V. İ. MALIXİN

İQTİSADİYYATDA RİYAZİYYAT

Dərs vəsaiti

BAKI – 2008

KBT 22.11
UOT 330.115
M **20**

Rus dilindən Azərbaycan Dövlət İqtisad Universitetinin professoru, əməkdar elm xadimi,texnika elmləri doktoru ***Məmmədov Məmməd Gümşüd oğlu*** *tərcümə etmişdir*

M **20** **Malıxin V.İ.** İqtisadiyyatda riyaziyyat:
Dərs vəsaiti /Rus dilindən tərcümə.
Bakı: «İqtisad Universiteti» nəşriyyatı, 2008.
(«Ali təhsil» seriyası)

ISBN 5-16-000872-1 (cilid)
ISBN 5-86225-867-1(üz q.)

İqtisadçının riyaziyyatı bilməsi vacibdir. Riyazi aparat – iqitsadi təhlil, təşkilat və idarəetmənin əsas alətidir.

Vəsait mövzular üzrə birləşdirilmiş mühazirələr formasında tərtib olunub. Hər bir mühazirənin sonunda məsələlərin həlli, həmçinin müstəqil iş üçün tapşırıqlar verilmişdir.

GİRİŞ

GƏLƏCƏK İQTİSADÇI (MENECER) HANSI RİYAZİYYATI VƏ NECƏ ÖYRƏNMƏLİDİR

Riyaziyyat və onun başqa elmlərlə əlaqəli öyrədilməsi prosesində iki nöqteyi-nəzər mövcuddur. Birincilər hesab edirlər ki, riyaziyyat müstəqildir və özü-özlüyündə qiymətlidir. İkincilər bunu qəbul edirlər, lakin əsasən hesab edirlər ki, riyaziyyat çox xeyirli və zəruri alətdir. Şübhəsiz ki, riyaziyyatın müəyyən dünyabaxışlı əhəmiyyəti var, lakin iqtisadçı, idarəetmə-menecer mütəxəssisləri üçün riyaziyyat idarəetmənin təşkili və təhlili üçün bir alət, bir vasitədir. Bu kitab da həmin məqsədlə yazılmışdır.

Kitab «İqtisadiyyatda riyaziyyat» adlanır və riyaziyyatın, onun iqtisadiyyata, maliyyəyə tətbiqlərini öyrənmək üçün nəzərdə tutulan üç semestrə uyğundur. Kitab üç hissədən ibarətdir:

Birinci hissə «Xətti cəbrin və riyazi analizin əsasları» adlanır. İkinci hissə «Riyazi analiz və iqtisadi əlavələr» və üçüncü hissə «İqtisadiyyatda ehtimal nəzəriyyəsi və statistik üsullar» adlanır. Kitab ali məktəblər üçün yazılan klassik ali riyaziyyat kurslarından fərqli yazılmışdır. Birinci fərq ondan ibarətdir ki, öyrənilən riyazi anlayışlar iqtisadi, maliyyə, idarəetmə sahələrinə aid əyani əlavələrlə izah olunur. Bu əlavələr dağınıq, pərakəndə deyillər. Faktiki olaraq bu əlavələr «Riyazi iqtisadiyyat», «Maliyyə riyaziyyatı» məsələn, istehlakın tələb nəzəriyyəsi, optimal portfel nəzəriyyəsi, qrup tərəfindən qərarların qəbul edilməsi və s.) bölmələrinin əsas anlayışlarını əhatə edir. Bəzən bu əlavələr önə çıxır və elə görünür ki, riyazi anlayışlar daxil edilir və öyrənilir yalnız ona görə ki, iqtisadiyyat üçün lazımdır. Bu kitabın ikinci fərqli xüsusiyyətidir. Üçüncü fərqli xüsusiyyət üçüncü hissəyə aiddir. Bu hissədə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika eyni zamanda şərh olunur, bu isə tədris materialına müxtəsərlik və zənginlik verir. Uyğun kompüter proqramlarının bilgisinə ümid edərək bir sıra məsələlərin tam şərhi nəzərdə tutulmayıb. (Məsələn, simpleks-üsul nəzəriyyəsi yoxdur, lakin hər hansı xətti proqramlaşdırma paketini praktiki məşğələlərdə və yaxud müstəqil olaraq öyrənmək mümkündür). Bir çox isbatlar buraxılmışdır, zəruri hallarda onları ali məktəblərin riyaziyyat kurslarından tapmaq olar. Bir sıra zəruri nəzarət tətbiqləri nəzərdə tutulmuşdur (bu da qiyabi və axşam təhsili üçün çox vacibdir).

Riyazi modelləşdirmə, riyazi modellər

Real obyektlər çox mürəkkəb olduğundan, onları öyrənmək üçün öyrənilən real obyektlərin surətlərinin modellərini qururlar. Bir tərəfdən modellər öyrənilən surət üçün əlverişli olmalıdır, deməli onlar çox mürəkkəb olmalıdırlar, buna görə də modellər real obyektlərin sadələşdirilmiş surətləridir. Digər tərəfdən isə onları öyrənərkən alınan nəticələri real obyektlərə-prototiplərə aid edirlər, deməli model öyrənilən real obyektin əsas xüsusiyyətlərini əks etdirməlidir. Bu səbəbdən də modellərin tərtibi böyük məharət tələb edir. Modellərin tərtibi nə qədər uğurlu olsa, o real obyektin xüsusiyyətlərini daha yaxşı ifadə edər, tədqiqat və ondan alınan nəticələr, təkliflər bir o qədər uğurlu olar. Elmi tədqiqatlarda bir çox müxtəlif modellərdən istifadə edirlər: məsələn (laboratoriyada kiçik çay düzəldirlər və onun üzərində 1:100 miqyaslı su elektrik stansiyası qururlar) və abstrakt; fiziki; riyazi (dəyişənlərdən, funksiyalardan, bərabərsizliklərdən və s.). Riyazi modelin tərtib olunması riyazi modelləşdirmə adlanır. Riyazi modellərin tərtibi ilə riyaziyyat digər elm sahələrinin elmi tədqiqatlarına tətbiq olunur. Bu daha aydın iqtisadiyyat elmində görünür. Bu kitabda riyazi aparat və riyazi modellər paralel şərh olunur.

Tədris vəsaitinin strukturu

Kitab aşağıdakı struktura malikdir: hissələr, mövzular, bölmələr, bəndlər. Müəllif istər həcminə görə, istərsə də şərhlərin münasibətlərinə görə real mühazirələrin mətnlərini yazmağa səy göstərmişdir. Bölmələrin nömrələnməsi mövzuların nömrələri ilə bu mövzunun daxilindəki bölmələrin nömrələrindən alınır. Məsələn, 2.1 bölməsi – II bölmənin I mövzusudur. Müəllif bəndləri elə tərtib edib ki, onlardan imtahan və məqbul (zaçot) sualları kimi istifadə etmək mümkün olsun. Hər bir bölmədə həmçinin müəyyən tip məsələlərin həlli bu praktiki məşğələlərdə və yaxud müstəqil həll etmək üçün məsələlər verilmişdir. Şəkillər, düsturlar, misallar, məsələlər bölmənin içərisində nömrələnir, onlara istinad edilərkən həm də bölmənin nömrəsi göstərilir. Məsələn, 2.1 bölməsinin (1) düsturuna istinad belə olur: 2.1 bölməsində (1) düsturuna bax. Əgər istinad kitabın başqa hissəsinə edilərsə, onda bu hissənin də nömrəsi göstərilir. Nəzarət işlərində bir variant üçün məsələlər, onların həlli və bir neçə variant üçün məlumatlar verilmişdir.

İstifadə olunmuş ədəbiyyat haqqında

Ali riyaziyyata aid çox sayda gözəl kitablar var ki, müəllif (özüm də vaxtında bu kitablardan öyrənmişəm) bunlardan geniş istifadə etmişdir, hətta çox hallarda onlara istinad etmədən. Xüsusi olaraq müəllifə təqdim olunmuş V.N.Kiryuşenkovun «Ali riyaziyyata aid mühazirələr» kitabını qeyd etmək istəyirəm. Əvvəlcədən üzr istəyirəm ki, bəzən müəlliflərə (bəzən qeyri-müəyyən) istinad etmək mümkün olmamışdır. Özümə haqq qazandırmaq üçün qeyd edim ki, müəllif bu tədris vəsaitinə elmi əsər kimi deyil, yalnız zəruri materialın vicdanla müəyyən məqsəd üçün işlənməsi kimi baxır, yəni gələcək iqtisadçı (menecer) hansı riyaziyyatı və necə öyrənməlidir?

İXTİSARLARIN SİYAHISI

VB	Verilənlər bazası
DXÖ	Dövlətin xəzinə öhdəçiliyi (istiqraz kağızı)
DVS	Diskret variasiya sırası
DTK	Diskret təsadüfi kəmiyyət
AYL	Ağac-yonma löhvəsi
İVS	İnterval variasiya sırası
QQŞ	Qərar qəbul edən şəxs
RS	Riyazi statistika
KTK	Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət
TK	Təsadüfi kəmiyyət
OKS	Orta kvadratik sapma
EN	Ehtimal nəzəriyyəsi
MLT	Mərkəzi limit teoremi

Hissə 1. Xətti cəbrin və riyazi analizin əsasları

Mövzu 1. İQTİSADİYYATDA VEKTORLAR VƏ MATRİSLƏR

1.1. Vektorlar və onlar üzərində əməllər

1.Vektorlar haqqında ilk məlumatlar. Nizamlanmış ədədlər yığımına *vektor* deyilir. Məsələn, (1,3,7) vektordur. Onu qısa olaraq P ilə işarə etsək, onda $P=(1,3,7)$. Vektora daxil olan ədədlər, onların yerləşmə nömrələri nəzərə alınmaqla vektorun *komponentləri* adlanır. Yuxarıdakı misalda 1- ədədi P vektorunun birinci, 3- ədədi ikinci, 7- ədədi isə üçüncü komponentidir. Komponentlərin sayı *vektorun ölçüsü* adlanır. Deməli, P üçölçülü vektordur.

Misal 1. Tutaq ki, zavod kişi, qadın və uşaq velosipedləri istehsal edir. Zavodun bir ildə istehsal həcmini V -ni vektor şəklində *(M, L, D)* yaza bilərik. Bura da M -bir ildə istehsal olunan kişi velosipedlərinin, L -qadın velosipedlərinin və D -uşaq velosipedlərinin həcmidir. Məsələn, tutaq ki, 1996-cı il üçün istehsal həcmi $V_{96}=(1000,800,4000)$. Fərz edək ki, 1997-ci ilin planı 1996-cı ilin istehsal həcmindən 10% çoxdur. Onda $V_{97}=(1100,880,4400)$ olar. Əgər «Velosiped» ticarət firması zavodun məhsullarının yarısını alarsa, onda 1996-cı ildə firmanın aldığı məhsullar $W=(500,400,2000)$

olar. Tutaq ki, ölkədə cəmi üç velosiped zavodu var və onların 1996-cı ildə istehsal həcmi uyğun olaraq

$Q_1 = (1000,800,4000)$, $Q_2 = (1000,600,2000)$,

$Q_3 = (2000,1600,\ 8000)$. Onda üç zavodun birlikdə istehsal etdikləri məhsul $Q = (4000,3000,14000)$ olar. Yəni 4000 kişi, 3000 qadın və 14000 uşaq velosipedləri istehsal olunub. Qeyd etmək olar ki, $Q_3 = 2Q_1$, yəni III zavod bütün növlər üzrə I zavoddan iki dəfə çox məhsul istehsal etmişdir. Yuxarıdakı misallarda $V_{96}, V_{97}, W, Q_1, Q_2, Q_3$ konkret vektorlardır. İxtiyari üçölçülü vektor (x_1, x_2, x_3) kimi və yaxud qısa olaraq X kimi işarə olunur. x_1 ədədi X vektorunun I, x_2 ədədi, vektorunun II, x_3 ədədi isə vektorunun III kompanentidir. İstənilən dördölçülü vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) kimi və n ölçülü vektor $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ kimi işarə olunur. Vektorlar iki növ olurlar: sətir vektorları və sütun vektorları. Yuxarıda göstərdiyimiz bütün vektorlar sətir vektorları idi. Sətir vektorları nizamlanmış sətirlər şəklində, sütun vektorları isə nizamlanmış sütunlar şəklində yazılır. Sütun vektorun kompanentlərinin nömrələnməsi yuxarıdan aşağıya doğru olur, məsələn $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mətbəə nöqteyi nəzərindən sətir vektorlardan istifadə etmək əlverişlidir, lakin bəzən sütun vektordan istifadə etmək zəruri olur. Vektorlardan bütün elm sahələrində, o cümlədən də iqtisad elmlərində geniş istifadə olunur. Vektorlardan istifadə edərkən işarələrin çoxu kompakt olur və ən əsası əyaniliyi və məzmunu itirmirlər.

Qeyd 1. Ümumiyyətlə riyaziyyatda «vektor» anlayışı çoxmənalıdır. Məktəbdə fizika fənnində vektor qeyd edilmiş başlanğıc nöqtəsi (qüvvənin tətbiq nöqtəsi) olan istiqamətlənmiş parça kimi başa düşülür. Həndəsədə bəzən vektor müstəvinin və ya fəzanın xüsusi şəklə çevrilməsi kimi baxılır. Gələcəkdə biz bu növ anlanmalardan bəzən istifadə edəcəyik.

Qeyd 2. Riyaziyyatda «vektor» anlayışı dedikdə yalnız nizamlanmış ədədlər toplusu deyil, istənilən obyektlər toplusu da başa düşülür. Məsələn, vektorun I komponenti M_1 çoxluğunun, II komponenti M_2 çoxluğunun və s. elementləri ola bilər. Bu ümumi anlayışdan gələcəkdə istifadə edəcəyik.

2. Vektorlar üzərində əməllər. Misal 1-də biz vektoru ədədə vurmuşduq. Doğrudan da $Q_3 = 2Q_1$. Həmin misalda biz üç vektoru toplamışdıq. $Q_1 + Q_2 + Q_3$ və onların cəmi olan Q vektorunu almışdıq. Vektorlar üzərində əməllər çox təbiidir və ədədlər üzərindəki əməlləri yada salır. Demək olar ki, vektorlar üzərindəki əməllər ədədlər üzərindəki əməllərin daha geniş oblastda təbii genişləndirilməsidir. İstənilən vektoru istənilən ədədə vurmaq olar. Bunun üçün vektorun bütün komponentləri həmin ədədə vurulur və nəticədə vektoru alınır. $U = (2,3)$ vektorunu 3-ə vursaq *(6,9)* vektorunu alarıq. Təbii olaraq həmin vektoru $3U$ kimi işarə edirlər.

$Q_1 = (1000,800,4000)$ vektorunu 2-yə vuraq. Onda Q_3-ə bərabər *(2000,1600,8000)* vektorunu alarıq. $Q_3 = 2Q_1$. Bu isə o deməkdir ki, misal 1-də III velosiped zavodu I zavoddan 2 dəfə artıq məhsul istehsal etmişdir. (Bəzən vektoru ədədə vurarkən nəticə-vektorun məna yükü itir. Məsələn, Q_1 vektorunu $\frac{1}{3}$-ə vursaq, nəticə vektorda II komponent tam ədəd olmadığından onu velosipedlərin sayı kimi qəbul etmək olmaz).

Eyni ölçülü iki vektoru toplamaq olar. Bunun üçün əvvəlcə I komponentlər, sonra II komponentlər və s. toplanır, bu cəmlər nəticə vektorunu təşkil edirlər. $Q_1 = (1000,800,4000)$ və $Q_2 = (2000,1600,8000)$ vektorlarını toplayaq. Nəticədə $K = (3000,2400,1200)$ vektorunu alarıq. Göstərin ki, $K = 3Q_1$. Müxtəlif ölçülü vektorları toplamaq olmaz. Vektorun ədədə vurulması və vektorların toplanması aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) vektorların toplanmasında qruplaşdırma xassəsi doğrudur: assosiativdir $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$. Bu xassəyə görə istənilən sonlu sayda vektorları toplamaq olar. Misal 1-də üç vektorun cəmi $Q_1 + Q_2 + Q_3$ tapılmışdır;

b) vektorların toplanması ədədə vurmaya nəzərən paylanma xassəsinə malikdir, yəni $\lambda(X+Y) = \lambda X + \lambda Y$.

Vektorlar üzərində əməllərin sonrakı xassələrini təsvir etmədən onu bir daha qeyd edək ki, vektorlar üzərində əməllərlə ədədlər üzərindəki, adi əməllər oxşardır. Vektorlar üzərindəki əməllərlə ədədlər üzərindəki əməllər arasında fərqlər də var. Məsələn ixtiyari a, $b \neq 0$ ədədlər üçün a-nın b-dən «neçə dəfə» böyük olduğunu, yəni $\frac{a}{b}$-ni təyin etmək olar. İki vektor üçün ümumiyyətlə bunu etmək olmaz. Məsələn, *E=(7,1)* və *N=(1,1)* vektorları üçün elə λ yoxdur ki, $E = \lambda N$ olsun.

İki vektor o zaman bərabər hesab edilir ki, onların uyğun komponentləri bərabər olsun, yəni onların uyğun olaraq I, II və s. komponentləri biri-birinə bərabər olsunlar. Beləliklə, $X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$ vektorları üçün $x_1 = y_1, ..., x_n = y_n$ olarsa, $X = Y$. Bu tərəfdən görünür ki, yalnız eyni ölçülü vektorların bərabərliyindən və ya bərabərsizliyindən danışmaq olar. Müxtəlif ölçülü vektorların bərabərliyindən danışmaq mənasızdır.

Tutaq ki, X, Y eyni ölçülü vektorlardır, əgər $x_1 \geq y_1, ..., x_n \geq y_n$ olarsa, onda qəbul edilir ki, $X \geq Y$. Məsələn, $X = (6,3,0)$ və $Y = (5,1,0)$ olarsa, onda $X \geq Y$. X vektoru ilə $Z = (5,4,0)$ vektorunu müqayisə etmək olmaz, çünki $X \leq Z,\ X = Z,\ X \geq Z$ münasibətlərinin heç biri doğru deyildir (vektorların ədədlərdən bir fərqi də budur).

Bəzən vektoru $X = (x)$ şəklində yazmaq əlverişli olur, burada x , X vektorunun ixtiyari komponentdir. Vektorlar üzərində əməlləri sətir vektorları üçün təsvir etdik. Sütun vektorları üçün əməllər eyni qayda ilə yerinə yetirilir və nəticədə, əlbəttə sütun vektoru alınır. Tutaq ki, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

onda $2X = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ olar. Eyni ölçülü sətir və sütun vektorları nəticəsində sətirvektoru sütun vektoruna və sütun vektoru sətir vektoruna çevrilir. Bu əməliyyatı yuxarıda «T» indeksi yazmaqla işarə edirlər. Məsələn, $U = (2,3)$ olarsa, onda $U^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ olar.

Tutaq ki, $H = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, onda $H^T = (0,7)$ olar. Asanlıqla görmək olar ki, iki dəfə ardıcıllıqla tətbiq olunan transponirə əməliyyatı nəticəsində əvvəlki matris alınır: $\left(X^T\right)^T = X$. Burada X-in sətir və ya sütun matrisi olmasının əhəmiyyəti yoxdur.

V e k t o r l a r ı n s k a l y a r h a s i l i. Tutaq ki, $X = (x_1, ..., x_n),\ Y = (y_1, ..., y_n)$ eyni ölçülü vektorlardır.

$x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ ədədinə X və Y vektorlarının *skalyar hasili* deyilir və $X \cdot Y$ kimi işarə olunur. X və Y vektorlarının skalyar hasilini aşağıdakı xassələrini isbatsız qeyd edək (onların isbatı çox sadədir).

a) $X \cdot Y = Y \cdot X$;

b) $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$;

c) $X \cdot (\lambda Y) = \lambda (X \cdot Y)$.

Bu xassələr ixtiyari X, Y vektorları və istənilən λ ədədi üçün doğrudur.

3. Xətti fəza. Vektorların xətti asılılığı və xətti asılı olmaması. Tutaq ki, R^n bütün n ölçülü vektorlar çoxluğudur. Qeyd edək ki, bu yalnız çoxluq deyildir - R^n müəyyən struktura malikdir. İxtiyari $X \in R^n$ vektorunu istənilən λ ədədinə vurmaq olar və nəticədə alınan λX vektor da R^n çoxluğunun elementidir. R^n - dən götürülmüş iki və daha çox vektorun cəmi də R^n -nin elementidir. Bundan əlavə, vektorun ədədə vurulması və vektorların toplanması II bənddə göstərilmiş münasibətləri ödəyir. R^n - çoxluğunda unikal $\overline{0} = (0,...,0)$ vektoru var ki, onun da rolu ədədlər çoxluğunda 0 ədədinin roluna oxşardır. Belə ki, $0 \cdot X = \overline{0}$ və $X + \overline{0} = X$ münasibətləri ixtiyari $X \in R^n$ üçün doğrudur.

$X \geq \overline{0}$ bərabərsizliyini ödəyən X vektoru *mənfi olmayan vektor* adlanır. Mənfi olmayan vektor bütün komponentləri mənfi olmayan vektordur. Vektor (2, 3) mənfi olmayan vektordur, (-2, 4) vektoru isə mənfi olmayan deyildir, belə ki, onun birinci komponenti mənfi ədəddir. Bütün bu səbəblərə görə R^n - ə n -ölçülü ədədi (hesabi) *xətti fəza* deyilir. Xətti fəzanın tərifindəki «ədədi» sözünün mənası ondan ibarətdir ki, belə fəzanın elementi komponentləri ədədlər olan vektorlardır.

Fərz edək ki, eyni ölçülü $B=(b_1,...,b_m),\ A_1=(a_{11},...,a_{m1}),...\ ,A_n=(a_{1n},...,a_{mn})$ vektorları verilmişdir. Əgər elə $x_1,...,x_n$ ədədləri tapmaq mümkün olsa ki, $B=x_1A_1+...+x_nA_n$ olsun, onda deyirlər ki, *B* vektoru $A_1,...,A_n$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır. Beləliklə, bunu bilmək üçün n məchullu, m tənlikdən ibarət olan cəbri tənliklər sistemini həll etmək lazımdır:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

Misal 1. F(1,6) vektorunun *H_1=(1,2), H_2=(0,2)* vektorlarının xətti kombinasiyası olub-olmadığını yoxlayaq. Bunun üçün aşağıdakı sadə xətti tənliklər sistemini həll edək:

$$\begin{cases} x_1=1 \\ 2x_1+2x_2=6 \end{cases}$$

Sistemi həll edərək tapırıq ki, $x_1=1$, $x_2=2$. Beləliklə, $F=H_1+2H_2$.

Əgər vektorlar sisteminin hər hansı bir vektoru sistemin yerdə qalan vektorlarının xətti kombinasiyasıdırsa, onda vektorlar sistemi *xətti asılı*, əks halda, yəni sistemin heç bir vektoru yerdə qalanların xətti kombinasiyası olmazsa, onda vektorlar sistemi *xətti asılı olmayan* adlanır. Məsələn, yuxarıdakı misalda *F, H_1, H_2* vektorları xətti asılıdır, belə ki, $F=H_1+2H_2$.

Tutaq ki, A hər hansı vektorlar sistemdir, *E* onun alt sistemdir. Əgər *E* xətti asılı olmazsa və A sisteminin ixtiyari vektoru *E* vektorlarının xətti kombinasiyasıdırsa, onda *E* vektor sistemi A sisteminin *bazisi* adlanır.

Tutaq ki, $\mathrm{E} = (E_1,...,E_n)$. Əgər $B \in A$ olarsa, onda hər hansı $\lambda_1,...,\lambda_n$ ədədləri üçün $\lambda_1 \cdots \lambda_n$ bu ayrılışın *əmsalları* adlanır. Bu əmsallar ε bazisində vektorun *koordinatları* adlanır.

Teorem 1. İxtiyari vektorlar sisteminin heç olmazsa bir bazisi var. Sistemin istənilən bazisinin elementlərinin sayı eynidir. İxtiyari vektorun koordinatları verilmiş bazisdə birqiymətlidir.

Teorem 2. R^n **fəzasında sayı** n **-dən çox olan ixtiyari vektorlar sistemi xətti asılıdır.**

Misal 2. $E_1 = (1,0,...,0), E_2 = (0,1,...,0),..., E_n = (0,0,...,1)$ vektorlarının R^n fəzasında bazis təşkil etdiyini göstərək, yəni isbat edək ki, $E = (E_1,...,E_n)$ bazisdir.

1. *E* - xətti asılı olmayan sistemdir. Doğurdan da fərz edək ki, E_1 vektoru $E_2,...,E_n$ vektorlarının xətti kombinasiyasıdır. Onda, $E_1 = \lambda_2 E_2 + ... + \lambda_n E_n$. E_1 vektorunun və $\lambda_2 E_2 + ... + \lambda_n E_n$ xətti kombinasiyasının birinci kompanentlərini müqayisə etsək, ziddiyyət alırıq: $1 = \lambda_2 \cdot 0 + ... + \lambda_n \cdot 0$, deməli belə λ_1 ədədi yoxdur.

2. Tutaq ki, $B = (b_1,...,b_n)$ vektoru R^n -dən götürülmüş ixtiyari vektordur. Asanlıqla göstərmək olar ki, $B = b_1 E_1 + ... + b_n E_n$, yəni B vektoru E_1 - sisteminin vektorlarının xətti kombinasiyasıdır və B vektorunun komponentləri həmin bazisdə onun koordinatlarıdır.

4.Əmtəə fəzası. Qiymət vektoru. Müəyyən vaxtda və müəyyən yerdə satışa çıxarılmış hər hansı mal və ya xidmət *əmtəə* adlanır. Tutaq ki, n müxtəlif əmtəə var, i -ci əmtəənin miqdarını x_i -ilə işarə etsək, onda müəyyən əmtəələr toplusu $X=(x_1,...,x_n)$ n ölçülü vektordur. Biz yalnız əməllərin mənfi olmayan miqdarına, yəni $x_i \geq 0 \quad i=1,...,n$. $X \geq 0$ baxacayıq.

Əmtəələrin bütün toplusu C *əmtəə fəzası* adlanır. Belə əmtəələr toplusu ona görə fəza adlanır ki, bu çoxluqda ixtiyari iki toplunu cəmləmək olar və ixtiyari toplunu mənfi olmayan ədədə vurmaq olar. Biz fərz edəcəyik ki, hər bir əmtəənin qiyməti var. Bütün qiymətlər müsbətdir. Tutaq ki, i -ci əmtəənin bir vahidinin qiyməti P_i -dir, onda $P=(p_1,..., p_n)$-qiymət vektorudur. Əmtəələr toplusu vektoru və qiymət vektoru eyni ölçülüdür. $X=(x_i)$ əmtəələr toplusu ilə $P=(p_i)$ qiymət vektorunun skalyar hasili $P \cdot X = p_1x_1 + ... + p_nx_n$ əmtəələr toplusunun *qiyməti və ya dəyəri* adlanır və $c(X)$-lə işarə olunur.

MƏSƏLƏLƏR

1. Rayonda bir bankın üç valyuta dəyişmə məntəqəsi var. Bu məntəqələrdə yalnız dollar və yevronun rublla mübadiləsi aparılır. Hər axşam bütün pulların qalığı banka verilir. M_i - ilə i -ci məntəqənin pul vəsaitini işarə edək. $M_1+M_2, \quad M_1+M_2+M_3$ vektorlarının mənası varmı?

Həlli aydındır. Lakin həmişə vektorların cəminin mənası olmur. Göstərdiyimiz misalda bu cəmlərin mənası var. Fərz edək ki, üç ölçülü fəzada vektorlar uyğun olaraq qadının döşünün ölçüsü, belinin çevrəsi və budunun həcmidirsə, onda bu vektorların cəminin mənası yoxdur.

2. Velosiped zavodu normal $(\lambda_1 = 1)$ intensivliklə işlədikdə bir ayda $G=(30,40,60)$ kişi, qadın və uşaq velosipedi

istehsal edir. $0 \le \lambda_1 \le 4$ intensivliyi ilə işlədikdə isə $\lambda_1 G_1$ vektoru ilə idarə olunan qədər velosiped istehsal edir. (Zəruri hallarda tam olmayan ədədləri tama qədər yuvarlaqlaşdıracağıq).

Həmin zavod $\lambda_1 = 2{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}6$ intensivliyi ilə işlədikdə nə qədər velosiped istehsal edər? İkinci zavod $\lambda_2 = 1$ intensivliyi ilə bir ayda həmin velosipedlərdən $G_2 = (40, 50, 60)$ kimi ifadə olunan velosiped istehsal edir. $(\lambda_1, \lambda_2) = (1{,}2);\ (2{,}3)$ olduqda hər iki zavod birlikdə nə qədər velosiped istehsal edir?

3. Normal $\lambda = 1$ intensivliklə zavod *R=(20, 40)* ehtiyatı sərf edir və *V=(10, 30)* məhsul istehsal edir. $0 \le \lambda \le 4$ olduqda isə λ-dəfə artıq ehtiyat sərf edir və λ dəfə artıq məhsul istehsal edir. $\lambda = 2; 3; 2{,}5$ olduqda (ehtiyat sərfi və məhsul istehsalı) cütlüyünü təsvir edin. (20, 60) ; (15, 45) məhsul istehsalı üçün ehtiyat sərfi vektorunu tapın. (25, 30); (30, 60) ehtiyat sərfinə görə məhsul istehsalını tapın.

4. $\lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-10\\4\end{pmatrix}$ xətti kombinasiyasının mənfi olmayan (1, 1) ; (6, 1) ; (-1, -1) ; (2, -1) vektoru olduğunu bilərək λ və μ cütlüyünü tapın.

5. $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$ vektorlar sisteminin xətti asılı olub-olmadığı asılılığını yoxlayın. Bu sistemin bütün bazislərini tapın.

6. Qiymət uyğun (3, 5) olan iki növ əmtəə varsa, dəyəri 15, 30, 45 olan əmtəə toplusu göstərin. Tutaq ki, qiymətlər dəyişərək (4, 4) olub. Ucuzlaşan, bahalaşan və eyni qiymətdə qalan əmtəə toplularını tapın.

7. Dükan iki növ mismarla alver edir: 25 və 40 mm. olan. Mismarların kütləsi uyğun olaraq 5 və 10 q., qiymətləri

isə 1 kq.-ı uyğun olaraq 5 və 7 rubldur. Alıcı 10 rublluq mismar almaq istəyir. Bu qiymətə uyğun mismarlar toplusunu göstərin. Alıcıya hər növ mismardan nə qədər alınmasını necə məsləhət vermək lazımdır ki, alınan mismarların: a) kütləsi ən az olsun; b) uzunluqları ən böyük; c) 40 mm-lik mismar 25 mm–lik mismardan iki dəfə çox alınmış olsun.

1.2. Matrislər və onlar üzərində əməllər

1. Matrislər haqqında ilkin məlumatlar. Ədədlərdən ibarət olan düzbucaqlı cədvələ *matris* deyilir. Məsələn, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ iki sətiri və üç sütunu olan matrisdir. Bu matrisi A ilə işarə edək. Adətən matrisin elementlərini matrisi göstərən hərfin kiçik hərfi ilə işarə edirlər: $A=(a_{ij})$. Bu matrisin 6 elementi var: $a_{11}=2,\ a_{12}=3,\ a_{13}=0,\ a_{21}=1,\ a_{22}=0,\ a_{23}=4$. Bu elementləri belə oxuyurlar: a_{11} - a - bir – bir, a_{12} - a - bir – iki və s. matrisin sətirləri və sütunlarının sayı onun ölçüsü adlanır və həm də sətirlərin sayı birinci deyilir. Beləliklə, A matrisi 2x3 ölçülüdür. İki matris yalnız və yalnız o halda bərabər (eyni) hesab edilir ki, onların ölçüləri, yəni sətir və sütunların sayı və uyğun elementləri eyni olsun. Məsələn, tutaq ki, $A=(a_{ij})$ matrisi *m* x *n* ölçülü, $B=(a_{ij})$matrisi isə *k* x *s* ölçülüdür. Onda A=B yalnız və yalnız o halda doğrudur ki, istənilən $i=1,\cdots,n$ və $j=1,\cdots,n$ üçün $k=m,\ s=n$ və $a_{ij}=b_{ij}$ olsun. Beləliklə, ölçüləri eyni olmayan matrislərin bərabərliyindən danışmaq mənasızdır. Sətirlərinin sayı sütunlarının sayına bərabər olan matris *kvadrat matris* adlanır.

Kvadrat matrisin a_{ij} elementləri matrisin baş diaqonalını təşkil edirlər. Əgər kvadrat matrisin baş diaqonal elementləri vahid qalan bütün elementləri sıfırdırsa, onda belə matrisə *vahid* matris deyilir. Məsələn, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ üç ölçülü vahid matrisdir. Hər ölçülü matrisin öz vahid matrisi var . Ölçüsü *m* x *n* olan A matrisini nəzərdən keçirək.. Onun hər sətrinə *n* ölçülü sətir – vektor, hər sütununa isə *m* ölçülü sütun–vektor kimi baxa bilərik. *i*-ci sətir-vektoru $\overline{a}_i$, *j* – cu sütun-vektoru A_j ilə işarə etsək, onda A vektorunu nizamlanmış sətir-vektorların vasitəsilə $A = \begin{pmatrix} \overline{a}_i \\ \vdots \\ \overline{a}_m \end{pmatrix}$ və ya nizamlanmış sütun-vektorları vasitəsilə $A = (A_1, \cdots, A_n)$ şəklində göstərmək olar. Qeyd edək ki, vektorlara matrislərin xüsusi halı kimi baxmaq olar. Belə ki, sətir-vektoruna bir sətri olan matris, sütun-vektoruna isə yalnız bir sütunu olan matris kimi baxmaq olar.

2. Matrislər üzərində əməllər. Matrislər üzərində əməllər vektorlar üzərindəki əməlləri yada salır.

Matrisin ədədə vurulması. İxtiyari matrisi istənilən ədədə vurmaq olar. Bunun üçün matrisin hər bir elementini həmin ədədə vurub, nəticədə matrisi alarıq. Məsələn, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrisini 2-yə vuraq.

$2A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, bu o deməkdir ki, matrisi ədədə vurarkən vuruğu matris işarəsinin qarşısına «çıxartmaq» olar.

Matrislərin toplanması. Eyni ölçülü ixtiyari iki matrisi toplamaq olar. Nəticədə həmin ölçülü matris alırıq. Tutaq ki, $A=(a_{i\,j})$, $B=(b_{i\,j})$, onda *A+B* matrisi $a_{i\,j}+b_{i\,j}$ elementlərindən ibarət olar, yəni, matrisləri toplayarkən onların eyni yerdə duran elementləri toplanır.

Müxtəlif ölçülü matrisləri toplamaq olmaz (hətta onların bir ölçüsü eyni olsa belə, yəni məsələn, əgər sətirlərin sayı eyni, lakin sütunların sayı müxtəlif olsa belə matrisləri toplamaq olmaz. Matrislərin toplanması assosiativlik xassəsinə malikdir, yəni, *(A+B)+C=A+(B+C)* . Bu xassə sonlu sayda ixtiyari matrisləri toplamağa imkan verir.

Matrislərin vurulması. Bəzən (həmişə yox!) matrisləri bir-birinə vurmaq olar. Qeyd edək ki, matrislərin vurulmasında vurma ardıcıllığı çox vacibdir. Hansı halda *m* x *n* ölçülü A matrisini *k* x *c* ölçülü B matrisinə vurmaq olar? Bu sualı aydınlaşdıraq, yəni AB hasilini tapmağa çalışaq. AB hasili yalnız *n=k* olduqda mümkündür, *n=k* -nı *r* – lə işarə edək. Vurma nəticəsində *m* x *s* ölçülü *C* matrisi alınar. *C* matrisinin elementləri $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ir}b_{rj}$ və yaxud $c_{ij}=\sum_{i=1}^{r}a_{i1}b_{1j}$ şəklindədir.

Məsələn, tutaq ki, $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&0&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&4\\0&2\end{pmatrix}$.

Onda $AB=\begin{pmatrix}5&12\\1&8\end{pmatrix}$.

Qeyd edək ki, BA hasili də var və matrisi də var və

$$BA=\begin{pmatrix}2&3&0\\6&3&16\\2&0&8\end{pmatrix}.$$

Biz görürük ki, $AB\neq BA$.

Deməli, matrislərin vurulması kommutativ deyildir, yəni vuruqların ardıcıllığından asılıdır. Əgər *V* matrisinin *W* matrisinə vurmaq olmazsa, onda deyirlər ki, $V\cdot W$ hasili yoxdur. Vektorları matrislərin xüsusi halı kimi hesab etmək mümkün olduğundan, matrisi və vektoru bir-birinə vurmaq olar (həmişə yox!). Bu zaman yuxarıda təsvir edilmiş qaydadan istifadə edirlər. Tutaq ki, A matrisi m x n ölçülü Y ölçüsü s olan sətir vektordur. Onda matrisi sol tərəfdən yalnız sütun-vektora vurmaq olar, bu şərtlə ki, $n=k$ olsun, nəticədə m ölçülü sütun vektoru alarıq. Matrisi sağdan yalnız sətir vektoruna vurmaq olar, bu şərtlə ki, $s=m$ olsun, nəticədə n ölçülü sətir-vektoru alınır.

Sətir-vektorunu sütun-vektoruna yalnız onların ölçüləri eyni olduqda vurmaq olar, nəicədə bir sətirdən və bir sütundan ibarət matris alarıq, belə matrisi ədəd hesab etmək olar. İxtiyari sütun-vektorunu ixtiyari sətir-vektoruna vurmaq olar (matrislər kimi). Nəticədə sətirlərin sayı sütun-vektorunun, sütunların sayı isə sətir-vektorunun uyğun sətir və sütunlarının sayına bərabər matris alarıq. Məsələn, tutaq ki, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$, $Y=(4,-1)$, $X=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$, onda

$$AX=\begin{pmatrix}8\\ 1\end{pmatrix};\; YA=(7,12,-4),\; XY=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 8 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, XA, AY, YX hasilləri yoxdur.

Matrislərin transponirə olunması. Vektorlarda olduğu kimi matrisləri də transponirə etmək olar, yəni sətirlərlə sütunların yerini dəyişmək olar. Tutaq ki, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

Onda $A^T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ olar. Asanlıqla görmək olar ki, əgər

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ A matrisi *m* x *n* ölçülüdürsə,

onda transponirə olunmuş matris *n* x *m*

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \vdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ ölçülü olar. Vektorlarda olduğu

kimi matrislərdə də iki dəfə ardıcıl transponirə matrisin özünü verir: $\left(A^T\right)^T = A$.

3. Texnoloji matris və optimal planlaşdırma məsələsi. Matrislər bütün elm sahələrində, o cümlədən iqtisadiyyatda da geniş istifadə olnur. Matrislərdən istifadə edərkən bütün işarələr çox kompakt, əyani və mahiyyəti saxlayandır. Misal üçün texnoloji adlanan matrisə baxaq. Tutaq ki, müəssisə *m* növ ehtiyyatlardan *n* növ məhsul istehsal edir. Fərz edək ki, *j* – cu məhsulun bir vahidi üçün *i* – ci növ ehtiyyatın a_{ij} - vahidi sərf olunur, yəni a_{ij} - *j* – cu məhsulu istehsal etmək üçün *i* – ci ehtiyyatın sərf normasıdır. $A=\left(a_{ij}\right)$ *ehtiyyatın norma matrisi* adlanır. Bu matrisə aşağıdakı səbəbdən *texnoloji matris də* deyirlər.

Bu matrsin A_j *j* – ci sütununu nəzərdən keçirək.

j – cu sütun *j* – cu məhsulun bir vahidinin istehsalı üçün lazım olan ehtiyyat sərfini göstərir. Abstrakt şəkildə desək, *j* – cu məhsulun bir vahidini istehsal etmək üçün birinci ehtiyatın a_{1j} - vahidini, ikinci ehtiyatın a_{2j} - vahidini və s. «qarışdırmaq» lazımdır. Bu cür «qarşıdurmanı» ehtiyatların yenidən işlənməsi texnologiyası adlandırmaq olar. Beləliklə, *A* matrisinin *j* – cu sütunu ehtiyatların ema-lının *j* – cu texnologiyasını təsvir edir. Bütün müəssisə *n* texnologiyaya malikdir.

İndi isə texnoloji matrisin sətirlərinin mahiyyətini aydınlaşdıraq. Asanlıqla görmək olar ki, *i* – ci sətrin elementləri *j* – cu ehtiyatın hər vahid məhsul üçün sərfini təsvir edir. Texnoloji matrisi daha dərindən dərk etməyə çalışaq. I məhsulun x_1 vahid, II məhsulun x_2 vahid və ümumiyyətlə *j* – cu məhsulun x_j vahid istehsalı üçün plana baxaq. Bu planı sütun vektoru şəklində yazaq: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Qeyd edək ki, bu planı elə həyata keçirmək olar ki, $\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j$ vahid 1–i ehtiyyat, $\sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j$ vahid II ehtiyyat və ümumiyyətlə $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$ - vahid *i* – ci resurs lazım olacaq. Məlum olur ki, bu miqdarda resurslar *AX* sütun vektorunun elementləridir, bu şərtlə ki, *A* sərfi norması matrisi soldan *X* sütun vektoruna – istehsal planına sağdan vurulsun. Yeni kəmiyyət – mənfəətdə xüsusi çəki daxil edək. *j* – cu məhsulun bir vahidinin satışından əldə olunan mənfəətə, *mənfəətdə xüsusi çəki* deyilir və c_j ilə işarə olunur. Mənfəətdə bütün xüsusi çəkiləri sətir vektoru $C = (c_1, \cdots, c_n)$ şəklində yazaq. Onda $C \cdot X$ hasili istehsal olunan *X* vahid məhsulun satışından alınan mənfəət olar. Bu mənfəəti *P(x)* ilə işarə edək. Tutaq ki, *i* – ci ehtiyyatın vahidlərinin miqdarı b_i – dir. Bunu sütun vektoru şəklində yazaq: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$. Onda $AX \le B$. Matris – vektor bərabərsizliyi onu göstərir ki, istehsal planına baxarkən ehtiyatların məhdudluğunun zəruriliyini nəzərə almaq lazımdır.

