</u>

Базисные столбцы (строки) линейно независимы. Любая строка (или столбец) матрицы является линейной комбинацией его базисных строк (столбцов).

Если $r(A)=r(B)$, то матрицы А и В называются *эквивалентными.* В этом случае пишут $A\sim B$. Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований. Под элементарными преобразованиями понимают:

1) замену строк столбцами, а столбцов – соответствующими строками.
2) перестановку строк матрицы.
3) вычеркивания строки, все элементы которой равны нулю.

4) умножение какой-либо строки на число, отличное от нуля и прибавление к элементам одной строки соответствующих элементов другой строки.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ. МЕТОД ОКАЙМЛЯЮЩИХ МИНОРОВ.

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M_k отличного от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе минор $M_k \neq 0$. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если же среди миноров $(k+1)$-го порядка окажется ненулевой минор, вся процедура повторяется.

Метод элементарных преобразований.

Этот метод основан на том факте, что элементарные преобразования матрицы не меняют ее ранг.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду.

Свойства:

1) $r(A+B) \le r(A)+r(B)$ 2) $r(A+B) \ge r(A)-r(B)$

3) $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$ 4) $r(A^{\Gamma} A) = r(A)$

5) $r(AB) \ge r(A)+r(B)-n$

14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Найдем обратную матрицу А методом линейных преобразований. Для этого построим матрицу $Q = (A/E)$.

С помощью элементарных преобразований приведем её к виду E/A.

$$A/E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Отметим, что мы сложили 1-ую строку со 2-ой и полученное записали во 2-ой строке, 1-ую сложили с 3-й строкой и записали в третью строку. Затем сложили 1-ую строку с 3-й строкой и записали в 1-ую строку. В итоге нашли A^{-1}. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

15. Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$ находим матрицу A^{-1}.

Знаем что обратная матрица к А вычисляется по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу к матрице А.

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-3\cdot 2=-6,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-(0-9)=9$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=0\cdot 2-3\cdot 1=-3,\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-(2\cdot 0+1\cdot 2)=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3=3,\ A_{23}=(1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(2-6)=4$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3+1\cdot 1=6+1=7,\ A_{33}=(1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

Таким образом $A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-6 & -2 & 7\\ 9 & 3 & -3\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$

16

$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$ Найти A^{-2}.

Мы знаем , что $A^{-2}=A^{-1}A^{-1}$.Чтобы найти A^{-1} воспользуемся формулой A^{-2}

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0+2-2+4-0-12=-8 \qquad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 4\end{vmatrix}=12-1=11$$

;

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(-4-2)=6 \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-6=-7$$

;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=-(4-2)=-2$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=0-4=-4$;

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-(0-2)=2$; $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1-6=-5$;

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(0+2)=-2$; $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=0+1=1$

Значит $A^{-1}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}$, тогда учитывая, что $A^{-2}=A^{-1}\cdot A^{-1}$ получим

$$A^{-2}=\left(-\frac{1}{8}\right)^2\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11 & -2 & -5\\ 6 & -4 & -2\\ -7 & 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}121 & -12 & +35 & -22 & +8 & -10 & -55 & +4 & -5\\ 66 & -24 & +14 & -12 & +16 & -4 & -30 & +8 & -2\\ -77 & +12 & -7 & 14 & -8 & +2 & 35 & -4 & +1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{64}\begin{pmatrix}144 & -24 & -56\\ 56 & 0 & -24\\ -72 & 8 & 32\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}18 & -3 & -7\\ 7 & 0 & -3\\ -9 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Покажем , что $A^2A^{-2}=E$.

$$A^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\\ -1 & 9 & 5\\ 7 & 9 & 21\end{pmatrix}$$

$$A^2A^{-2}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}3 & 5 & 9\\ -1 & 9 & 5\\ 7 & 9 & 21\end{pmatrix}\begin{pmatrix}18 & -3 & -7\\ 7 & 0 & -3\\ -9 & 1 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}54 & +35 & -81 & -9 & +0 & +9 & -21-15+36\\ -18 & +63 & -45 & 3 & +0 & +5 & 7-27+20\\ 126 & +63 & -189 & -21 & +0 & +21 & -49-27+84\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}8 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

17. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5\\ 2x_1+3x_2+x_3=1\\ 2x_1-x_2+3x_3=11\\ 3x_1-4x_2-x_3=-5\end{cases}$

Напишем основную матрицу коэффициентов. $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 4 & -1\end{pmatrix}$

и расширенную матрицу $A^*=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 11\\ 3 & 4 & -1 & -5\end{pmatrix}$.