Əgər bu bərabərsizlik ödənərsə, deməli *X* planı üçün ehtiyatlar kifayətdir və belə plan realdır.

Aşağıdakı optimal planlaşdırma məsələsinə baxaq: İstehsalın elə planını tapın ki, həm real olsun, həm də bütün real planların içərisində ən çox mənfəəti təmin etsin. Bu məsələ bütün iqtisadiyyatın ən mühüm məsələlərindən biri olub, simvolik olaraq aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$P(X) = C \cdot X \to \max,$$
$$AX \le B,$$
$$X \ge 0$$

(Məsələnin məzmununa görə $X \ge \bar{0}$ olmalıdır). $X \ge \bar{0}, AX \le B$ şərtlərini ödəyən bütün X planları çoxluğunu D ilə işarə edək və onu mümkün planlar çoxluğu adlandıraq. Onda yuxarıdakı məsələni, belə ifadə etmək olar: *P(X)*-mənfəət funksiyasının D oblastında–mümkün planlar çoxluğunda maksimumunu tapın: $P(X) \to \max X \in D$

4. Matrislər və xətti çevirmələr. Hər hansı ədədi xətti fəzanı məsələn, R^2- ni nəzərdən keçirək. Onda iki ölçülü hər hansı A kvadrat matrisi $\alpha(x) = Ax$ qaydası ilə $\alpha:\ R^2 \to R^2$ çevirməsini verər. α- nın xətti olması o deməkdir ki, istənilən X,Y vektorları və istənilən λ ədədi üçün $\alpha(X+Y) = \alpha(X) + \alpha(Y)$ və $\alpha(\lambda X) = \lambda\alpha(X)$ şərtləri ödənir.

Xüsusi halda sıfır vektoru özünə çevrilir.

Misal 1. Aşağıdakıları göstərin:

a) $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vahid mətrisi özü-özünə çevirən eynilik çevirməsini təyin edir;

b) $S_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ matrisi, vektoru λ - ya vurur;

c) $S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, vektorun komponentlərinin yerini dəyişir;

ç) $S_{12}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ matrisi vektorun birinci komponentlərini dəyişməz saxlayır, ikinci komponentləri isə əvvəlki komponentlərin cəminə çevirir.

MƏSƏLƏLƏR

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ matrisi ilə $X=(2,-3),\ Y=\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}$ vektorlarının bütün mümkün cüt-cüt hasillərini və *XAY* - hasilini tapın.

Cavab.

$$AY=\begin{pmatrix}6\\ 16\end{pmatrix},\ XA=(4,\ -10)\ ,\ XY=(-10)=-10,$$

$$YX=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 8 & -12\end{pmatrix}, XAY=(XA)Y=(-4,10)\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=-36.$$

2. $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}Y=\begin{pmatrix}6\\ 7\end{pmatrix}$ **m**atris – vektor tənliyini həll edin.

Həlli. Yalnız birinci tənliyə baxaq. Nəzərə alaq ki, bu tənlikdə X ədəd ola bilməz, o yalnız 2x2 ölçülü matrisdir. Bu matrisi $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ ilə işarə edək və *A* matrisini *X* matrisinə vuraraq aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases}2x_{11}+x_{21}=1,\\ 2x_{12}+x_{22}=3,\\ 4x_{11}+2x_{21}=2,\\ 4x_{12}+2x_{22}=6.\end{cases}$$

Bu sistemi həll edib *X* matrisini taparıq.

Cavab. Həllər sonsuz saydadır. Həllər çoxluğu $\left\{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 1-2x_{11} & 3-2x_{12} \end{pmatrix};\ x_{11},\, x_{12} \in R\right\}$ şəklində olar.

3. $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matrislərinə baxaq. Göstərin ki, $XY \neq YX$.

Bu isə göstərir ki, matrislərin hasili kommutativ deyildir, yəni vuruqların yerindən asılıdır.

4. Sex iki növ transformator istehsal edir. Birinci növ transformatorun biri üçün 5 kq dəmir və 3 kq məftil, ikinci növ üçün isə 3 kq dəmir və 2 kq məftil tələb olunur. Bir transformatorun satışından sex uyğun olaraq 6 və 5 dollar gəlir götürür. Sexdə 4,8 t dəmir və 3 t məftil var. Sex neçə növ məftil istehsal edir? Neçə növ ehtiyyatdan istifadə olunar? Sərf norması matrisini, mənfəətdə xüsusi çəki vektorunu və ehtiyatlarının vektorunu yazın. Bir neçə istehsal planına baxın və onların hansının mümkün plan olduğunu müəyyənləşdirin. Məsələn, $\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}$ mümkün plan ola bilərmi?

Həlli. Mənfəətdə xüsusi çəki vektoru $C = (6,5)$, resursların ehtiyat vektoru isə $B = \begin{pmatrix} 4800 \\ 3000 \end{pmatrix}$ olar.

Sərf norması matrisi $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ olar. Məhsulun növləri –2, resursların növü– 2.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ planının mümkün olduğunu göstərmək üçün ya bu plan üçün ehtiyyatların sərfini hesablayıb, ehtiyyatlarla müqayisə etmək lazımdır, ya da $AX \leq B$ matris – vektor bərasizliyinin doğruluğunu yoxlamaq lazımdır. Nəticədə alarıq ki, hər iki plan mümkündür.

5. Taxta–şalban zavodunda küknar və şam ağaclarından faner və tirlər düzəldilir. 100 kv.m faner üçün 2 kub m. küknar və 6 kub m. şam ağacı tələb olunur və 170 dollar mənfəət alınır. 100 m küknar tiri üçün 5 kub m. və 100 m. şam tiri üçün 4 kub m. ağac tələb olunur, mənfəət isə uyğun olaraq 80 və 100 dollardır. Bu zavod neçə məhsul istehsal edir? Neçə növ ehtiyyatdan istifadə olunur? Material sərfi normasının matrisini, xüsusi mənfəət və resurslar ehtiyatı vektorunu tapın. İsbat edin ki, faner istehsal etmək sərfəli deyil. Maksimum mənfəət verən planı tapın.

6. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ matrisinin kvadratını və kubunu tapın.

Göstəriş. Matrisi kvadrata yüksəltmək üçün onu özü-özünə vurmaq lazımdır. Matrisin kvadratını özünə vurduqda matrisin kubunu alırıq.

7. Tutaq ki, *E* vahid matrisdir. Yoxlayın ki, *XE(EX)* varsa, onda *XE=X (EX=X)* bərabərliyi ixtiyari *X* üçün doğrudur.

8. Tutaq ki, $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Yoxlayın ki, $AB=BA=E_2$ burada E_2 iki tərtibli vahid matrisdir. Belə olduqda *A* və *B* matrisləri *qarşılıqlı tərs matrislər* adlanır və əsasən X^{-1} kimi işarə edirlər.

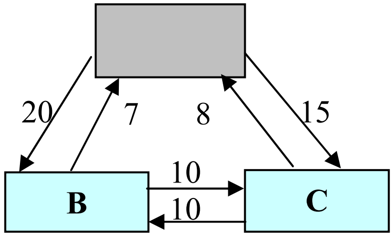
9. R^3 fəzasında aşağıdakı matrisləri yazın:

a) vektorun I komponentini 3-ə, II komponentini 2-yə vurun və III komponentini olduğu kimi saxlayın; b) III komponenti əvvəlki üç komponentin cəmi, II komponenti əvvəlki I və II komponentlərin cəmi, I komponenti isə əvvəlki kimi qalır.

10. Əgər Y mənfi olmayan sətir vektordu, A matris, X, B sütun vektorlardırsa, onda $AX \le B$ bərabərsizliyini soldan Y- ə vursaq, bərabərsizlik öz gücündə qalar. Bunu yoxlayın.

1.3. Xətti cəbri tənliklər sistemi

1. **Xətti cəbri tənliklər sistemi haqqında ilk məlumatlar.** Bir çox məsələlərin həlli nəticədə xətti cəbri tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Aşağıdakı «zarafat-məsələyə» baxaq. «Kəşfiyyatçı haqqında məsələ». Məxfi şəhərdə 100000 fəhlə 3 böyük zavodda işləyir. Şəhərdə başqa zavod yoxdur. Kəşəfiyyatçı bu zavodlarda kadr axını haqqında məlumatı əldə edib: bir ildə hər min nəfər işçidən 20 nəfəri *A* zavodundan *B* – yə, 15 nəfəri isə *C* – yə keçir və s. (şəkil 1). Şəhər uzun illər sakit, stabil yaşayır. Bu şəraitdə kəşfiyyatçı hər zavodda işləyənlərin sayını tapır. Siz də bunu tapa bilərsinizmi?



Həlli. Tapa bilərik ki, «Şəhər sakit, stabil yaşayır» Onu göstərir ki, bir ildə bir zavoddan neçə fəhlə işdən çıxıbsa, o qədər də işə qəbul olunub. *A* zavodundakı fəhlələrin sayını *a* ilə, *B* zavodundakı fəhlələrin sayını *b* ilə, *C* zavodundakı fəhlələrin sayını *c* ilə işarə etsək, xətti cəbri tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} A:\ 35a/1000 = 7b/1000 + 8c/1000, \\ B:\ 17b/1000 = 20a/1000 + 10c/1000, \\ C:\ 18c/1000 = 15a/1000 + 10b/1000, \\ \qquad a + b + c = 100000 \end{cases}$$

Bu sistemi həll edib taparıq:

a = 17600, b = 43600, c = 38800

Xətti cəbrdə bir vektorun bir neçə vektorların xətti kombinasiyası olub, olmadığını yoxlamaq üçün hər dəfə xətti cəbri tənliklər sistemi ilə rastlaşırıq. Belə məsələyə biz yuxarıda (bax. punkt 3 1.1.) baxmışdıq.

Xətti cəbri tənliklər sisteminə aid olan bəzi mühüm anlayışları nəzərdən keçirək.

Xətti cəbri tənliklər sisteminin heç olmazsa bir həlli olduqda ona birgə, yalnız bir həlli olduqda ona müəyyən, birdən çox həlli olduqda ona qeyri-müəyyən və həlli olmadıqda onda ona birgə olmayan deyilir. Aşağıda belə sistemlərə aid misallar ardıcıllıqla göstərilmişdir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 = 7, \end{cases}$$

2. Xətti cəbri tənliklər sisteminin vektor və matris-vektor şəklində yazılışı. Tutaq ki, ***n*** – məchullu xətti cəbri ***m*** tənlikdən ibarət sistem verilmişdir:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ işarə edək.

A – ilə əmsallar matrisini, $A_1, \dots, A_n$ – ilə matrisin vektor sütunlarını işarə etsək, onda verilmiş sistemi aşağıdakı kimi yaza bilərik:

Vektor şəklində: $x_1A_1 + \ldots + x_nA_n = B$

Onda verilmiş sistemin həlli *B* vektorunun $A_1, \dots, A_n$ vektorlarına görə bütün mümkün ayrılışlarının tapılmasına gətirilir. Yəni elə $x_1, \dots, x_n$ ədədlər toplusu tapılmalıdır ki, *B* vektoru əmsalları həmin ədədlər olan vektorların xətti kombinasiyası olsun. Hər bir belə toplum *n* ölçülü vektordur və deməli, verilmiş sistemin həllər çoxluğu *M*, *n* ölçülü xətti ədədi çoxluğun R^n – in alt çoxluğudur. Əgər *B* vektorunu $A_1,\ldots,A_n$ vektorlarının heç olmazsa bir xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilərsə, onda xətti cəbri tənliklər sistemi birgə (uyuşan), bu xətti kombinasiya yalnız bir olarsa, onda sistem müəyyən, birdən çox olarsa sistem qeyri-müəyyən və əgər *B* vektoru $A_1, \ldots, A_n$ vektorlarının xətti kombinasiyası şəklində göstərilə bilməzsə, onda sistem birgə olmayan (uyuşmayan) adlanır və yaxud: $|M|\geq 1, |M|=1, |M|>1, |M|=\varnothing$

Xətti cəbri tənliklər sistemi matris şəklində qısaca olaraq *AX=B* şəklində yazılır (adi birdərəcəli $ax=b$ tənliyi ilə müqayisə edin).

İki xətti cəbri tənliklər sisteminin birinin hər bir həlli digərinin həlli olarsa və ya tərsinə, onda həmin tənliklər sistemi eynigüclü adlanır, yəni onların həllər çoxluğu eynidir. Aşağıdakı iki çevirmə xətti cəbri tənliklər sisteminin elementar çevirməsi adlanır:

1) tənliklərdən birini sıfırdan fərqli ədədə vurmaq və ya bölmək;
2) sistemin tənliklərindən birinin üzərinə əlavə etmək.

Hökm. Xətti cəbri tənliklər sistemi üzərində sayından asılı olmayaraq ardıcıl eynigüclü çevirmələr apardıqda əvvəlki sistemlə eynigüclü sistem alınar.

Xətti cəbri tənliklər sistemini həll etmək üçün geniş yayılmış üsulu məchulların ardıcıl yox edilməsi üsulundan və ya onun modifikasiyası – Jordan-Hauss üsulundan istifadə edirlər. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, elementar çevirmələr vasitəsilə məsələn, 3 tərtibli sistem üçbucaq və ya trapes şəklinə gətirilir.

$$\begin{cases} a_{11}^1 x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 + = b_1^1 \ , \\ \qquad\quad a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 + = b_2^1 \ , \\ \qquad\qquad\qquad a_{33}^1 x_3 + = b_3^1 \ . \end{cases}$$

Bu sistemin (əvvəlkinə eynigüclü) həllini tapmaq asandır, həmin həll əvvəlki sistemin həlli olar.

Misal 1. Aşağıdakı sistemi Jordan-Hauss üsulu ilə həll edin.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ \quad 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Məchulları ardıcıl olaraq yox edək. 1-ci addım da x_1 – *i* birincidən başqa tənliklərdən yox edək:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ -3x_2 - x_3 = -9, \\ \quad 2x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

2-ci addımda x_3 – ü ikinci tənlikdən başqa qalan bütün tənliklərdən yox edək:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -3, \\ \quad -3x_2 - x_3 = -9, \\ \quad 5x_2 = 10. \end{cases}$$

3-cü addımda x_2 - ni üçüncüdən başqa bütün tənliklərdən yox edək:

$$\begin{cases} \quad x_1 = 1, \\ -x_3 = -3, \\ 5x_2 = 10. \end{cases}$$

Beləliklə, sistemin həlli: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ olar.

3. Matrisin determinantı.

Tutaq ki, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ - iki tərtibli kvadrat matrisdir.

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$- ədədi *A* matrisinin determinantı adlanır və $\Delta(A)$ ilə və yaxud $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ilə işarə olunur.

3 tərtibli $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ matrisinin determinantı aşağıdakı kimi hesablanır:

$$\Delta(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Determinantın hər hansı bir elementinin minoru həmin elementin yerləşdiyi sətri və sütunu pozduqdan sonra alınan determinanta deyilir. Məsələn: yuxarıdakı 3-tərtibli determinantın a_{11} elementinin minoru

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ olar.

Determinantın hər hansı bir elementinin cəbri tamamlayıcısı həmin elementin minorunun $(-1)^S$ hasilinə deyilir. Bura da *S* həmin elementin yerləşdiyi sətir və sütunların nömrələrinin cəmidir.

Determinantın xassələri:

1) sətirlərlə sütunların yerini dəyişdikdə determinant dəyişməz, yəni transponirə olunmuş matrisin determinantı əvvəlki matrisin determinantına bərabərdir;

2) determinantın iki sətrinin (sütununun) yerini dəyişdikdə onun işarəsi dəyişir, yəni determinantın iki sətrinin

(sütununun) yerini dəyişmək determinantı (-1) vurmaqla eynigüclüdür;

3) determinantın iki sətri (sütunu) eyni olarsa, determinant sıfıra bərabərdir;

4) determinanın sətirinin (sütununun) bütün elementlərinin ortaq vuruğu olarsa, onu determinant işarəsi xaricinə çıxarmaq olar;

5) determinantı hər hansı bir sətirinin (sütunun) bütün elementlərini eyni bir ədədə vurub, digər sətirin (sütunun) uyğun elementləri üzərinə əlavə etsək determinant dəyişmir;

6) determinantın hər hansı bir sətrinin (sütununun) bütün elementlərini onların uyğun cəbri tamamlayıcılarına vurub, topladıqda həmin determinant alınır, məsələn, i - ci sətiri (sütünü) götürsək alarıq:

$$\Delta(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{ və ya } \Delta(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik},$$

burada A_{ik} ədədləri a_{ik} elementinin cəbri tamamlayıcılarıdır.

Bu xassələr istənilən kvadrat matrisin determinantının tapılmasına imkan verir. Lakin adi qayda ilə məsələn 5-tərtibli determinantı hesablamaq kifayət dərəcədə ağırdır, ona görə də lazım gəldikdə kompüter proqramlarından istifadə edirlər. Biz bu kitabda 4 tərtibdən yuxarı olmayan determinantlarla kifayətlənəciyik.

Misal 2. 4 tərtibli: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ determinantını hesablayın.

Həlli. Determinantın birinci sətir elementlərinə görə ayrılışını yazaq: $\Delta = 1\Delta_{11} - 2\Delta_{12} + 3\Delta_{13} - 4\Delta_{14}$

.

Δ_{11}, Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{14} - üç tərtibli determinantları tapaq. Misal üçün, Δ_{11} - i tapaq:

$$\Delta_{11} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 - 3 + 1 = 0$$

Eyni qayda ilə taparıq ki,
$\Delta_{12} = -1, \ \Delta_{13} = -1, \Delta_{14} = -1$; nəticədə alarıq ki, $\Delta = 3$.

4. Determinantların xətti cəbri tənliklər sisteminin köməyi ilə həlli. Üçməchullu, üç tənlikdən ibarət xətti cəbri tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Tutaq ki, $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Onda, $\Delta \neq 0$ olarsa, xətti cəbri tənliklər sisteminin yeganə həlli var və bu həll Kramer düsturları adlanan aşağıdakı düsturlarla tapılır:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

Qeyd edək ki, analoji düsturlar məchulların sayı tənliklərin sayına bərabər olan və məchulların əmsallarından düzəldilmiş determinant sıfırdan fərqli olan ixtiyari xətti cəbri tənliklər sisteminə tətbiq edilir.

Misal 3. Kramer düsturları vasitəsilə aşağıdakı sistemi həll edin:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ \qquad x_2 + \ x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 20. \end{cases}$$

Cavab: $x_1 = \dfrac{-1}{-1} = 1,\ x_2 = \dfrac{-2}{-1} = 2\ ,\ x_3 = \dfrac{-3}{-1} = 3.$

5. Tərs matris. Tutaq ki, A hər hansı matrisdir. Əgər AB=BA=E olarsa, B matrisi A matrisinin tərsi adlanır, burada E hər hansı vahid matrisdir. Ədədlərlə müqayisə etsək müəyyən oxşarlığı görərik, belə ki, məsələn, 2 ədədi üçün $\frac{1}{2}$ - in tərs ədəddir, çünki $2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1$. Bu mənada A matrisinin tərsini A^{-1} işarə edirldər.

Təklif. Yalnız kvadrat matrisin tərsi var.

İsbatı. Məlum olduğu kimi vahid matris kvadrat matrisdir.

Tutaq ki, E matrisini s sətirli və s sütunu matrisidir. Fərz edək ki, A matrisi m x n ölçülü, B matrisi isə k x l ölçülüdür. Onda AB=E olduğundan alınır ki, m = s = n = k; həm də BA=E olduğundan k =m, l = s olar. Beləliklə, alarıq ki, m=k =n bunu da isbat etmək tələb olunurdu. Eyni qayda ilə göstərmək olar ki, k = m = n, yəni A və B kvadrat matrislərdir.

Tərs matrisi tapmaq üçün aşağıdakı alqoritmdən istifadə etmək olar:

0) verilmiş matrisin kvadrat matris olub-olmadığına baxırıq, əgər kvadrat matris deyilsə, onda onun tərsi yoxdur, əgər kvadrat matrisdirsə, onda birinci bəndə keçirik;

1) $\Delta(A)$ determinantını hesablayırıq: əgər bu determinant sıfra bərabərdirsə, onda tərs matris yoxdur, əgər sıfırdan fərqlidirsə, onda ikinci bəndə keçirik;

2) matrisin hər bir elementinin yerinə onun cəbri tamamlayıcısını yazırıq;

3) alınmış matrisi transponirə edirik;

4) aldığımız matrisin hər bir elementini $\Delta(A)$ determinantına bölürük, onda A matrisinin tərsini alarıq.

Misal 4. Tutaq ki, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta(A)=1$, deməli tərs matris var. Hər bir elementin yerinə onun cəbri tamamlayıcısını yazsaq, alarıq $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Bu matrisi transponirə edək və $\Delta(A)=1$- ə bölək, alınan $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ matrisi A – nın tərsidir.

Yoxlama: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Misal 5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ olduqda AX=E matris tənliyini həll edin. Yuxarıda A matrisinin tərsini tapmışıq. Verilmiş tənliyi soldan A^{-1} – ə vuraq: A^{-1} AX= A^{-1} B .A^{-1} A=E olduğundan, alırıq ki, X= A^{-1} B . Deməli verilmiş tənliyin həlli $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$ matrisidir.

Yoxlama: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Böyük ölçülü matrislərin tərsinin tapılması çox əmək sərfi tələb edir. Bunun üçün komrüterdən istifadə etmək lazımdır. Fərz edək ki, 100 sətri və 100 sütunu olan matrisi kompüterə daxil etmək lazımdır. Burada elementlərin sayı 10000-dir. Əgər bu elementlər 36,23 şəklindədirsə, yəni vergülə qədər iki rəqəm, vergüldən sonra iki rəqəm və vergülün özü də daxil olmaqla 50 000 işarə daxil etmək lazımdır. Hər işarəyə 1 san. sərf olunsa, onda 50 000:3 600 yəni bütövlükdə 16 saata yaxın vaxt sərf olunar.

MƏSƏLƏLƏR

1. $\begin{cases} x_1 + \alpha x_2 = 1 \ , \\ \alpha x_1 + x_2 = \alpha^2 \end{cases}$ Sisteminin birgə (uyuşmayan) olmadığı, qeyri-müəyyən olduğu, müəyyən olduğu, birgə (uyuşan) olduğu bütün α-ı tapın.

Həlli. Birinci tənlikdən x_1 – i tapıb, ikinci tənlikdə yerinə yazsaq alarıq: $(1-\alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$. Əgər $\alpha \neq \pm 1$ olsa, onda bu tənliyin yeganə həlli olar $x_2 = -\alpha/(1+\alpha)$, bu halda tənliklər sisteminin yeganə həlli olacaq:

$x_1 = (1+\alpha+\alpha^2)/(1+\alpha), \ \ x_2 = -\alpha/(1-\alpha)$. Əgər $\alpha \neq \pm 1$ olarsa, onda $\alpha = 1$ və $\alpha = -1$ hallarını xüsusi tədqiq etmək lazımdır. $\alpha = 1$ olduqda $(1-\alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$ tənliyinin sonsuz sayda həlli olar – hər bir ədəd onun həllidir, deməli bu halda tənliklər sisteminin də sonsuz sayda həlli var. $\alpha = 1$ olduqda $(1-\alpha^2)x_2 = \alpha^2 - \alpha$ tənliyinin həlli yoxdur və deməli tənliklər sisteminin də həlli yoxdur. Beləliklə, nəticədə alırıq: $\alpha = -1$ oduqda tənliklər sistemi birgə (uyuşmayandır) deyil, $\alpha = 1$ olduqda sistem qeyri–müəyyəndir və $\alpha \neq \pm 1$ olduqda müəyyəndir və $\alpha \neq -1$ olduqda isə sistem birgədir (uyuşandır).

2. $\begin{cases} 2x_2 - x_1 + x_3 = 6 \ , \\ x_3 - 8 + x_1 = x_2 \ , \\ x_1 - 10 + x_3 = 0. \end{cases}$

Xətti cəbri tənliklər sistemini vektor və matris – vektor şəklində yazın.

3. Məchulları yox etməklə xətti cəbri tənliklər sistemini üçbucaq şəklinə gətirərək onun həllini tapın:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4\ , \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1\ , \\ 4x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

4. Kramer düsturları vasitəsilə xətti cəbri tənliklər sistemini həll edin.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\ , \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7\ , \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

5. *a, b, c* parametrlər arasında hansı münasibət olduqda $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ matrisinin tərsi yoxdur. Matrisini tərsi olmadığı parametrlərin heç olmazsa bir üçlüyünü göstərin.

6. Aşağıdakı matrislərin hər birinin tərsini tapın:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Baş diaqonal üzərindəki n ədədlərdən hər biri olan n tərtibli kvadrat matrisin determinantını hesablayın.

8. Göstərmək olar ki, kvadrat matrislərin hasilinin determinantı, onların determinantları hasilinə bərabərdir. Bu faktı $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ matrisinin kvadratı və kubu üçün yolxayın.

9. Bundan əvvəlki məsələdən istifadə edərək göstərin ki, tərs matrisin (əgər varsa) determinantı əvvəlki matrisin derminantının tərsidir.

Göstəriş. Əvvəlcə göstərin ki, vahid matrisin determinantı 1-ə bərabərdir.

10. Göstərin ki, əgər xətti cəbri tənliklər sisteminin heç olmazsa iki həlli varsa, onda sistemin həllərinin sayı sonsuzdur.

11. R^2 fəzasını özü-özünə çevirən xətti çevirmə $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ vektorunu $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ vektoruna, $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ vektorunu isə $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ vektoruna çevirir. Bu çevirmənin matrisini tapın.

Göstəriş. XA=B matris tənliyini həll edin, burada *X* axtarılan matris, $A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{pmatrix}$

12. Xətti tənliklər sistmeinin bütün sərbəst hədləri sıfıra bərabərdirsə, bu sistem bircins adlanır. Göstərin ki, belə sistemin sıfırdan fərqli həlli olarsa, onda həmin sistemin sonsuz sayda həlli var.

13. Tutaq ki, α, β çevirmələri R^2 fəzasında təsir edən xətti çevirmələrdir və uyğun olaraq *A,B* matrisləri ilə verilib. Əgər onları ardıcıl, bir-birinin ardınca tətbiq etsək, onda nəticə çevirməsi hasil matrisi ilə verilər. $\alpha \cdot \beta$, $\beta \cdot \alpha$ çevirmələrinin matrislərini tapın.

14. Göstərin ki, R^2 fəzasında kollinlar olmayan ixtiyari iki vektor bazis əmələ gətirir.

15. Göstərin ki, iki əmtəə fəzasında, ixtiyari əmtəə dəsti (toplusu) iki qeyri-mütənasib əmtəə dəstinin $\alpha x + \beta y$ kombinasiyası şəklindədir. Nəzərə almaq lazımdır ki, α, β mənfi olmaya da bilərlər.

Göstəriş. Əvvəlki məsələdən istifadə edin.

Mövzu 2.
MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ VƏ FƏZADA XƏTT

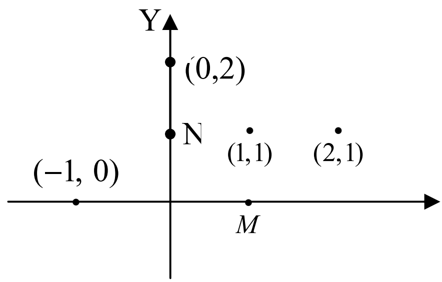
Hesab edək ki, düz xətt üzərində , koordinat sistemi, müstəvi üzərində və fəzada düzbucaqlı koordinat sistemi haqqında əsas məlumatlar məlumdur. Həmçinin hesab edəcəyik ki, sərbəst vektorlar («sərbəst» istiqamətlənmiş parçalar) haqqında əsas məlumatlar, nöqtənin koordinatları ilə onun radius - vektoru arasındakı əlaqələri və digər oxşar məlumatları da bilirik.

2.1. Müstəvi üzərində düz xətt. Fəzada müstəvi və düz xətt

1.Müstəvi üzərində düz xətt, düz xəttin müxtəlif növ tənlikləri. Tutaq ki, üfiqi *OX* və şaquli *OY* koordinat oxlarının kəsişmə nöqtəsi *O(0,0)* nöqtəsidir (şəkil1).

Bu oxlar üzərində uzunluq vahidi seçilmişdir, onları *OM* və *ON*-lə işarə edək.

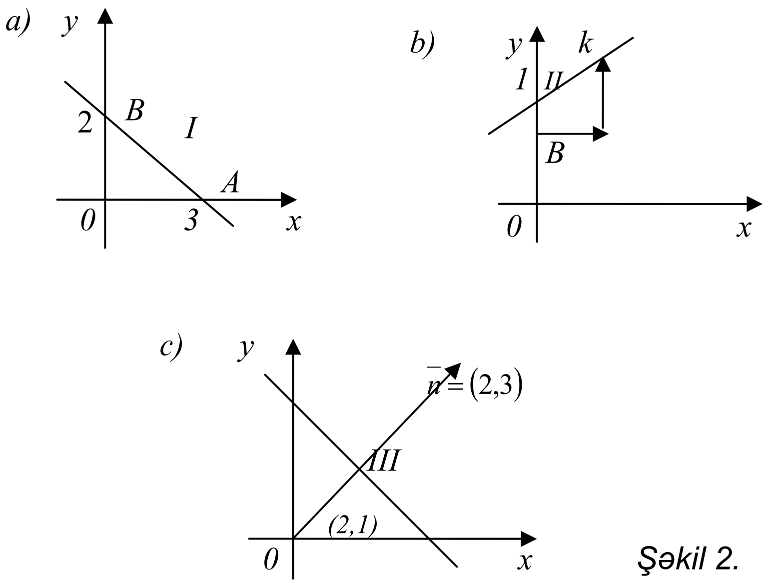
Sağa doğru istiqamətlənmiş üfiqi *OX* üzərində *x* koordinatını, yuxarıya doğru istiqamətlənmiş şaquli *OY* üzərində isə *y* koordinatını ayıracağıq. Şəkildə müstəvi üzərində müxtəlif nöqtələr qeyd edilmişdir.



Şəkil 1.

Müstəvi üzərində xətti tənliyi elə *F(x,y)=0* tənliyinə deyilir ki,bu tənliyi xətt üzərində olan ixtiyari nöqtənin koordinatları ödəyir və xəttin üzərində olmayan nöqtələrin koordinatları ödəmir. Məlumdur ki, ikidəyişənli $ax + by = c$ xətti tənliyi müstəvi üzərində düz xətti təyin edir.

Müxtəlif xətti tənliklərlə verilmiş düz xətlərin ən rasional üsulla necə qurulduğunu göstərək.



Şəkil 2.

Məsələn, düz xətti koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrinə görə quraq. Düz xətti *ax + by =c* tənliyi ilə verildikdə onu bu cür qurmaq əlverişlidir. Misal üçün *2x+3y=6* düz xəttini quraq. Bu düz xəttin *OX* oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün *y=0* götürək, onda *x=3* alarıq (şəkil 2, *a)* yəni *A* nöqtəsini tapırıq.

Analoji qayda ilə bu düz xəttin *OY* oxu ilə kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün *X=0* qəbul edərək, *y=2* alarıq ki, bu isə *B* nöqtəsidir. Bu iki nöqtədən keçən düz xətt axtardığımız düz xəttdir.. Bu düz xəttin tənliyini $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=6$ şəklində də yaza bilərik ki, bu da *düz xəttin parçalarla tənliyi* adlanır.

Əgər düz xətt *y= kx+b* tənliyi ilə verilərsə, onu aşağıdakı şəkildə qurmaq əlverişlidir: şaquli ox üzərində

B=1(*b=1* vahid) (şəkil 2, b) nöqtəsini tapaq, sonra bu nöqtədən üfiqi istiqamətdə 1 vahid sağa «gedək» və *k*=2 vahid yuxarı «qalxaraq» *K* nöqtəsini tapırıq. *K* və *B* nöqtələrindən axtarılan II düz xəttini çəkək.

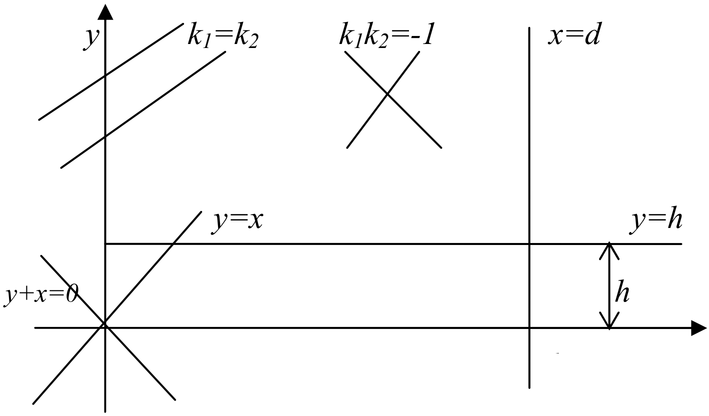
Bəzi hallarda verilmiş nöqtədən keçən və verilmiş vektora (düz xəttin normal vektoru) perpendikulyar olan düz xətti qurmaq lazım gəlir. Tutaq ki, (x_o, y_o) nöqtəsi və $\overline{n}=(a,b)$ vektoru verilmişdir. Onda düz xəttin tənliyi $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ olar. Ona görə də III düz xəttini (şəkil 2,v) qurmaq üçün (2, 1) nöqtəsindən keçən və (2, 3) vektoruna perpendikulyar olan düz xətt çəkmək lazımdır.

Arayış xarakterli bəzi məlumatları da qeyd edək. Əgər düz xətt (x_o, y_o) nöqtəsindən keçirsə, onun tənliyi $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ şəkilində olar, burada *a* və *b* ixtiyarı ədədlərdir. (x_0, y_o) və (x_1, y_1) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi $\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}=\frac{(y-y_0)}{(y_1-y_0)}$ şəklindədir.

Bucaq əmsalları k_1, k_2 olan düz xətlər arasındakı φ bucağı $tg\varphi=\frac{(k_1-k_2)}{(1+k_1\cdot k_2)}$ düsturu ilə tapılır.

Düz xətlərin paralel olması üçün zəruri və kafi şərt onların bucaq əmsallarının bərabər olmasıdır: $k_1=k_2$ (şəkil

3)



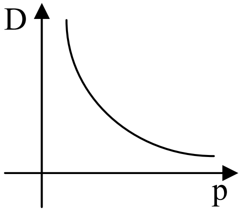
Şəkil 3

Düz xətlər $y = kx + b$ şəklində tənliklərlə verilərsə, onda onların perpendikulyar olması üçün zəruri və kafi şərtə $k_1 k_2 = -1$, əgər $ax + by = c$ şəklində tənliklərlə verilərsə, onda $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ olar.

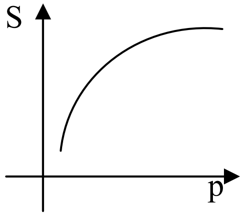
$a_1 x + b_1 y = c_1$ və $a_2 x + b_2 y = c_2$ düz xəttlərinin kəsişmə nöqtəsini tapmaq üçün $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$ tənliklər sistemini həll etmək lazımdır.

Üfiqi düz xətlərin tənliyi *y=h*, şaquli düz xətlərin tənliyi isə *x=d* şəklindədir: I kvandratın tənböləninin tənliyi *y=x,* II kvandratın tənböləninin tənliyi isə *y+x=0* olar (şəkil 3).

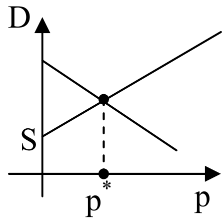
2. Tələb və təklifin xətti funksiyaları, tarazlıq qiymətlərin tərifi. Hər hansı əmtəəyə baxaq. Vahid əmtəənin verilmiş p qiymətinə görə, alıcıların alacağı əmtəənin miqdarını $D(p)$ ilə işarə edək. $D(p)$ funksiyası *əmtəənin tələb funksiyası* adlanır. $D(p)$ azalan funksiyadır, onun təxmini qrafiki şəkil 4-də verilmişdir. Digər tərəfdən satıcıların bazara çıxardığı əmtəənin miqdarını $S(p)$ ilə işarə edək. Bu funksiya *əmtəənin təklif funksiyası* adlanır. Bu funksiya artandır, onun təxmini qrafiki şəkil 5-də verilib.



Şəkil 4.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Tələb və təklifin bərabər olduğu qiymət *tarazlıq qiyməti* adlanır. Deməli, bərabərölçülü p^* tarazlıq qiyməti üçün $D(p^*) = S(p^*)$ (şəkil 6).

Tutaq ki, tələb və təklif funksiyaları xətti funksiyalardır (bu fərziyyə yalnız müəyyən məhdudiyyətlərdə mümkün ola bilər).

Məsələn, tutaq ki, $D(p) = 40 - p$, $S(p) = 10 + 2p$. Onda tarazlıq qiyməti aşağıdakı tənliyin həllindən tapılar: $40 - p = 10 + 2p$; $p = 10$.

3. Büdcə çoxluğu. n ölçülü *C* əmtəələr fəzasına baxaq.Tutaq ki, p qiymətlər vektorudur. Onda X əmtəələr dəstini (toplusunun) qiyməti $px = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ olar.

Əgər X və Y dəstlərinin (toplusunun) qiymətləri eynidirsə yazacağıq ki, $X \sim Y$. Bu işarə əmtəələr fəzasında eynigüclülüyü göstərir, yəni: a) simmetrik: əgər $X \sim Y$ isə, onda $Y \sim X$ olar; b) tranzitivlik: əgər $X \sim Y$ və $Y \sim Z$ olarsa, onda $X \sim Z$ olar; c) refleksivlik: əgər $X \sim X$ ixtiyari $X \in C$ üçün. Əmtəələr fəzasında bir sıra başqa münasibətlər də fikirləşmək olar.

İki əmtəələr fəzasına baxaq. Asanlıqla görmək olar ki, eyni qiyməti olan əmtəələr dəsti (toplusu)

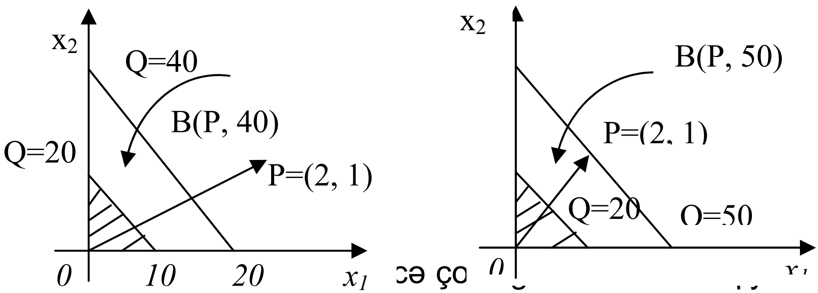
c, $p_1x_1 + p_2x_2 = c$ tənliyi ilə verilmiş düz xəttin birinci kvadratında yerləşən L_c hissəsidir. Bu düz xətt qiymətlər vektoruna perpendikulyardır. Əgər $e < c$ olarsa, onda $p_1x_1 + p_2x_2 = e$ tənliyi ilə verilmiş L_e düz xətti L_c düz xəttinə paraleldir və koordinat başlanğıcına daha yaxındır.

Tutaq ki, hər hansı pul məbləği Q fiksə edilmişdir. Bu pul məbləğinə *gəlir də* deyirlər. Qiymətləri Q-dən çox olmayan bütün əmtəələr dəstinə (toplusuna) *büdcə çoxluğu* deyirlər və B ilə işarə edirlər. Büdcə çoxluğunu adi və vektor bərabərsizlikləri vasitəsilə aşağıdakı kimi təyin etmək oalr: $B(P,Q) = \{X \in C : p_1x_1 + ... + p_nx_n \le Q\}$ və ya $B(P,Q) = \{x \in C : PX \le Q\}$.

Qiymət dəqiq Q-yə bərabər olan əmtəələr dəstinin (toplusunun) çoxluğuna *büdcə çoxluğunun sərhədi* deyilir və G-ilə işarə edirlər. Büdcə çoxluğunun sərhədini adi və vektor bərabəsizliyinin köməyi ilə təyin etmək olar:

$G(p,Q) = \{x \in C : p_1x_1 + ... + p_nx_n = Q\}$ və ya $B(p,Q) = \{x \in C : px = Q\}$ (Qeyd edək ki, əmtəələr fəzası mənfi olmayan vektorlar dəstindən (toplusundan) ibarətdir).

Əgər əmtəələr fəzası ikiölçülü və ya üçölçülü olarsa, onda büdcə çoxluğunu əyani təsvir etmək olar. Şəkil 7-də müxtəlif P qiymətləri və müxtəlif Q gəlirləri üçün büdcə çoxluğu təsvir olunmuşdur.



cə ço

ve ... ordinat

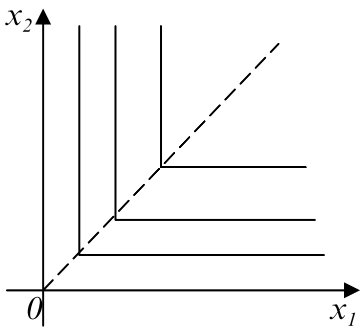
oxları ... çölçülü

Şəkil 7.

fəzada büdcə çoxluğu üç üzlü piramida olar. Bu piramidanın üzlərindən birinin yerləşdiyi müstəvinin birinci oktanta sıxılmış hissəsi büdcə çoxluğunun sərhədi olar.

Budcə çoxluğu $B(P,Q)$, P qiymətindən və Q gəlirindən asılıdır. Gəlir artdıqca büdcə çoxluğunun sərhədi özünə paralel olaraq koordinat başlanğıcından uzaqlaşır, qiymət azalanda da o artır-sərhədlərin kəsişmə nöqtəsi koordinat başlanğıcından uzaqlaşır (şəkil 7-ə baxın).

Misal 1. İki əmtəə fəzasına baxaq. Əgər II əmtəə I-dən düz iki dəfə çox olarsa, əmtəələr *dəsti* (toplusu) *balanslaşdırılmış* adlanır. Əgər əmtəə dəsti (toplusu) balanslaşdırılmış deyilsə, onda hər hansı əmtəənin göstərilmiş nisbətdən artığı heç bir əhəmiyyət kəsb etmir və bu halda balanslaşdırılmış dəstin (toplunun) qiyməti (faydası) uyğun balanslaşdırılmış dəstin (toplunun) qiymətinə (faydasına) bərabərdir. Yoxlayın ki, alınan münasibət ekvivalentlik münasibətidir.



Şəkil 8.

Həlli. Refleksivlik, simmetriklik və tranzitivlik xassələrinin ödənildiyini yoxlayaq. Ekvivalentlik sinfi-ixtiyari iki elementi ekvivalent olan maksimal çoxluqdur. Şəkil 8-də baxılan ekvivalentliyin bir neçə halı göstərilmişdir. Kəsişmə bucaqları $y=2x$ düz xəttinin üzərində yerləşirlər.

4. Fəzada müstəvi və düz xətt. Fəzada səth tənliyi elə $F(x,y,z)=0$ tənliyinə deyilir ki, bu tənliyi səth üzərində olan ixtiyari nöqtənin koordinatları ödəyir, bu səth üzərində olmayan heç bir nöqtənin koordinatları ödəmir.

Məlumdur ki, üçdəyişənli $ax + by + cz = d$ xətti tənliyi fəzada müstəvini təyin edir. Arayış xarakterli bir neçə məlumatları qeyd edək.

OX oxu üzərində götürülmüş a nöqtəsindən, *OY* oxu üzərində götürülmüş *b* nöqtəsindən və *OZ* oxu üzərində götürülmüş *c* nöqtəsindən keçən müstəvinin tənliyi $x/a + y/b + z/c = 1$ şəklindədir. *(x_0, y_0, z_0)* nöqtəsindən keçən və $\overline{n} = (a, b, c)$ vektoruna perpendikulyar olan (bu vektor müstəvinin normal vektoru adlanır) müstəvinin tənliyi $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ kimidir. İki müstəvinin paralelliyi üçün zəruri və kafi şərt onların normal vektorlarının mütənasib olmasıdır.

Şaquli müstəvilər yəni *OZ* oxuna paralel olan müstəvilər by tənliyi $ax+by=c$ şəkilindədir. Üfüqi müstəvilər, yəni *OXY* müstəvisinə paralel olan müstəvilərin tənliyi *z =h* şəkilindədir və b.

Fəzada düz xətt çox hallarda iki müstəvinin kəsişməsi şəkilində verilir, yəni düz xətt

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ , \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \ . \end{cases}$$

tənliklər sisteminin həlləri çoxluğu kimi verilir.

Verilmiş *(x_0, y_0, z_0)* və *(x_1, y_1, z_1)* nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi

$$(x - x_0)/(x_1 - x_0) = (y - y_0)/(y_1 - y_0) = (z - z_0)/(z_1 - z_0)$$

MƏSƏLƏLƏR

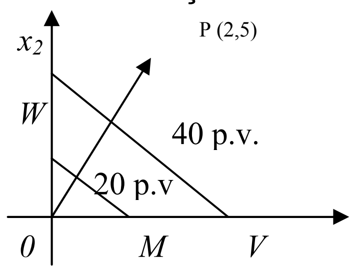
1. Aşağıdakı düz xətləri rasional üsul seçərək qurun:
a) $3x+4y=12$; b) $y=2x-1$; c) (1,2) nöqtəsindən keçən və *(2, 3)* vektoruna perpendikulyar olan; *ç)* $x/3+y/5=1$.

2. *a) (1, 2)* və *(4, 5)*; *b) (-1, 0)* və *(0, 0)* nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyini yazın.

3. *a) (0, 0)* nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı $k=2$ olan; *b) (-1, 0)* nöqtəsindən keçən və bucaq əmsalı $k=-1$ olan düz xəttin tənliyini yazın.

4. Tələb və təklifin bir neçə xətti funksiyasını fikirləşin, onların qrafikini çəkin və hər bir hal üçün bərabər çəkili qiyməti tapın.

5. Müxtəlif qiymət üçün bərabər *p = (2, 5)*vektorları (eyni) mənfəət xətlərini çəkin. Məsələn, *p = (2, 5)*, 9-cü şəkildə *MN, VW* xətləri uyğun olaraq 20 və40 pul vahidinə uyğun dəyər xətləridir.



Şəkil 9.

6. Müstəvi üzərində və fəzada xətləri parametrik şəkildə, hər bir əsas dəyişənlərin parametrdən asılılığı şəklində vermək olar. Məsələn, $x=t$, $y=2t+1$ müstəvi üzərində $y=2x+1$ xəttini verir. $2x+3y=6$, $-8x+4y=16$ xətlərinin parametrik tənliklərini yazın.

Cavab: $x=3t$; $y=2-2t$; $x=2t$; $y=4+4t$.

7. $x=2t$, $y=3t$, $z=4t$ düz xətti $2x+3y+4z=0$ müstəvisini kəsirmi?

8. Zavod iki növ əmtəə istehsal edir və λ intensivliyi 0-dan 1-ə qədər dəyişməklə işləyə bilir ($\lambda=1$ maksimal intensivlikdir). $\lambda=0-dan$ $\lambda=1$- ə qədər ($\lambda=1$ maksimal intensivlikdir). $\lambda=1$ olduqda zavoda (20, 40) əmtəə dəsti,

λ intensivliyində isə λQ dəsti istehsal olunur. Zavodun istehsal edə biləcəyi əmtəə dəstini yazıın və qrafiki olaraq təsvir edin.

9. İki zavod eyni növ olmaqla iki məhsul istehsal edir. (λ_1, λ_2) intensivliyi ilə işlədikdə birinci zavod $\lambda_1 Q_1 = (10\lambda_1, 15\lambda_1)$, ikinci zavod isə $\lambda_2 Q_2 = (20\lambda_2, 10\lambda_2)$ dəstini, bu zavodlar birlikdə isə $(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)$ əmtəə dəstini istehsal edir. Hər iki zavodun birlikdə istehsal edə biləcəyi əmtəə dəstlər çoxluğunu yazın və qrafik təsvir edin.

10. İki növ əmtəə fəzasında 1-ci əmtəənin əmtəə dəstində 2-cidən 3 dəfə çox olduğunu bilərək, onun yaratdığı ekvivalentliyi nəzərdən keçirin.

11. (2, 5) qiymətləri ilə verilmiş iki əmtəə fəzasında əmtəələr çoxluğunu qrafik olaraq göstərin.: a) 40 pul vahid dəyərinə bərabər; b) 60 pul vahidindən çox olmayan dəyərə uyğun; c) 30 pul vahidindən az və 40 pul vahidindən çox olmayan dəyərə uyğun.

12. Aşağıdakı iki əmtəə üçün büdcə çoxluğunun və onun sərhədlərinin necə dəyişdiyini izləyin: a) yalnız gəlir diyişir; b) yalnız bir əmtəənin qiyməti dəyişir; c) hər iki əmtəənin qiyməti dəyişir, onların nisbəti isə sabit qalır.

13. İki əmtəə fəzasında iki qiymət vektoru verilmişdir: *P = (2, 3)* və *Q =(3, 4)*. Birincisi alış, ikincisi satış qiymətidir. Bərabər mənfəətlərin nisbəti əmtəə ekvivalentlik münasibətidirmi?

14. (2, 3, 5) qiymətlərinə uyğun üç əmtəə fəzası verilmişdir: aşağıdakı qiymətə uyğun əmtəələr çoxluğunu qrafik olaraq göstərin:a)40 pul vahidi; b) 60 pul vahidindən çox olmayan; c) 20 pul vahidindən az olmayan; ç) 30 pul vahidindən az və 40 pul vahidindən çox olmayan.

15. Rusiyanın Mərkəzi Bankı 1997-ci il üçün valyuta dəhlizi müəyyən etmişdir. İlin əvvəlində dollar 5 500 rubl, ilin axırında isə 6 230 rubl (rəqəmlər şərtidir). Dolların

kursunun 1997-ci ilin günlərinin uyğun apropsimə edilmiş nömrəsinə xətti asılılığını tapın.

16. İki əmtəə fəzasında mütənasib olmayan iki A və B əmtəə dəstinə baxaq. $\alpha x + \beta y$ kombinasiyası şəklində göstərilə bilən bütün *X* dəstlərinin çoxluğunu təsvir edin, burada α, β mənfi olmayan ədədlərdir. Uyğun çoxluğu üç əmtəə fəzasında necə təsəvvür edirsiniz? Bu halda mütənasib olmamaq şərtini hansı şərt əvəz edər?

2.2. İkitərtibli mühüm əyrilər. Polyar koordinat sistemi

Düzbucaqlı koordinat sisteminə nəzərən ikidərəcəli $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ tənliyi ilə təyin olunan xəttə ikitərtibli əyri deyilir. İki dərəcəli tənlik ya çevrəni, ya ellipsi, ya hiperbolanı, ya parabolanı, ya kəsişən düz xətlər cütünü, ya paralel ya da bir nöqtəni, ya da düz xətlər cütünü təyin edir. Bundan başqa, həmin tənliyin həlləri çoxluğu boş çoxduq ola bilər.

Misal 1. $x^2 + y^2 = 0$ tənliyi kəsişən $x - y = 0$ və $x + y = 0$ düz xətlərini təyin edir.

Misal 2. $y^2 - 4 = 0$ tənliyi $y - 2 = 0$ və $y + 2 = 0$ paralel düz xətlərini təyin edir.

Misal 3. $x^2 + y^2 = 0$ tənliyi *O(0,0)* nöqtəsini təyin edir.

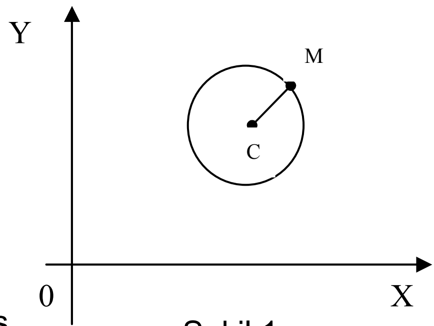
Misal 4. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ tənliyini heç bir nöqtənin koordinatları ödəmir.

1.İkitərtibli mühim əyrilər. Mərkəz adlanan qeyd edilmiş bir nöqtəsindən, radius adlanan eyni məsafədə yerləşən müstəvi nöqtələrinin çoxluğuna *çevrə* deyilir. Radiusu *R,* mərkəzi $C(x_0, y_0)$ nöqtəsi olan çevrənin tənliyini çixaraq (şəkil 1).

Çevrənin ixtiyari *M(x, y)* nöqtəsi üçün *CM=R*.

Buradan çevrənin tənliyini alarıq.

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$



Şəkil 1.

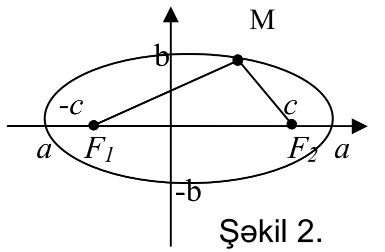
Əgər çevrənin mərkəz koordinat başlanğıcında olarsa, yəni $x_0=0$, $y_0=0$ olarsa, onda çevrənin tənliyi kanonik tənlik adlanan sadə şəklə düşər: $x^2+y^2=R^2$

Fokus adlanan verilmiş cəmi sabit kəmiyyət olan müstəvi nöqtələrinin çoxluğuna *ellips* deyilir.

Bu sabit kəmiyyəti $2a$, fokuslar isə $F_1(-c, 0)$ və $F_2(-c, 0)$ – ilə işarə edək. Ellips üzərində olan ixtiyari $M(x, y)$ nöqtəsindən fokuslara qədər məsafələr:

$r_1=F_1M=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ və

$r_2=F_2M=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ olar.



Şəkil 2.

Ellipsin tərifinə əsasən $r_1+r_2=2a$. Buradan:

$r_1=2a-r_2$; $r_1^2=4a^2-4ar_2+r_2^2$;

$4ar_2=4a^2+r_2^2-r_1^2$; $4ar_2=$

$=4a^2++(x-c)^2+y^2-(x+c)^2+y^2$;

$ar_2=a^2-xc$; $a^2r_2^2=(a^2-xc)^2$;

$a^2\left((x-c)^2+y^2\right)=a^4-2a^2xc+x^2c^2$;

buradan alarıq: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Əgər $a=c$ olsa, $y=0$ alarıq ki, bu da $[F_1, F_2]$ parçasının tənliyidir. Əgər $a>c$ olarsa, onda $a^2-c^2=b^2$ $(a<c<b)$ işarə edib və bərabərliyin hər tərəfini a^2b^2 – a bölsək ellipsin kanonik tənliyini alarıq:

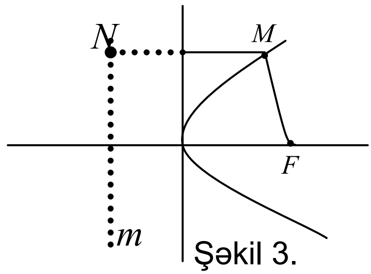
$$x^2/a^2+y^2/b^2=1\ ;\quad a^2-c^2=b^2.$$

Bu tənliyə əsasən deyə bilərik ki, ellips koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. Müsbət, a və b ədədləri ellipsin böyük və kiçik yarımoxları, $\varepsilon = {c}/{a}$ ədədi isə *eksentrisitli* adlanır.

$\varepsilon = 0$ olduqda alarıq ki a = *b, c = 0.* Bu halda ellips radiusu *a* olan çevrədir. $\varepsilon = 1$ olduqda isə a = *c, b = 0* olar və ellips *[F_1, F_2]* parçasına çevrilir.

Fokus adlanan *F* nöqtəsindən və direktris adlanan *m* düz xəttindən bərabər məsafədə yerləşən müstəvi nöqtələrinin çoxluğuna *parabola deyilir* (şəkil 3).

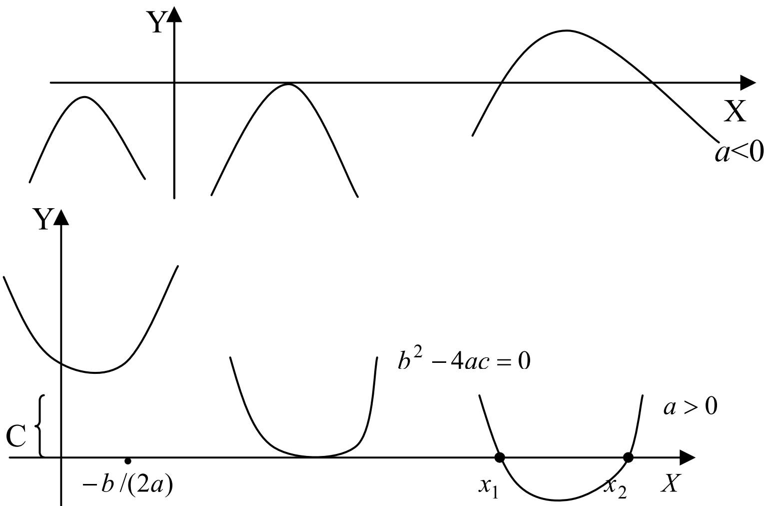
Tutaq ki, $F(p/2\ ,\ 0)$ parabolanın fokus nöqtəsidir, şaquli *m* düz xətti isə $(-\,p/2\ ,\ 0)$ nöqtəsindən keçir. Bu nöqtə şaquli koordinat oxuna nəzərən fokus nöqtəsilə simmetrikdir.



Şəkil 3.

Əgər *M(x, y)* parabolanın ixtiyari nöqtəsidirsə, onda $MN = x + {p}/{2}$ -- bu nöqtədən direktrisə qədər məsafə, $r = FM = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$ - fokusa qədər olan məsafədir. Parabolanın tərifinə əsasən bu məsafələr bərabərdir: $\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + {p}/{2}$.

Buradan parabolanın $y^2 = 2px$ tənliyini alırıq. Lakin çox hallarda parabolanın adi, məktəbdən məlum olan tənliyindən istifadə edirlər: $y = ax^2 + bx + c$, burada a, b, c parabolanın parametrləridir. Parametrlərin müxtəlif qiymətləri üçün parabolanın qrafiki şəkil 4 – də verilmişdir.



Şəkil 4.

Adətən parabolanın qrafikini qurmaq üçün bir neçə əsas momentlərdən: simmetriya oxu, kökləri, parabolanın təpə nöqtəsi, parabolanın qollarının istiqaməti və s. istifadə edirlər. Biz hesab edəcəyik ki, bu əsas momentlər məlumdur.

Fokus adlanan verilmiş iki F_1 və F_2 nöqtəsindən məsafələrinin fərqi sabit kəmiyyət olan müstəvi nöqtələrinin çoxluğuna *hiperbola* deyilir (şəkil 5).

Tutaq ki, bu kəmiyyət *2a* –ya bərabərdir. Əgər $F_1(-C, 0)$ və $F_2(C, 0)$ hiperbolanın fokus nöqtələri $M(x, y)$ isə hiperbolanın ixtiyari nöqtədirsə, onda bu nöqtədən fokuslara qədər məsafə

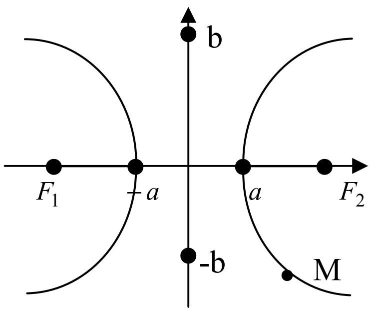
$$r_1 = F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

və $r_2 = F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

olar. Hiperbolanın tərifinə əsasən $|r_1 - r_2| = 2a$ və ya

$r_1 - r_2 = \pm 2a$.

Ellipsdə olduğu kimi bu ifadəni sadələşdirmək, hiperbolanın kanonik tənliyini alarıq:



Şəkil 5.

$$x^2\!\!\left/_{a^2}\right. - y^2\!\!\left/_{b^2}\right. = c^2 \;; \quad c^2 = a^2 - b^2.$$

Bu tənliyə əsasən müəyyən edə btlərik ki, hiperbola koordinat oxlarına nəzərən simmetrikdir. İkitərtibli əyrilərdən iqtisadiyyata tətbiqinə aid misal göstərək.

Qismən inhisar şəraitində firma öz əmtəəsinə özü qiymət təyin edə bilər, lakin bu halda firma əmtəəyə tələbin dəyişməsini nəzərə almalıdır. Aşağıdakı məsələni həll edək.

Misal 5 . Satışın həcmi - *y,* *w* qiymətindən • *M* *y=40-2w* düsturu ilə asılıdır. İstehsal xərclərinin - *J*, istehsalın y - həcmindən asılılığı *(y)=y²+2y+7* düsturu ilə verilir. Maksimal mənfəət kriteriyasına əsasən istehsalın həcminin optimal həcmini, mənfəətin miqdarını və xərcləri tapın.

Həlli. Məsələnin şərtlərinə əsasən mənfəət $P(y) = yw - J(y) = y(40-y)\big|_2 - \left(y^2 + 2y + 7\right)$ istehsalın həcminin kvadratik funksiyasıdır. Mənfəətin törəməsini tapıb, onu sıfıra bərabər etsək, istehsal həcmini optimallaşdıran $y^*=6$ qiymətini taparıq. Sonra isə maksimal mənfəəti - $p^*=47$ və istehsal xərclərini - $J^*=55$ tapırıq.

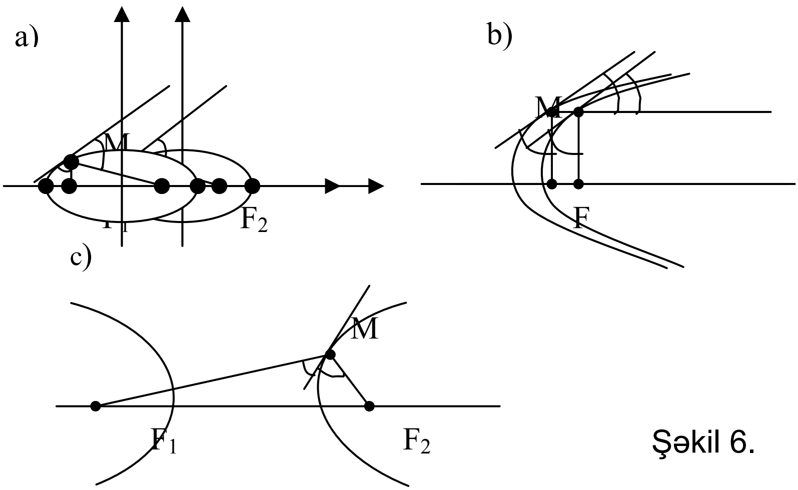
2. İkitərtibli əyrilərin optik və həndəsi xassələri.

Əvvəlcə optik xassələri qeyd edək:

1) İxtiyari *M* nöqtəsində ellipsə toxunan düz xətt $F_1 M$, $F_2 M$ (şəkil 6, a) fokal radiusları ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirir.

2) İxtiyari *M* nöqtəsində parabolaya toxunan düz xətt *FM* fokal radiusla və *M* nöqtəsindən başlayan, parabolanın oxuna paralel olan şüa əmələ gətirir (şəkil 6, b).

3) İxtiyari *M* nöqtəsində hiperbolaya toxunan düz xətt $F_1 M$ və $F_2 M$ fokal radiuslar ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirir (şəkil 6, v).



Şəkil 6.

Ellipsoid, paraboloid, hiperboloid.

İndi təsəvvür edək ki, ellips, parabola və ya hiperbola fokus nöqtələrindən keçən ox ətrafında fırlanır. Alınan səthlər uyğun olaraq ellipsoid, paraboloid və ya hiperboloid adlanır. Fizikadan bizə məlum olan işığın əks olunması qanununa əsasən alırıq:

1) əgər işıq mənbəyi elliptik güzgünün fokuslarından birindədirsə, onda bu mənbədən çıxan işıq şüası güzgüdən əks olunaraq digər foksa yığılır;

2) əgər işıq mənbəyi parabolik güzgünün fokus nöqtəsindədirsə, onda işıq şüası güzgüdən əks olunaraq, parabolanın oxuna paralel istiqamətdə gedir;

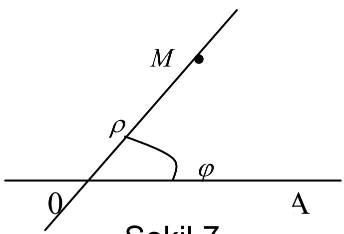
3) əgər işıq mənbəyi hiperbolik güzgünün fokuslarından birində yerləşirsə, onda işıq şüası bu güzgüdən əks olunaraq elə istiqamətdə gedir ki, digər fokusdan da buraxılsaydı, həmin istiqamətdə gedərdi. Parabolik güzgünün bu xassəsinə görə projektorun quruluşu təyin olunur. Aşağıdakı teorem ellips, hiperbola və parabolanın hər birinin

həndəsi təbiətini təsvir edir və nə üçün bu əyrilər konik kəsiklər adlanır sualına cavab verir.

Teorem. İstənilən dairəvi konusun onun təpəsindən keçməyən müstəvi ilə kəsiyi yalnız ellips (xüsusi halda çevrə), parabola və ya hiperbola ola bilər.

3. Polyar koordinat sistemi. Əlverişli və tez-tez tətbiq olunan polyar koordinat sistemini təsvir edək. Polyus adlanan *O* nöqtəsi ilə, bu nöqtədən çıxan polyar ox adlanan *OA* şüası ilə və uzunluğu ölçmək üçün miqyasla təyin olunan koordinat sisteminə *polyar koordinat sistemi* deyilir. Bundan əlavə polyar koordinat sistemi verildikdə *O* nöqtəsi ətrafında hansı istiqamətdə fırlanmanın müsbət istiqamət olduğu da qeyd edilməlidir. Adətən saat əqrəbinin əksi müsbət istiqamət hesab olunur. Tutaq ki, *O* polyus və *OA* polyar ox (şəkil 7) verilmişdir.

İxtiyari M nöqtəsinə baxaq və $OM = \rho$ ilə işarə edək. *OA* oxunun OM şüası ilə üst-üstə düşməsi üçün fırlana φ bucağın ilə işarə edək, yəni



Şəkil 7.

$\angle AOM = \varphi$ (radian) ρ və φ ədədlərinə *M* nöqtəsinin (verilmiş sistemə nəzərən) *polyar koordinatları* deyilir. ρ ədədi birinci koordinat və yaxud polyar radius, φ ədədi *ikinci koordinat və ya polyar bucaq* adlanır.

Qeyd edək ki, *M* nöqtəsi O nöqtəsi ili üst-üstə düşərsə, onda birinci koordinat ρ *=0* olur, ikinci koordinat isə bu halda qeyri-müəyyəndir (müəyyən qiymətə malik olmur). Bəzən eyni zamanda dekart və polyar koordinat sistemindən istifadə etmək lazım gəlir. Bu halda bir sistemdən digərinə keçmək məsələsi ortaya çıxır: nöqtənin polyar koordinatlarını bilərək, onun dekart koordinatlarını və tərsinə – dekart koordinatlarını bilərək onun polyar koordinatlarını tapmaq. Bu düsturları tapmaq çətin deyildir, belə ki, *(x, y)* dekart, (ρ , φ) polyar koordinatlardırsa, onda

$$\begin{cases} x = \rho cos\varphi \ , \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases} \tag{1}$$

düsturları polyar koordinatlardan dekart koordinatlarına,

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \\ tg\varphi = y/x \end{cases} \tag{2}$$

düsturları isə dekart koordinatlardan polyar koordinatlara keçidi təmin edir.

Misal 6. Nöqtənin dekart koordinatları (-2, 2) verilmişdir. Onun polyar koordinatlarını tapın. (2) düsturlarında istifadə etsək alarıq: $\rho = 2\sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$.

Misal 7. Dekart koordinat sistemində düz xətt $y = \sqrt{3}\,x$ düsturu ilə verilib. Asanlıqla görmək olar ki, polyar koordinatlarlı onun tənliyi $tg\varphi = \sqrt{3}$ olar.

Misal 8. Radiusu *R*, mərkəzi polyusda olan çevrənin tənliyi polyar koordinat sistemində $-\ \rho = R$ olar.

Ellipsin, parabolanın və hiperbolanın polyar koordinat sistemində tənliklərinə dərslikdə baxmaq olar.

4.Xətlərin parametrik tənlikləri. Tutaq ki, *OXY* koordinat sistemi və bir arqumentli iki funksiya verilmişdir:

$$x = U(t)\ ,\ y = \vartheta(t) \tag{3}$$

Şərtləşək ki, *t*–nin hər bir qiymətində *x* və *y* kəmiyyətlərinə hər hansı *M* nöqtəsinin koordinatları kimi baxmaq olar. *t* dəyişdikcə ümumiyyətlə desək, *x* və *y* kəmiyyətləri də dəyişir və deməli *M* nöqtəsi müstəvi üzərində öz yerini dəyişir. (3) bərabərliyi M_t nöqtəsinin trayektoriyasının parametrik tənliyi adlanır; *t* arqumentinə dəyişən parametr deyilir.Əgər *M* nöqtəsi hər hansı xətt üzrə hərəkət edirsə, onda (3) düsturları parametrik olaraq həmin xətti təyin edir.

Misal 9. a) $x = 4t,\ y = -3t + 3$ düsturları $3x + 4y = 12$ düz xəttinin parametrik tənliyidir;

b) $x = R\cos t$ $, y = R\sin t$ düsturları, mərkəzi koordinat başlanğıcında radiusu R olan çevrənin parametrik tənliyidir;

c) $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ düsturları *a* və *b* olan ellipsin tənliydir;

ç) $y = t,\ x = t^2 / v_n$ - isə $y^2 = 2px$ parabolasının parametrik tənliyidir.

MƏSƏLƏLƏR

1. $y = ax^2 + bx + c$ parabolasının qrafikini qurun.

Həlli: Qrafiki xarakterik nöqtələrə əsasən qururlar. Bunlara aşağıdakılar aiddir:

a) parabolanın kökləri - $ax^2 + bx + c = 0$ tənliyindən tapılır (kökləri olmaya da bilər);

b) parabolanın təpə nöqtəsi – onun absisini $2ax + b = 0$ tənliyindən tapırlar;

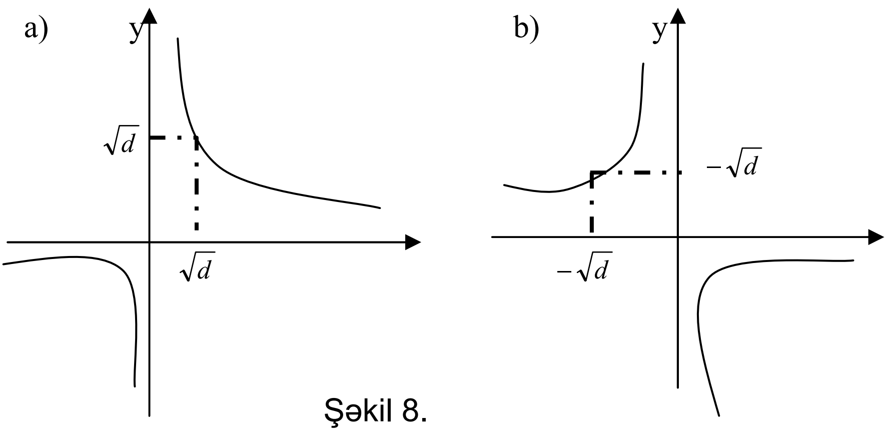
c) koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələri – bu nöqtənin koordinatları (*O.C)* - dir;

ç) simmetriya oxları – absisi $x = -b/2a$ olan şaquli düz xətt;

d) əgər *a >0* olarsa, parabolanın qolları yuxarıya, *a <0* olarsa, aşağıya tərəf yönəlib, *a =0* olarsa, onda parabola düz xəttə çevrilər. (şəkil 3-də parabolanın tipik qrafikləri göstərilib).

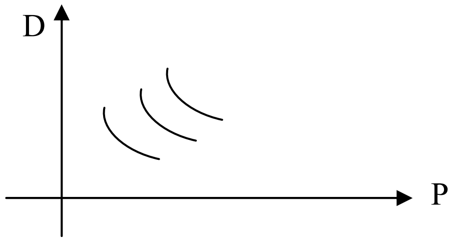
2. $xy = d$ hiperbolasının qrafikini qurun. *d >0* olarsa, onda hiperbolanın bir qanadı 1-ci kvadrantda, digər qanadı isə 3-cü kvadrantda yerləşir (şəkil 8, a); *d <0* olarsa, onda hiperbolanın qanadları 2-ci və 4-cü kvadrantda yerləşir (şəkil 8, c). Çox hallarda koordinatları mütləq qiymətcə bərabər olan iki nöqtəni tapmaq kifayət edir: *d >0* olduqda bir nöqtəni 1-ci kvadrantda, digər nöqtəni (simmetrik) isə 3-cü kvadrantda, *d <0* olduqda isə bir nöqtəni 2-ci kvadrantda, digərini (simmetrik) isə 4-cü kvadrantda tapırlar.

3. Hər gün eyni əmtəədən eyni miqdarda alan insanlar qrupuna baxaq (məsələn, siqaret çəkənlərin aldıqları siqareti). Nəzərdə tutulur ki, qiymətlər cüzi dəyişir. Əgər qiymətlər əhəmiyyətli dərəcədə dəyişərsə, onda yeni miqdarda siqaret almaq zərurəti yaranır. Bu insanların həmin əmtəəyə tələbi ilə qiymət arasındakı asılılığı tapın. Həmin əmtəənin alınması üçün gündəlik xərclənən müxtəlif pul miqdarına görə tələbin qrafikini çəkin.



Şəkil 8.

P qiymətinin hər hansı intervalda dəyişməsinə uyğun *D* tələbi $D(p) = Q/p$ düsturu ilə ifadə olunar, burada *Q* – pulun miqdarıdır. Şəkil 9-da təxmini qrafiklər göstərilmişdir.



Şəkil 9.

4) Polyar kooridnat sistemində şaquli və üfiqi düz xətt tənliklərini verin.

5) Polyar koordinat sistemində aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $r = \varphi$ (Arximed spiralı);

b) $r = \pi/\varphi$ (Hiperbolik spiral);

c) $r = 10\sin 3\varphi$ (üçləçəkli qızılgül).

6) Aşağıdakı xətləri parametrik şəkildə göstərin:

$$x^2 + y = 1,\ \ x^2 + y^2 = 16,\quad x^2 - y^2 = 9$$

Mövzu 3.
İQTİSADİYYATDA XƏTTİ MODELLƏR
3.1. Optimal planlaşdırmanın xətti modeli

1. Optimal planlaşdırma məsələsi. Bu modelin əsas tərkib hissəsi 2-ci mövzuda verilmişdir. Onları qısa şəkildə təkrar edək. Tutaq ki, müəssisə *m* növ resursdan *n* növ məhsul istehsal edir. Belə ki, *j*–ci növ məhsulun bir vahidinin istehsalı üçün *i*–ci növ resursun a_{ij} vahidi sərf olunur, yəni a_{ij} ilə *j* –cu növ məhsulun istehsal üçün *i* – cu növ resursun sərfi norması işarə edilmişdır.

Sərf normasından düzəldilmiş $A =(a_{ij})$ matrisi sərf norması matrisi və yaxud texnoloji matris adlanır. Nəzərə alaq ki, bu matrisin *j* – cu sütunu A_j *j* – cu məhsulun bir vahidinin istehsalına sərf olunan resursu tamamilə təsvir edir, *i* – ci sətir isə *i* – ci resursun hər məhsul vahidinin istehsalı üçün sərfini və ya vahid intensivli hər texnologiyanı təsvir edir. Tutaq ki, c_j kəmiyyəti *j* – cu məhsulun bir vahidinin satışından əldə olunan xüsusi mənfəətdir. Bu xüsusi mənfəətlər $C=(c_1,\cdots,c_n)$ sətir-vektorunu əmələ cətirir. Onda $C\cdot X=c_1x_1+\cdots+c_nx_n$ hasili $X=(x_1,\cdots,x_n)$ vahidi ilə ifadə olunmuş məhsulun satışından əldə olunan mənfəət olar (burada *X* – sütün vektorudur, yazılış sadəliyi üçün bəzən onu sətir vektor şəkilində yazacayıq). Bu mənfəəti *P(x)* ilə işarə edək.

Tutaq ki, b_i ilə anbarda olan *i* – ci resursun miqdarı işarə edilmişdir (vahidlərinin sayı). Bu ehtiyat kəmiyyətləri $B=(b_1,\cdots,b_m)$ şəkilində yazaq (*B* sütun vektorudur). Onda $AX\le B$ matris-vaektor bərabərsizliyi göstərir ki, istehsal planına baxarkən resurs ehtiyatlarının məhdudluğu nəzərə alınmalıdır. Əgər bu bərəbərsizlik ödənərsə, deməli *X* planı üçün resurs ehtiyatları *B* kifayətdir və belə plan *real və ya mümkün plan* adlanır.

Aşağıdakı optimal planlaşdırma məsələsinə baxaq:

İstehsalın elə $X=(x_1,\cdots,x_n)$ planını tapmalı ki, mümkün plan olsun və butun mumkun planlardan ən çox mənfəəti təmin etsin. Bu məsələni aşağıdakı kimi yazırlar:

$$
\begin{aligned}
&c_1x_1+\cdots+c_nx_n \to \max ,\\
&a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \le b_1 \quad ,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \le b_m \quad ,\\
&x_1\cdots x_n \ge 0 ,
\end{aligned}
$$

və ya matris- vektor şəkilində

$$
\begin{aligned}
&P(X)=C\cdot X \to \max,\\
&AX \le B,\\
&X \ge 0
\end{aligned}
$$

($X \ge 0$ məhdudiyyəti məsələnin məzmununu nəzərə alır, *0* -isə *X* – lə eyni ölçülü sıfır sütun - vektorudur).

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n \le b_1 \quad ,\\
&\vdots\\
&a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n \le b_m \quad ,\\
&x_1\cdots x_n \ge 0 ,
\end{aligned}
$$

və ya matris-vektor şəkilində:

$$
\begin{aligned}
&AX \le B,\\
&X \ge 0
\end{aligned}
$$

şərtlərini ödəyən bütün planlar çoxluğunu *D* ilə işarə edək və onu mümkün çoxluq (mümkün planlar çoxluğu) adlandıraq. Onda yuxarıda göstərdiyimiz xətti proqramlaşdırma (*XR*) məsələsini aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik: mümkün planlar çoxluğunda $P(x)=c\cdot x$ funksiyasının maksimumunu tapın. Matris-vektor şəkilində $\begin{aligned}&P(x)\to \max,\\ &x\in D.\end{aligned}$

2. Xətti proqramlaşdırma haqqında bəzi ümumi məlumatlar. Optimal planlaşdırma məsələsi xətti proqramlaşdırmanın (XP) ən mühim məsələlərindən biridir. İqtisadi şərh vermədən XP məsələsini belə ifadə etmək olar: dəyişənlərin xətti məhdudiyyətləri şərtlərində xətti funksiyanın ekstremumlarını tapın. Dəyişənlərin bütün xətti məhdudiyyətləri ödəyən qiymətlər çoxluğu *mümkün çoxluq* adlanır.

Mümkün çoxluq ölçüsü məsələnin dəyişənlərinin sayına bərabər olan xətti ədədi fəzada çoxüzlü cisimdir. Ekstremumu axtarılan xətti funksiya isə *məqsəd funksiyası* adlanır.

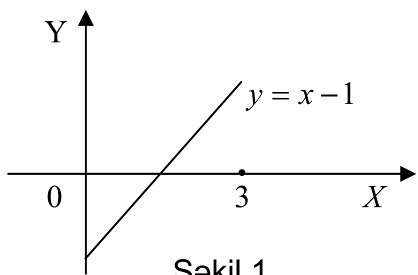
Bu qayda ilə formalaşmış dəqiq riyazi məsələ xətti proqramlaşdırmanın *ümumi məsələsi* adlanır. Ekstremum nöqtəsi isə (əgər o varsa) XP məsələsinin *optimal həlli* adlanır. Qeyd edək ki, mümkün çoxluğun ixtiyari nöqtəsi *XP-nin həlli* və yaxud *mümkün həlli* adlanır.

Xətti proqramlaşdırma keçmiş SSRİ-də 30-cu illərin (XX əsr) sonunda yaranmışdır. İqtisadçı-riyaziyyatçı alim L.V.Kantoroviç bu məsələlərin bir sıra növünü qurmuş və onların həlli üsullarını göstərmişdir. 1975-ci ildə həmin elmi işlərinə görə L.V.Kantoroviç iqtisadiyyat sahəsində Nobel mükafatına layiq görülmüşdür ki, bu da XP məsələlərinin böyük əhəmiyyətinə dəlalət edir.

Sırf riyazi nöqteyi-nəzərdən XP məsələlərinin xüsusiyyəti ondadır ki, burada ekstremum törəmənin tətbiq köməyi ilə araşdırılmır. Doğurdan da sadə XP məsələsinə baxaq: $x-1 \to \max,$

$0 \le x \le 3$

Məqsəd funksiyasının törəməsi 1- ə bərabər olduğundan tədqiq olunan intervalda böhran nöqtələri yoxdur və klassik sxemlə ekstremumları tapmaq mümkün deyildir (şəkil 1). Lakin məqsəd funksiyasının maksimumu *x=3* nöqtəsindədir və bu nöqtə təyin oblastının



Şəkil 1.

daxili nöqtəsi deyildir (törəmənin köməyi ilə ekstremumların tapılması üsulu məktəb proqramında da baxılmışdır, 6.1-ə də baxa bilərsiniz).

Praktikada bəzən elə XP-məsələlərini həll etmək zərurəti yaranır ki, resursların və məhsulların sayı həddindən çox olur (yüzlərlə və minlərlə). Belə məsələləri həll etmək üçün güclü riyazi üsullar yaradılıb və bu tip məsələlər kompüterlərin vasitəsilə həll olunur. XP məsələlərini həll etmək üçün ən məşhur üsul 1949-cu ildə amerikan riyaziyyatçısı Dj. Dansiq tərəfindən kəşf olunmuş simpleks üsuldur. Aşağıdakı iki teorem XP-nin və simpleks üsulun nəzəri əsasını təşkil edir.