По теореме Кнокера-Капелли для существования решения системы, необходимо выполнение условия $r(A)=r(A^*)$.

Сперва найдем $r(A)$.

$M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 \neq 0$;

$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 4 - 6 - 3 - 12 = 4 \neq 0$ следовательно $r(A) = 3$.

Теперь найдем $r\left(A^*\right)$.

Для этого найдем $\left|A^*\right| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -7 & -8 & 3 & -4 \\ 6 & 7 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -4 \\ -7 & -8 & -4 \\ 6 & 7 & 0 \end{vmatrix} =$

$0 + 49 \cdot 4 - 24 - 6 \cdot 8 \cdot 4 - 28 - 0 = 196 - 24 - 192 - 28 = -48 \neq 0$

Так как $\left|A^*\right| \neq 0$, то $r\left(A^*\right) = 4$.

Так как $3 = r(A) \neq r\left(A^* = 4\right)$ то система не совместна.

18

Система уравнений, состоящая из m линейных уравнений и n неизвестных. Теорема Кронекера-Капелли.

Систему уравнений вида
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m_1}x_1 + a_{m_2}x_2 + \ldots + a_{m_n}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называют системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Коэффициенты этих уравнений можно записать в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (2)$$

А называется основной матрицей системы (1); В – столбец свободных членов, составленный из чисел, стоящих в правых частях уравнений системы. Если все свободные члены равны нулю, то есть В – нуль матрица, то система (1) называется однородной. Если же хотя бы один из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_m$ отличен от нуля, то система (1) называется неоднородной.

Упорядоченная совокупность чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется решением системы (1), если каждое уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел α_i вместо $X_i (i = 1,2,\ldots,n)$.

Решить систему значит найти все её решения или доказать, что их нет.

Если система (1) имеет хотя бы одно решение, то система называется *совместной.*

Если система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной.*

Если совместная система имеет одно решение, то она называется *определенной,* если более одного решения, то – *неопределенной.*

Систему линейных уравнений (1) можно записать и в матричной форме: $A\cdot X = B$, где *A*- основная матрица, *B* – столбец свободных членов, а *X*- матрица –столбец, составленная из неизвестных $X_j\left(j=1,2,\ldots,n\right)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Матрица, состоящая из основной матрицы с добавлением к ней столбца свободных членов системы (1), называется расширенной матрицей системы (1)

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{m_n}b_m \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Ранг матрицы A^* либо равен рангу А, либо на единицу больше. Чтобы решить систему (1), сначала надо выяснить, совместна она или несовместна.

ТЕОРЕМА КРОНЕКЕРА-КАПЕЛЛИ.

Система линейных уравнений (1) тогда и только тогда совместна, когда ранг расширенной матрицы A^* равен рангу матрицы А.

Причем, если 1) $r(A) = r(A^*) = n$, то система определенная (имеет одно решение).

2) $r(A^*) = r(A) < n$, то система неопределенная (имеет множество решений).

19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$

Первое уравнение примем за ведущее. Сохранив x_1 в первом уравнении, исключим ее из остальных уравнений методом сложения .

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -13 \\ \quad 2x_2 - 2x_3 + 6x_4 = -14 \\ -2x_2 + 14x_3 - 12x_4 = 50 \\ -4x_2 + 22x_3 - 22x_4 = 84 \end{cases}$$

Теперь за ведущее уравнение примем второе уравнение и исключим остальные неизвестные методом сложения.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=-13 \\ 2x_2-2x_3+6x_4=-14 \\ 10x_3-6x_4=36 \ \big|5 \\ 18x_3-10x_4=56 \ \big|-3 \end{cases} \Rightarrow 50x_3-54x_3-30x_4+30x_4=180-168\ ; \qquad \begin{matrix} 4x_3=12 \\ x_3=3 \end{matrix}$$

Подставив $x_3=3$ в $10x_3-6x_4=36$ получим $30-6x_4=36;\quad 6x_4=-6;\quad x_4=-1$

$$\begin{matrix} 2x_2-6-6=-14 \\ 2x_2=-2 \\ x_2=-1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} x_1-2-9-4=-13 \\ x_1=2 \end{matrix}$$

Значит общее и частные решения совпадают: $\{2;-1;3;-1\}$.