XP-nin I əsas teoremi. **XP məsələsinin optimal həlli yalnız və yalnız o halda var ki, məqsəd funksiyası mümkün çoxluqda ekstremum istiqamətində məhdud olsun.**

Bu teorem ümumi halda doğru olmaya da bilər. Məsələn, $y = 1/x$ funksiyası $(0,+\infty)$ çoxluğunda aşağıdan 0-la məhduddur, lakin bu çoxluqda onun minimum nöqtəsi yoxdur.

XP-nin II əsas teoremi. **Əgər XP məsələsində məqsəd funksiyası ekstremum qiymətini alırsa, onda ekstremum nöqtəsi mümkün çoxluğun hər hansı künc nöqtəsidir.**

Künc nöqtəsinin dəqiq tərifi sadə deyildir və bizə heç lazımda deyil. Yalnız yadda saxlamaq lazımdır ki, ekstremumun axtarıldığı mümkün çoxluq – çoxüzlü cisimdir və bu cismin təpə nöqtələri künc nöqtələr hesab edilir. Bu künc nöqtələr sonlu saydadır. Simplek üsul isə mümkün çoxluğun künc nöqtələrinin axtarılan ekstremum nöqtəsinə yaxınlaşmağa doğru istiqamətlənmiş seçimdir.

Növbəti künc nöqtəsinin təhlili zamanı simplek üsul aşağıdakıları göstərir:

1) bu nöqtə – axtarılan ekstremum nöqtəsidir;

2) məsələnin məqsəd funksiyası qeyri məhduddur, və deməli ekstremum nöqtələri yoxdur. Bu da o deməkdir ki, məsələnin həlli yoxdur;

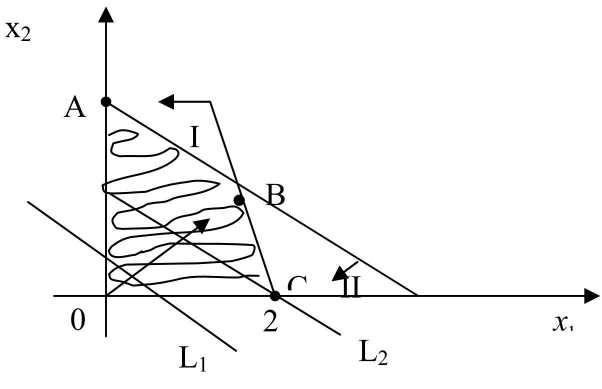
3) hansı künc nöqtəsinin tədqiq olunacağını (bu şərtlə ki, məqsəd funksiyasının sonrakı künc nöqtəsindəki qiyməti ekstremuma daha yaxın olsun).

XP məsələsinin simpleks üsulu ilə adi əllə həlli Simpleks cədvəllər adlanan xüsusi cədvəllər şəklində tərtib edilir. Lakin onlarla məhdudiyyət və bir o qədər də dəyişənlər olduqda XP məsələsini adi yolla həll etmək olduqca mürəkkəb olur, bu zaman kompüterin tətbiqi sadəcə olaraq zəruri olur.

3. İkidəyişənli XP məsələsinin qrafik üsulla həlli.

Aşağıdakı XP məsələsini həll edək:

$$S(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to \max,$$
$$3x_1 + x_2 \le 6,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 6,$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$



Şəkil 2.

Müstəvi üzərində koordinat sistemi götürək (şəkil 2). Belə ki, başlangıc nöqtəsi *O(0,0),* x_1 oxunu sağa doğru üfüqi, x_2 oxunu isə yuxarıya doğru şaquli istiqamətləndirək. Mümkün *D* çoxluğunu qurmağa başlayaq.

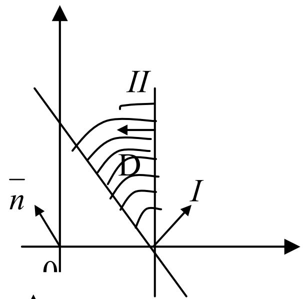
$3x_1 + x_2 \le 6$ bərabərsizliyini sərhədi $3x_1 + x_2 = 6$ düz xətti olan yarımmüstəvi nöqtələri ödəyir. Bu düz xətti qurmaq üçün ən sadə yol onun koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtəsinə görə qurulmasıdır (bax bənd 1, hissə 2.1). Bu nöqtələr *(2,0)* və *(0,6)* nöqtələridir. Lazım olan yarımmüstəvini müəyyən etmək üçün həmin düz xətt üzərində olmayan hər hansı nöqtənin məsələn, *O(0,0)* nöqtəsinin $3x_1 + x_2 \le 6$ bərabərsizliyində koordinatlarını yerinə yazsaq, bərabərsizlik doğru olardı. Bunu oxla göstərək. Deməli, I yarımmüstəvi O(0; 0) özündə saxlayan axtarılan yarımmüstəvidir. Analoji olaraq ikinci məhdudiyyət tədqiq edirik və II yarımmüstəvisini alarıq. Hər bir dəyişənin mənfi olmaması başqa iki yarısmmüstəvinin də qurulmasına imkan verir: Şaquli oxdan sağ tərəf və üfüqi oxdan yuxarıya tərəf. Dörd yarımmüstəvilərin kəsişməsi axtarılan mümkün çoxluğu- *OABC* dördbucaqlı verər. Onu yüngülcə ştrixləyək. İndii həmin çoxluqda *S(x_1,x_2)* məqsəd funksiyasının maksimumunu tapmaq lazımdır. XP-nin II əsas Teoremindən istifadə etmək olar.

Aydındır ki, maksimum nöqtəsi *O, A, B, C* təpə nöqtələrindən biri ola bilər. *O, A, C* nöqtələrinin kooridnatları asan tapılır: *O(0, 0), A (0, 3), C (2, 0). B* nöqtəsinin koordinatlarını tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 6 \;, \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

Sistemi həll edərək tapırıq: $x_1 = 6/5$, $x_2 = 12/5$. İndi bu nöqtələrdə məqsəd funksiyasının qiymətlərini hesablayaq: $S(O) = 0, S(A) = 6, S(B) = 36/5$, $S(C) = 4.$ Göründüyü kimi maksimum $36/5$ - ə bərabərdir və bunu $B\left(6/5\,,\,12/5\right)$ nöqtəsində alır. Lakin adətən maksimum, adətən təpə nöqtələrini seçməklə tapılmır.

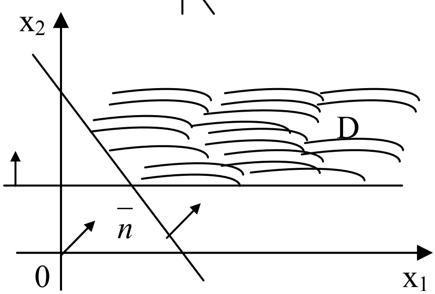
$2x_1+2x_2 = e$ tənliyi ilə verilmiş L_e xəttinə, *yəni $S(x_1, x_2)= e$* – yə baxaq: göründüyü kimi L_e -xəttinin hər bir nöqtəsində *S* funksiyasının qiymətləri eynidir və *e* - yə bərabərdir. Buna görə də L_e xəttinə *S* funksiyasının *e səviyyə xətti* deyilir. Şəkil 2-də iki səviyyə xətti L_1 , L_2 göstərilmişdir. Qeyd edək ki, səviyyə xətləri kəsişmirlər, baxdığımız halda onlar paralel düz xətlərdir və hər biri öz normal $\vec{n}=(2,2)$ vektoruna perpendikulyardır. Bu normal vektor *S* funksiyasının artma istiqamətini göstərir. Ona görə də maksimumu taparkən axtarışında səviyyə xəttini normal vektor istiqamətində hərəkət etdirmək lazımdır.

a)



$$-3x_1+3x_2 \to \min$$
$$2x_1+5x_2 \ge 10$$
$$x_1 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

b)



$$x_1+x_2 \to \max$$
$$x_2 \ge 1$$
$$x_1+x_2 \ge 2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Şəkil 3.

Bu halda tədqiq edilən funksiyanın qiymətləri artacaq. Səviyyə xəttinin mümkün çoxluqla kəsişdiyi axırıncı nöqtə maksimum nöqtəsi olacaq. Bizim halda bu *B* nöqtəsidir. Beləliklə cavab: $x_1 = 6/5$, $x_2 = 12/5$; $\max S = 36/5$.

Əgər məsələdə xətti funksiyanən minimumunu tapmaq tələb olunsaydı, onda səviyyə xəttini normal vektorun əksi istiqamətində hərəkət etdirmək lazımdır.

Riyazi analizin ümumi teoremlərindən alınır ki, əgər XP məsələsində mümkün çoxluq məhduddursa, onda məqsəd funksiyası bu çoxluqda həm maksimumunu, həm də minimumunu alır. Əgər mümkün çoxluq qeyri-məhdud olarsa, onda ekstremum olmaya da bilər. Bu halda XP məsələsinin həlli yoxdur. Şəkil 3-də minimumun tapılmasına ail məsələ göstərilmişdir (şəkil 3, a). Həmin şəkildə bir məsələnin də həlli göstərilmişdir: məqsəd funksiyasının qeyri-məhdud olmasına əsasən maksimum istiqamətində maskimum nöqtəsi yoxdur (şəkil 3, b).

4. Tam ədədli XP məsələləri. XP–nin bir məsələlərində dəyişənlərin bir neçəsi və yaxud hamısı tam ədədli olur, yəni onların qiymətləri yalnız tam ədədlər olur. Məsələn, transformatorlar haqqında məsələdə (1.2 bölməsində bax) və ya aşağıda gətirilən 3,4 məsələlərində olduğu kimi. XP-nın belə məsələlərini həll etmək adi məsələləri həll etməkdən çox mürəkkəbdir. Adi məsələlər dedikdə tam ədədli məhdudiyyətin olmadığı məsələlər nəzərdə tutulur . Belə məsələlərin həll üçün xüsusi üsullar tərtib olunub, məsələn «budaq və sərhəd» adlanan üsul. Yalnız XP məsələsinin həllində olduğu kimi, burada da səviyyə xəttini ekstremum istiqamətində hərəkət etdirərək axırıncı tamədədli nöqtəni tapmaq lazımdır. Bununla da axtarılan optimal tamədədli həlli tapmış olarıq (aşağıdakı 2-ci məsələyə bax).

MƏSƏLƏLƏR

1. XP məsələsini həll edin:

$$1998x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 27,$$

$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10,$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

$$x_2 \geq 1$$

Həlli. Birinci bərabərliyi 2-yə vurub, ikinci bərabərliklə toplasaq, alarıq:

$$2x_1 + 2x_2 = 32, \quad x_1 + x_2 = 16.$$

Buradan, $x_3=11$. Məqsəd funksiyasında x_1 və x_2 –nin əmsallarının çox fərqli olduğunu nəzərə alsaq, belə nəticəyə gəlirik ki, x_1 çox böyük , x_2 –isə çox kiçik olmalıdır. Son nəticədə alarıq: $x_2=1$, $x_1=15$. Məqsəd funksiyasının maksimumu 30026 olar.

2.Tam ədədli XP məsələsini qrafik üsulla həll edin:

$$10x_1 + 9x_2 \to \max,$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24,$$

$$7x_1 + 20x_2 \leq 140,$$

$$2x_1 \leq 11$$

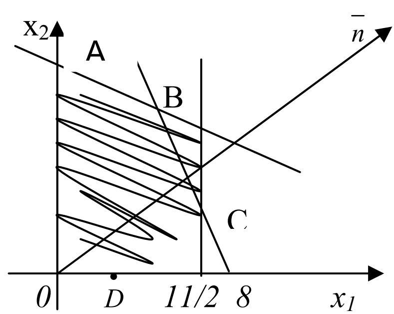
x_1, x_2 - tam ədədlərdir, $x_1, x_2 \geq 0$.

Məsələnin mümkün çoxluğunun təsviri nədir və onun neçə elementi var?

Həlli. Əvvəlcə mümkün çoxluğu tam ədədli şərtini nəzərə almadan tapaq. *OABCD* beşbucaqlısını alarıq (şəkil 4).

Hər iki koordinatı tam ədəd olmaqla, bu beşbucaqlının neçə nöqtəsi olduğunu müəyyən edək. Belə nöqtələrin sayı 39 -dur. Həmin nöqtələr çoxluğu məsələnin mümkün çoxluğunu təşkil edir (tam ədədli olmaq şərti ilə). O nöqtəsindən (10, 9) normal vektorunu çəkək.

Bu vektora perpendikulyar olan düz xətti, onun göstərdiyi istiqamətdə hərəkət etdirək. Axırıncı tam ədədli nöqtəni tapmağa çalışaq. Bu (5, 4) nöqtəsidir. Məqsəd funksiyanın maksimum qiyməti tam ədədli şərtini nəzərə almaqla 95-ə bərabərdir.



Şəkil 4.

3. Tikinti trestində 2 ağır və 10 yüngül ekskavator var. Üç tikinti idarəsində onlara ehtiyac var. Bir ağır və bir yüngül ekskavatorun sutkalıq işi (kub metrlə) aşağıdakı kimidir: (150, 40), (180, 25), (200, 30).

Bir tikinti idarəsində 5-dən çox ekskavator göndərmək olmaz. Hər bir tikinti idarəsinə göndərilən ağır və yüngül ekskavatorların sayını müəyyənləşdirən məsələni tərtib edin və həll edin, bu şərtlə ki, ekskavatorların bir sutkalıq cəm şəkildə işi maksimum olsun. Qeyd edək ki, bu məsələ tam əddəli proqramlaşdırma məsələsidir.

4. 40-dan az olmamaq şərtilə 2x3 ölçülü və 60-dan az olmamaq şərtilə 5x5 ölçulu dəmir lövhələrdən minimum sayıda 13x6 m ölçülü dəmir lövhələri düzəltmək üçün *xp* məsələsi tərtib edin və bu məsələni həll edin. Nəzərə alın ki, bu məsələ tam ədədlidir.

Göstəriş. Böyük lövhələrin kiçik və orta lövhələrə bölünməsinin bütün mümkün üsullarına baxın.

3.2. Xətti proqramlaşdırmada ikililik

İkililik nəzəriyyəsi bütün xətti proqramlaşdırmanın mərkəzi hissəsini təşkil edir. Bu nəzəriyyə iqtisadiyyatda geniş tətbiq edilir.

1. Ticarət məsələsi. Texnoloji matrisi *A*, mənfəətdə xüsusi gəlir vektorları *C* və resurs ehtiyatları *B* olan müəssisənin bir dövrədəki işinə baxaq. Uyğun optimal planlaşdırma məsələsi geniş şəkildə aşağıdakı kimi olar:

$$
\begin{aligned}
& c_1x_1+\ldots+c_nx_n \to \max \\
& a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n \le b_1, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
& a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n \le b_n, \\
& x_1,\ldots,x_n \ge 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Fərz edək ki, müəssisəni sahibinin yanına alıcı gəlir və resurs ehtiyatlarının bir hissəsini və ya hamısını ona satmağı təklif edir.

Niyə də olmasın? Normal iqtisadiyyatda qəti inkar yoxdur, hər şey qiymətdən asılıdır. Resursların ətrafında alver başlayır, daha dəqiq desək resursların qiymətləndirilməsi başlayır, belə ki, alver bazarda getmir, ona görə də müəssisə sahibinin və alıcının müxtəlif fikirləri ola bilər. i -ci resursun qiymətini y_i ilə işarə edək. Alıcı öz məqsədini müəyyənləşdirib: nə qədər mümkündür az xərc çəksin yəni: $y_1b_1+\ldots+y_mb_m \to \min$

Müəssisə sahibinin isə öz fikirləri var. Baxın o, deyir j- cı məhsulun bir vahidi üçün mən c_j mənfəətini əldə edirəm, bu vahid məhsulu istehsal etmək üçün $(a_{1j},...,a_{mj})$ müxtəlif resursların bir vahidini xərcləyirəm. Buna görə də ağlabatandır ki, $y_1a_{1j}+\ldots+y_ma_{mj} \ge c_j$ olsun. Bu münasibət bütün növ məhsullar üçün doğru olmalıdır. Alıcının və satıcının arqumentlərini birləşdirsək, yeni XP məsələsini alarıq:

$$
\begin{aligned}
&y_1 b_1 + \ldots + y_m b_m \to \max, \\
&y_1 a_{11} + \ldots + y_m a_{m1} \le c_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&y_1 a_{1n} + \ldots + y_m a_{mn} \le c_n, \\
&y_1, \ldots, y_m \ge 0.
\end{aligned} \qquad (2)
$$

Bu məsələ əvvəlki (1) məsələsinə nəzərən ikili məsələ adlanır və birlikdə ticarət məsələsini təşkil edirlər.

Qeyd edək ki, əvvəlki məsələnin hər bir məhdudiyyətinə qarşı, yəni hər bir resursa qarşı uyğun olaraq ikili dəyişən qarşı qoyulmuşdur. Göstərəcəyik ki, hər iki məsələnin optimal həlli var. İkili dəyişən verilmiş resursa uyğun optimal qiymətin resursun *ikili qiyməti* adlanır.

2. İkili məsələnin simmetrik cütlüyü. Məsələ (2)-ni matris-vektor şəkilində yazaq. Bunun üçün resursların qiymətlərini sətir-vektoru şəklində göstərək: $Y = (y_1, ..., y_m)$.

(1) başlanğıc məsələsini də onun yanında yazsaq, ikili məsələnin simmetrik cütlüyünü alarıq:

$$
\begin{aligned}
&P(x) = C \cdot X \to \max, \qquad && S(Y) = Y \cdot B \to \min, \\
&AX \le B, && YB \ge c, \\
&X \ge 0 && Y \ge 0
\end{aligned} \qquad (3)
$$

Başlanğıc məsələdə olduğu kimi ikililiyi tərtib etməyi təkrarlayaq:

1) məqsəd funksiyasının ekstremumunun tipi dəyişir;
2) başlanğıc məsələnin hər bir məhdudiyyətinə ikili məsələnin bir dəyişəni qarşı qoyulur;
3) başlanğıc məsələnin sərbəst hədləri ikili məsələnin məqsəd funksiyasının dəyişənlərinin əmsalları olur;
4) məhdudiyyətlər sistemində hər bir əmsallar sütünü, ikili məsələnin məhdudiyyətlərini formalaşdırır, lakin bərabərsizliyin tipi dəyişir. Başlanğıc məsələnin məqsəd funksiyasının dəyişənlərinin əmsalları ikili məsələnin uyğun bərabərsizliklərinin sərbəst hədləri olurlar.

İkili məsələnin tərtibinin bu alqoritmi XP–nın (2) şəkilində yazılmış ikili məsələsi üçün də yararlıdır. Beləliklə, verilmiş XP–nın ikili məsələsinin tərtibi üçün bu məsələ maksimumu tapmaq üçündürsə, onda onu (1) şəkilində, əgər minimumu tapmaq üçündürsə, onda onu (2) şəkilinə gətirmək lazımdır, bundan sonra isə göstərilmiş alqoritmlə ikili məsələ qurulmalıdır.

Məsələn, verilmiş XP məsələsinin ikili məsələsini yazaq:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 \geq 3,$$
$$1 - x_1 + x_3 \leq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Bu məsələdə minimumu tapmaq tələb olunduğu üçün bütün bərabərsizlikləri $(\geq)$ şəkilinə gətirək. Onda XP məsələsinə ekvivalent məsələ alarıq:

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \min,$$
$$x_1 - x_2 \geq 3,$$
$$x_1 - x_3 \geq 1,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Bundan sonra ikili məsələni tərtib edək:

$$3y_1 + y_2 \to \max,$$
$$y_1 + y_3 \leq 10,$$
$$-y_1 \leq -3,$$
$$-y_2 \leq -2.$$

3. İkililik teoremləri. İkili məsələnin vektor-matris formasında simmetrik cütlüyünə baxaq:

$$P(X) = C \cdot X \to \max, \qquad S(Y) = Y \cdot B \to \min,$$
$$AX \le B, \qquad YB \ge C,$$
$$X \ge 0 \qquad Y \ge 0$$

Başlanğıc məsələnin mümkün çoxluğunu D ilə , ikili məsələnin mümkün çoxluğunu isə D^1-lə işarə edək.

İkililik nəzəriyyəsinin əsas bərabərsizliyi.

Başlanğıc məsələnin ixtiyarı mümkün X və ikili məsələnin ixtiyarı Y həlli üçün

$$P(X) \le S(Y) \tag{4}$$

İsbatı. Hər iki məsələdə dəyişənlər mənfi olmadığı üçün aşağıdakı bərabərsizliklər doğrudur:

$$P(X) = c \cdot X \le (YA) \cdot X = Y \cdot (AX) \le Y \cdot B = S(Y)$$

Əsas bərabərsizlikdən çıxan nəticə. Əgər ikili çütlük məsələlərinin birinin mümkün çoxluğu boş deyilsə, onda digər məsələnin məqsəd funksiyası öz mümkün çoxluğunda ekstremum istiqamətində məhduddur.

İsbatı. Tutaq ki, başlanğıc məsələnin mümkün çoxluğu boş deyil, yəni D-də hər hansı X^0 nöqtəsi var. Onda əsas bərabərsizliyə görə ikili məsələnin mümkün çoxluğunun ixtiyarı Y nöqtəsi üçün $S(Y) \ge P(X^0)$ olar.

Mümkün həllərin optimallıq kriteriyası.

Tutaq ki, X* və Y* başlanğıc və ikili məsələnin mümkün həlləridir. Bu həllərin optimal olması üçün zəruri və kafi şərt həmin məsələlərin məqsəd funksiyalarının qiymətlərinin bərabər olmasıdır.

İsbatı. Fərz edək ki, $P(X^*) = S(Y^*)$.

İsbatı edək ki, X* maksimum nöqtəsidir (Y*- un minimum nöqtəsi olması analoji qayda ilə isbat olunur). Tutaq ki, X başlanğıc məsələnin hər hansı mümkün nöqtəsidir. Onda əsas bərabərsizliyə görə $P(X) \le S(Y^*) = P(X^*)$. Bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

Kriteriyanın ikinci hissəsi aşağıdakı teoremlərin nəticəsidir:

İkililiyin 1-ci teoremi.

Əgər ikili məsələlərin birinin optimal həlli varsa, onda o biri məsələnin də optimal həlli var və məqsəd funksiyalarının ekstremal qiymətləri bərabərdir.

Bu teoremin isbatı çox mürəkkəbdir və bizə lazım deyil. Bu teorem başqa iki teoremlə birlikdə XP-nın ikililik nəzəriyyəsini təşkil edir.

İkililiyin 2-ci teoremi.

Başlanğıc X* və ikili Y* məsələlərinin mümkün həllərinin optimal olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı üç qrup münasibətlərin hər birinin yerinə yetirilməsidir (yaddan çıxarmayın ki, *x* – sütün vektorudur, *y* - isə sətir vektorudur):

1) $Y^*(B - AX^*) = 0$ və $(Y^* A - C)X^* = 0$;

2) $\sum_{i=1}^{m} y_i^* \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0$ və $\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* - c_j \right) x_j^* = 0$;

3) İxtiyari $i = 1,...,m$ üçün əgər $y_i^* > 0$ olarsa, onda ixtiyari $j = 1,...,n$ üçün $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$ olar, əgər $x_j^* > 0$ olarsa, onda $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_j$.

I qrup münasibətlərin zəruri və kafiliyini isbat edək.

Zərurilik. Tutaq ki, X* və Y*-optimal həllərdir. İkililiyin əsas bərabərsizliyinə əsasən alarıq: $C \cdot X^* \le Y^* \cdot B$.

$$C \cdot X^* \le (Y^* A) X^* = Y^* (AX^*) \le Y^* \cdot B$$

olduğundan ikililiyin birinci tereminə əsasən $CX^* \le Y^* B$ olar. Deməli bütün bərabərsizliklər həqiqətdə bərabərliklərdir: yəni $CX^* \le (Y^* A) X^* = Y^* (AX^*) \le Y^* B$ beləliklə alarıq ki, $Y^* (B - AX^*) = 0$ və $(Y^* A - C) X^* = 0$

Kafilik. Tutaq ki, $Y^*(B - AX^*) = 0$ və $(Y^*A - C)X^* = 0$. Onda $Y^*B = Y^*(AX^*)$ və $(Y^*A)X^* = CX^*$, $Y^* \cdot B = C \cdot X^*$

Optimallıq kriteriyasına əsasən deyə bilərik ki, *x** və *y** - optimal həllərdir.

II və III qrup münasibətlərin ekvivalentliyinin isbatı ilə kifayətlənək. Tutaq ki, II qrup münasibətlər ödənir. Yalnız sol münasibətlərə baxaq. $\sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* \right) = 0$ cəminin hər bir toplananı mənfi deyildir, deməli bütün cəmin sıfıra bərabər olmasından hər bir toplananın sıfıra bərabər olması çıxır. Bu isə o deməkdir ki, «ixtiyarı $i = 1,...,m$» üçün III qrup sol münasibətiləri ödəmir. Göstərə bilərik ki, III qrup münasibətləri yerinə yetirilməsindən alınır ki, II qrup münasibətlərin sol tərəfi sıfıra bərabərdir.

İkililiyin 3-cü teoremi.

Optimal planlaşdırma məsələsinə baxaq:

$$P(X) = C \cdot X \to \max,$$

$$AX \le B, \quad X \ge 0$$

Bu məsələni *B* məsələ adlandıraq. Tutaq ki, *B* – resurs ehtiyatları vektorunun konkret B^0– qiymətində $X^*(B^0) = (x_j^*)$ optimal planının hər iki tərəfi ciddi müsbətdir. B^0 – məsələsinin ikili məsələsinin optimal həllini $Y^*(B^*)$ ilə işarə edək. Onda elə $\varepsilon > 0$ var ki, $|B - B^0| < \varepsilon$ olduqda:

1) *B* optimal planlaşdırma məsələsi üçün buraxılan məhsulların çeşidi əvvəlki kimi qalır (miqdar etibarı ilə də-yişməsi mümkündür);

2) bundan əlavə, *B* məsələsinə ikili olan məsələnin optimal həlli dəyişməz qalır, yəni $y^*(B) = y^*(B^0)$;

3) *B* məsələsinin maksimal mənfəəti $P^*(B) = P^*(B^0) + \sum_{i=1}^{n} y_i^*(b_i - b_i^0)$ düstürü ilə ifadə olunur, burada $P^*(B^0)$ B^0 məsələsinin maksimal mənfəətidir.

Bu teoremin isbatı çox mürəkkəbdir və bizə lazım deyil.

4. İkililik nəzəriyyəsinin iqtisadi məzmunu. Bu nəzəriyyədə baxılan mərkəzi məsələ resursların qiyməti məsələsidir. Bu qiymətlər bazar qiymətləri deyil, istehsal müəssisəsinin yalnız daxili nöqteyi-nəzərindən texnoloji matris və mənfəətdə xüsusi gəlir ilə təyin olunan müəssisə strukturunda resurslardan səmərəli istifadə mənada başa düşülür. Qiymətləndirmə yalnız istehsalın bir tsiklində istifadə edilən resurslar üçün aparılır. Bu isə reallığı düzgün əks etdirməyən şərtilik, abstraktlıq elementidir. Buradan resursların qiymətləndirilməsinin əsas sualı meydana çıxır. Bu və ya digər resursun bir vahidinin əlavə olaraq istehsalata cəlb olunması nə qədər mənfəət verər? Konkret olaraq bu sual aşağıdakı deməkdir?

B resurs ehtiyatları vektoru ilə verilmiş optimal planlaşdırma məsələsinə baxaq. Maksimal mənfəəti tapaq. İkili *y** məsələsinin optimal həllini tapaq. Əvvəllər göstərdiyimiz kimi ikili məsələnin dəyişənlərinin optimal qiymətləri resursların ikili qiymətləri adlanır. Baxdığımız nöqteyi-nəzərdən məhz resursların ikili qiymətləri onların qiymət ölçüsüdür. İkililiyin 3-cü teoremi də bunu təsdiq edir. Doğrudan da teoremin şərtləri daxilində istehsalata sərf olunan əlavə bir vahid *i*-ci resursun maksimal mənfəəti onun ikili qiyməti qədər artırır. İkililiyin 3-cü teoremi başqa bir mühüm faktı da təsdiq edir. İstehsal olunan məhsulların çeşidinin istənilən dəyişikliyi istehsal üçün ağrılı keçir. Belə ki, yeni məhsul növü üçün alıcı tapmaq, artıq istehsaldan çıxarılmış məhsullar haqqında alıcılara izahat vermək, istehsalı yenidən qurmaq, dəzgahların bəzilərini dəyişmək, fəhlələri yenidən öyrətmək və s. Lakin ikililiyin 3-cü teoreminə görə müəyyən şərtlər daxilində ehtiyatları dəyişməklə, buraxılan məhsulların çeşidini dəyişməz saxlamaq olar və burada keyfiyyət deyil, yalnız müəyyən kəmiyyət dəyişikliyi ola bilər. İndi isə ikililiyin III teoreminin iqtisadi mənasına baxaq.

Bunun üçün ilkin (başlanğıc) optimal planlaşdırma məsələsinə baxaq.

Onun optimal planı $X^* = (x_j^*)$ və ikili məsələnin optimal planı $Y^* = (y_j^*)$ olsun. 3-cü qrup münasibətlərə nəzər salaq.

$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$ olarsa, onda j –cı texnologiyanı mənfəətsiz (faydasız) adlandıraq. Bu adın mənası aydındır, belə ki, bu texnologiya vasitəsilə bir vahid məhsul c_j qədər mənfəət verir, buna sərf olunan resursların qiyməti isə $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_i^*$ qədərdir, yəni mənfəətdən çoxdur.

Bu səbəbdən də 3-cü qrup münasibətlər birmənalı təsdiq edir ki, optimal planda bir dənə də olsun mənfəətsiz texnologiyadan istifadə olunmur. Digər tərəfdən 3-cü qrup «istənilən $i = 1,...,m$» munasibətlərinə əsasən demək olar ki, əgər resurslar optimal planda tam istifadə olunmamışdırsa, onda onun ikili qiyməti sıfıra bərabərdir. Resursların ikili qiyməti müsbət olduqda, bu istehsalatın zəif cəhəti adlanır. 3 -cü qrup münasibətlərə görə istehsalatın zəif cəhəti olan resurslar optimal planda tam şəkildə istifadə olunmalıdır. İkililik nəzəriyyəsinin əsas (4) bərabərsizliyini $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} y_i b_i$.

Bunu iqtisadi nöqteyi-nəzərdən şərh edək. Bu bərabərsizliyi aşağıdakı kimi şərh etmək olar: əgər biz satıcının arqumentləri ilə razıyıqsa, onda istehsal olunan bir vahid məhsula sərf olunan resursların qiyməti bir vahid məhsulun satışından əldə olunan mənfəətdən az olmamalıdır, eyni zamanda istehsalatın heç bir mümükün planı imkan verməməlidir ki, resurs ehtiyatlarının ümumi qiymətindən çox mənfəət əldə olunsun. İkililiyin 1-ci teoremi təsdiq edir ki, yalnız optimal plan resurslardan lazım olan mənfəəti təmin edə bilər.

MƏSƏLƏLƏR

1. XP məsələsinin ikililiyin 2-ci teoreminə görə həlli.

Tutaq ki, XP məsələsi verilmişdir:

$$4x_2 - 8x_3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 1,$$
$$2 + x_1 + x_3 \ge 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Bu məsələdə üç dəyişən olduğundan onu qrafik həll etmək olmaz. Bu məsələni ikililiyin 2-ci teoreminə əsasən həll etmək olar. Məsələnin ikili məsələsini quraq, bunun üçün bütün bərabərsizlikləri $(\le)$ şəklinə gətirək:

$$4x_2 - 8x_3 \to \max,$$
$$x_1 + x_2 \le 1, \qquad \left| y_1 \ge 0, \right.$$
$$-x_1 - x_3 \le 2, \qquad \left| y_2 \ge 0. \right.$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

İkili məsələni yazaq:

$$y_1 + 2y_2 \to \min,$$
$$y_1 - y_2 \ge 0,$$
$$y_1 \ge 4,$$
$$-y_2 \ge -8,$$
$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Bu məsələ ikidəyişənlidir. Onu qrafik üsulla həll edə bilərik.

Cavab: $y_1=4$, $y_2=0$

İndi isə başlanğıc məsələnin həllini ikililiyin 2-ci teoreminin köməyi ilə tapaq.

3-cü qrup münasibətləri belə şərh edək: əgər dəyişənlərin optimal qiymətləri sıfırdan ciddi böyükdürsə, onda ikili məsələnin üyğun məhdudiyyətləri onun optimal həllərinin komponentlərinə bərabərlik şəkilində daxil olar və tərsinə əgər məsələnin məhdudiyyətləri ciddi bərabərsizlik şəklindədirsə, onda ikili dəyişənin optimal qiyməti sıfıra bərabər olar.

İkili məsələnin II və III məhdudiyyətləri ciddi bərabərsizlik olduğundan, $x_1=0$, $x_3=0$ olar. $y_1>0$ olduğundan $x_1+x_2=1$ və deməli $x_2=1$ olar.

2. XP məsələsi üçün ikili məsələni qurun:

$$4x_1+3x_2-30x_3 \to \min,$$
$$x_1-6x_3 \geq 1,$$
$$2-x_2+5x_3 \leq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(1, 2, 0) və (4, 3) nöqtələrinin uyğun olaraq başlanğıc və ikili məsələlərin optimal həlləri olduğunu yoxlayın.

3. Verilmiş XP məsələsi üçün ikili məsələni qurun, onu həll edin və sonra ikililiyin II teoreminin köməyi ilə başlanğıc məsələnin həllini tapın:

$$12x_1 \to \max,$$
$$-x_1-2x_2+x_3 \geq 1,$$
$$2x_1-x_2+2x_3 \leq 4,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

4. Bank 3 ay müddətində 1 milyard rubl sərbəst resursa malikdir. Bu resurs istiqraz almağa sərafr olunsa 29%, banklararası bazara sərafr olunsa 17 %, valyuta alıb sonradan konvertasiya edilsə 14% gəlir gətirər. Maksimum faiz gəliri qazanmaq üçün məsələ tərtib edin, onun ikili məsələsini qurun.

Resursun ikili qiyməti necə olar?

5. Ağac emalı zavodunda (bax 1.2) transformatorlar haqqında məsələdə aşağıdakı suallara cavab verin: Hansı

resurs istehsalın «zəif yeridir»? Resursların ikili qiyməti necədir?

3.3. Leontev və Neyman modelləri

1. Leontev modeli. İlk olaraq sahələrarası balans modelinə və ya amerika iqtisadçısı Leontev (1906-1999) modelinə baxaq. Tutaq ki, xalq təsərrüfatının bütün istehsal sektoru *n* təmiz sahəyə bölünmüşdür. Təmiz sahə şərti anlayışdır – xalq təsərrüfatının az və ya çox dərəcədə bütöv hissəsidir, məsələn, energetika, maşınqayırma, kənd təsərrüfatı və s.

Tutaq ki, $\widetilde{a}_{ij}$ j - ci sahəyə sərf olunan *i*-ci sahənin məhsulunun miqdarıdır.

V_i - *i*-ci sahənin məhsulunun həcmidir, c_i- qeyri istehsal sferasında istehlak olunan *i*-ci sahənin məhsulunun istehlakıdır.

Aydındır ki,

$$c_i = V_i - \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}$$

$\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})$ matrisi özündə kifayət qədər çox informasiya ehtiva edir. Belə ki, onun *i*-ci sətri bütün xalq təsərrüfatında *i*-ci məhsulun istifadəsini xarakterizə edir, *j*-cu məhsulun isə *j*-ci sahəni xarakterizə edir: nə və hansı miqdarda istifadə olunur.

İndi isə ölçüsüz kəmiyyətlərə keçək. Tutaq ki, $a_{ij} = \widetilde{a}_{ij} / V_j$ bu *j*-ci məhsulun bir vahidinin hazırlanması üçün *i*-ci sahənin məhsul vahidinin miqdarıdır. a_{ij} - ədədləri *j*-ci sahənin birbaşa sərfiyyat əmsalları adlanır və bu sahənin texnologiyasını xarakterizə edir. c_i / V_i - ədədi isə qeyri istehsal sferasında istehlak olunan *i*-ci sahənin məhsulunun miqdarıdır.

Leontev modelinə baxmaq üçün iki vacib fərziyyəni qeyd edək.

Birinci fərziyyə ondan ibarətdir ki, istehsal texnologiyası dəyişməz qalır. Beləliklə, $A=(a_{ij})$ matrisi sabit qəbul olunur.

İkinci fərziyyə isə mövcud texnologiyanın xəttilik xassəsini qəbul edir, yəni *j*-ci sahənin *x* həcmdə məhsul istehsal etməsi üçün xa_{ij} miqdarda resurs tələb olunur. Bu tələbin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, hər bir sahə istənilən həcmdə öz məhsulunu istehsal edə bilər, bu şərtlə ki, zəruri miqdarda resurslarla təmin oluna bilsin. Əsl mənada isə bu belə deyildir, çünki hər bir sahənin istehsal imkanları əmək resursları ilə və əsas fondlarla məhduddur. Baxdığınız şəraitdə optimal planlaşdırma məsələsi ilə resursların optimal istifadə olunması arasında ümumi məsələlr çoxdur. Xüsusi halda, tutaq ki, $X=(x_j)$ - sahələrdə istehsal həcmi vektorudur, onda $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ - bu sahələrin istehlak etdiyi məhsulların həcmidir. Nəzərdə tutulur ki, istehsalatdan kənarda yalnız $C=X-AX$ qalır. Baxdığımız modeldə ən vacib məsələ Leontev modelinin məhsuldarlığıdır. Tutaq ki, qeyri-istehsal sferasının tələbatı *C* vektoru ilə ifadə olunur.

Bu şərti təmin edən istehsal vektoru varmı? Yəni aşağıdakı tənliyi ödəyən vektor varmı?

$$C=AX-X \tag{1}$$

Aydındır ki, iqtisadi mənasına görə bu vektor mənfi olmamalıdır.

Buna görə də deyirlər ki, Leontev modeli məhsuldardır bu şərtlə ki, $AX-X=C$ tənliyi istənilən $c\geq 0$ üçün mənfi olmayan həllə malik olsun.

Teorem. A **matrisli Leontev modeli yalnız və yalnız o halda məhsuldar olar ki, *(E-A)* - tərsi olan və mənfi olmayan matris olsun.**

İsbat etmək olar ki, Leontev modeli həm də o zaman məhsuldar olar ki, əgər o ciddi müsbət hər hansı istehlak vektorunu doğursun; buradan belə çıxır ki, həm də istənilən mənfi olmayan istehlak vektoru da yarana bilər. Leontev modelinin göstərdiyimiz bu məhsuldarlıq kriteriyası iqtisadi nöqteyi-nəzərdən əlverişli deyildir. Ona görə də başqa bir məhsuldarlıq kriteriyasına baxaq.

Tutaq ki, Leontev modeli *m x n* ölçülü *A* matrsi ilə verilib; $\{1,\ldots,n\}$ çoxluğunu *N* ilə işarə edək.

Fərz edək ki, $S \subset N$ əgər istənilən $j \in S$ və $i \in N/S$ üçün a_{ij} = 0 olarsa, onda deyirlər ki, *S* altçoxluğu izolə olunmuşdur. *S* altçoxluğunun izolə olunması anlayışının aydın iqtisadi izahı var: nömrəsi *S* – ə daxil olan sahə, nömrəsi *S* – ə daxil olmayan sahənin istehsal etdiyi məhsulu istifadə etmir.

Əgər matrisin N və ø - dan başqa izolə edilmiş altçoxluğu yoxdursa, onda *matris ayrılmaz* adlanır. Ayrılmazlıq məvhumunun aydın iqtisadi izahı var: istənilən sahə dolayı yolla olsa da bütün sahələrin məhsullarından istifadə edir. Əgər $a_{ij} \neq 0$ olarsa, onda *j*– ci sahə *i*–ci sahənin məhsulundan istifadə edir. Əgər $a_{ij} = 0$ olarsa belə, onda *j*–ci sahə *i*–ci sahənin məhsulundan birbaşa istifadə etməsə də matris ayrılmaz olduqda elə zəncir tapmaq olar ki, bütün sahələr bir-birinin məhsullundan istifadə edir. Ayrılmaz matrislər üçün məhsuldarlıq şərti belə olar: əgər hər sətrin elementlərinin cəmi vahiddən böyük deyilsə və heç olmasa bir sətir üçün vahiddən ciddi kiçikdirsə, onda – Leontev modeli belə matrislə məhsuldardır.

2. Leontev modelində Marksın əməyin dəyər nəzəriyyəsi. Əmək resurslarının istifadəsi və paylanması məsələləri çox vacibdir, belə ki, onların həlli ictimai istehsalın səmərəliliyini müəyyən edir. Leontev modelində bu məsələlər geniş şəkildə işıqlandırılır. Hər bir *j*–ci sahəyə $l_j > 0$ ədədi qarşı qoyaq. l_j - ədədi verilmiş vahid intensivli texnoloji prosesdə tələb olunan əmək resursları itkisini ifadə edir. Modelləşdirmə məqsədindən asılı olaraq l_j - ədədi $\left(j = 1, \cdots, n\right)$ adam-gün (adam-saat) və yaxud da işləyənlərin sayı ilə ölçülür. Tutaq ki, $L = (l_1, \cdots, l_n)$ - vahid intensivli texnoloji prosesdə əmək resursları vektorudur. Aydındır ki, $L > 0$, L vektorunu daxil etdikdən sonra Leontev modelini (A, L) cütlüyü ilə təsvir etmək olar. Əgər xalq təsər-rüfatının ümumi əmək resurlarının cəmi *T* olrsa, onda aşağıdakı ekstremal məsələni alarıq.

Tutaq ki, *C* vektoru qeyri-istehsal sahəsində axırıncı tələb deyil, yalnız onun mütənasibliyini ifadə edir. Ona görə də hesab edəcəyik ki, $|C| = 1$. Məhsul komplektinin sayı α olan və deməli bütün məhsulun həcmi αC olan, aşağıdakı optimal plana baxaq:

$$\begin{aligned} &\alpha \to \max, \\ &X - AX \geq \alpha C, \\ &L \cdot X \leq T, \\ &X, \alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Əgər *A* matrisi məhsuldardırsa, onda (2) məsələsi mümkündür, yəni onun mümükün həlləri çoxluğu boş deyil. Doğrudan da məhsuldarlıq şərtindən alınır ki, *X-AX=C* tənliyinin mənfi olmayan X^0 həlli var. *T >0* olduğundan, elə $\lambda > 0$ var ki, $L \cdot \lambda X^0 \leq T$ -dir. Deməli $\left(\lambda X^0, 1\right)$ vektoru (2) məsələsinin mümkün həllər çoxluğuna daxildir. Aydındır ki, *X* mümkün çoxluqda məhduddur, belə ki, hər bir $l_j > 0$ olduğundan *X* –in hər bir komponenti məhduddur. Buradan alınır ki, α məhduddur və XP–nin əsas teoreminə əsasən (bax bölmə 3.2.) (2) məsələsinin optimal həlli var. Digər tərəfdən α -nın maksimal qiyməti λ-dan kiçik deyildir, ona görə də α -nın bu maksimum qiyməti müsbətdir.

(2) məsələsi üçün ikili məsələni quraq:

$$\begin{aligned} &\alpha \to \max, \\ &\alpha C - (E-A)\cdot X \le 0, \\ &L\cdot X \le T, \\ &X,\alpha \ge 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &qT \to \min, \\ &P \ge 0,\ P\cdot C \ge 1, \\ &q \ge 0,\ qL - P\cdot (E-A) \ge 0, \\ &P,q \ge 0 \end{aligned}$$

və ya
$$\begin{aligned} &qT \to \min, \\ &P\cdot C \ge 1, \\ &qL - P\cdot (E-A), \\ &P,q \ge 0 \end{aligned}$$

burada *P* – vektor, *q* – isə ədəddir.

İkililik nəzəriyyəsinə əsasən *P* vektorunu və *q* ədədini uyğun olaraq əmtəələrin obyektiv qiyməti və əmək resurslarının qiyməti kimi şərh etmək olar. *A* matirisinin xassəsinə görə $(E-A)^1 > 0$ olar. Başlanğıc və ikili məsələnin optimal həllərini X^*, α^* və P^*, q^* ilə işarə edək. İsbat etmək olar ki, $C \ge 0$ və $C \ne 0$ olduqda $X^* = (E-A)^1\ C > 0$.

Artıq aydınlaşdırdıq ki, $\alpha^* > 0$. Onda ikililiyin 1-ci və 2-ci teoreminə əsasən (bax bölmə 3.2.) alarıq:

$$\begin{aligned} &P^*\cdot C^* = 1, \\ &q^* L = P^*(E-A) \end{aligned} \quad \text{və} \quad \begin{aligned} &\alpha^* = qT^* > 0 \\ &L\cdot X^* = T \end{aligned}$$

$p^* L = P^*(E-A)$ olduğundan taparıq ki, $P^* = q^* L(E-A)^{-1}$ *q**-u tapmaq üçün P* -un qiymətini *p*C=1* - bərabərliyində nəzərə alsaq, onda $q^* L(E-A)^{-1} C = 1$, yəni $q^* = 1/\left(L(E-A)^{-1}C\right)$. Sonra *P**-u tapa bilərik: $P^* = L(E-A)^{-1}/\left(L(E-A)^{-1}C\right)$ (bu kəsri ixtisar etmək olmaz!).

Alınmış həllərin iqtisadi mənası necədir? *P*C=1* olduğundan bir komplektin dəyəri (qiyməti) vahidə bərabərdir, deməli, α^* əmtəə komplektinin qiymətidir. Digər tərəfdən q^*T, T vahid əməyin hər birinə q^* olmaqla ödə-nilən ümumi əmək haqqıdır. Beləliklə, $\alpha^* = q^*T$ bərabərliyi tələb və təklifin dəyər ifadəsində bərabərliyini göstərir. Yəni buraxılan son məhsul həcminin qiyməti, istehsal prosesində iştirak edən insanların əmək haqqı kimi aldıqları pulun ümumi cəminə bərabərdir. Qeyd edək ki, α vektorunun j – ci komponenti l_j - j–ci sahənin bir vahid məhsulunun istehsalına sərf olunan əmək məsrəfidir.

Bu məhsulu istehsal etmək üçün əvvəlcə hər bir i – ci məhsulun a_{ij} vahid məhsulunu və s. buraxmaq lazımdır. Nəticədə alarıq ki, $L(E-A)^{-1}$ vektoru hər bir sahədə vahid məhsul istehsalı üçün əmək sərfi vektorudur. İndi yada salaq ki, $P^* = L(E-A)^{-1} / \left(L(E-A)^{-1}C\right)$ yəni qiymətlər əmək sərfləri ilə mütənasibdir.

Bu nəticə bir çox görkəmli iqtisadçıların nəzər - diqqətini cəlb etməkdədir, belə ki, Marksın əmək dəyəri nəzəriyyəsi ilə bu nəticə çox oxşardır. Marksın adı çəkilən nəzəriyyəsinə görə əmtəənin dəyərinin əsasında bu əmtəənin istehsalında iştirak edən zəruri əməyin ümumi miqdarı durur.

3. Neyman modeli. Ümumi Neyman modelinə baxaq. *(C, K)* cütlüyü ilə təsvir olunan iqtisadiyyata baxaq, burada *C* əmtəələr fəzası, *K* isə müəyyən miqdar əmtə-ələrin başqa miqdar həmin əmtəələri emal edən istehsal proseslərinin çoxluğudur. Burada əmtəə dedikdə həm istehsalın ilk faktorları (torpaq, əmək) və xammal (neft, kömür), həm də istehsalın son məhsulları, xidmət və s. nəzərdə tutulur.

Tutaq ki, əmtəələrin sayı n – dir, onda *C*- n ölçülü fəzanın mənfi olmayan ortantıdır. İstehsal proseslərinin çoxluğu *K* öz əsasında sonlu sayda $(Q_1,\ldots,Q_m)$ pro-seslərindən ibarətdir ki, bunlara da bazislər deyilir. Hər bir bazis prosesi *C* – dən olan bir cüt vektordan $Q_j=(A_j, B_j)$

ibarətdir (burada A_j və B_j–sütun vektorlarıdır, sadəlik üçün onları sətir kimi yazacağıq).

Q_j prosesinin mahiyyəti belədir: o, $A_j=(a_{ij})$ vektoru sərf edir və $B_j=(b_{ij})$ vektorunu buraxır, yəni A_j vektorunu B_j vektoruna emal edir. Mənalarına görə bütün A_j, B_j vektorları mənfi deyildir. $A=(A_1,\ldots,A_m)$, $B=(B_1,\ldots,B_m)$ işarələrini qəbul edərək alarıq ki, qurduğumuz modelin texnologiyası mənfi olmayan *A,B* matrislər cütlüyü ilə verilir. *A* martisi sərfiyyat matrisi, *B* matrisi isə *buraxılış matrisi* adlanır. Bazis proseslərinin kombinasiya edərək yeni proseslsr almaq olar. Mənfi olmayan z_i, $i=1,\ldots,m$ ədədini götürək və yeni istehsal prosesi təyin edək:

$z_1Q_1+\ldots+z_mQ_m$, - burada sərfiyyat vektoru $\sum_{k=1}^{m} z_k A_k$

buraxılış vektoru isə $\sum_{k=1}^{m} z_k B_k$ olar; alınmış istehsal prosesini qısa olaraq (Az, Bz) kimi işarə edək. $Z=(z_i)$ sütün vektoru intensivlik vektoru adlanır. Alınan prosesin daha geniş çoxluğunu K ilə işarə edək.

Qeyd etmək lazımdır ki, $Q_1,\ldots,Q_m$ bazis prosesləri real sahələrə, zavodlara, fabriklərə uyğun olduqda, hər bir $(X,Y)\in K$ elementi bu sahələrin, zavod, fabriklərin birlikdə iş rejimi prosesini ifadə edir. Burada X sərfiyyat vektoru, Y – isə buraxılış vektorudur. Əvvəl baxdığımız Leontev modeli $n=m$, $B=E$ olduqda Neyman modelinin xüsusi halıdır. Neyman modelinin əsas bazis prosesi birdən çox sayda məhsul buraxa bilər. Aydındır ki, Neyman modeli həm də xəttidir.

MƏSƏLƏLƏR

1. Leontev modelinə aid standart məsələ həll edək. Qeyri istehsal istehlak vektoru $C=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ və sahələrarsı ba-

lans matrisi $A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ verilmişdir. Verilmiş istehsal vektorunu təmin edən ümumi məhsul vektorunu tapın.

Həlli. Məlumdur ki, $X=(E-A)^{-1}C$. Ona görə də $(E-A)$ matrisinin tərsini tapmaq lazımdır. Bunun üçün istənilən üsuldan istifadə etmək olar, məsələn minorların köməyi ilə (bax bölmə 1.3.)

$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 9/5 & 2/5 \\ 6/5 & 8/5 \end{pmatrix}$ və deməli, $X=\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

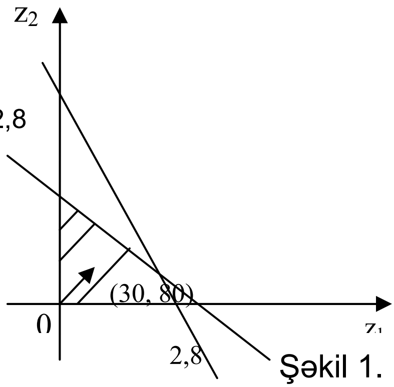
2. Neyman modelinə aid standart məsələ həll edək. Texnoloji proseslərin matrisləri $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ verilmişdir, qiymət vektoru $P=(1,5)$ və başlanğıc ehtiyatlar vektoru $S=\begin{pmatrix} 14 \\ 28 \end{pmatrix}$. Bir istehsalat tsiklində buraxılan məhsulların dəyərini maksimallaşdıran texnoloji proseslərin intensivliyini tapaq.

Həlli. Tutaq ki, $Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ - axtarılan intensivliyin sütün vektorudur, onda aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini alarıq:

$$\begin{array}{l} PBZ \to \max, \\ AZ \le S \end{array} \quad \text{və ya} \quad \begin{array}{l} 30z_1 + 80z_2 \to \max, \\ 5z_1 + 2z_2 \le 14, \\ 4z_1 + 10z_2 \le 28, \\ z_1, z_2 \ge 0 \end{array}$$

Bu məsələni qrafik üsulla həll edək (şəkil 1). Maksimum nöqtəsi (0; 2,8) və bir tsikldə buraxılan məhsulun maksimal dəyəri 224-ə bərabərdir.

3. Aşağıdakı matrislərin hansının ayrılmaz olduğunu tapın:



Şəkil 1.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 4/5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Ayrılmaz matrislərin məhsildarlıq kriteriyasına əsasən (bax bənd 1, bölmə3.1.) yüxarıdakı matrislərin hansının məhsuldar olduğunu tapın. Verilmiş kriteriyanın iqtisadi məzmununu izah edin.

4. Məhsuldar Leontev modeli üçün bir neçə matris yazın.

Göstəriş. Ayrılmaz matrislərin məhsuldarlıq kriteriiyasından istifadə edin.

5. Tutaq ki, Leontev modeli $\begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ matrisi ilə verilib. Onun məhsuldar olduğunu yoxlayın. Tutaq ki, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ümumi buraxılışdır. Qeyri – istehsal, istehlak vektoru necə olar?

6. Texnoloji proseslərin matrisləri verilmişdir: $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ Neyman modelində qiymətlər vektoru *P=(3, 5)*. Texnoloji proseslərin $z_1=2$, $z_2=3$ intensivliyində tələb olunan ehtiyatlar və buraxılan məhsulun miqdarı necə olar.

Mövzu 4.
ARDICILLIQLAR VƏ FUNKSİYA, LİMİTLƏR VƏ KƏSİLMƏZLİK

4.1. Ardıcıllıqlar

1. Çoxluqlar nəzəriyyəsinn elementləri. 1872–ci ildə çoxluqlar nəzəriyyəsinin yaradıcısı alman alimi K.Kantor çoxluğu «bizim intuisiyamız və fikirlərimizdə yaxşı fərqlənən obyektlərin vahid tam şəkildə birləşməsi» kimi təyin etdi. Çoxluqlara misallar: müəyyən auditoriyada olan tələbələr çoxluğu, bütün tam ədədlər çoxluğu və s.

Çoxluq elementlərdən ibarətdir. Elementləri bəzən nöqtələr də adlandırırlar (məsələn, ədəd oxunun nöqtələri). Əgər a elementi *A* çoxluğunun elementidirsə, onda deyirlər ki, a daxildir *A*-ya və belə yazırlar $a \in A$. Əgər a elementi A çoxluğunun elementi deyildirsə, onda a *A*-ya daxil deyildir və belə yazırlar $a \notin A$. Bəzən A çoxluğunu vermək üçün onun elementlərini sayırlar, məsələn $B=\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

İki çoxluq o zaman bərabər adlanır ki, onlar eyni elementlərdən ibarət olsunlar. Əgər A çoxluğu B çoxluğunun bir həssəsidirsə, onda onu B çoxluğunun alt çoxluğu adlandırırlar və $A \subseteq B$ kimi yazırlar. ø simvolu boş çoxluğun, yəni heç bir elementi olmayan çoxluğun işarəsidir.

Ox işarəsi məntiqi nəticənin işarəsidir. $\leftrightarrow$ işarəsi isə məntiqi ekvivanetliyin işərəsidir. Məsələn, $A \subset B$ və $B \subset C \to A \subset C$; $A \subset B$ və $B \subset A \leftrightarrow A = B$.

$\{x, P(x)\}$ yazılışı $P(x)$ - in xassələrinə malik olan bütün *x* – lər çoxluğudur.

A və B çoxluqlarının birləşməsi $\{x : x \in A$ və ya $x \in B\}$ çoxluğuna deyilir və $A \cup B$ kimi işarə edilir; kəsişməsi isə $\{x : x \in A$ və $x \in B\}$ çoxluğuna deyilir və $A \cap B$ kimi işarə edilir.

Sonralar müxtəlif həqiqi ədədlər çoxluğundan istifadə edəcəyik. Onları sadalayaq:

1) Natural ədədlər çoxluğu $N = \{1, 2, \cdots\}$;

2) Tam ədədlər çoxluğu $Z = \{\cdots, -1, 0, 1, \cdots\}$;

3)Rasional ədədlər çoxluğu $Q = \{n/m;\, n, m \in Z,\, m \neq 0\}$ (Bütün bu çoxluqlar həqiqi ədədlər çoxluğunun alt çoxluqlarıdır);

4) $[a,\ b]$ parçası, $[a, b] = \{x \in R:\ a \le x \le b\}$; interval $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$;

5) a nöqtəsini özündə saxlayan istənilən interval a nöqtəsinin ətrafı adlanır.

∞ (sonsuzluq) simvolundan bəzi işarələr üçün istifadə etmək əlverişlidir. Məsələn, 0 - dan böyük həqiqi ədədlər çoxluğu $[0, \infty)$ kimi işarə edilir və s.

Çoxluğun elementlərini saymaq olarsa, yəni natural ədədlərlə nömrələmək olarsa, onda çoxluq hesabı adlanır. Əks halda çoxluq hesabı olmayan adlanır. Yuxarıdakı çoxluqlardan *N, Z,* Q hesabı, $[a,\ b]$ parçası, (a, b) intervalı isə qeyri $a \neq b$ olarsa hesabi deyildır. Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu da hesabi deyildır (bu çoxluqların hesabi olmadığını isbat etmək lazımdır).

2. Ardıcıllıq. Natural ədədlər çoxluğunda verilmiş $x_n = f(n)$ funksiyasına ardıcıllıq deyilir və $\{x_1, x_2, \cdots\}$ şəklində işarə olunur. Ardıcıllığa misal olaraq ədədi silsiləni $a_n = a_1 + d(n-1)$ və $b_n = b_1 q^{n-1}$ həndəsi silsiləni göstərmək olar. Bəzən ardıcıllığı (x_n) kimi işarə edirlər. Bütün $n \in N$ üçün elə $M(m)$ ədədi tapmaq mümkun olarsa ki, $x_n \le M(x_n \ge m)$ olsun, onda (x_n) ardıcıllığı yuxarıdan (aşağıdan) məhdud ardıcıllıq adlanır.

Yüxarıdan və aşağıdan məhdud olan ardıcıllığa sadəcə olaraq məhdud ardıcıllıq deyilir.

Məsələn, $x_n = 3/n$ ardıcıllığı məhduddur. Doğrudan da aşağıdan bu ardıcıllıq sıfırla, yüxarıdan isə 3 ədədi ilə məhduddur; $x_n = n \sin n$ ardıcıllığı yüxarıdan məhdud deyil (bunu isbat etmək sadə deyil).

$x_n < x_{n+1}$ $(x_n \le x_{n+1})$ (x_n) ardıcıllığı artan (azalmayan) adlanır, $x_n > x_{n+1}$ $(x_n \ge x_{n+1})$ olarsa, (x_n) azalan (artmayan) ardıcıllıq adlanır. (x_n) azalmayandırsa və ya artmayandırsa, onda ona monoton ardıcıllıq deyilir. Ardacıllığa aid ən yaxşı misal banka qoyulmuş artan pul məbləğidir. Banka pul qoyulduqda bank bu puldan (müəyyən mənada) istifadə etmək imkanı əldə edir. Əlverişli xidmət üçün pul ödəmək lazımdır. Bank bu puldan istifadə üçün müştəriyə faiz ödəyir.

Misal 1. Banka $p\%$ - lə *S* rubl pul qoyulur. *t* vaxtından sonra faizlərlə bərabər müştəri $S_t = S(1 + pt/100)$ miqdarda pul alır. Beləliklə yığılmış pul məbləği ilə vaxt arasında xətti asılılıq var. Bəzən faiz ödənişi bir neçə ildən sonra aparılır. Bu halda yığılmış məbləğ başlanğıc həddi *S*, hədlər fərqi $(S \cdot p/100)$ olan ədədi silsilə olar.

Misal 2. Tutaq ki, mürəkkəb faiz ödənilir. *t* müddətdən sonra alınan məbləğ $S_t = (1 + pt/100)^t$ olar. Deməli yığılmış məbləğlə *t* müddəti arasındakı asılılıq üstlü funksiyadır. Əgər yığılmış məbləğ bir neçə ildən sonra ödənilərsə, onda bu məbləğ başlanğıc həddi *S,* ortaq vuruğu $(1 + p/100)$ olan həndəsi silsilədir.

Hər iki halda *S* yığım cəm (məbləğ) adlanır.

Müddətsiz istiqrazın bazar dəyərini tapaq. Bu istiqraz üçün ödəniş aparılmır, hər il talon gəliri verilir. Əgər 1000 dollar nominalında olan istiqraza 3% talon gəliri verilirsə onda bir ildə istiqraz sahibi 30 dollar gəlir əldə edir. Tutaq ki, inflyasiya tempi 2%-dir. Onda istiqrazın bazar dəyəri birinci həddi 30 və ortaq vuruğu 1/(1+2/100) olan həndəsi silsilənin cəmini bərabər olar. Nəticədə 1530 dollar alarıq ki, bu da istiqrazın bazar qiyməti olar.

Bu mühakimələrdə inflyasiya nəzərə alınmamışdır. Əgər bir dəst əmtəə bir ildən sonra $r\%$ bahalaşarsa, onda deyirlər ki, bir ildə inflyasiya $r\%$ -ə bərabərdir. Başqa sözlə desək pul məbləğinin real dəyəri bir ildə (1+$r\%$) dəfə azalır, *n* – ildən sonra isə $(1+r/100)^n$ dəfə azalır.

Tutaq ki, bir ildə faiz norması - P%, inflyasiya isə – $r\%$ -dir. Onda bir ildən sonra *S* məbləği P% artır, lakin bu məbləğin alıcılıq qabiliyyti (1+r/100) dəfə azalar, deməli onun real dəyəri:

$$S(1+p/100)/(1+r/100) = S(100+p)/(100+r) \text{ olar.}$$

Buradan sadə nəticə alınar – pul məbləğinin real

dəyəri: $\begin{cases} p > r \\ p = r \\ p < r \end{cases}$, $\begin{matrix} \text{olduqda, artır,} \\ \text{olduqda, dəyişməz qalır,} \\ \text{olduqda, azalır} \end{matrix}$

Əlbətdə, bu qiymət təxminidir. Konkret şəraitdə həm alıcı, həm də satıcı çox faktorları nəzərə alır, buraya elementar şəxsi faktorlardan başlayaraq dövlət institutlarının stabilliyinə qədər çox faktorlar daxildir. İstiqrazların və aksiyaların bazar qiymətini myəyyənləşdirmək ümumi halda nəzəri əhəmiyyət kəsb edir. Praktikada isə başqa cür hərəkət edirlər: tutaq ki, faiz dərəcəsi *P*, illik talon ödənişi *q*, istiqrazan nominalı *A*, onun bazar qiyməti *l* – dir. Onda $qA = pl$ və $l = qA/p$ taparıq.

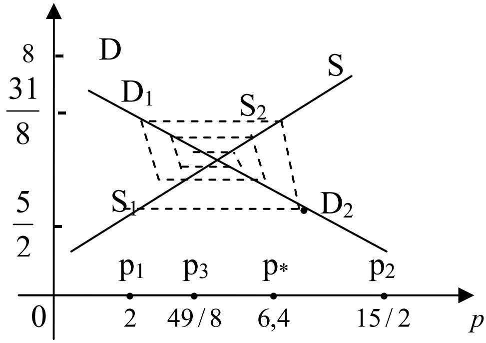
3. Ardıcıllığın limiti və sıranın cəmi. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \in N$ tapmaq mümkündürsə, ixtiyari $n > K$ üçün $|x_n - A| < \varepsilon$ olsun, onda A ədədi ardıcıllığının limiti adlanır və belə işarə olunur: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = A$. Məsələn, $x_n = \dfrac{1}{n}$ ardıcıllığının limiti 0-a bərabərdir. Doğrudan da istənilən $\varepsilon > 0$ qeyd edək. Tutaq ki, $K \in N$ elədir ki, $k > 1/\varepsilon$. Asanlıqla görmək olar ki, $\left|{}^{1}\!/_{n} - 0\right| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ixtiyari $n > K$ üçün ödənilir.

Həndəsi silsilənin cəmi, sonsuz ədədi sırala aid çox tez-tez rast gəlinən misaldır. Tutaq ki, (a_n) hər hansı ədədi ardıcıllıqdır. Bu ardıcıllığın ilk *n* sayda hədlərinin cəminə baxaq: $S_n = a_1 + \cdots + a_n$. Əgər bu ardıcıllığın limiti olarsa, onda bu limitə $a_1 + \cdots + a_n + \cdots$ ardıcıllığın cəmi deyilir. Əgər limit yoxdursa, onda sıra dağılan adlanır (əgər limit $+\infty$ və ya $-\infty$ olarsa, onda deyirlər ki, sıra sonsuzluğa dağılır). Məsələn, $0 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \cdots$ sırasının cəmi vahidə bərabərdir. Doğrudan da bu sıranın ilk *n* həddinin cəmi $S_n = 1 - 1/2^n$. Deməli, $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/2^n) = 1$. Bu isə tərifə əsasən baxdığımız sıranın cəmidir. Bir çox mühüm hallarda ardıcıllığın limitinin varlığını aşağıdakı teoremin köməyi ilə müəyyənləşdirirlər.

Teorem 1. **Tutaq ki, (x_n) ardıcıllığı monoton azalmır (və yaxud artmır). Əgər bu ardıcıllıq yuxarıdan (aşağıdan) məhdud olarsa, onda onun sonlu limiti var; əks halda ardıcıllıq $+\infty(-\infty)$ - a yaxınlaşır.**

4. Bazarın hörümçək toruna bənzər modeli. Bu bir əmtəədən ibarət sadə bazar modelidir. Alıcılar tərəfindən *p* qiymətindən asılı olaraq əmtəəyə tələb funksiyasın $D(p)$ ilə işarə edək, $S(p)$ - isə satıcılar tərəfindən yenə əmtəənin qiymətindən asılı olaraq təklif funksiyasıdır. Söhbət yalnız bir əmtəədən ibarət bazardan getdiyi üçün tarazlıq şəraitində $D(p)= =S(p)$ olar.

Reallıqda bu tənliyin yeganə p^* həlli olar və elə üçlük (p^*, D^*, S^*) var ki, $D^* = D(p^*), S^* = S(p^*)$ tarazlıq şəraiti yaradar. Bu tarazlıq şəraitinin axtarılması prosesi «yoxlayıb aşkar etmək» adlanır. *D, S*



Şəkil 1.

Bu modelin xüsusi halına baxaq, yəni tutaq ki, tələb və təklif funksiyaları xətti funksiyalardır. Fərz edək ki, məsələn, tələb funksiyası $D=0–P$ (şəkil 1), təklif funksiyası isə *S*=2+p/4 şəklindədir. Tələb funksiyasına tərs olan funksiya *P*=10-*D* olar. Bu funksiya qiymətlə tələbin asılılığını verir. Qiymətlə təklifin asılılığını isə *S* funksiyasının tərsi, yəni p= $4S$ - 8 verir.

Tarazlıq qiyməti p=6,4 olar. Tarazlıq qiymətinin «yoxluğunun aşkar edilməsini» izləyək. Tutaq ki, ilk qiymət p_i =2 - dir. Bu qiymətdə tələb təklifdən çox olduğundan, yəni $D_1=8 > S_1= 5/2$, onda qiymət p_2 –ə qədər artar, belə ki, $S_1=D_2$ olana qədər. Satıcılar $S_2= 31/8$, yəni D_2 - dən çox təklif edirlər. Bu isə qiymətin p_3=49/8-ə qədər düşməsinə səbəb olur və s. Hesablamalar çox tez mürəkkəbləşirsə də keyfiyyət aydındır – tarazlıq nöqtəsinin «aşkarlanması» prosesi gedir.

5. Leontev modelində birbaşa və tam məsrəflər. Leontev modelinə 1-ci bəndin 3.3.bölməsində baxmışdıq. Yada salaq ki, bu model A matrisi – birbaşa məsrəflər matrisi ilə verilir. Bu matrisdə a_{ij} j - ci sahənin bir vahid məhsulunu istehsal etmək üçün sərf olunan *i* – ci sahənin vahid məhsulunun miqdarıdır. a_{ij} ədədi j –ci sahənin birbaşa sərf əmsalları adlanır və bu sahənin texnologiyasını xarakterizə edir. Tutaq ki, $X = (x_j)$ ümumi məhsul vektordur, onda *AX* istehsal prosesində sərf olunan resursdur və qeyri – istehsal sferası üçün qalır $C = X - AX$. Lakin C istehsalı üçün sərf olunan resurs AC olmalıdır. Onların istehsalı üçün isə $A(AC) = A^2C$ resurs tələb olunur, onların da istehsalı üçün $A(A^2C) = A^3C$ və C resurs lazımdır. Beləliklə, tam məsrəf sonsuz $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot C$ sırasının cəminə bərabər olar. Bu sıranın hədrləri sonlu ölçülü sütun vektorları olduğundan bu sıranın cəmi $A^n \cdot C$ vektorunun 1-ci, 2-ci və s. komponentlərinin vektor cəmi kimi tapılır. Lakin isbat etmək olar ki, əgər $\sum_{n=0}^{\infty} A^n \cdot C$ sırasının cəmi varsa, onda onu

$$(E - A)^{-1}C \qquad (1)$$

hasili kimi hesablamaq olar.

Sonsuz azalan həndəsi sisilənin cəmi düsturu ilə analogiyaya diqqət edin:

$b + bq + bq^2 + \cdots + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} bq^n = b/(1-q)$. Bu düstur yalnız və yalnız $|q| < 1$ olduqda doğrudur. Belə bir oxşarlıq (1) düsturu üçün də var.

Onda λ ədədi A matrisinin məxsusi ədədi adlanır, əgər sıfırdan fərqli elə *y* vektoru tapmaq mümkün olsa ki, $AY = \lambda Y$ olsun. Belə vektora məxsusi ədədə uyğun *məxsusi vektor* deyilir. (Qeyd edək ki, λ - ya görə Y vektoru birqiymətli təyin olunmur, bu vektora mütənasib olan, istənilən vektor da verilmiş λ məxsusi ədədinə uyğun məxsusi vektor olar).

Aşağıdakı müddəanı isbat etmək olar:

A matrisi Leontev modeli yalnız və yalnız o zaman məhsuldar olar ki, matrisin $\lambda_A < 1$ şərtini ödəyən məxsusi ədədi olsun, həm də bu məxsusi ədəd mütləq qiymətcə bütün məxsusi ədədlərdən böyük olsun. Əgər matrisin belə ədədi olarsa, onda isbat etmək olar ki, $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ və (1) düsturu doğrudur.

Misal 3. $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$ matrisinin məxsusi ədədini və məxsusi vektorlarını tapaq. Tərifə əsasən Y vektoru və λ məxsusi ədədi $AY = \lambda Y$, və ya $(A - \lambda E)Y = 0$ tənliyini ödəməlidirlər. Onda aşağıdakı bircins tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} \left(1/2 - \lambda\right)y_1 + (1/3)y_2 = 0 \\ (1/6)y_1 + (1/3 - \lambda)y_2 = 0 \end{cases}$$

Bu cəbri tənliklər sisteminin sıfırdan fərqli həllinin olması üçün onun determinantı sıfra bərabər olmalıdır:

$$\left(1/2 - \lambda\right)\left(1/3 - \lambda\right) - \left(1/3\right)\cdot\left(1/6\right) = 0$$

Bu tənliyi həll edərək iki məxsusi ədəd tapırıq: $\lambda_1 = 1/6$ və $\lambda_2 = 2/3$. Sonra hər bir məxsusi ədədə uyğun məxsusi vektoru tapırıq: $y_1 = (1, -1)$, $y_2 = (2, 1)$

MƏSƏLƏLƏR

1. Tutaq ki, iki əmtəə fəzasında qiymət vektoru $P_n = \left(2 - \frac{1}{n},\ 4 - \frac{1}{n}\right)$ qanunu ilə dəyişir. $X = (5,\ 10)$ əmtəə dəstinin dəyərinin dəyişmə qanunu tapın. Sabit 60 gəliri ilə qiymətdən asılı olaraq büdcə çoxluğunun necə dəyişməsini təsvir edin.

Həlli: Əmtəə dəstinin dəyəri $C_n = P_n \cdot X = (2 - 1/n)5 + (4 - 1/n)10 = 50 - 15/n$ qanunu ilə dəyişir. Büdcə çoxluğunun sağ kənar nöqtəsi $a_n = 60(2 - 1/n) = 60n/(2n-1)$ olar və bu nöqtə 30-a yaxınlaşır, ən yüksək kənar nöqtə $b_n = 60/(4 - 1/n)$ isə 15-ə yaxınlaşır. Büdcə çoxluğunun necə dəyişməsi aydın olur.

2. Aşağıdakılar hesabi çoxluqdurmu:

a) bütün tam cüt ədədlər çoxluğu;

b) $m + n\sqrt{3}$, m, n - tam ədədlərdir şəkilli bütün ədədlər çoxluğu;

c) məxrəci 3 olan bütün düzgün kəsrlər?

3. Göstərin ki, $x_n = n^2 + 12n + 120$ ardıcıllığı artandır; $y_n = (7-n)/n$ azalandır; $z_n = n^2 - 30n + 200$ monoton deyildir.

4. Aşağıdakı ardıcıllıqların hansının məhdud olduğunu və hansının məhdud olmadığını göstərin:

$$a)\ x_n = (n+60)/n; \qquad b)\ y_n = (n^2-40)/n;$$

$$c)\ z_n = 2n^2/(4+n); \qquad q)\ v_n = n\cos n.$$

5. İsbat edin ki, iki və hətta sonlu sayda məhdud ardıcıllığın cəmi, fərqi və hasili də məhdud ardıcıllıqdır.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2^n - 1/3^n\right)$ sırasının cəmini tapın.

7. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ limitini tapın.

8. A^n ardıcıllığının limitini tapın, burada $A=\begin{pmatrix}1/2 & 0\\ 1 & 1/2\end{pmatrix}$ göstərin. A-nı 2-ci, 3-cü qüvvətə yüksəldin. Onda başa düşərsiniz ki, axtarılan limit nəyə bərabərdir?

9. 50 dollarlıq nominalı olan istiqrazın bazar qiymətini tapın; illik infilyasiya 2% və kuponun faizi 4 % olduğunu nəzərə alın.

10. Büdcə çoxluğunun gəlirin $Q_n = 40 + 1/n$ dəyişməsindən asılı olaraq və dəyişməz (2,5) qiymətləri ilə necə dəyişdiyini təsvir edin.

11. $D = 10 - 2p$ tələb funksiyası və $S = 4 + p$ təklif funksiya ilə, başlanğıc qiymət 1 olan bazarın hörümçək toruna bənzər modelinə baxın.

12. İsbat edin ki, rublun kursunun azalması idxalçılara, kursun artırılması isə ixracçılara əlverişlidir. İnflyasiya şəraitində rublun sabit kursu kimə əlverişlidir (idxalçılara yoxsa ixracçılara)?

4.2. Funksiya

1. Funksiyanın ümumi anlayışı. Tutaq ki, X və Y çoxluqları verilmişdir. Fərz edək ki, hər hansı f üsulu ilə hər bir $x \in X$ elementinə qarşı bir $y = f(x) \in Y$ elementi qarşı qoyulur. Onda belə f uyğunluğu təyin oblastı $D(f) = X$, dəyişmə oblastı $R(f) \subseteq Y$ olan funksiya adlanır. Burada x asılı olmayan dəyişən və yaxud funksiyanın arqumenti, $y = f(x)$ isə funksiyanın qiyməti və yaxud asılı dəyişən adlanır. Məsələn, $y=\sqrt{x-1}$ funksiyasının təyin oblastı $[1,\infty)$ və qiymətlər oblastı $R(Y)=[0,\infty)$ - dur.

$\{(x,\ f(x)):\ x\in D(f)\}$ cütlər çoxluğu f funksiyasının qrafiki adlanır.

Tutaq ki, $y=f(x)$ - funksiya, $D(f)$ və $R(f)$ - onun uyğun olaraq təyin oblastı və qiymətlər oblastıdır. İxtiyari $y\in D(f)$ üçün hər hansı elə $x\in D(f)$ seçək ki, $f(x)=y$ olsun. Onda g: $y\to x$ funksiyası: f funksiyasının tərsi adlanır, hər iki funksiya isə qarşılıqlı tərs funksiyalar adlanırlar. Məsələn: loqariflik $y=\ln x$ funksiyası ilə $x=e^{y}$ üstlü funksiya qarşılıqlı tərs funksiyalardlır.

Ən çox yayılmış funksiyalar həm təyin oblastı və həm də qiymətlər oblastı ədədlər olan ədədi funksiyalardır. Belə funksiyaların qrafiki koordinat müstəvisində hər hansı nöqtələr çoxluğudur.

Funksiyaları analitik üsulla, cədvəllərin köməyi ilə, qrafiklərin köməyi ilə və hər hansı alqoritmin köməyi ilə (məsələn, kompüter proqramları ilə) vermək olar. Funksiya analitik üsulla verildikdə dəyişənlər arasındakı asılılıq düstur və təyin edilir. Məsələn, $y=x^{2}$ düsturü təyin oblastı $(-\infty,\ +\infty)$ olan funksiyanı verir.

Funksiya cədvəl üsulu ilə verildikdə arqumentin və ona uyğun funksiyanın qiymətləri müəyyən cədvəl şəkilində verilir. Məsələn, yaxşı məlum olan triqonometrik funksiyaların cədvəli, loqarifmlər cədvəlləri və başqaları.

Funksiya qrafik üsulla verildikdə dəyişənlər arasında asılılıq qrafikin köməyi ilə təsvir olunur. Məsələn, muzeylərdə zamandan asılı olaraq temperaturun və rütubətin dəyişməsini təsvir edən özüyazan cihaz. Hazırda banklarda faiz dərəcələrini kompüterdə hesablayırlar, qeyd edək ki, bu alqoritm çox mürəkkəbdir və onu hər hansı düstura gətirmək asan deyildir.

2. İqtisadiyyatda istifadə olunan bəzi funksional asılılıqlar. Birinci iki funksiyaya baxmışdır (bax bənd 4, bölmə 4.1.). Şəkil 1. *a, b* – də bu funksiyaların təxmini qrafikləri verilmişdir, yəni tələb funksiyası – *D* tələbin hər hansı əmtəənin *p* qiymətindən asılılığı; təklif funksiyası – *S* təklifinin əmtəənin *p* qiymətindən asılılığı. Həm də aşağıdakı funksiyalara baxılır: faydalılıq funksiyası (şəkil 1.v)

– hər hansı şəxs üçün *x* miqdarda, *u* faydalılığa malik əmtəənin həmin şəxs tərəfindən subyektiv ədədi qiymətləndirilməsi;

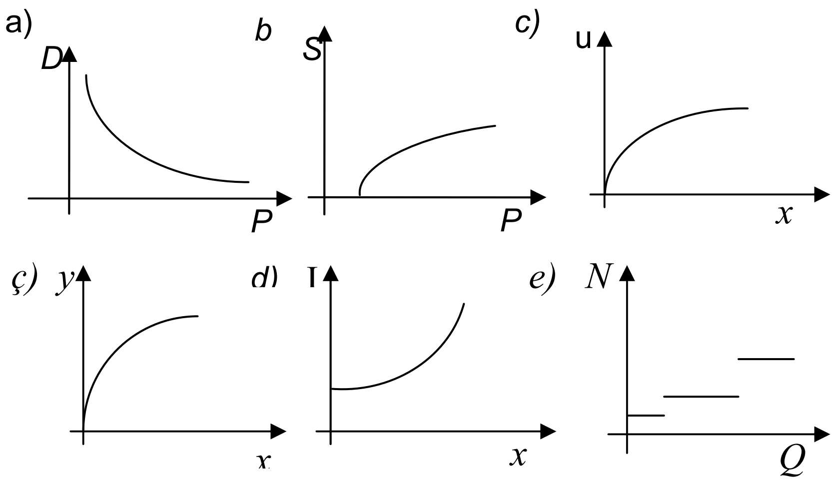
Bir faktorlu istehsal funksiyası (şəkil 1.q)

– istehsal olunmuş məhsulun *y* həcmi ilə x resursu arasındakı asılılıq; xərclər (məsrəflər) funksiyası (şəkil 1,d)

– *x* vahid məhsulun istehsalı ilə ı istehsal xərci arasındakı asılılıq.

Vergi tarifi (şəkil1,e)

– *N* vergi tarifi ilə illik Q gəliri arasında asılılıq.



Şəkil 1.

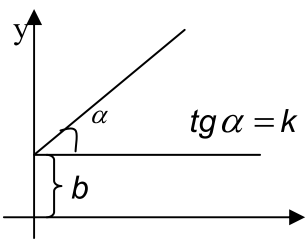
Axırıncıdan başqa bütün bu funksiyaları analitik ifadə etmək çox çətindir. Zərurət oluqda onları böyük zəhmət hesabına tapmaq olur. Axırıncı funksiya isə bütün cəmiyyətə yaxşı məlumdur və qanunvericilikdə təsdiq edilmişdir.

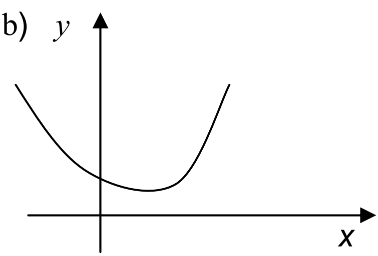
Hazırda vergi tarifi aşağıdakı kimidir: əgər Q - 30 min rubl olarsa, onda 12% vergi verilir; əgər Q-30 min-rubl olarsa, onda Q-30 min rubldan əlavə 15% tutulur: Q- 60 min rubldan isə əlavə 20% tutulur və s.