20. Мы знаем, что для существования отличного от нуля решения системы линейных однородных уравнений, необходимо и достаточно, чтобы детерминант основной матрицы коэффициентов был равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 7 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4+12a+7+3-14a-8=0 \Rightarrow -2a-2=0 \Rightarrow$$ если $a=-1$, то

система имеет множество решений. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ 4x_1-x_2+7x_3=0 \\ x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow$

Третье уравнения примем за ведущее . $\Rightarrow \begin{cases} x_1-x_2+2x_3=0 \\ 3x_2-x_3=0 \\ 3x_2-x_3=0 \end{cases} \Rightarrow x_3=3x_2$

Пусть $x_2=C\in R$ тогда получаем $x_3=3C$ и $x_1-C+6C=0;\quad x_1=-5C$.

Тогда $\{-5C;C;3C\}$ - общее решение системы.

21. $Ax=(x_1+x_2+8x_3;2x_2;x_1-x_3\ )$

Матрица этого преобразования составляется из коэффициентов

$$Ax=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Чтобы найти собственные числа надо решить уравнение

$$|A-\lambda E|=0 \qquad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 8 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(1-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda)+0+0-8(2-\lambda)0-0=0$$

$(2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)-8)=0$; $\quad \lambda_1=2,$ $-(1-\lambda^2)-8=0;\ \lambda^2=9;\ \lambda_2=3;\ \lambda_3=-3$

Сумма их будет $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2+(-3)=2$

22. По коэффициентам данных преобразований составим матрицы А и В

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\quad AB=\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}\quad AB-BA=\begin{pmatrix}6&1&2\\4&0&2\\-1&-2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&6&1\\-1&-5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&4\\3&-6&1\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Тогда преобразование АВ-ВА будет $\begin{cases}x''=5x-y+4z\\y''=3x-6y+z\\z''=3y\end{cases}$

23. Мы знаем, что собственные числа находятся из уравнения $|A-\lambda E|=0$.

$$\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+0+0-0-4(2-\lambda)+4\lambda0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)-8+4\lambda+4\lambda=0\ ;-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8\lambda-8=0$$

$$-\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)+8(\lambda-1)=0;\ (\lambda-1)(\lambda(2-\lambda)+8)=0$$

$$\lambda_1=1\quad 2\lambda-\lambda^2+8=0\ ;\quad \lambda^2-2\lambda-8=0;\quad \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственным числам $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\lambda_3=-2$.

Пусть $\lambda_1=1$, тогда $\begin{cases}(2-\lambda)x_1-2x_2+0=0\\-2x_1+(1-\lambda)x_2-2x_3=0\\0\cdot x_1-2x_2-\lambda x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-x_1-2x_2=0\\-2x_1-2x_3=0\\-2x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-2x_2\\x_1=x_3\\x_3=-2x_2\end{cases}$

Пусть $x_2=C_1\ (0\neq C_1\in R)$, тогда собственный вектор будет $\{-2C_1;C_1;-2C_1\}$

Пусть $\lambda_2=4$, тогда

$$\begin{cases}-2x_1-2x_2=0\\2x_1-3x_2-2x_3=0\\-2x_2-4x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_2\\2x_1-3x_2-2x_3=0\\x_2=-2x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_3=C_2\neq0\\x_2=-2C_2\\x_1=2C_2\end{cases}.$$

Получаем собственный вектор $\{2C_2;-2C_2;C_2\}$.

Пусть $\lambda_3=-2$ тогда.

$$\begin{cases}4x_1-2x_2=0\\-2x_1+3x_2-2x_3=0\\-2x_2+2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2x_1\\-2x_1+3x_2-2x_3=0\\x_2=x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=C_3\\x_2=2C_3\\x_3=2C_3\end{cases}$$

Получаем собственный вектор $\{C_3;2C_3;2C_3\}$.

24. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы $A=\begin{pmatrix}3&4\\5&2\end{pmatrix}$

По равенству

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

запишем характеристическое уравнение матрицы в виде

$$|A-E\lambda| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)-20 = \lambda^2-5\lambda-14=0$$

Корни характеристического уравнения будут $\lambda_1=-2$ и $\lambda_2=7$.

При $\lambda_1=-2$ по уравнению

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(3+2)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2+2)x_2=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}5x_1+4x_2=0\\ 5x_1+4x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=-4c_1\\ x_2=5c_1\end{cases} \quad (0\neq c_1\in R).$$

Значит собственный вектор соответствующий собственному числу $\lambda_1=-2$ имеет вид $X=\{-4c_1;5c_1\}$. Поскольку $c_1\in R$ придавая различные значения можем найти собственные векторы..