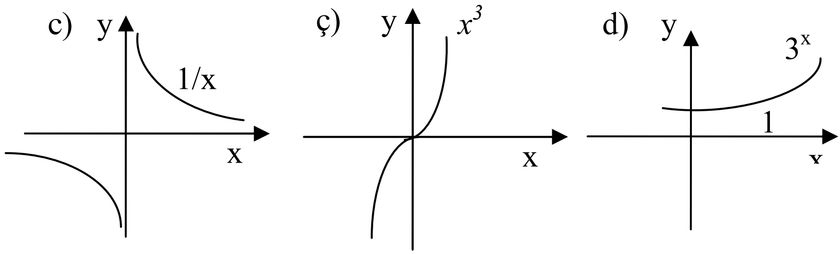
3. Elementar funksiyalar. Sabit, qüvvət, üstlü, loqariflik, triqonometrik və tərs triqonometrik funksiyalar əsas elementar funksiyalar adlanırlar. Əsas elementar funksiyalardan sonlu sayda hesab əməllərinin köməyi ilə alınan funksiyalar elementar funksiyalar sinifini təşkil edirlər. Yerdə qalan bütün funksiyalar qeyri-elementar funksiyalar adlanırlar. Qeyri-elementar funksiyalar içərisində çox sadə, məsələn «işarə (siqnum)» funksiyası da var:

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & x < 0 \quad olduqda, \\ 0 & x = 0 \quad olduqda, \\ 1 & x > 0 \quad olduqda. \end{cases}$$

Əsas elementar funksiyaları yada salaq. Xətti funksiya - $y = kx + b$ (şəkil 2,a). Bu funksiyanın qrafiki bucaq əmsalı *k* olan, ordinat oxundan b qədər parça ayıran düz xəttdir. Xətti funksiyanın xüsusi halı $y = kx$-dir. Onun qrafiki kooridnat başlanğıcından keçən düz xəttdir.

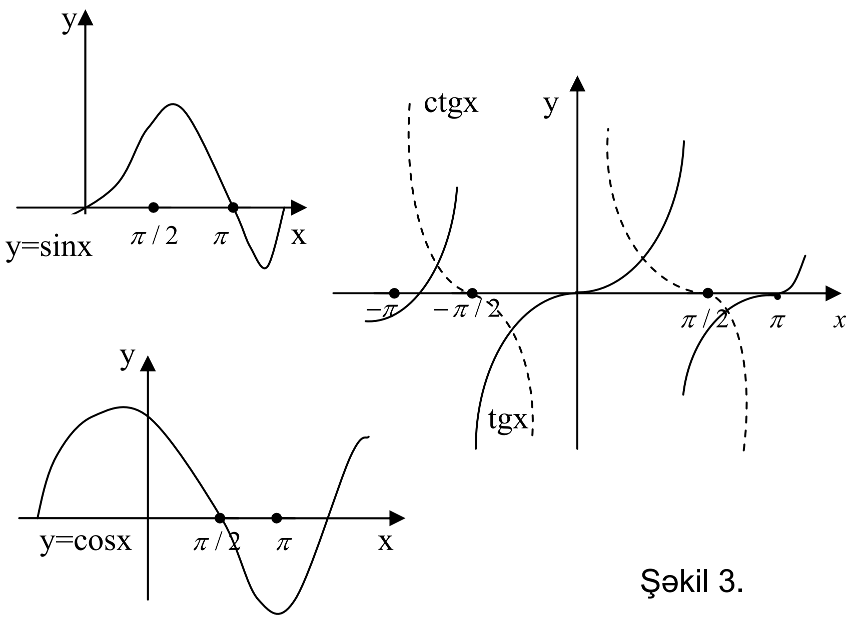
a) 

b) 



Şəkil 2.

Şəkildə həmçinin aşağıdakı funksiyaların qrafikləri verilmişdir: kvadratik funksiya $y = ax^2 + bx + c$ (şəkil 2, b) qrafiki paraboladır; tərs mütənasib asılılıq $y = a/x$ (şəkil 2,c) qrafiki hiperboladır; qüvvət funksiyası $y = x^n,\ \ n \in Z$ (şəkil 2,q) üstlü funksiya $y = a^x,\ a > 0$ (şəkil 2,d). Şəkil 3-də triqonometrik funksiyaların qrafikləri verilmişdir.



Şəkil 3.

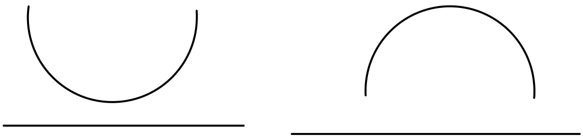
4. Birdəyişənli funksiyanın xassələri. Əgər ixtiyari $x \in D(Y)$ üçün $y(x) = y(-x)$ $\left(y(x) = -y(x)\right)$ olarsa, onda təyin oblastı 0–a nəzərən simmetrik olan $y = y(x)$ funksiyası cüt (tək) funksiya adlanır. Cüt funksiyanın qrafiki ordinat oxuna nəzərən, tək funksiyanın qrafiki isə kooridnat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir. Məsələn, $y = x^2$ funksiyası cüt, $y = x^3$ isə tək funksiyadır. Elə T>0 ədədi tapmaq üçün mümkün olsa ki, $y(x+T) = y(x)$ bərabərliyi ixtiyari $x \in D(Y)$ doğru olsun, onda $y(x)$ funksiyası dövri funksiüya adlanır. *T* – ədədlərindən ən kiçiyi funksiyanın dövrü adlanır. Məlumdur ki, triqonometrik funksiyalar dövri funksiyasıdır.

Əgər $x_1 < x_2$ oduqda $y_1 < y_2$ $(y_1 > y_2)$ olarsa, onda $y(x)$ funksiyası *X* çoxluğunda artan (azalan) funksiya adlanır. Məsələn, əmtəənin təklif funksiyası onun qiymətindən asılı artan funksiyadır, əmtəənin tələb funksiyası isə onun qiymətindən asılı azalan funksiyadır. Faydalılıq funksiyası isə əmtəə miqdarının artan funksiyasıdır.

Əgər $x_1 \le x_2$ olduqda, $x_1, x_2 \in X$, $y_1 \le y_2$ $(y_1 \ge y_2)$ olarsa, onda $y(x)$ funksiyası *X* çoxluğunda *azalmayan (artmayan) funksiya* adlanır. Məsələn, vergi funksiyası illik gəlirin azalmayan funksiyasıdır, belə vergi tarifi mütərəqqi adlanır. Artan, azalan, azalmayan, artmayan funksiyalar monoton funksiyalar adlanırlar.

Əgər elə *M(m)* varsa ki, ixtiyari $x \in X$ üçün $y(x) \le M\left(y(x) \ge m\right)$ olsun, onda *X* çoxluğunda $y(x)$ funksiyası *yuxarıdan (aşağıdan) məhdud funksiya* adlanır. Həm yuxarıdan və həm də aşağıdan məhdud olan funksiyalar *məhdud funksiyalar* adlanır. Məsələn, *sinx* və *cosx* funksiyaları bütün ədəd oxunda məhdud funksiyalardır.

$Y(x)$ funksiyasının qrafiki *X* qabarıq çoxluğunda *qabarıq (çökük)* adlanır (şəkil 4)



qabarıq *çökük*

Şəkil 4.

Yəni ixtiyari $a,\ b \in X$ və istənilən $0 \le \lambda \le 1$ üçün

$$y(\lambda a + (1-\lambda)b) \le \lambda y(a) + (1-\lambda)y(b)$$
$$\left(y(\lambda a + (1-\lambda)b) \ge \lambda y(a) + (1-\lambda)y(b)\right)$$

doğru olarsa.

Məsələn, istehsal (birfaktorlu) funksiyası çökük, təklif funksiyası isə qabarıqdır.

MƏSƏLƏLƏR

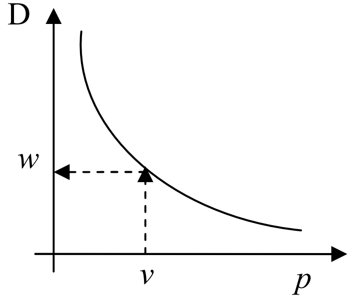
1. Aşağıdakı funksiyaların təyin oblastını və dəyişmə oblastını tapın:

$a)\ y = \sqrt{2-x}$; $\quad b)\ y = 3/(x^2 - 3x + 2)$; $\quad v)\ y = 1/\sin x$; $\quad q)\ y = \sqrt{\ln x}$

Cavab. Təyin oblastları:
$a) (-\infty, 2)$; $b)\ x \ne 1, 2$; $v)\ x \ne \pi k,\ k \in Z$; $q)\ [1, \infty)$

2. Tutaq ki, $D = D(p)$ əmtəəyə təklif funksiyasıdır, təklifdən asılı olaraq bu funksiyanın tərsi olan qiymət funksiyasını tapın. Bu funksiyanı təklif funksiyasının qrafikinə görə necə tapıldığını izah edin.

Həlli: Tutaq ki, şəkil 5-də təklif funksiyasının qrafiki təsvir olunmuşdur. Məlum olduğu kimi bu funksiya azalandır. Bu funksiyanın tərsi olan $p = p(D)$ funksiyasını qrafikə görə belə tapma lazımdır. *p (D)* funksiyasının təyin oblastı *D (p)* funksiyasının qiymətlər çoxluğudur. Hər bir $\vartheta \in R(D)$ üçün *D (p)* funksiyasının qrafikini kəsənə qədər düz xətt qaldıraq, sonra kəsişmə nöqtəsindən sol tərəfə ordinat oxu ilə kəsişənə qədər qorizontal düz xətt keçirək. Alınan *w* nöqtəsi tərs funksiyanın V-yə uyğun qiyməti olar.



Şəkil 5.

3. $f(x)$ funksiyası öz qrafikinin bir neçə nöqtəsi ilə verilib:(0,0), (2,4), (4,-4), (6,2). Qonşu nöqtələrlə onun qrafiki bu nöqtələri birləşdirən düz xətt parçasıdır. Bu funksiyanı təsvir edin.

Göstəriş. $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ nöqtələrindən keçən düz xətt tənliyindən istifadə edin (bax bölmə 2.1., punkt 1).

Cavab: $$y = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 2 \quad olduqda, \\ 12 - 4x & 2 \le x \le 4 \quad olduqda, \\ -16 + 3x & 4 \le x \le 6 \quad olduqda \end{cases}$$

Funksiyanın xətti interpolyasiya ideyası məhz bundan ibarətdir – funksiyanı iki nöqtəsi arasında bu nöqtələrdən keçən xətti funksiya ilə əvəz etmək.

4. Əsas elementar funksiyaların qrafiklərini yada salın. Aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini təqribi qurun:

$a)\ y = -1 + 2x$; $b)\ y = x^2 - 8x + 7$;

$v)\ y = \sin 2x;\ g)\ y = \ln(x-5);\ d)\ y = 2^x;\ e)\ y = \sqrt{x^2 - 1}$

5. Aşağıdakı kompüter proqramına baxaq:
giriş x;

$i = 1$ üçün 3 qədər hazırlamaq
$x = 2x + 1;$

$y = x^2 + 4$

çıxış y;

Şübhəsiz ki, verilmiş x üçün kompüterun verdiyi y ədədi hər hansı funksiya ilə həyata keçirilir. Bu funksiyanı düstur vasitəsilə ifadə edə bilərsinizmi?

6. $y = x^2 - 1$ funksiyası cütdürmü?, $y = \sqrt{x}$ funksiyası monotondurmu?, $y = x^2 - 4$ funksiyası qabarıqdırmı?, $y = \sin(2x + 1)$ funksiyası dövrüdürmü?

7. Tutaq ki, $S = s(p)$ əmtəənin təklif funksiyasıdır. Onun tərs funksiyasını – təklifdən asılı olaraq qiyməti müəyyən edən funksiyanı tapın.Təklif funksiyasının qrafikinə görə bu tərs funksiyanın necə tapılmasını şərh edin.

8. Mənasına görə istehsal funksiyası artan olmalıdır. Bu funksiyanın tərsinin mənası necədir?

9. Tutaq ki, $W = W(Q)$ illik Q gəlirindən verilən verginin miqdarıdır. Bu funksiyanın tərsini şərh edin. Mütərəqqi vergi olduqda onun qrafiki təqribən necə olar?

10. Gəlir vergisinin faiz dərəcəsi funksiyası təqribən belə təyin olunur. O –dan Q_1 – ə qədər gəlirdən $p_1\%$, sonra Q_1 qədər gəlirdən $p_2\%$ və s.
Müxtəlif intervallarda bu funksiyanı düsturlarla verin.

11. $y(-2) = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 5$ olduqda kvadratik $y = ax^2 + bx + c$ funksiyasını tapın.

Qeyd. Funksiyanı başlanğıc funksiyanın qrafikinin üç verilmiş nöqtəsindən keçən kvadratik funksiya ilə əvəzlənməsi, başlanğıc funksiyanın kvadratik interpolyasiyası adlanır.

12. Tutaq ki, funksiya aşağıdakı şəkildə verilib:

$$y(x)=\begin{cases}0 & -\infty\le x\le 0,\\ 2x & 0\le x\le 2,\\ 4 & 2\le x\end{cases}$$

Bu funksiya qabarıqdırmı, çökükdürmü?

13. Aşağıdakı funksiyalardan hansı öz təyin oblastında məhduddur:

$$a)\, y=\ln(2x/(x+1))\ ;\ b)\, y=\ln(\sin x);\ \ v)\, y=\sqrt{2^x}\ ;$$

ç) Tornkvis funksiyası – «zəriri əşyalara» tələb funksiyası, «zənginlik əşyaları» funksiyası:

$$y=ax/(x+b)\ ;$$

$$y=ax(x-c)/(x+b)$$

burada a, b, c qiymətlərdən asılıdır, x isə gəlirdir.

14. Tutaq ki, *M* – pulun ümumi məbləği, *V* – onların dövriyyəsidir (bir ildə hər bir rubl, dollar neçə dəfə hesablamalarda iştirak edib), *Y*–milli məhsul və ya gəlirdir, *p* isə qiymətlərin səviyyəsidir. Bütün bu kəmiyyətləri əlaqələndirərək, pul dövriyyəsinin tənliyini alarıq – klassik pul nəzəriyyəsinin əsas tənliyi. Bu tənlik *Fişer tənliyi* adlanır: $M={PV}/{V}$.

Təhlil edin: bu kəmiyyətlərin bəziləri, digərləri dəyişmədikdə necə dəyişir; məsələn, pul kütləsinin miqdarı dəyişdikdə qiymət səviyyəsi necə dəyişər?

4.3. Funksiyanın limiti

1. Funksiyanın limitinin tərifi. Əgər $\varepsilon>0$ ədədinə qarşı elə $\delta>0$ ədədi tapmaq mümkün olsa ki, $0<|x-a|<\delta$ olduqda, $|f(x)-A|<\varepsilon$ olsun, onda A ədədi x a - ya yaxınlaşdıqda $(x \to a)$ $f(x)$ funksiyasının limiti adlanır. Bu belə yazılır: $A = \lim_{x \to a} f(x)$.

Qeyd etmək lazımdır ki, tərifdə funksiyanın limit nöqtəsində təyin olunması tələb olunmur, lakin funksiya limit nöqtəsinin hər hansı ətrafında təyin olmalıdır (limit nöqtəsi istisna olmaq şərtilə).

Əgər $x \to a$ və $x < a$ olarsa, onda yazırlar ki, $x \to a - 0$; əgər $x \to a$ və $x > a$ olarsa, onda yazırlar ki, $x \to a + 0$. Uyğun limitlərə funksiyanın a nöqtəsində sol və sağ limitləri deyilir. Bu təriflərdə nəzərdə tutulur ki, funksiya a nöqtəsinin sol və sağ tərəfindəki hər hansı intervalda təyin olunub. Funksiyanın ikitərəfli $(x \to a)$ limitinin olması üçün zəruri və kafi şərt hər iki birtərəfli limitin olması və onların üst-üstə düşməsidir. Ayrıca aydınlaşdıraq ki, $x \to \infty$ $f(x)$ funksiyasının limiti nədir. Əgər ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \in N$ tapmaq mümkün olsa ki, $x > K$ olduqda $|f(x) - A| < \varepsilon$ olsun, onda $A = \lim_{x \to \infty} f(x)$. Analoji olaraq $x \to -\infty$ - da funksiyanın limitinə tərif verilir.

Təəssüflər olsun ki, limitin belə forma tərifi alimlərin əsrlərlə və hətta minilliklərlə axtarışlarının - özlərinin limitə keçmək üçün intuitiv təsəvvürlərinin dəqiq formalaşdırmaq arzularını itirir.

Funksiyanın limiti müəyyən mənada ardıcıllığın limitinə gətirilə bilər. Tutaq ki, $x \to a - 0$; $f(x)$ funksiyası a limit nöqtəsinin sol tərəfində olan hər hansı intervalda təyin olunmuşdur. Onda (x_n) ardıcıllığını sonsuz sayda üsullarla elə təyin etmək olar ki, onların sol limiti x olsun. O zaman: əgər $\lim_{x \to a-0} f(x) = A$ olarsa, onda soldan a-ya yaxınlaşan ixtiyari (x_n) ardıcıllığının limiti A-ya bərabər olar. Bunun tərsi də doğrudur–əgər soldan a-ya yaxınlaşan ixtiyari (x_n)

ardıcıllığı üçün $f(x_n)$ ardıcıllığı da eyni bir A limitinə yaxınlaşarsa, onda $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$ olar.

2. Sonsuz kiçik və sonsuz böyük funksiyalar.

$x\to a$ (və yaxud $x\to a-0$ və yaxud $x\to a+0$, və yaxud $x\to\infty$, və ya $x\to-\infty$) olduqda $\lim f(x)=0$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası sonsuz kiçik adlanır.

$x\to a$ (və yaxud $x\to a-0$ və yaxud $x\to a+0$, və yaxud $x\to\infty$, və ya $x\to-\infty$) olduqda $\lim|f(x)|=\infty$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası sonsuz böyük adlanır.

Məsələn, $y=1/x$ funksiyası $x\to 0$ olduqda sonsuz böyükdür, belə ki, $\lim\limits_{x\to 0}|1/x|=\infty$, $x\to\infty$ olduqda isə sonsuz kiçikdir, ona görə ki, $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=0$.

Sonsuz kiçik funksiyaların xassələrinə baxaq:

1) əgər eyni şərtlər daxilində $f(x)$ və $g(x)$ - sonsuz kiçilən funksiyalardırsa, onda həmin şərtlər daxilində $f(x)\pm g(x)$ - də sonsuz azalan funksiyalar olar.

2) əgər hər hansı şərtlərlə $f(x)$ sonsuz kiçik funksiyadırsa və $g(x)$ - bu şərtlərin ödəndiyi *X* çoxluğunda məhdud funksiyadırsa, onda onların $f(x)\cdot g(x)$ hasili də həmin sonsuz azalan funksiya olar.

3) əgər $f(x)$ və $g(x)$ eyni şərtlər daxilində sonsuz kiçik funksiyalardırsa, onda onların hasili $f(x)\cdot g(x)$-də həmin şərtlər daxilində sonsuz kiçik funksiya olar.

4) əgər $f(x)$-sonsuz kiçik funksiyadırsa, onda $1/f(x)$-sonsuz böyük funksiya; əgər $g(x)$ sonsuz böyük funksiyadırsa, onda $1/g(x)$- sonsuz kiçik funksiya olar.

Sonsuz kiçik funksiyaların müqayisəsi

Tutaq ki, $f(x)$ və $g(x)$ - hər hansı şərtlər daxilində sonsuz kiçilən funksiyalardır və tutaq ki, $\lim(f(x)\cdot g(x))=h$ var. Onda:

1) $h=1$ olduqda f və g ekvivalent sonsuz kiçik funksiyalar adlanır və belə yazılır: $f\sim g$;

2) əgər $0<|h|<\infty$ olarsa, onda f və g eyni tərtili sonsuz kiçik funksiyalar adlanır və belə yazılır: $f=O(g)$ və ya $g=O(f)$

3) əgər $h=0$ olarsa, onda f funksiyası g-yə nəzərən yüksək tərtibli sonsuz kiçik funksiya adlanır və belə yazılır: $f=O(g)$;

4) əgər $|h|=\infty$ olarsa, onda g funksiyası f- ə nəzərən yüksək tərtibli sonsuz kiçik funksiya adlanır və belə yazılır: $g=O(f)$

3.Limitlərin əsas xassələri. *Lemma.* Əgər $\lim f(x)=A$ olarsa, onda $f(x)=A+\alpha$ olar, burada α sonsuz kiçik funksiyadır.

Tərs lemma. Əgər $f(x)=A+\alpha$ olarsa, burada α - sonsuz kiçik funksiyadır, A - isə sabitdir, onda $\lim f(x)=A$ olar.

Limitlərin aşağıdakı xassələri var:

1) əgər c sabit funksiya olarsa, onda $\lim c=c$ olar.

2) əgər hər hansı şərtlər daxilində $\lim f(x)$ və $\lim g(x)$ varsa, onda $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$ olar, qeyd edək ki, bu xassə istənilə sonlu sayda funksiyalar üçün doğrudur;

3) əgər $\lim f(x)$ və $\lim g(x)$ varsa, onda $\lim\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim f(x)\right)\left(\lim g(x)\right)$ (eyni şərtlər daxilində); qeyd edək ki, bu xassə istənilən sonlu sayda funkssiyalar üçün doğrudur; xüsusi halda $\lim f^{n}(x)=\left(\lim f(x)\right)^{n}$ düsturu doğrudur;

4) əgər $\lim f(x)$ və $\lim g(x)\neq 0$ varsa, onda $\lim\left(f(x)/g(x)\right)= \quad =\left(\lim f(x)\right)/\left(\lim g(x)\right)$ (eyni şərtlər daxilində);

5) əgər $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ olarsa, və $\lim f(x)$, $\lim g(x)$, $\lim h(x)$ varsa, onda $\lim f(x)\leq \lim g(x)\leq \lim h(x)$ olar.

Nəticə. Əgər $f(x)\leq g(x)$ olarsa, $\lim f(x)$, $\lim g(x)$ varsa, onda $\lim f(x)\leq \lim g(x)$ olar.

Misal göstərək ki, funksiyanın müəyyən nöqtədə limiti yoxdur.

Misal 1. $y=\sin 1/x$ funksiyasına baxaq, bu funksiya (0, 1) - də təyin olunub. $x_n = 1/(\pi n)$, $n\in N$ ardıcıllığına baxaq; aydındır ki, $y(x_n)$ olar. İndi $z_n = 1/(\pi/2+\pi n)$, $n\in N$ ardıcıllığına baxaq. Aydındır ki, $y(z_n)=1$ olar. Buradan çıxır ki, baxdığımız funksiyanın $x\to 0$ olduqda limiti yoxdur. Qeyd edək ki, limit nöqtəsi funksiyanın təyin oblastına daxil deyildir. Bir çox hallarda limitin varlığını aşağıdakı teoremin köməyi ilə müəyyən etmək olur.

Teorem. **Tutaq ki, $x\to a-0$ funksiya monoton azalmayandır (və ya artmayandır). Əgər bununla bərabər funksiya yuxarıdan (aşağıdan) məhduddursa, onda $x\to a-0$ olduqda funksiyanın sonlu limiti var, əks halda funksiya $\infty(-\infty)$-a yaxınlaşır.**

4. Birinci və ikinci görkəmli limitlər. $x\to 0$ - da $\lim\left(\sin x/x\right)$ limitinə baxaq. İsbat etmək olar ki, bu limit vahidə bərabərdir. Bu limit birinci görkəmli limit adlanır.Bu limitin əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, bu limitin başqa çox sayda limitlərin tapılmasına imkan yaradır. Xüsusi halda alırıq ki, *x* və $\sin x$ $x \to 0$ olduqda ekvivalent sonsuz kiçik kəmiyyətlərdir. Beləliklə, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$

Misal 2. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$ - limitini tapaq.

$\cos = 1 - 2\sin^2(x/2)$ olduğundan alarıq ki, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1 - 2\lim\limits_{x\leftarrow 0}\sin^2(x/2) = 1$

$x \to \infty$- da $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)x$ limitinə baxaq. İsbat etmək olar ki, bu limit var. Onu xüsusi *e* ədədi ilə işarə edirlər. Bu ədəd təqribi olaraq 2.71-ə bərabərdər. Bu limit ikinci görkəmli limit adlanır. Bu limitin də əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, onun köməyi ilə bir çox digər limitləri tapmaq olur.

Məsələn, $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$ belə ki, aydındır ki, $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 1/x)^x$

MƏSƏLƏLƏR

1. $\lim\limits_{x\to a}\sin x$ - limiti tapın.

Həlli. Bilirik ki, $\sin(a + z) = \sin a \cdot \cos z + \sin z \cdot \cos a$

Birinci görkəmli limitdən istifadə edərək isbat etmək olar ki, $\lim\limits_{z\to 0}\cos z = 1$,$\lim\limits_{z\to 0}\sin z = 0$. Bunları nəzərə alsaq alarıq ki, $\sin\limits_{x\to a} x = \sin a \cdot \lim\limits_{z\to 0}\cos z + \cos a \cdot \lim\limits_{z\to 0}\sin z = \sin a$

Nəticə: İstənilən a nöqtəsində $\lim \sin x$ limiti $\sin x$ funksiyasının limit nöqtəsindəki qiymətinə bərabərdir.

2. Aşağıdakı limitləri tapın:

$a)\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x/x)$; $b)\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$; $v)\lim\limits_{x\to\infty}((x+a)/(x-a))^x$

Həlli. Birinci iki limiti hesablamaq üçün birinci görkəmli limitdən istifadə edək.

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x/x)=\lim\limits_{x\to 0}(5\sin 5x/(5x))=5\lim\limits_{y\to 0}(\sin y/y)=5$;

$b)\ \lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin^2 x/2\right)/x^2=$

$=2/4\lim\limits_{x\to 0}(\sin x/2)/(x/2)^2=1/2$

«ϑ» limitini tapmaq üçün ikinci görkəmli limitdən istifadə edək:

$$((x+a)/(x-a))^x=((1+2a)/(x-a))^x=((1+2a)/(x-a))^{\left((x-a)/(2a)+1/2\right)^{2a}}$$

Buradan alarıq ki, $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+1/z\right)^{\left(1+1/z\right)^{2a}}=e^{2a}$

3. İsbat edin ki, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ - yoxdur.

4. İsbat edin ki, təyin oblastının istənilən nöqtəsində:

$a)\ \lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; $b)\ \lim\limits_{x\to a}tgx=tga$; $v)\ \lim\limits_{x\to a}x^n=a^n$;

$q)\ \lim\limits_{x\to a}e^x=e^x$; $d)\ \lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$

Göstəriş. «a» halında $\cos(x+a)=\cos x\cdot\cos a-\sin x\cdot\sin a$ düsturundan, qalan hallarda isə uyğun düsturlardan istifadə edin.

5. Limitlərin xassələrinə əsasən aşağıdakı limitlərin varlığını göstərin:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty}(x+1)/x$; $b)\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(2x^2x+1/x^2\right)$; $v)\ \lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\cos x)^{x\to\infty}$;

$q)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\cos x}\right)$; $d)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{x}\right)$.

6. Rusiyada maliyyə piramidalarının çiçəkləndiyi dövrdə (1993-1994) «Tibet» konserninin qəbul məntəqəsində 3 aylıq 100% dərəcəsi ilə pul qəbulu haqqında elan asılmışdır. (Qeyd edək ki, 100% ödəmə illik deyil, yalnız 3 aylıq müddətə aparılır, yəni 3 ay müddətində verilən pulun iki dəfə artımına söz verilirdi). Az müddətə isə ödəniləcək pulun məbləği uyğun olaraq azalır, yəni 1,5 aya-50%, 3 həftəyə – 25 % və s. Buradan alınır ki, əgər pulu 3 həftəyə qoyub, vaxt tamam olanda pulu götürüb yenidən qoysan və s., onda 3 aya qoyulmuş pul $(1+0,25)^4 \approx 2,44$ dəfə artır. Əgər pulun qoyulub götürülməsini hər həftə aparılsa, onda 3 aya pulun məbləği $(1+0,0875)^{12} \approx 2,71$ dəfə artır. 3 aya pul artımının maksimal artma əmsalı necə olar?

4.4. Funksiyanın kəsilməzliyi

Reallıqda belə hallar olur: şəraiti xarakterizə edən parametrlər az dəyişdikdə, şəraitin özü də az dəyişir. Burada əsas şəraitin dəyişməsi deyil, onun az dəyişməsidir.

1. Funksiyanın kəsilməzliyinin tərifi. Kəsilmə nöqtələri.

$y = f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunubsa və $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsilməz adlanır. Əgər $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$ olarsa, onda $f(x)$ funksiyası a nöqtəsində soldan (sağdan) kəsilməz adlanır. Qeyd edək ki, burada nəzərdə tutulur ki, funksiya a nöqtəsinin müəyyən sol(sağ) ətrafında təyin olunmuşdur. Həm də qeyd edək ki, funksiyanın nöqtədə kəsilməzliyi, həmin nöqtəyə soldan və sağdan kəsilməzliklə eynigüclüdür. Əgər intervalın bütün nöqtələrində funksiya kəsilməz olarsa, onda deyirlər ki, funksiya intervalda kəsilməzdir. Əgər funksiya (a, b) intervalında kəsilməz olarsa, a

nöqtəsində soldan, *b* nöqtəsində sağdan kəsilməzdirsə, onda deyirlər ki, funksiya [*a, b*] parçasında kəsilməzdir ($a>b$).

Misal 1. Aşağıdakı funksiyalar bütün ədəd oxunda kəsilməz funksiyalardır: $y=c$ - sabit funksiya, xətti funksiya $y=kx+b, \cos x, \sin x$ qüvvət funksiyası x^n, $n \in N$ üstlü funksiya a^x, $a>0$.

Funksiyanın kəsilməz olmadığı nöqtələrə kəsilmə nöqtələri deyilir. Əgər *a* nöqtəsində funksiyanın sonlu limiti (ikitərəfli limiti) varsa, lakin bu limit funksiyanın həmin nöqtədəki qiymətindən fərqlidirsə (və yaxud bu nöqtə funksiyanın təyin oblastına daxil deyildirsə), onda *a* nöqtəsi aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsi adlanır. Əgər funksiyanın *b* nöqtəsində sonlu birtərəfli limitləri varsa, lakin onlar üst-üstə düşmürsə, onda *b* nöqtəsi 1-ci növ kəsilmə nöqtəsi adlanır. Əgər *c* nöqtəsində funksiyanın heç olmasa bir sonlu birtərəfli limiti yoxdursa, onda *c* nöqtəsi 2-ci növ kəsilmə nöqtəsi adlanır.

Misal 2. x=0 nöqtəsi $y=\sin x/x$ funksiyasının aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir, belə ki, həmin nöqtədə funksiyanın ikitərəfli limiti var, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x/x=1$ lakin funksiya bu nöqtədə təyin olunmayıb.

Misal 3. $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1 & x<0 \\ 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$

«siqnum» funksiyası üçün 0 nöqtəsi 1-ci növ kəsilmə nöqtəsidir, belə ki, $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{sgn} x=-1,\ \lim\limits_{x\to +0}\operatorname{sgn} x=1$ hər iki birtərəfli limit var, lakin onlar bərabər deyil.

Misal 4. 0 nöqtəsi 1/x funksiyasının 2-ci növ kəsilmə nöqtəsidir, belə ki, $\lim\limits_{x\to +0} 1/x=-\infty,\quad \lim\limits_{x\to -0} 1/x=\infty$

Misal 5. Dirixle funksiyası adlanan funksiya üçün

$$d(x)=\begin{cases}1, & \text{1, əgər } x \text{ rasionaldırsa,}\\ 0 & \text{0, əgər } x \text{ irrasionaldırsa}\end{cases}$$

hər bir nöqtə 2-ci növ kəsilmə nöqtəsidir.

2. Kəsilməz funksiyaların xassələri. Aşağıdakı xassələri qeyd edək:

1) əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları a nöqtəsində kəsilməz funksiyalardırsa, onda $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$ və $f(x)/g(x)$ ($g(a)\neq 0$ şərtilə) funksiyaları da həmin nöqtədə kəsilməz funksiyalar olar;

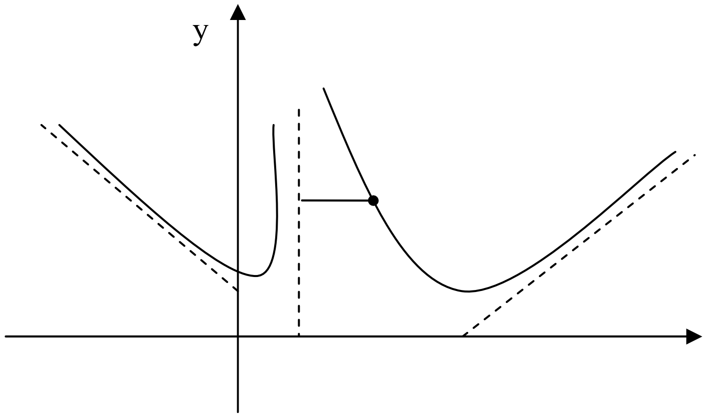
2) əgər $u=g(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsilməzdirsə və $y=f(u)$ funksiyası $g(a)$ nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $y=f(g(x))$ mürəkkəb funksiyası a nöqtəsində kəsilməz olar;

3) elementar funksiyalar öz təyin oblastlarında kəsilməz funksiyalardır;

4) veyerştras teoremi: əgər funksiya parçada kəsilməzdirsə, onda bu parçada özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır;

5) boltsano-Koşi teoremi: tutaq ki, funksiya $[a,b]$ parçasında təyin olunub və kəsilməzdir, bu parçanın üç nöqtələrində müxtəlif işarəli qiymətlər alır; onda elə $c\in(a,\ b)$ nöqtəsi tapmaq olar ki, funksiya həmin nöqtədə sıfıra bərabər olar.

6) asimptotlar: əgər $\lim\limits_{OM\to\infty} MN=0$ olsada, burada MN M nöqtəsindən həmin düz xəttə qədər olan məsafədir; l düz xətti $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin asimptotu adlanır; OM – bu nöqtədən koordinat başlanğıcına qədər olan məsafədir (şəkil1).

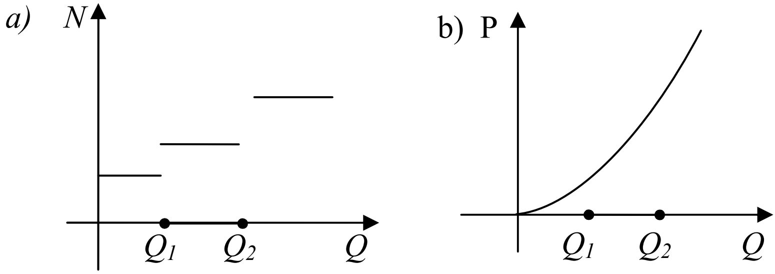


Asimptotlar şaquli və maili olurlar. Əgər $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$ olarsa, onda funksiyanın qrafiki şaquli asitota malikdir (şəkil 1-də düz xətti, tənliyi $x = a$).

Maili asimptot üçün $OM \to \infty$ şərtli $x \to \infty$ və ya $x \to -\infty$ şərtləri ilə əvəz etmək olar. Birinci halda isə soltərəfli adlanır (şəkil 1. *m, n*). Maili asimptotların xüsusi halı üfiqi asimptotlardır. Axırda qeyd edək ki, elementar funksiyaların təyin oblastında kəsilməzliyindən limitləri tapmaq üçün istifadə olunur. Belə ki, əgər $f(x)$ funksiyası a nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. Kəsilməzliyin iqtisadi təsviri. İqtisadiyyatda istifadə edilən funksiyaların əksəriyyəti kəsilməz funksiyalar olması bizə iqtisadi məzmunlu hökmlər çıxarmağa imkan yaradır.

1. Şəkil 2. a-da N vergi tarifinin təxmini qrafiki verilmişdir.



Şəkil 2.

Parçanın üçlarında o kəsiləndir və bu kəsilmə nöqtələri 1-ci növdür. Lakin gəlir vergisinin özü P(şəkil 2, *b*) illik Q gəlirinin kəsilməz funksiyasıdır. Xüsusi halda buradan çıxır ki, əgər iki şəxsin illik gəlirləri bir-birindən az fərqlənirsə, onda onların ödədiyi vergi də bir-birindən az fərqlənər. Maraqlıdır ki, bu fakt əksər insanlar tərəfindən təbii qəbul olunur və onlar bu haqda hətta fikirləşmirlərdə. Kaş bu həmişə belə olaydı. Nə vaxt ki, bubelə olmur, yəni nəticə başlanğıc şərtlərindən məsələni xarakterizə edən parametrlərdən kəsilməz asılı olmadıqda bu məsələ korrekt olmayan adlanır.

2. Öz mənalarına görə $D(p)$- tələb funksiyası, $S = s(p)$ təklif funksiyası p -dən kəsilməz asılıdır. Deməli qiymətin kiçik dəyişməsi tələb və təklifi də kiçik dəyişməsinə səbəb olacaq. Bu prosesi dərindən təhlil etdikdə psixoloji səbəblərdən də məsələn, tələbin sıçrayışla dəyişdiyini görərik. Qiymətlər həddindən çox artdıqda, insanlar dözürlər və tələb kiçik miqdarda artır.

Nəhayət qiymət müəyyən həddi keçdikdə. Tələbin sıçrayışma dəyişdiyini görərik. Bu şərait çox hallarda valyuta və maliyyə bazarlarında çalışan maliyyəçilərə yaxşı məlumdur.

3. İstiqrazların bazar qiymətini taparkən biz faktiki olaraq aşağıdakı düsturu çıxarmışdıq: $S = Np(100 + r)/(100r)$, burada *N*- istiqrazın nominalı, *p*-faiz dərəcəsi, *r* - inflyasiya tempidir. Bu düsturdan görünür ki, *S* faiz dərəcəsi *p* - dən asılı elementar funksiyadır deməli kəsilməz funksiyadır. Buna görə də faiz dərəcəsi kiçik dəyişdikdə, istiqrazın bazar qiyməti də kiçik dəyişər.

MƏSƏLƏLƏR

1. "$\varepsilon - \delta$" dilində $y = |x|$ funksiyasının kəsilməzliyini göstərin.

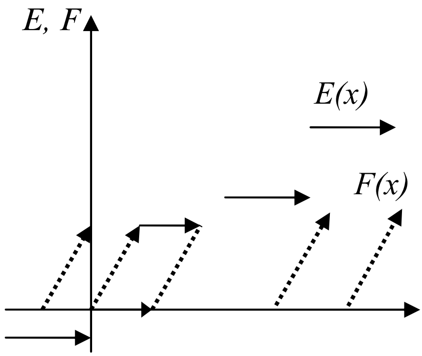
Həlli. Əgər bu funksiya elementar olsaydı, onda elementar funksiyaların kəsilməzliyinə aid ümumi müddəadan istifadə etmək olardı (bax 2. 4.2.). Lakin bu funksiya elementar olmadığından onun kəsilməzliyini xüsusi üsulla isbat etmək lazımdır. Qeyd edək ki, $y = \begin{cases} -x\ , & x \le 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$.

Tutaq ki, $a \ne 0$. *a* nöqtəsinin 0 daxil olmayan elə ətrafı var ki, tədqiq edilən funksiya *y*=*x* və ya *y*= -*x* funksiyası ilə üst-üstə düşür. Ona görə də onun kəsilməzliyini sıfır nöqtəsində isbat etmək lazımdır. İstənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq lazımdır ki, $|x| < \varepsilon$ olduqda $|y| < \varepsilon$ olsun. Bunun üçün $\varepsilon = \delta$ götürmək kifayətdir.

2. Tutaq ki, *E(x)* - «*x* – in tam hissəsidir», *F(x)* – isə «*x*–in kəsr hissəsidir». Bu funksiyanın qrafikini çəkin, hansı nöqtələrdə funksiyanın kəsilə olduğunu aydınlaşdırın və kəsilmə nöqtələrinin xarakterini müəyyən edin.

Həlli. Hər iki funksiyanın qrafiki şəkil 3–də verilmişdir. Qrafikdən görünür ki, *E(x)* funksiyası sağdan hər nöqtədə kəsilməzdir, o cümlədən tam *n*–lər üçün funksiya *n*-ə bərabər olduğu üçün kəsilməzdir. Eyni zamanda n nöqəsində sol limit n-1 tam ədədində kəsiləndir və bütün bu kəsilmə nöqtələri birinci növdür.

F(x) - funksiyası sağdan hər bir nöqtədə kəsilməzdir, o cümlədən tam *n* -lər üçün, bu nöqtələrdə funksiya sıfıra bərabərdir. Tam nöqtələrdə soldan limit 1-ə bərabərdir. Deməli *F(x)* funksiya hər bir tam qiymətdə kəsiləndir və bukəsiləndir və bu kəsilmə nöqtələri 1-ci növdür.



Şəkil 3.

3. «$\varepsilon - \delta$» dilində $y = x^2$ funksiyasının kəsilməzliyini isbat edin.

4. $y = O(x)$ funksiyasına baxın. Onun qrafikini qurun. Hansı nöqtələr onun kəsilmə nöqtələridir. Kəsilmə nöqtələrinin xarakterini tapın.

5. Tornkvist funksiyasının – «ilk zəruri əşyalar» və «zəngilik əşyaları»-na tələb funksiyasının asimptotlarını tapın:

$y = {}^{ax}\!/_{(x+b)}$, $y = {}^{ax(x-c)}\!/_{(x+b)}$, burada *a, b, c* qiymətlərdən asılıdır, x – isə gəlirdir.