Таким же образом при $\lambda_2=7$ соответствующее однородное уравнение

$$\begin{cases}(3-\lambda)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-\lambda)x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(3-7)x_1+4x_2=0\\ 5x_1+(2-7)x_2=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-4x_1+4x_2=0\\ 5x_1-5x_2=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1-x_2=0\\ x_1-x_2=0\end{cases} \Rightarrow x_1=x_2=c_2\neq 0; c_2\in R.$$

Значит собственный вектор соответствующий собственному значению $\lambda_2=7$ имеет вид $X=\{c_2;\ c_2\}$.

25. Пусть в R^n с фиксированным базисом $e_1,e_2,\dots,e_n$ задано линейное преобразование А. Каждый вектор пространства R^n можно разложить по базисным векторам. Для $\overline{X}\in R^n$:

$$\overline{X}=x_1e_1+x_2e_2+\dots+x_n\overline{e}_n$$

Координаты $\overline{X}$ запишем в столбец $\overline{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

Так как преобразование А – линейное, то

$$A\overline{X}=x_1A\overline{e}_1+x_2Ae_2+\dots+x_nA\overline{e}_n \qquad (1)$$

С другой стороны векторы $Ae_i(i=1,\dots,n)$ являются элементами R_n и поэтому и их можно разложить по векторам базиса $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\dots,\overline{e}_n$:

$$Ae_i=a_{1i}\overline{e}_1+a_{2i}\overline{e}_2+\dots+a_{ni}\overline{e}_n \qquad (i=1,\dots,n)$$

А именно
$$\begin{aligned}
&A\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}_1 + a_{21}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_n\\
&A\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}_2 + a_{22}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n2}\bar{e}_n\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&A\bar{e}_n = a_{1n}\bar{e}_1 + a_{2n}\bar{e}_2 + \ldots + a_{n_n}\bar{e}_n
\end{aligned}$$

Учитывая эти равенства в равенстве (1), получим:

$$\begin{aligned}
&A\bar{X} = \left(a_{11}\bar{e}_1x_1 + a_{21}\bar{e}_2x_1 + \ldots + a_{n1}\bar{e}_nx_1\right) +\\
&+\left(a_{12}\bar{e}_1x_2 + a_{22}\bar{e}_2x_2 + \ldots + a_{n_2}\bar{e}_nx_2\right) + \ldots +\\
&+\left(a_{1n}\bar{e}_1x_n + a_{2n}\bar{e}_2x_n + \ldots + a_{nn}\bar{e}_nx_n\right) =\\
&=\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_{21} + \ldots + a_{1n}x_{n1}\right)\bar{e}_1 + \left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots +\right.\\
&\left.+a_{2n}x_n\right)\bar{e}_2 + \ldots + \left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right)\bar{e}_n
\end{aligned} \tag{2}$$

Т.е. $A\bar{X} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + \ldots + y_n\bar{e}_n$, где

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\\
&y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n
\end{aligned}\right\} \text{ или } \begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей преобразования А в данном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$.

Из соотношения (3) видно, что для того, чтобы получить координаты преобразованного вектора $\bar{Y}$ надо матрицу линейного преобразования умножить на столбец координат вектора $\bar{X}$.

Если в n- мерном линейном пространстве задан базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, то каждому линейному преобразованию соответствует квадратная матрица порядка n, и наоборот.

Чтобы найти матрицу линейного преобразования, надо:

1) подвергнуть его действию базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$
2) полученные векторы $Ae_i \quad (i = 1, \ldots, n)$ разложить в этом базисе

$$\left.\begin{aligned}
&Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n\\
&Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&Ae_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{n_n}e_n
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3) коэффициент разложения (4) записать в виде матрицы А, помещая коэффициент строк в соответствующие столбцы матрицы.

<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>. Ненулевой вектор $\overline{X} \in R_n$ называется собственным вектором линейного преобразования А, если найдется такое число λ, что

$$A\overline{X} = \lambda \overline{X} \qquad \left(\overline{X} \neq 0\right)$$

Само число λ называется характеристическим числом линейного преобразования А, соответствующим вектору $\overline{X}$.

Если линейное преобразование А в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n$ имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

то уравнение $A\overline{X} = \lambda \overline{X}$ в координатной форме имеет вид:

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

Известно, что для существования отличного от нуля решения системы однородных уравнений, необходимым и достаточным условием является равенство нулю определителя основной матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (6)$$

Если вычислим этот определитель, то получим многочлен n-й степени по отношению к λ. Этот многочлен называется характеристическим многочленом линейного преобразования, а (6) называется характеристическим уравнением.

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называются собственными числами линейного преобразования.

Подставив найденные числа λ_i в систему (5) и решив эту систему относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найдем координаты собственных векторов, соответствующих собственному числу λ.