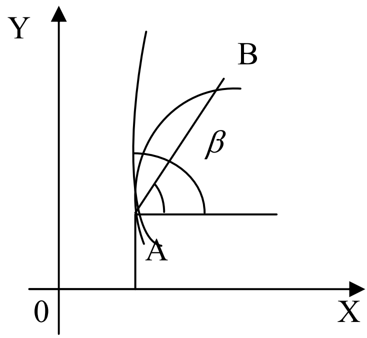
Mövzu 5.
TÖRƏMƏ VƏ DİFERENSİAL, İQTİSADİYYATDA LİMİT KƏMİYYƏTLƏRİ

5.1. Funksiyanın törəməsi

1. Funksiyanın törəməsinin tərifi, onun fiziki və həndəsi mənası. Tutaq ki, *f(x)* funksiyası verilmişdir *f(x)* funksiyanın D(x) təyin oblastından hər hansı x nöqtəsini fiksə edək. Tutaq ki, x' – təyin oblastından götürülmüş başqa bir nöqtədir, onda $x' - x$ fərqi arqumentin artımı adlanır və Δx -lə işarə olunur, funksiyanın qiymətləri fərqi - $f(x') - f(x)$ isə funksiyanın artımı adlanır və $\Delta f(x)$ ilə işarə olunur.

$y = f(x)$ funksiyasının *x* nöqtəsindəki $\Delta f(x)$ artımının arqumentin Δx artımına olan nisbətinin arqumentin artımı $\Delta x \to 0$ şərtilə limitinə $f(x)$ funksiyasının *x* nöqtəsində törəməsi deyilir (əgər bu limit varsa).

Törəməni $y'(x)$ və ya $f'(x)$ -lə işarə edirlər. Törəmənin tapılması prosesi diferensiallanma adlanır. Beləliklə, $f'(x) = {\Delta f(x)}/{\Delta x}$ nisbətinin fiziki mənası $[x,\ x + \Delta x]$ parçasında $f(x)$ funksiyasının dəyişməsinin orta sürətidir, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} {\Delta f(x)}/{\Delta x} = f'(x)$ isə funksiyanın *x* nöqtəsində sürətinin ani dəyişməsidir. Məsələn, əgər $f(x)$ funksiyası *x* zamanında hər hansı bir cismin getdiyi *y* yoldursa, onda $y'(x)$ törəməsi hərəkətin sürətidir. Əgər funksiya istehsal olunan məhsulların miqdarının zamandan asılılığını göstərirsə, onda törəmə əmək məhsuldarlığını göstərir.



Şəkil 1.

Həndəsi olaraq $\Delta f(x)/\Delta x$ nisbəti β bucağının tangesidir (şəkil 1), β bucağı *A* və *B* nöqtələrində qrafiki kəsənlə *OX* oxu arasındakı bucaqdır. Əgər $\Delta x \to 0$, onda *B* nöqtəsi *A* nöqtəsinə yaxınlaşar və β bucağı α bucağına yaxınlaşır. α bucağı qrafikə toxunanla *OX* oxu arasındakı bucaqdır və deməli $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x)/\Delta x = \lim\limits_{B \to A} tg\beta = tg\alpha$. Buradan alırıq ki, $f'(x) = tg\alpha = k$ (törəmənin həndəsi mənası), burada *k* *x* nöqtəsində $f(x)$ -in qrafikinə toxunanın bucaq əmsalıdır. Beləliklə, x_0 nöqtəsində $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinə çəkilən toxunanın tənliyi $y = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$. Əgər *x* nöqtəsində funksiyasının artımı (1) $\Delta f(x) = A\Delta x + \alpha\Delta x$ şəklində göstərilə bilərsə, onda $y = f(x)$ funksiyası *x* nöqtəsində diferensiallanan adlanır; burada *A* – sabit, α sonsuz kiçilən funksiya ($\Delta x \to 0$).

Teorem 1. **Hər hansı nöqtədə funksiyanın diferensiallanan olması üçün zəruri və kafi şərt həmin nöqtədə onun törəməsinin olmasıdır.**

Zəruriliyin isbatı. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası *x* nöqtəsində diferensiallanandır. Onda $\Delta f(x) = A\Delta x + \alpha\Delta x$, burada α sonsuz kiçilən funksiyadır. Buradan alırıq ki, $\Delta f(x)/\Delta x = A + \alpha$. Beləliklə, tərs lemmaya əsasən (bölmə 4.3, p. 3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)/\Delta x = A$, yəni funksiyanın törəməsi var.

Kafiliyin isbatı. Tutaq ki funksiyanın törəməsi var: $f'(x =) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x)/\Delta x$. Yuxarıda qeyd etdiyimiz lemmaya əsasən (bölmə 4.3, p. 3) $\Delta f(x)/\Delta x = f'(x) + \alpha$, $\Delta x \to 0$ α - sonsuz kiçilən funksiyadır. Buradan alırıq ki, $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, yəni funksiya *x* nöqtəsində diferensiallanandır.

QEYD. İsbat zamanı aldıq ki, diferensiallanan funksiya üçün (1) bərabərliyini $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$ şəklində də yazmaq olar, burada $\Delta x \to 0$ α - sonsuz kiçilən funksiyadır.

Teorem 2. **Əgər funksiya nöqtədə diferensiallanandırsa, onda həmin nöqtədə kəsilməzdir.**

İsbatı. Əgər $y = f(x)$ funksiyası *x* nöqtəsində diferensiallanandırsa, onda $\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, burada $\Delta x \to 0$ α - sonsuz kiçilən funksiyadır. Buradan alırıq ki, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = 0$, yəni *x* nöqtəsində funksiya kəsilməzdir.

2. Törəmənin iqtisadiyyata tətbiqi.

Sərf olunan resursun x həcmindən asılı olan, vahid zamanda istehsal olunan məhsulun həcmini göstərən bir faktorlu və ya bir resurslu $y = f(x)$ istehsal funksiyasına baxaq. Bu resurs çox hallarda–canlı insan əməyinin miqdarını göstərir ki, bu da adam – saat və ya işçilərin sayı ilə ifadə olunur. Tutaq ki, bu şəraitdə firmanın işçilərinin sayı a –dır. Adətən istehsal funksiyası diferensiallanan olduğundan, $f(a+1) \approx f(a) + f'(a)$ olar. Əgər işçilərin sayı a böyükdürsə, onda yuxarıdakı təxmini bərabərlik kifayət qədər dəqiq olar. Bu halda $f'(a)$ nə deməkdir? Bu yeni işçilərin vahid zamanda istehsal etdikləri əlavə məhsuldur. Tutaq ki, v - vahid məhsulun qiymətidir, *p* isə vahid zamanda işçinin aldığı əmək haqqıdır. Onda əgər $vf'(a) > \rho$ olarsa, o zaman bir nəfər də işçi götürmək lazımdır, belə ki, o işçi firmaya özünün aldığından çox gəlir gətirir. Mürəkkəb olmayan bu qayda bu universal xarakter daşıyır və *iqtisadiyyatın qızıl qaydası* adlanır. Ümumiyyətlə, baxdığımız şəraitdə istehsal funksiyasının a nöqtəsindəki törəməsi iqtisadiyyatda $f(a)/a$ orta əmək məhsuldarlığından fərqli olaraq *əmək məhsuldarlığının limit qiyməti* adlanır.

Əvvəllər daxil etdiyimiz bəzi funksiyalara baxaq (bölmə 4.2, p.2) və onların törəmələrinin iqtisadi mənalarını təyin edək.

Tələb funksiyası $D = D(p)$ - hər hansı əmtəəyə D tələbinin onun *p* qiymətindən asılılığı D(p) – nin törəməsi bir vahid qiymət artımına görə tələbin artımının təxmini qiymətidir. Məlumdur ki, qiymət artdıqda tələb azalır. Lakin əslində törəmənin mütləq qiyməti göstərir ki, qiymətin bir vahid artması alıcılar tərəfindən tələbin azalmasını göstərir.

Təklif funksiyası $S = S(p)$-hər hansı əmtəənin p qiymətindən təklifin asılığı S(p) – nin törəməsi qiymətin bir vahid artırılmasından əmtəəyə təklifin artırılmasının təxmini qiymətini göstərir. Faydalılıq funksiyası *U(x)*-hər hansı şəxsin onun üçün əmtəənin *x* miqdarının subyektiv ədədi qiyməti–$U'(x)$ törəməsi daha bir vahid əmtəə əldə etməyin əlavə faydalılığının təxmini qiymətini verir. *Vergi tarifi* – N verginin illik Q gəlirindən asılılığının faizlə ifadəsi. Tutaq ki, P verginin qiymətidir, bunu illik Q gəlirindən vermək lazımdır. Onda P- nin törəməsi N vergi tarifi olar. $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi x zamanda gedilən y yolun ani sürətidir, istehsal funksiyasının törəməsi əmək məhsuldarlığının limit qiymətini verir və s. iqtisadiyyatda həddindən çox əhəmiyyətlidir bu suallara cavab vermək: əmtəənin qiyməti 1 % artarsa, ona tələb neçə faiz dəyişər? Əmtəənin qiyməti 1% artarsa, ona olan təklif nesə faiz dəyişər? və. s. Bu suallar və onlara cavablar yeni anlayış daxil etməyi tələb edir: «arqumentə görə funksiyanın elastikliyi» və ya nisbi törəmə. $y = f(x)$ funksiyasına baxaq. Tutaq ki, Δx arqumentinin artımı, $\Delta f(x)$ funksiyasının uyğun artımıdır. Onda $\Delta x / x$ - arqumentinin nisbi dəyişməsi, $\Delta f(x) / f(x)$ funksiyasının dəyişməsi olar. $\left((\Delta f(x)/f(x)) / (\Delta x/x) \right)$ - funksiyanın nisbi dəyişməsinin arqumentin nisbi dəyişməsinə olan nisbətinə $[x,\ x+\Delta x]$ parçasında arqumentə görə *funksiyanın orta elastikliyi* deyilir. Bu nisbətin $\Delta x \to 0$ - da limitinə, yəni $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((\Delta f(x)/f(x)) / (\Delta x/x) \right) = f'(x) / (y(x)/x)$ - ə *y* funksiyasının arqumentə nəzərən *x* nöqtəsində elastikliyi deyilir və E_x^y ilə işarə olunur. Beləliklə, əgər əmtəəyə tələbin elastikliyinin qiyməti 2-yə bərabərdirsə, bu o deməkdir ki, verilmiş qiyməti 1% qaldırdıqda tələb 2 % azalır. Əgər buraxılan məhsulun əməyə elastikliyi 1/2 - ə bərabərdirsə, bu o deməkdir ki,buraxılan məhsulu 1% artırmaq üçün işçilərin miqdarını 2% atırmaq lazımdır.

Misal 1. D = 40 – 2p tələb funksiyası üçün p = 4 olduqda tələbin qiymətə görə elastikliyini tapın.

Həlli: $E_p^D(4) = \left(D'(4) / D(4)/4 \right) = -2/8 = -1/4$.

3. Diferensiallanma qaydaları (funksiyaların törəmələrinin tapılması).

Əsas elementar funksiyaların törəmələri.

1. Sabit kəmiyyət: $c' = 0$;
2. Qüvvət funksiyası: $(x^{\alpha})' = \alpha\, x^{(\alpha-1)}$;
3. Üstlü funksiya: $(a^x)' = a^x \ln a$;
4. Əsası *e* olan üstlü funksiya: $(e^x)' = e^x$;
5. Natural loqarifmli loqarifmik funksiya: $(\ln x)' = 1/x$;
6. Loqarifmik funksiya: $(\log_a x)' = (1/x)\ln a$;
7. Triqonometrik funksiyalar:
   $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;
   $(tg\, x)' = 1/\cos^2 x$; $(ctg\, x)' = -1/\sin^2 x$.

Diferensiallanmanın struktur qaydaları.

1. Cəmin törəməsi: $((f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$;
2. Hasilin törəməsi: $((f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
3. Nisbətin törəmsi:
   $$\left(f(x)/g(x)\right)' = (f'(x)g(x) - f(x)g'(x))/g^2(x) ;$$
4. Mürəkkəb funksiyanın törəməsi: $(Uf(x))' = U'(f(x))f'(x)$;
5. Tərs funksiyanın törəməsi: $y' = 1/x'$.

Bu qaydaların isbatına dərsliklərdə baxmaq olar.

Qeyri – aşkar və parametrik funksiyalarrın törəmələri.

Tutaq ki, $y = y(x)$ funksiyası qeyri-aşkar şəkildə $F(x, y) = 0$ tənliyi ilə verilmişdir. Bu funksiyanın törəməsini tapmaq üçün bu bərabərliyi x – ə görə diferensiallamaq, sonra alınan tənliyi y' - ə görə həll etmək lazımdır.

Misal 2. $e^y + y + \cos y = 2 + \sin x$ qeyri-aşkar funksiyanın törəməsini tapın.

Həlli. Verilmiş bərabərliyi x– ə görə diferensiallayaq, sonra isə y'_x-i tapaq:

$$e^y \cdot y' + y' - (\sin y)y' = cox; \quad y'_x = \cos x \Big/ (e^y + 1 - \sin y) \; .$$

Əgər funksiyanın və arqumentin qiymətləri parametr adlanan köməkçi *t* kəmiyyətindən asılı olarsa, onda deyirlər ki, $y = y(x)$ funksiyası parametrik şəkildə verilib: $x = x(t)$ və $y = y(x)$. Parametrik funksiyaların törəmələrinin tapılma qaydası: Əgər $x'(t)$ və $y'(t)$ varsa, onda $y'_x = y'_x(t)/x'(t) \quad (x'(t)) \neq 0$.

Misal 3. Parametrik şəkildə verilmiş $y(x)$ funksiyasının y' - törəməsini tapın: $x(t) = t^4 + 4t^3$, $y(t) = t^2 + 1$.

Həlli: $x'(t) = 4t^3 + 12t^2$, $y'(t) = 2t$, deməli,

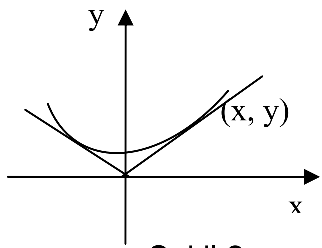
$$y'_x = 2t\left(\left(4t^3 + 12t^2\right)\right) = 1 \Big/ (2t^2 + 6t)$$

Yüksək tərtibli törəmələr. $y = f(x)$ funksiyasının törəməsi $y'(x)$ həmin arqumentdən asılı yeni funksiyadır. Bu funksiyanın törəməsi $(f'(x))'$ başlanğıc $f(x)$ funksiyasının ikinci tərtib törəmsi adlanır və $y''(x)$ və ya $f''(x)$ - lə işarə olununr. Analoji olaraq 3-cü, 4-cü və s. tərtib törəmələr təyin olunur.

MƏSƏLƏLƏR

1. $y = |x|$ funksiyasının x=0 nöqtəsində törəməsi yoxdur. Şəkil 2- də göstərdiyimiz kimi sıfırı özündə saxlayan müəyyən intervalda onu parabola ilə əvəz etmək lazımdır ki, alınan funksiyanın hər yerdə törəməsi olsun.

Həlli. Parabolanı $y = x^2 + a$ şəklində axtaraq. Onda *(x, y)* nöqtəsində parabola ilə qrafikinin sağ tərəfinin kəsişmə nöqtəsində aşağıdakı sistem doğru olar:



Şəkil 2.

$$\begin{cases} x^2 + a = x \\ 2x = 1 \end{cases}$$

Bu sistemi həll edib taparıq: $x = 1/2$, $a = 1/4$, buradan axtarılan funksiyanı alarıq: $y = \begin{cases} |x| & |x| \geq 1/2\ , \\ x^2 + 1/4 & |x| \leq 1/2\ . \end{cases}$

2. Diferensiallama qaydalarından istifadə edərək aşağadakı funksiyaların törəmələrini tapın:

$$a)\ y = (2x^2+3)^4\ ,\ b)\ y = \sin(2x + x^2)\ ,\ c)\ y = e^{x^x}\ ,$$

$q)\ y = tg(5x+1)\ ,\ \ d)\ y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}\ ,\ \ e)\ y = \left(\ln(\sin^2 x)\right)^3.$

3. Faydalılıq funksiyası iki şərti ödəməlidir: onun birinci tərtib törəməsi müsbət olmalıdır. İkinci törəməsi isə mənfi olmalıdır. Bunun mənası belədir: əmtəə arzuolunandır, miqdarı çox olduqca qiymətlidir, faydalıdır; lakin istehlak olan əmtəənin miqdarı artdıqca onun faydalılığı azalır. Göstərin ki, aşağıdakı funksiyalar bu şərtləri ödəyir: $a)\ y = \ln x\ ,\ b)\ y = \sqrt{x}\ .$

4. *p* qiymətindən asılı olan $D = 10/p$ tələb funksiyası üçün tələbin qiymətə görə elastikliyini aşağıdakı nöqtələrdə tapın: 1, 2, 5, 10.

5. *p* qiymətindən asılı $S = 5p$ təklif funksiyası üçün təlklifin qiymətə görə elastikliyini aşağıdakı nöqtələrdə tapın: 1, 2, 5, 10.

6. $y = 2x^2 - 1$ funksiyasının qrafikinə absisi 0, 2 , 4 olan nöqtələrdə çəkilmiş toxunanın tənliyini tapın.

7. Dairənin radiusu saatda 2% artarsa, onun sahəsi hansı sürətlə artar?

8. Eyni bir limandan eyni zamanda A paroxodu 30 km/saat sürətlə şimal istiqamətinə, B paroxodu 40 km/saat sürətlə şərq istiqamətinə çıxır. Hansı sürətlə onlar bir– birindən uzaqlaşacaq?

5.2. Diferensiallanan funksiyaların xassələri

1. Diferensiallanan funksiyalar haqqında teoremlər. *Ferma teoremi.* Əgər $y = f(x)$ funksiyası a nöqtəsində diferensiallanandırsa, yəni $f'(a)$ varsa və bu nöqtənin hər hansı ətrafında $f(x) \le f(a)$ $\left(f(x) \ge f(a)\right)$, yəni $f(a)$ həmin ətrafda funksiyanın ən böyük (ən kiçik) qiymətidirsə, onda $f'(a) = 0$.

İsbatı.

$f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to +0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) = \lim\limits_{\Delta x \to -0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) = 0$,

belə ki, eyni zamanda $\lim\limits_{\Delta x \to -0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) \le 0$ və $\lim\limits_{\Delta x \to +0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) \le 0$ ($\lim\limits_{\Delta x \to -0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) \ge 0$ və $\lim\limits_{\Delta x \to +0}\left(\Delta f(a)/\Delta x\right) \ge 0$).

Ferma teoremi törəmənin köməyi ilə funksiyanın ekstremumunu tapmaq üçün əsas təşkil edir. Bu teoremlə əlaqədar funksiyanın ekstremumunun tərifini verək.

Əgər a nöqtəsinin hər hansı ətrafında $f(x)$ funksiyasının qiyməti $f(a)$ ən böyük (ən kiçik) olarsa, yəni bu nöqtədə $f(x) \le f(a)$ $\left(f(x) \ge f(a)\right)$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda $f(a)$ qyiməti *maksimum (minimum)* adlanır. Arqumentin uyğun a qiyməti *maksimum (minimum) nöqtəsi* adlanır. Funksiyanın maksimumları (minimumları) onun ekstremumları, maksimum və minimum nöqtələri isə *ekstremum nöqtələri* adlanır.

Riyaziyyatçılar arasında ekstremumun tərifi üçün fikir birliyi yoxdur. Bu tərif bizim kurs üçün ən yararlı tərifdir.

Roll teoremi. Əgər $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz, $(a.b)$ intervalında diferensiallanan funksiyadırsa və $f(a) = f(b)$ olarsa, onda elə $c \in (a.b)$ nöqtəsi vardır ki, onun törəməsi sıfıra bərabər olar.

İsbatı. Veyerştras teoreminə əsasən (bölmə 4.4.n.2) funksiya $[a, b]$ parçasında özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərini alır. Bu qiymətlərdən heç olmazsa birini funksiya parçanın daxili nöqtəsində alır. Əks halda $f(a) = f(b)$ olduğundan funksiya parçada sabit olar və onun törəməsi bütün nöqtələrdə sıfır olar. Beləliklə ekstremum nöqtələrindən biri daxili nöqtədir. Ferma teoreminə görə törəmə həmin nöqtədə sıfır olar.

Laqranj teoremi. Əgər $y = f(x)$ funksiyası $[a, b]$ parçasında kəsilməz, (a, b) intervalında diferensiallanan funksiyadırsa, onda elə $c \in (a, b)$ nöqtəsi var ki, $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ olar.

İsbatı. $F(x) = f(x) - x\,f(b) - f(a)/(b - a)$ funksiyasına baxaq. Bu funksiya Roll teoreminin bütün şərtlərini ödəyir, deməli elə $c \in (a, b)$ nöqtəsi var ki, $F'(c) = 0$ olsun və ya $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$, bunu da isbat etmək tələb olunurdu. Laqranj teoremini orta qiymət haqqında teorem də adlandırırlar: $f'(c) - f(x)$ funksiyasını $[a, b]$ parçasında dəyişəninin orta surətidir.

2. Funksiyanın diferensialı. Diferensiallanan $y = f(x)$ funksiyasının artımını

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x \tag{1}$$

şəklində yazmaq olar, burada α-sonsuz kiçilən funksiyadır ($\Delta x \to 0$). $y = f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində artımının Δx-ə nəzərən xətti baş hissəsinə onun *diferensialı* deyilir:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

Arqumentin Δx artımını dx kimi də işarə edirlər, onda (2) düsturunu belə yazmaq olar: $dy = f'(x)dx$. Bu bərabərlikdən görünür ki, törəməyə həm də funksiyanın diferensialının arqumentin diferensialına nisbəti kimi də baxmaq olar: $f'(x) = dy/dx$.

Diferensial üçün diferensiallanma düsturlarının analoqu doğrudur (bax bölmə 5.1.m.1). Əgər (1) düsturunda ikinci dərəcəli $\alpha\Delta x$ toplananını atsaq təqribi $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ və ya $\Delta y \approx f'(x)dx$ bərabərliyini alarıq ki, bu bərabərlikdən də təqribi hesablamalarda və mürəkkəb asılılıqların xəttiləşdirilməsində istifadə edilir.

Misal 1. Radiusu r olan dairənin sahəsi $S = \pi r^2$-dır Əgər radiusu Δr qədər artırsaq, onda S-in ΔS artımı radiusa r və $r + \Delta r$ olan konsentrik çevrələrin arasında qalan dairəvi halqanın sahəsi olar.

$\Delta S = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = 2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2$ ifadəsindən alarıq ki, $r \to 0$ – da ΔS-in baş hissəsi $2\pi r\Delta r$ olar ki, bu da ds-diferensialıdır. Diferensial anlayışından təbii olaraq xətaların hesablanmasında istifadə etmək xüsusi ilə əlverişlidir. Məsələn, tutaq ki, x kəmiyyətini ölçürük və ya bilavasitə hesablayırıq, ondan asılı olan y kəmiyyətini isə $y = f(x)$ düsturu ilə təyin edirik. x kəmiyyətini ölçərkən adətən Δx qədər xətaya yol verilir ki, bu da y kəmiyyətini Δy xətasına səbəb olur. Bu xətaların çox kiçik olduğunu nəzərə alaraq $\Delta y = dy$ qəbul etmək olar, bu da o deməkdir ki, artımı diferensialla əvəz etdik.

Misal 2. Kürənin radiusunu hansı nisbi xəta ilə ölçmək lazımdır ki, onun həcmini 1% dəqiqliklə təyin etmək olsun.

Həlli. Məlumdur ki, $v=\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3$. Deməli, $\frac{dv}{v}=3\frac{dr}{r}$. Şərtə görə $\frac{dv}{v}\le 0{,}01$ olduğundan $\frac{dr}{r}\le\left(\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}01$.

Cavab: $\frac{1}{3}\%$ dəqiqliklə.

Tutaq ki, $y=f(x)$ - ixtiyari funksiyadır. Fərz edək ki, bu funksiyanın a nöqtəsində törəməsi var. Onda göstərdiyimiz kimi $f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$ təqribi bərabərliyi doğrudur, x a-ya nə qədər yaxın olsa bu bərabərlik bir o qədər dəqiq olar. Beləliklə, istənilən mürəkkəb funksiyanı təqribi olaraq xətti funksiya ilə əvəz etmək olar. Bu yanaşmaya $f(x)$ funksiyasının *xəttiləşdirilməsi* deyilir. Qrafiki olaraq bü yanaşma o deməkdir ki, funksiyanın qrafiki a nöqtəsində ona çəkilən toxunanla əvəz olunur. Məsələn, tutaq ki, $y=f(x)$ mənfəətini işçilərin x sayından asılılığını göstərir. Əgər müəyyən vaxtda işçilərin sayı a kifayət qədər böyükdürsə, onda təqribi bərabərlik $y\approx f(a)+f'(a)(x-a)$. Göstərir ki, x a-dan az fərqlənəndə mənfəət işçilərin sayından xətti asılı olur. Funksiyanın diferensialı $dy=df(x)$ özü də arqumentin funksiyasıdır. Bu funksiyanın diferensialına verilmiş funksiyanın *II tərtib diferensialı* deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur: $d(dy)=d(df(x))=d^2y=d^2f(x)$; axırıncı funksiyanın diferensialı III tərtib diferensial və s. adlanır.

Misal 3. $y=(x+1)^4$ funksiyasının II tərtib diferensialın yazaq. Bunun üçün bu funksiyanın II tərtib törəməsini tapaq. $y''=12(x+1)^2$. Deməli, $d^2y=12(x+1)^2dx^2$.

3. Teylor çoxhədlisi və düsturu. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı c nöqtəsində n-ci tərtibə qədər törəməsi olan funksiyadır. Bu o deməkdir ki, funksiya hər hansı (a,b) intervalında $(c \in (a,b))$ $n-1$-ci tərtibə qədər bütün törəmələri olan funksiyadır, və həm də n-ci tərtib törəməsi də var.

Bu funksiya üçün Teylor çoxhədlisini yazaq:

$$P(c) = f(c) + \frac{f'(c)(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^{(n)}}{n!}.$$

Ardıcıl olaraq $P(c), P'(c), P''(c), \ldots, P^{(n)}(c)$-ni hesablayaraq görərik ki, bu çoxhədlinin və onun n-ci tərtibə qədər törəmələrinin (n-tərtibli törəmə daxil olmaqla) c nöqtəsindəki qiymətləri $f(x)$ və onun törəmələrinin qiymətlərinə bərabər olar. Ona görə də əsas var ki, bu çoxhədlinin $f(x)$-ə çox yaxın olduğunu hökm edək. $r(x) = f(x) - P(x)$ qalığı bu yaxınlığın ölçü dərəcəsidir. İsbat etmək olar ki, $x \to c$-də göstərilən şərtlərlə $r(x)$ qalığı $(x-c)^n$-ə nisbətən sonsuz kiçilən funksiyadır, yəni $r(x) = 0\left((x-c)^n\right)$.

Buna görə də yaza bilərik ki,

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)(x-c)}{1!} + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^{(n)}}{n!} + 0\left((x-c)^n\right) \quad (3)$$

(3) düsturu Peano formalı qalıq hədli *Teylor düsturu* adlanır.

Bu düstur aşağıdakı düsturun təbii ümumiləşmiş formasıdır: $f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + 0(x-c)$, bu isə $f(x)$ funksiyasının c nöqtəsində differensiallanması ifadəsidir. Əgər c=0 götürsək, Teylor düsturu daha sadə şəkilə düşər:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+...+\frac{f^{(n)}(c)x^{(n)}}{n!}+0(x^n) \qquad (4)$$

(4) düsturu *Makloren düsturu* adlanır.

Misal 4. Tutaq ki, $f(x)=e^x$, onda $f^{(n)}(x)=e^x$ istənilən n üçün doğru olar. Bu halda $f^{(n)}(0)=1$ olduğundan (4) düsturuna əsasən alarıq:

$$l=1+1+\frac{1}{(2!)}+\frac{1}{(3!)}+...$$

Arayış məqsədi ilə $Sinx$ və $Cosx$ funksiyalarının Teylor düsturunu verək:

$$Sinx=x-\frac{x^3}{(3!)}+\frac{x^5}{(5!)}-...+0(x^{2n+1});$$

$$Cosx=1-\frac{x^2}{(2!)}+\frac{x^4}{(4!)}-...+0(x^{2n}).$$

MƏSƏLƏLƏR

1. $y=10k^{1/3}$ funksiyasının 8 nöqtəsində, $y=\sqrt{2\,kM/h}$ funksiyasının *k=2000* nöqtəsində xəttiləşməsini yazın (*M* və *h*-parametrləridir).

2. $y=x^6$, $y=\sqrt{x+1}$, $y=\ln(x+1)$, $y=e^{Sinx}$, $y=Cosx^2$ funksiyalarının IV həddə qədər dəqiqliklə Makloren düsturunu yazın.

3.a) tgx funksiyasının o nöqtəsində, b) $Ctgx$ funksiyasının $\pi/2$ nöqtəsində III həddə qədər dəqiqliklə Teylor düsturuna yazın.

Mövzu 6.
FUNKSİYALARIN TƏDQİQİ, QRAFİKLƏRİN QURULMASI

6.1.Funksiyaların ekstremumları və onların tapılması

1. Funksiyanın ekstremumu və onun tapılması.

Funksiyanın ekstremumunun tərifi 5.2-də verilmişdir. Bu anlayışın vacibliyini nəzərə alaraq onu bir daha yada salaq. Əgər a nöqtəsinin hər hansı bir ətrafında $f(x)$ funksiyasının qiyməti ən böyük (ən kiçik) olarsa, onda bu qiymətə funksiyanın maksimumu (minimumu) deyilir, yəni bu ətrafda $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ bərabərsizliyi ödənir. Arqumentin uyğun a qiymətinə maksimum (minimum) nöqtə deyilir. Yada salaq ki, əgər nöqtənin hər hansı ətrafı bütünlükdə funksiyanın təyin oblastına daxil olarsa, belə nöqtəyə təyin oblastının daxili nöqtəsi deyilir. a nöqtəsində $f'(a) = 0$ və yaxud $f'(a)$ yoxdursa, onda a nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının böhran nöqtəsi adlanır. Əgər a nöqtəsi daxili nöqtədirsə və $f'(a) = 0$ olarsa, onda bu nöqtəyə $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsi deyilir.

Teorem 1. **(Ekstremumun zəruri şərti.) Əgər $f(x)$ funksiyasının daxili a nöqtəsində ekstremumu varsa, onda a nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının böhran nöqtəsidir.**

İsbatı. a nöqtəsi daxili ekstremum nöqtəsi olduğundan, onun hər hansı ətrafında $f(x) \leq f(a)$ və ya $f(x) \geq f(a)$ olar. Əgər $f'(a)$ yoxdursa, onda a - tərifə əsasən böhran nöqtəsidir. Əgər $f'(a)$ varsa, onda Ferma teoreminin şərtləri ödənir və bu halda $f'(a) = 0$ olar.

Teorem 2. **(Ekstremumun birinci kafi əlaməti). Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin müəyyən**

ətrafında kəsidməzdir və ola bilər ki, a istisna olmaqla həmin ətrafda diferensiallanandır. Onda:

1) Əgər $x < a$ olduqda $f'(x) \geq 0$ və $x > a$ olduqda $f'(x) \leq 0$ olarsa a maksimum nöqtəsidir;

2) **Əgər $x < a$ olduqda $f'(x) \leq 0$ və $x > a$ olduqda $f'(x) \geq 0$ olarsa, onda a funksiyanın minimim nöqtəsidir.**

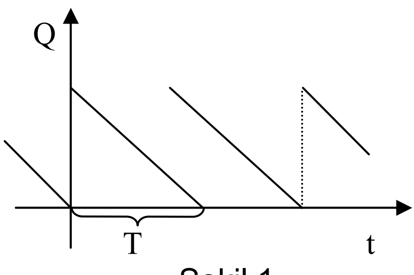
Teorem 3. **(Ekstremumun ikinci kafi əlaməti). Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası və onun $f'(x)$ və $f''(x)$ törəmələri a nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməzdir və $f'(a) = 0$. Onda:**

1) Əgər $f''(x) < 0$ olarsa a funksiyanın maksimum nöqtəsidir;

2) Əgər $f''(x) > 0$ olarsa a funksiyanın minimum nöqtəsidir.

Bu iki əlamətin isbatına dərsliklərdə baxmaq olar. Ekstremumların tapılması üçün təsvir olunan üsullara əlavə olaraq Uilson düsturuna baxaq.

2. Uilson düsturu*.* İdeal ambarın işinə baxaq. Belə ambar öz müştərilərinə müntəzəm olaraq sabit M sürətlə vahid vaxtda vahid əmtəə (xammal yarımfabrikat və s.) göndərir. Vahid ehtiyatın vahid vaxtda saxlanma xərcini *h* ilə işarə edək. Ambar uzunluğu *T* olan dövrlərlə işləyir (şəkil 1). Dövrün əvvəllində ambar həcmi *Q* olan ehtiyat gətirilir. Bundan əlavə ambar *Q*- dən asılı olmayan *K* faktur xərcləri çəkir. Məsələ. vahid vaxtda xərclərin minimumlaşdırılmasından ibarətdir. *Q* həcmi ilə dövrənin uzunluğu *Q/M* olar, deməli vahid vaxtda faktura xərcləri *KQ/M* olar. Nəzərə alsaq ki, ambarda olan



Şəkil 1.

ehtiyatın orta miqdarı *Q/2* olar, onda vahid vaxtda saxlanmanın orta xərci *hQ/2* olar. Beləliklə, cəm şəklində orta xərc vahid vaxtda $G = KM/Q + hQ/2$ olar. Minimumu tapmaq üçün törəməni tapaq və sıfıra bərabər edək: $G' = -KM/Q^2 + h/2 = 0$, buradan $Q = \sqrt{2KM/h}$. İkinci tərtib törəməni tapaq və işarəsini yoxlayaq: $G'' = 2KM/Q^3 > 0$.

$Q = \sqrt{2KM/h}$ - *Uilson düsturu* adlanır. Minimum xərc $G_{\min} = \sqrt{2KMh}$.

Misal 1. Ambara sementi 1500 tonluq barjalarla gətirirlər. Faktura xərcləri 2000 dollardır. Saxlanma xərcləri bir sutkada hər ton üçün 10 sentdir. Hər sutkada ambar 50 t. sement buraxır. Bir dövrdə saxlanma xərclərini tapın. Bir partiyanın optimal həcmi nə qədər olar?

Həlli. Ambarda saxlanılan sementin orta həcmi xərci 75 dollardır. Bir dövrə 30 gündür. Deməli, bir dövrdə saxlanma xərci 2250 dollardır. Bir partiyanın optimal həcmini Uilson düsturu ilə hesablayaq:

$$Q = \sqrt{2KM/h} = \sqrt{2 \cdot 2000 \cdot 50/0{,}1} \approx 1420\,t$$

Qeyd. Bir çox praktiki vacib hallarda diferensial hesabının üsulları ekstremumların tapılmasına və tədqiqinə imkan vermir. Məsələn, xətti proqramlaşdırma məsələləri üçün məhz bu halı görürük (bax 3.1 p.2.)

3. Birresurslu firma nəzəriyyəsi. Fərz edək ki, firma bir əmtəə istehsal edir və onun miqdarını y ilə işarə edək. Bunun üçün yalnız bir resursdan istifadə olunur. Firma öz istehsal funksiyası ilə $y = F(x)$-lə tamamilə xarakterizə olunur. İstehsal funksiyası $F(x)$-istehsal edilən əmtəənin həcmi ilə sərf olunan resurs–x arasındakı asılılığı ifadə edir. Fərz edəcəyik ki, istehsal funksiyası zəruri törəmələrə malikdir. Tutaq ki, istehsal funksiyası iki aksiomu ödəyir.

Aksiom 1. İstehsal funksiyasının təyin oblastının heç olmazsa bir hissəsində – iqtisadi E oblastında bu funksiya azalmayandır, yəni emal olunan resurs həcminin artması buraxılan məhsulun azalmasına səbəb olmur.

Beləliklə, əgər a, b bu oblastın iki nöqtəsidirsə, onda $a \le b$ olduqda $F(a) \le F(b)$ olar. Deməli bu oblastda $F'(x)$ mənfi deyildir. Ona limit məhsulu deyirlər.

Aksiom 2. İddia edilir ki, iqtisadi oblastının elə qabarıq S alt çoxluğu var ki, $\{a \in S; F(a) \ge c\}$ alt çoxluğuda bütün c-lər üçün qabarıqdır. Bu alt çoxluqda ikinci tərtib törəmə müsbət deyildir.

Bu iki aksiomun iqtisadi məzmunu üzərində dayanaq. Birinci aksiom göstərir ki, istehsal funksiyası riyaziyyatçı-nəzəriyyəçilər tərəfindən uydurulan abstrakt funksiya deyildir. Bu funksiya bütün təyin obslatında olmasa da onun bir hissəsində çox vacib iqtisadi, eyni zamanda trivial izaha malikdir: az da olsa normal iqtisadiyyatda xərc artımı məhsul buraxılışının azalmasına səbəb ola bilməz.

İkinci aksiomda yalnız ikinci tərtib törəmənin müsbət olmadığının iqtisadi mənasını izah edək. İqtisadiyyatda bu xassə gəlirliliyin azalması qanunu adlanır: sərf olunan resursların artırılması zamanı müəyyən anda (S oblastına daxil olarkən) limit məhsulu azalmağa başlayır. Bu qanunun klassik misal olaraq qeyd olunmuş sahədə taxıl istehsalı zamanı işçilərin artırılmasıdır. Bundan sonra hesab edəcəyik ki, istehsal funksiyası bütün təyin oblastında hər iki aksiomu ödəyir. İndi firmanın fəaliyyətinə qayıdaq. Tutaq ki, P-vahid resursun qiymətidir və v – buraxılan vahid məhsulun qiymətidir. Deməli, P mənfəəti x -in funksiyasıdır, $P(x) = v\,F(x) - px$

Beləliklə, firmanın məsələsinə gəlirik:

$$\begin{aligned} &P(x) = \to \max \\ &x \ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

$P(x)$ funksiyasının törəməsini sıfıra bərabər edərək, alırıq:

$$F'(x) = p/\nu \quad (2)$$

Aydındır ki, emal olunan resursun həcmi müsbətdir və deməli (2) münasibətinin doğru olduğu, nöqtə daxili nöqtədir, yeni ekstremum nöqtəsidir, ikinci tərtib törəmənin müsbət olmadığını nəzərə alsaq, onda bu nöqtə maksimum nöqtəsi olar.

Beləliklə, istehsal funksiyası üzərinə qoyulan təbii şərtlərlə (2) münasibəti firma məsələsinin həllini verir, yəni emal olunan resursların həcmini təyin edir ki, bunun da nəticəsində maksimumu müəyyən edən məhsul alınır. (2) münasibətini verən a^* nöqtəsini firmanın optimal həlli adlandıraq. (2) münasibətinin iqtisadi mənası üzərində dayanaq. Yada salaq ki, $F'(x)$ limit məhsuludur, $\nu F'(x)$ isə bir vahid resursdan alınmış limit məhsulunun dəyəridir. Vahid resursun bir vahidinin dəyəri p–yə bərabərdir. Onda (2) münasibətini verən optimal nöqtə tarazlıq nöqtəsi olar Yəni o nöqtədə ki, resursların alınmasına sərf olunmuş vəsaitdən artıq heç nə əldə etmək mümkün deyil. Müəyyən şərtlər daxilində firmanın (2) munasibəti ilə təyin olunan optimal həlli bütün p və ν üçün yeganədir.

Beləliklə (1) məsələsində a^* p və ν üçün yeganədir. Onda resursa tələb funksiyası adlanan $a^* = a^*(p,\nu)$ funksiyasını alarıq. Bu funksiyanın mənasını aydınlaşdıraq. Əgər resursun p qiyməti, buraxılan məhsulun qiyməti ν olarsa, onda firma emal olunan resursun həcmini $a(p,\nu)$ funksiyası vasitəsilə təyin edir və bu həcmdə resursu, bazardan alır, yəni bu funksiya firma tərəfindən resursa olan tələbdir. Emal olunan resursun həcmini bilərək, bu həcmi istehsal funksiyasına qoyaraq, buraxılan məhsulun həcmini qiymətdən asılı alarıq. Axırıncı funksiya məhsulun təklif funksiyası adlanır.

Misal 2. Çınqıl istehsalının həcmi y (t/saat) əməyin miqdarı x-dən (adam/saat) asılıdır. $y = 6\sqrt{x}$ Çınqılın qiyməti 40 rubl/t, fəhlənin əmək haqqı 30 rubl/ saat-dır. Əmək haqqında xərc nəzərdə tutulmur. Əməyin optimal miqdarını tapın.

Həlli. Fəhlələrin sayı x olduqda mənfəət $P(x) = 406\sqrt{x} - 30x$ olar. Bu funksiyanın makismumunu tapaq. $P'(x) = \frac{240}{(2\sqrt{x})} - 30;\quad x = 16$

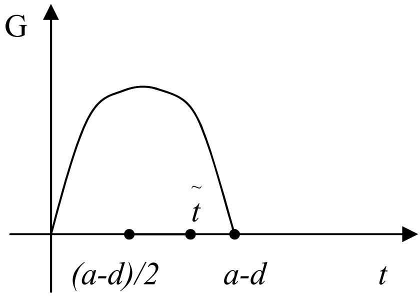
Bu qiymətdə ikinci tərtib törəmə $F''(16) < 0$ olar. Deməli $x = 16$ maksimum nöqtəsidir. Bilavasitə (2) münasibətindən də istifadə etmək olar. Onda alarıq:

$$\frac{40}{(2\sqrt{x})} = 30;\quad x = 16$$

4. Firmanın mənfəəti və verilmiş vergi tarifi ilə dövlətə verilən vergilərin həcmi. Tutaq ki, məhsulun qiyməti $v(y) = a - by$ - dir, yəni bazada hazır məhsulların artması ilə xətti azalır. Xərclər İ isə y məhsulun həcmindən belə asılıdır: $I(y) = cy^2 + dy + e$, burada a, b, c, d, e – müsbət sabitlərdir.

Tutaq ki, vergi *t* tarifi ilə aksizdir, yəni hər bir vahid satılan əmtəə üçün *t* vergisi ödənilir və bütün vercilərin cəmi $G = ty$ -dir.

Beləliklə, firma $p(y) = y(a - by) - c^2y - dy - e - ty$ mənfəətini ədlə edir. Bu mənfəəti maksimumlaşdırmaq üçün firma optimal istehsal həcmi axtarır. Deməli, $P'(y') = 0,$ buradan $y' = (a - d - 1)/(2 + (b + c))$ və $P''(y') = -2b - 2c < 0$, yəni y doğurdan da maksimum nöqtəsidir. $t > 0$ olduğundan, görünür ki, belə vergi tarifi optimal buraxılışı azalmasına səbəb olur. Hökumətin vergi tarifini *t* – ni proqnozlaşdırması üçün dövlətin vergi gəlirini hesablayaq: $G = ty = t(a-d-t)/(2(b+c))$, yəni baxdığımız halda dövlətin vergi əyrisi paraboladır, qolları aşağı yönəlmişdir (şəkil 2). Maksimum $t^* = (a-d)/2$ - nöqtəsidir və $G^* = (a-d)^2/(8(b+c))$ - ə bərabərdir. t^* - qiymətində optimal məhsul buraxılışına $y_1 = (a-d)^2/(4(b+c))$ olar,



Şəkil 2.

$p(y_1) = (a-d)^2/(16(b+c)) - e$ olar. Ümumiyyətlə isə vergi tarifi t olduqda firmanın mənfəəti $P(y^*(t)) = (a-d-t)^2/(4(b+c)) - e$ olar. Buradan çıxır ki, t artdıqca mənfəət azalır. (əgər $0 \le t \le (a-d)$), görünür ki, vergi tarifinin elə qiymətlər oblastı var ki, ($t \ge \tilde{t} = a-d-\sqrt{4e/b+c}$ olduqda) firmanın mənfəəti mənfi olur, lakin dövlətin gəliri müsbət olur. Bu ona görə baş verir ki, kriteriya olaraq məhsul buraxılışının həcmi götürülmüşdür, lakin onun müsbət olması qeyd olunmamışdır.

Əgər qəbul etsək ki, $t \ge \tilde{t}$ olduqda məhsul buraxılışı doğurdan da sıfra bərabər olsun, onda dövlətin gəliri $t \ge \tilde{t}$ olduqda həmçinin sıfra bərabər olar. Aydındır ki, $\tilde{t}$ - nun yaxınlığında işgüzar aktivlik ciddi aşağı düşür.

5.Qabarıq və çökük funksiyaların ekstremumları.

Təklif. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası qabarıq çoxluqda (interval, seqment və s.) qabarıqdır (çökükdür). Əgər funksiyanın bu çoxluqda minimumu (maksimumu) varsa, onda həmin qiymət ən kiçikdir.

İsbatı. Qabarıq funksiyanın $[a,b]$ parçasında verildiyi ilə kifayətlənək. Fərz edək ki, c funksiyanın minimum nöqtəsidir. Tutaq ki, $f(c)$ (a,b) intervalında ən kiçik qiymət deyildir, yəni hər hansı $d\in[a,b]$ nöqtəsi üçün $f(d)<f(c)$ olar. İstənilən λ üçün $(0\le\lambda\le1)$ $z_\lambda=\lambda d+(1-\lambda)c\in[a,b]$. $f(x)$ funksiyasının qabarıq olmasından alarıq: $f(z_\lambda)\le\lambda f(d)+(1-\lambda)f(c)<f(c)$. $\lambda\to0$–da z_λ c-yə yaxınlaşar. Deməli, *c* nöqtəsinin istənilən ətrafında elə nöqtələr var ki, həmin nöqtələrdə $f(x)$ –in qiyməti $f(c)$-də kiçikdir, bu da o deməkdir ki, *c* nöqtəsi minimum nöqtə deyildir. Alınan ziddiyyət isbatı tamamlayır. Bütün bunlardan qabarıq funksiyanın minimumunu tapmaq üçün sadə alqoritm alınır. $[a,b]$ intervalına h addımlarla keçirik. Əvvəlcə funksiyanın qiyməti azalır. Bu qiymətlərin azalmağı qurtaran kimi minimum nöqtəsi tapılır – bu nöqtə əvvəlki ilə sonrakının arasında olur.

Misal 3. $y=x^3-100x+2400$ funksiyası $[0,100]$-də qabarıqdır. Bu intervalı – (0,100) 1 addımla keçək *y(1)* = =2301, *y(2)* = 2204, *y(49)* = -99,

y(50) =- 100, *y(51)* = -99. Dayanırıq! Funksiyanın qiyməti azalmağı dayandırdı. Deməli, minimum 50 və 51 arasındadır. Əgər minimumu dəqiq tapmaq lazımdırsa, onda $[50,51]$ parçasını daha kiçik addımla keçmək lazımdır və s.

MƏSƏLƏLƏR

1. Eni a m olan çayda düz bucaq altında eni b m olan kanal qurulmuşdur. Maksimal uzunluğu neçə m olan gəmi bu kanala girə bilər?

2. Gəminin bir sutkalıq xərci iki hissədən ibarətdir: sabit hissə a manat və dəyişən hissə-sürətin kubuna

mütənasib artır. Hansı sürətdə gəminin üzməsi daha qənaətli olar?

3. Kiçik istixanada hər gün yığılan y kq xiyarın miqdarı işçilərin x sayından asılıdır: $y = 4\sqrt{x} + 4\ln x$. Hər gün bir işçiyə verilən əmək haqqı 2 kq xiyarın qiymətinə bərabər olarsa, işçilərin optimal sayını tapın.

4. İstehsal funksiyası $y = v\ln(x+1)$ olan firmanın resursa tələb funksiyasını və məhsula təklif funksiyasını tapın, burada v -vahid məhsulun qiyməti, p - vahid resursun qiymətidir və $p < v$.

5. Tez korlanan məhsulu–naringi «meyvə-tərəvəz» dükanına maşınla gətirirlər. Bir gedişdə yol xərcləri 50 dollardır. Bir sutkada dükanda 2 ton narınqi satılır. Bir sutkada 2 t narınqi satılır. Mandarinin hər kiloqramının saxlanma xərci 20 sentdir. Uilson düsturu vasitəsilə mandarinin bir partiyasının optimal ölçülərini hesablayın. Dükana gətirilmə dövrünü tapın. Partiya 2 t və 50 kq olduqda orta sutkalıq xərcləri hesablayın.

6.2. Funksiyanın tədqiqi,qrafiklərin qurulması

1.Funksiyanın artması və azalması.

Teorem. **Tutaq ki,** $y = f(x)$ **funksiyası** (a,b) **intervalında diferensiallanandır. Onda :**

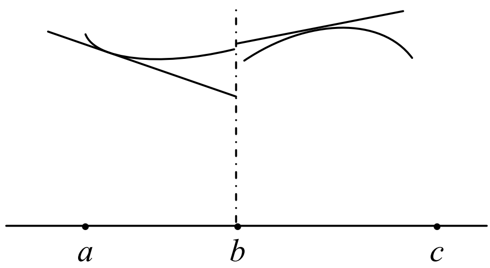
1) əgər (*a, b*) intervalında $f'(x) > 0$ **olarsa,** $f(x)$ **həmin intervalda artandır;**

2) əgər (*a, b*) intervalında $f'(x) < 0$ **olarsa, onda** $f(x)$ **həmin intervalda azalandır;**

3) əgər bu intervalda $f'(x) = 0$ **olarsa, onda** $f(x)$ **intervalda sabit funksiyadır.**

İsbatı. Verilmiş intervaldan ixtiyarı $c < d$ nöqtəsi götürək $[c,d]$ parçasında $f(x)$ funksiyasına Laqranj düsturunu (bölmə 5.2. p.1) tətbiq edək: $f(d)-f(c)=f'(e)(d-c)$ burada $e-[c,d]$ parçasından götürülmüş müəyyən nöqtədir $c<d$ olduğundan $f(d)-f(c)$ fərqinin işarəsi $f'(e)$ –nin işarəsi ilə tamamilə təyin olunur. Əgər $f'(x)$ hər yerdə müsbətdirsə, onda $f'(e)>0$ olar. Buradan alarıq ki, $f(d)>f(c)$, yəni $f(x)$ (a,b) intervalında artandır. Əgər $f'(x)$ hər yerdə mənfidirsə, onda $f'(e)<0$ olar. Buradan $f(d)<f(c)$, yəni $f(x)$ (a,b) intervalında azalandır. Nəhayət, əgər törəmə hər yerdə sıfıra bərabərdirsə onda $f'(e)=0$ və $f(d)-f(c)$ fərqi istənilən $d,c\in(a,b)$ üçün (a,b) intervalında sabit olar.

2. Funksiyanın qrafikinin qabarıqlığı və çöküklüyü. Əyilmə nöqtələri. $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin bütün nöqtələri (a,b) intervalında bu qrafikə çəkilmiş istənilən toxunandan yuxarıda qalarsa, onda qrafik bu intervalda *qabarıq*, əgər qrafikin bütün nöqtələr (b,c) intervalında çəkilən toxunandan aşağıda qalarsa, onda bu intervalda *çökük* adlanır (şəkil 1).



Şəkil 1.

Teorem 1. **Əgər $f(x)$ funksiyası intervalda iki dəfə diferensiallanandırsa və onun bütün nöqtələrində $f''(x)>0$ $(f''(x)<0)$ olarsa, onda onun qrafiki bu interavalda qabarıqdır (çökükdür).**

Qrafikin qabarıq hissəsini onun çökük hissəsindən ayıran nöqtəyə qrafikin əyilmə nöqtəsi deyilir (Şəkil 1-də əyilmə nöqtəsi b–dir).

Teorem 2. **Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası b nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunmuş və b nöqtəsi istisna olmaqla bu ətrafda iki dəfə diferensiallanandır, onda b nöqtəsini keçərkən ikinci tərtib törəmə işarəsini dəyişərsə, b nöqtəsi qrafikin əyilmə nöqtəsidir.**

İsbatı. Əgər b nöqtəsindən keçərkən II tərtib törəmə işarəsini müsbətdən mənfiyə dəyişərsə, onda qrafikin qabarıq hissəsi çökük hissəsinə keçir; əgər b nöqtəsindən keçərkən II tərtib törəmə işarəsini mənfidən müsbətə dəyişərsə, onda qrafikin çökük hissəsi qabarıq hissəsinə keçir. Hər iki halda qrafikin $(b, f(b))$ nöqtəsi onun qabarıq və çökük hissələrini ayırır, deməli əyilmə nöqtəsidir.

3. Funksiyanın tədqiqinin planı və qrafikinin qurulması. Planın məzmunu:

1) funksiyanın təyin oblastının tapılması;
2) funksiyanın dövri olmasını, cüt və ya tək olmasını müəyyən etmək;
3) funksiyanın kəsilmə nöqtələrinin tapılması (onların lazım olduqda növlərinin müəyyən edilməsi);
4) funksiyanın qrafikinin asimptotlarının tapılması və ya asimptotların olmadığına əmin olmaq;
5) funksiyanın qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapmaq, bu nöqtələr kəsilmə nöqtələri ilə bərabər təyin oblastını sabit işarəli intervallara bölür;
6) funksiyanın törəməsinin tapılması, onun artma və azalma intervallarının və ekstremumlarının tapılması;
7) ikinci tərtib törəmənin, qabarıqlıq və çöküklük intervallarının, əyilmə nöqtəsinin tapılması;
8) funksiyanın təyin oblastının sərhəd nöqtələrində qiymətinin və ya onun limitini tapın;
9) tədqiqatın nəticələrindən istifadə edərək onun qrafikinin qurulması.

Misal 1. $y = \dfrac{a}{\left(1 + ce^{-dx}\right)}$ funksiyasının qrafiki logistika əyrisi adlanır. İqtisadiyyatda bu əyridən istehlak əşyalarının istehsalının artımı meylinin təyin edilməsində istifadə edilir. Tutaq ki, $a = 6, c = 2$ və $d = 1$, onda $y = \dfrac{6}{\left(1 + 2e^{-x}\right)}$.

Bu funksiyanı tədqiq edək və onun qrafikini quraq.

1) Funksiyanın təyin oblastı bütün ədəd oxudur;
2) Funksiya ümumi şəkillidir;
3) Kəsilmə nöqtələri yoxdur;
4) Şaquli asimtotları yoxdur,maili asimptotu var:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\left(1 + 2e^{-x}\right)x} = 0; \qquad b = \lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\left(1 + 2e^{-x}\right)} = 6;$$

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{\left(1 + 2e^{-x}\right)x} = 0; \qquad b = \lim_{x\to-\infty}\frac{6}{\left(1 + 2e^{-x}\right)} = 0;$$

Deməli əyrinin iki maili asimptotu var: $y = 6$- sağ-tərəfli və $y = 0$ – soltərəfli;

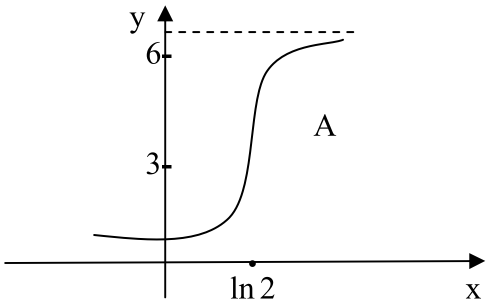
5) Qrafikin Ox oxu ilə kəsişmə nöqtəsi yoxdur, funksiya hər yerdə müsbətdir;

6) Törəmə $y' = \dfrac{12e^{-x}}{\left(1 + 2e^{-x}\right)^2} > 0$ - hər yerdə müsbətdir, deməli funksiya hər yerdə artandır və ekstremumları yoxdur;

7) II tərtib $y'' = \dfrac{12e^{-x}\left(2e^{-x} - 1\right)}{\left(1 + 2e^{-x}\right)^3}$ törəməsi $x = \ln 2$ olduqda sıfıra bərabər olar. $A(\ln 2, 3)$ nöqtəsi əyilmə nöqtəsidir, belə ki, II tərtib törəmə $\ln 2$ ətrafında işarəsini dəyişir;

8) $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = 0$ və $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 6;$

9) funksiyanın qrafikini quraq (şəkil 2)



Şəkil 2.

4. Funksiyanın sıfırlarının tapılması, tənliklərin təqribi həlli. Əgər $f(c)=0$ bərabərliyi doğru olarsa, onda c ədədinə $f(x)=0$ *tənliyinin kök*ü deyilir. Digər tərəfindən arqumentin $f(x)$-i sıfıra çevirən qiymətinə *funksiyanın sıfırı* deyilir. Beləliklə, $f(x)$ funksiyanın sıfırı $f(x)=0$ tənliyinin köküdür. Funksiyanın sıfırı onun qrafikinin absis oxu ilə kəsişmə nöqtəsidir, ona görə də onların tapılması funksiyasının qrafikinin qurulması üçün vacibdir. Verilmiş tənliyin izolə edilmiş köklərinin tapılması üçün iki üsul göstərək (c kökü o zaman izolə edilmiş adlanır ki, həmin parçada başqa köklər yoxdur və parçanın üç nöqtələrində funksiyalarının qiymətləri müxtəlif işarəlidir).

Vətərlər üsulu: Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsiməzdir. $A(a, f(a))$ və $B(b, f(b))$ nöqtələrini birləşdirək və AB vətərinin tənliyini yazaq:

$$\frac{(y - f(a))}{(f(b)-f(a))}=\frac{(x-a)}{(b-a)}$$

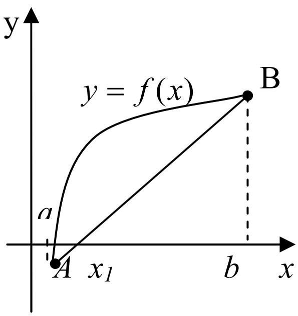
$f(x)=0$ tənliyinin təqribi kökü olaraq AB vətərinin OX oxu ilə kəsişmə nöqtəsi olan x_1 nöqtəsini götürək (şəkil 3). Vətərin tənliyində $x=x_1$ götürək və $y=0$ olduğunu nəzərə alaraq onu x_1 -ə görə həll edək. Onda alarıq:

$$c \approx x_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{(f(b) - f(a))}.$$

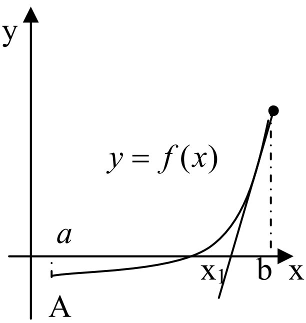
Toxunanlar üsulu (Nyütonun toxunanlar üsulu). Tutaq ki, $f''(x)$, $[a,b]$ parçasında işarəsini dəyişmir. $B(b, f(b))$ nöqtəsində funksiyanın qrafikinə çəkilən toxunanın tənliyini tapaq. Burada $f''(b)f(b) > 0$ (şəkil 4) şərti ödənir. $y = f(b) + (x-b)f'(b)$ $f(x)=0$ tənliyinin təqribi kökü olaraq toxunması nöqtəsi olan x_1 götürək.

Toxunanın tənliyində $x = x_1,\ y = 0$ götürsək,alarıq:

$$c \approx x_1 = b - \frac{f'(b)}{f'(b)}$$



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Misal 2. $x + e^x = 0$ tənliyinin təqribi həllini toxunanlar üsulu ilə tapaq.

Tutaq ki, $f(x) = x + e^x$, onda $f(-1) = -1 + e^{-1} < 0,\ f(0) = 1 > 0$. $f'(x) = 1 + e^x > 0$ hər yerdə, o cümlədən $[-1,0]$ parçasında ödənildiyindən, bu parçada izolə edilmiş kök var. $f''(x) = e^x > 0$ olduğundan toxunanlar üsulunu tətbiq etmək olar. $f''(0)f(0)>0$ olduğu üçün, yüxarıda dediklərimizdən alarık ki, $x_1=-\frac{1}{2}$.

MƏSƏLƏLƏR

1. Aşağıdakı şərtləri ödəyən $y=f(x)$ funksiyasının təxmini qrafikini qurun: $f(1)=0,\ f'(1)=\frac{1}{\sqrt{3}},\ f(2)=1,\ f'(2)=\sqrt{3}$

Həlli. Koordinat müstəvisində quracağımız qrafik üzərində yerləşən $M(1,0)$ nöqtəsini qeyd edək. *M* nöqtəsindən *30⁰* bucaq altında, *N(2,1)* nöqtəsindən isə *60⁰* bucaq altında düz xəttlər çəkək, onlar quracağımız qrafikin toxunanlarıdır. Sonra verilmiş şərtləri ödəyən hamar əyrini çəkək. Əlbəttə, verilmiş şərtləri ödəyən funksiyaların sayı sonsuzdur.

2. Yenidən Uilson düsturuna qayıdaq (bax 6.1. p.2). Vahid zamanda partiyanın Q həcmindən asılı olaraq, faktura xərcləri, saxlanma xərcləri və yekun xərcləri aşağıdakı düsturlarla ifadə olunur: KM/Q, $hQ/2$ və $KM/Q+hQ/2$
Bir koordinat sistemində bu funksiyaların qrafiklərini qurun, optimallıq kriteriyasının ödənildiyini yoxlayın.

3. Funksiyanın tədqiqi planına raiyət edərək, aşağıdakı funksiyaların qrafiklərini qurun:

a) $y=\frac{(x-1)}{(x+1)^2}$; b) $y=x+e^{-x}$

HİSSƏ 2. RİYAZİ ANALİZ İQTİSADİ ƏLAVƏLƏRLƏ

Mövzu 7.
ÇOXDƏYİŞƏNLİ FUNKSİYALAR VƏ ÇOXÖLÇÜLÜ FƏZALAR

7.1. Çoxdəyişənli funksiyalar

1. Çoxdəyişənli funksiyaların tərifi. Bir çox konkret çoxdəyişənli funksiyalar yaxşı məlumdur. Bir neçə sadə misallar gətirək.

Misal 1.

a) Düzbüjaqlı parallepipedin həjmi $V = abc$, burada a, b, c onun uzunluğu, eni və hündürlüyüdür, yəni düzbüjaqlı parallepipedin həjmi onun üç ölçüsünün funksiyasıdır;

b) Üçbujağın sahəsi Heron düsturuna əsasən

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, burada a,b,c onun üç tərəfinin uzunluğudur, $P = \left(\dfrac{a+b+c}{2}\right)$- yarımperimetrdir, yəni üçbujağın sahəsi üç arqumentin–onun tərəflərinin uzunluğunun funksiyasıdır;

j) İki jisim arasındakı qravitasiya qüvvəsi $F = \frac{\gamma mM}{R^2}$,

burada $m,\ M$ jisimlərin kütləsi, R - onlar arasındakı məsafə və γ -qravitasiya sabitidir.

Bütün bu funksiyalar üç asılı olmayan dəyişənlərin və ya arqumentlərin funksiyalarıdır. Bunlara ona görə asılı olmayan deyirlər ki, birinin aldığı qiymət digərlərinin qiymətlərini təyin edə bilmir.

Funksiyanın ümumi anlayışı I hissədə bölmə 4.2. b. 1-də verilmişdir. Qısa olaraq onu təkrar edək.

Tutaq ki, X və Y çoxluğları verilmişdir. Fərz edək ki, hər hansı f üsulu ilə X çoxluğunun hər bir x elementinə qarşı Y çoxluğunun bir $y = f(x) \in Y$ elementi qarşı qoyulur. Onda f uyğunluğuna təyin oblastı $D(f) = X$ və qiymətlər oblastı $R(f) \in Y$ olan *funksiya* deyilir. x -ə asılı olmayan *dəyişən* və yaxud *arqument*, $y = f(x)$ isə *funksiyanın qiyməti* və yaxud *asılı dəyişən* adlanır.

$\{(x, y) : X \in D(f)\}$ jütlükləri çoxluğu f *funksiyasının qrafiki* adlanır.

İndi isə çoxdəyişənli funksiya anlayışını müəyyən edək. Çox hallarda funksiyanın təyin oblastının elementləri özləri mürəkkəb strukturlu olurlar. Tutaq ki, bir neçə $X_1, ..., X_n$ çoxluqları verilmişdir. Fərz edək ki, hər hansı f üsulu ilə $(x_1, ..., x_n)$ yığımına qarşı bir $y = f(x) \in Y$ elementi qarşı qoyulur, burada $x_i \in X_i$. Onda f uyğunluğu təyin oblastı $D(f)$ olan n *dəyişəndən asılı funksiya* adlanır, burada təyin oblastı bütün $(x_1, ..., x_n)$

vektor-yığımından ibarətdir. Bu dəstin hər bir komponenti *asılı olmayan dəyişən* və yaxud *arqument* adlanır.

Misal 2. a) müəssisə n növ məhsul istehsal edir və bu məhsulları $p_1,...,p_n$ qiymətinə satır. Satışın həjmi $x_1,...,x_n$ olduqda gəlir $w = p_1x_1 + ... + p_nx_n$ olur;

b) 2 ölçülü kvadrat matrisin determinantı bu matrisin bütün dörd elementindən asılı olan funksiyadır; tutaq ki, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ onda $\Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

j) Mənzil haqqı yaşayış sahəsinin və yaxud bütün sahənin ölçüsündən, yaşayanların sayından, elektrik, qaz, soyuq və isti sudan, yaşayanların imtiyazlarının olmasından asılıdır. Əgər iki mənzil üçün bütün bu göstərijilər eyni olarsa, onda mənzil haqqı da eyni olar. Deməli mənzil haqqı bu göstərijilərin funksiyasıdır;

ç) Firmanın ödəyəjəyi vergi xüsusi metodika ilə hesablanır, lakin əgər iki firmanın göstərijiləri eynidirsə vergiləri də eyni olar; deməli verginin miqdarı bu göstərijilərin funksiyasıdır.

2. Çoxdəyişənli funksiyaların verilmə üsulları. Birdəyişənli funksiyada olduğu kimi çoxdəyişənli funksiyaları da analitik şəkildə, jədvəllərin köməyi ilə, qrafikin köməyi ilə, hər hansı alqoritmin köməyi ilə (məsələn kompüter proqramları vasitəsilə, bax misal 6) vermək olar. Analitik üsulla verildikdə funksiyanın qiymətləri arqumentdən asılı olaraq düsturla təyin olunur. Çoxdəyişənli funksiyanın jədvəlin göməyi ilə verilməsi çox tez-tez tətbiq olunur. Məsələn, EHM (elektron hesablama maşınları) vasitəsilə mürəkkəb hesablamalar aparıldıqda jədvəldən istifadə etmək zəruri olur. Lakin çoxları ağlına da gətirmirlər ki, ayaqqabı və ya avtomobil emalatxanalarında olan preyskurant, təmirin qiymətinin görülən işlərin asılı, jədvəl üsulu ilə verilmiş funksiyasıdır. Bu işləri siyahısı – təyin oblastı, qiymətləri isə– funksiyanın qiymətlər oblastıdır.

Misal 3. Avtomobil emalatxanasında görüləjək işlərin qiymətinin jədvəli asılmışdır:

Şinlərin çıxarılması	6000 rubl
Kamerin yoxlanması	1000 rubl
Kamerin doldurulması	5000 rubl
Şinlərin geydirilməsi	8000 rubl
Şinlərin balansirovkası	12000 rubl

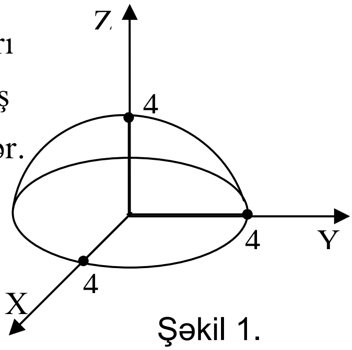
Tutaq ki, n_i - i -ji növ işi göstərən ədəddir, $i = 1,..,5$. onda bütün işlərin dəyəri müştəri üçün aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$w = 6000n_1 + 1000n_2 + 5000n_3 + 8000n_4 + 12000n_5$$

Məsələn, müştəri 5 yeni şin gətirib və bütün köhnə şinləri dəyişmək istəyir, lakin köhnə kamerləri saxlamaq istəyir. Onda, $n_1 = 5,\quad n_2 = n_3 = 0,\quad n_4 = 5,\quad n_5 = 5$ və işlərin ümumi dəyəri $(6000 + 8000 + 12000)\times 5 = 130\,000$ rubl olar. Əlbətdə, bu misalda heç bir «elm» yoxdur və emalatxana işçisi müştərindən görülən işlərin pulunu alır və o, heç bilmirdi ki, onun preyskurantı təmirin dəyərinin yerinə yetirilən işlərdən asılı funksiyanın jədvəl üsulu ilə verilməsidir.

İki və daha çox dəyişəndən asılı funksiyanın qrafikinin mürəkkəbliyinə görə bu üsül çox az tətbiq edilir. Əgər f iki dəyişəndən asılı olarsa, onda onları x və y ilə, funksiyanın qiymətini isə z ilə işarə edərək, $z = f(x, y)$ şəkilində yaza bilərik. Bu funksiyanın qrafiki üç ölçülü fəzada $(x, y, f(x, y))$ səth olar, burada $(x, y) \in D(f)$ - f - funksiyasının təyin oblastıdır.

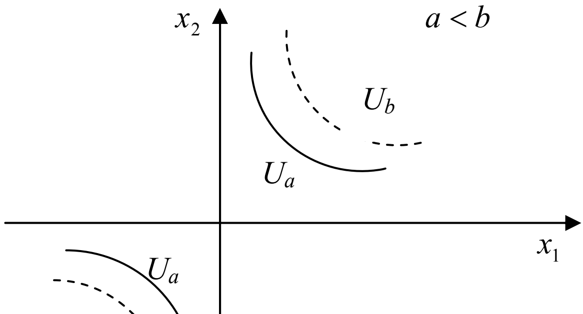
Misal 4. $f = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$ funksiyası üçün belə səth radiusu 4 olan və koordinat başlanğıjından yuxarı yarım sfera olar (şəkil 1).



Şəkil 1.

Çoxdəyişənli funksiyaları əyani təsvir etmək üçün verilmiş səviyyə xəttindən istifadə edirlər. Tutaq ki, $y = f(x_1,...,x_n)$ n dəyişənli funksiyadır və J – hər hansı ədəddir, onda $U_C = \{X = (x_1,...,x_n): f(x) = c\}$ çoxluğu *J səviyyə xətti* adlanır. Əlbəttə, əgər $n > 2$ olarsa, onda bu xətt deyil səth olar və ona görə də *səviyyə səthi* adlana bilər ($n = 3$ olduqda bu üç ölçülü fəzada həqiqi səth olur). Tərifdən görünür ki, müxtəlif səviyyə xəttləri kəsişmirlər.

Misal 5. Tutaq ki, $z = \sqrt{x_1 x_2}$. Onun səviyyə xətti C belə olar: $U_C = \{(x_1, x_2): x_1 x_2 = c, x_1, x_2 > 0$ və ya $x_1 x_2 = c, x_1 x_2 < 0\}$. Asanlıqla görmək olar ki, səviyyə xətti hiperbolanın I və III kvadrantda olan hissəsidir. C artıqja səviyyə xətti koordinat başlanğıjındar uzaqlaşır (şəkil 2).



Funksiyanın *kompüter üsulu* ilə verilməsini aşağıdakı misalla göstərək.

Misal 6. Optimal planlaşdırmanın xətti məsələsinə baxaq: istehsalın elə X planını tapın ki, mümkün olsun və mümkün planlar içərisində ən çox mənfəəti təmin etsin: $CX \to max,\ \ AX \le B,\ \ X \ge 0$.

Burada A istehsal sərfi matrisi, C -xüsusi mənfəətin – sətir vektoru, B-resurs ehtiyatlarının sütun vektoru, X – istehsal olunan məhsulların həjminin sütun vektorudur.

Bu məsələnin həlli X^*- optimal planı və maksimal mənfət $W^* = CX^*$ olar. Qeyd edək ki, son nətijədə maksimal mənfət X^*-C, A, B - nin funksiyasıdır, lakin bu funksiyanın qiymətlərini əlverişli alqoritmin köməyi ilə məsələn, simpleks üsulla tapmaq olar.

3. İqtisadiyyatda istifadə olunan bir neçə çoxölçülü funksiyalar. Belə funksiyaların birölçülü analoqu 4.2. b.2-də baxılmışdır. Çoxölçülü əhəmiyyətlilik funksiyası $U(x) = U(x_1,...,x_n) - X = (x_1,...,x_n)$ əmtəələr dəstinə U əhəmiyyətinə indivinin verdiyi subyektiv ədədi qiymətdir. O azalmayandır, yəni $U(x_1)\le U(x_2)$, $x_1 \le x_2$ əgər olarsa iki dəyişən üçün tipik əhəmiyyətlilik funksiyası $U(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2}$ kimidir.

Xərj funksiyası $J(y)=J(y_1,...,y_n)$ - istehsal olunan $Y=(y_1,...,y_n)$ məhsullarının həjmindən asılıdır. Bu funksiya da azalmayandır.

Çoxfaktorlu istehsal funksiyası $y=F(x)=F(x_1,...,x_n)$ - istehsal olunan məhsulların həjmi və ya dəyəri ilə emal olunan resursların həjmi arasındakı asılılıqdır. Bu da azalmayandır. Ən çox yayılmış istehsal funksiyası – Kobba-Duqlas funksiyasıdır: $y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ burada A,α,β mənfi olmayan sabitlərdir və $\alpha+\beta\le 1$, K – isə fondların dəyər və ya natural şəkildə ifadəsidir (məsələn dəzgahların sayı); α - əmək resurslarının həjmidir – fəhlələrin sayı, adam – günləri sayı və s., y - istehsal olunan məhsuldur, dəyər və ya natural şəkildə verilə bilər.

İqtisadi məzmunlu çoxdəyişənli funksiyalara aid bir misal da göstərək.

Misal 7. Müəssisənin istehsal sahəsi və anbarı var. Anbar işin ahəngini təmin edir – əgər məhsul vaxtında satılmazsa, onu anbarda saxlamaq olar. Anbarın olması saxlanma xərjlərinə səbəb olur. Sadə halda bu xərj vahid zamanda məmulatların i sayı ilə mütənasib olar, yəni bu xərj h_i ilə bərabərdir: burada h – bir məmulatın vahid zamanda saxlanma xərjidir. Sadə halda vahid zamanda istehsal xərjləri Cu olar, burada u vahid zamanda istehsal olunan məmulatların sayıdır, C isə bir məmulatın maya dəyəridir. Bu xərjlərə faktura xərjləri K əlavə edilir, bu vahid zamanda müəssisənin işlək vəziyyətində saxlanma xərjidir. Vahid zamanda bütün xərjlər $K+Cu+hi$ olar.

MƏSƏLƏLƏR

1. Aşağıdakı jisimlərin həjmi, onların səthlərinin funksiyasıdırmı:

a) kürə, b) düz dairəvi silindr.

Javab: a) bəli, b) yox (ona görə ki, müxtəlif həjmə, lakin eyni səthə malik silindirlər var.

2. Qəzetdə oxudunuz ki, 1997-ji ildə rəsmi kurs 1 dollar=5810 rubl və 1 alman markası = 3210 rubl. Buna uyğun olaraq siz hesablayırsınız ki, 1 dollara 5810/3210 $\approx$1,8099 alman markası alarsınız. Əslində Siz 1 dollara na qədər alman markası almalısınız?

Həlli. Yuxarıda hesablanmış kurs rəsmi kursudur, daha doğrusu dolların alman markasına nisbətən nəzəri kursudur. Reallıqda isə istənilən valyutadəyişmə məntəqəsində müxtəlif valyutaların alqı-satqı jədvəli asılır. Valyutadəyişmə məntəqəsinin işçisinin ardıjıllıq hərəkəti belədir: O, rubla bizdən dollar alır, sonra isə bizə alman markasını rubla satır. Tutaq ki, *D, d* dolların satış və alış qiymətləridir, yəni D rubl vergi bir dollar ala bilərsiniz, bir dolları verib siz d rubl alırsınız *(D>d)*. Analoci olaraq – *N, n* alman markası haqqında danışmaq olar. Siz 1 dollar verdikdə, məntəqənin işçisi sizə d/N marka verir. Bu isə dolların markaya görə kross-kursudur. Beləliklə, əgər *D, d=5830,5800, N, n =3230,3200,* olarsa, onda bir dollara siz *5800/3230=1,7956* marka alarsınız. *1000* dollar dəyişdikdə itki *1809,9 -1,7956=14,3* marka olar. Deməli kross-kurs sizin verdiyiniz valyutanın kursu ilə, sizə verilən valyuta kursunun funksiyasıdır. *1000* alman markasına neçə dollar almağı hesablayın.

3. Fərz edək ki, istehsal xətti struktura malikdir (bax 1.2. b.2): A - xərj norması matrisidir, *P*–resursun qiymətləri sətir-vektorudur, *V*- istehsal olunan məhsulların

qiymətləri sətir-vektorudur; X - istehsal məhsullarının həjminin sütun vektorudur.

Onda $J(x) = PAX$ – xərj funksiyası, $w(x) = VX - PAX$ -buraxılan məhsulların X-həjmindən mənfəət funksiyası. Vektor PA – hansı mənanı verir?

4. $U(x)$ faydalılıq funksiyasının səviyyə xəttinə *etinasızlıq əyrisi* deyilir.

$U(x_1) = U(x_2)$olarsa, onda individ üçün fərqi yoxdur hansı dəst əmtəəyə (x_1 və ya x_2) sahib olsun, onun üçün bu dəstlər eyni əhəmiyyətlidir. Aşağıdakı əhəmiyyətlilik funksiyaları üçün bir neçə etinasızlıq əyrilərini tapın:

a) $U(x_1, x_2) = x_1, x_2$; b)$U(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$;

j) $U(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

5. İstehsal funksiyasının səviyyə xəttinə *izokvant* deyilir. Kobbi-Duqlas tipli istehsal funksiyasının bir neçə izokvantını tapın.

6. Xərjlərinin strukturu misal 7-də olduğu kimi olan müəssisənin göstərijiləri belədir: k=20, j=4, h=1.

Xərjləri jədvəllə iki çıxış – U və i üçün verin.

7.2. Çoxölçülü fəzalar

1. Fəzaların ierarxiyası. Alman riyaziyyatçısı H.Kantor çoxluğa «bizim intuisiyamızda və fukirlərimizdə fərqlənən obyektlərin bir tam şəkildə birləşməsi» kimi tərif vermişdir. Çoxluq anlayışı daha jiddi struktur kriteriyası nəzərdə tutmur. Tam ədədlər çoxluğu sadəjə çoxluq deyil – burada onun elementlərini toplamaq və birini digərindən çıxmaq olar. Bütün ədədlər çoxluğu isə daha zəngin struktura malikdir – burada limitə keçmə əməliyyatı təyin olunmuşdur, yəni hansı ardıjıllığın hansı ədədə yığıldığı göstərilmişdir. 1.1. bölməsinin III fəzasına baxmışdıq. Onun elementləri n ölçülü sətir vektorlarından ibarət idi, yəni n ədəddən nizamlanmış yığım idi. Qeyd edək ki, R^n sadəjə çoxluq deyildir, onun elementlərini toplamaq, ədədə vurmaq olar ki, bu da ədədlər üzərindəki əməllərə çox oxşayır (bax bölmə 1.1. p.2).

Aşağıda daha zəngin struktura malik çoxluqlara misallar göstərəjəyik: normallaşmış fəzalar, Evklid fəzası və s.

2. Evklid fəzası. Tutaq ki, $X=(x_1,...,x_n)$, $Y=(y_1,...,y_n)$ $-R^n$ olan iki vektordur, onda $x_1y_1+...+x_ny_n$ ədədi X,Y *vektorlarının skalyar hasili* adlanır və $X\cdot Y$ və ya XY ilə işarə olunur.

Skalyar hasilin aşağıdakı xassələrini yada salaq:

a) $XY=YX$;

b) $X(Y+Z)=XY+XZ$ ixtiyari X,Y,Z vektorları üçün;

v) $\lambda X\cdot Y=\lambda XY$ ixtiyari X,Y vektorları və ixtiyari λ ədədi üçün.

Skalyar hasilli xətti fəza *Evklid fəzası* adlanır. Evklid fəzası xətti fəza olmaqla yanaşı, daha zəngin struktura malikdir. Bu fəzada vektorun uzunluğunu, vektorlar arasında qalan bujağı təyin etmək olar. X vektorunun uzunluğu $\sqrt{x^2}$ *ədədinə* deyilir və $|X|$ ilə işarə edilir.

Venktorun uzunluğunun aşağıdakı xassələrini asanlaqla isbat etmək olar:

a) $|X|\geq 0$ və $|X|=0$ yalnız və yalnız $X=0$ olarsa;

b) $|\lambda X| = |\lambda||X|$ ixtiyari X vektoru və λ ədədi üçün;

j) $|X+Y| \leq |X| + |Y|$ ixtiyari X, Y vektorları üçün

X və Y vektorları arasındakı φ bujağı belə təyin olunur:

$\cos\varphi = \dfrac{XY}{(|X|\cdot|Y|)}$ belə ki, $\varphi = \arccos\dfrac{XY}{(|X|\cdot|Y|)}$.

Asanlıqla görmək olar ki, $X \cdot Y = |X| \cdot |Y| Cos\varphi$

R^n fəzasında $X = (x_1, ..., x_n)$ vektorunun uzunluğunu analitik şəkildə, onun komponentlərinin funksiyası kimi vermək olar:

$$|X| = \sqrt{X^2} = \sqrt{x_1 x_1 + ... + x_n x_n}$$

Misal 1. $X = (3,4)$, $Y = (8,6)$ vektorlarının uzunluğunu və onlar arasındakı bujağı tapın.

$$|X| = \sqrt{X^2} = 5, \quad |Y| = \sqrt{Y^2} = 10. \quad XY = 24 + 24 = 48,$$

$$\cos\varphi = \frac{XY}{(|X|\cdot|Y|)} = \frac{48}{50}, \quad \varphi \approx 17^0$$

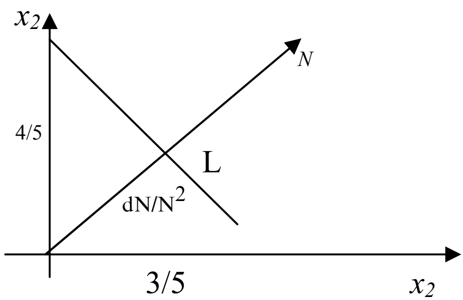
Vektorların skalyar hasili sıfıra bərabər olarsa, yəni onlar arasındakı bujağın kosinusu sıfıra bərabər olarsa, onda vektorlar perpendikulyar adlanır.

Misal 2. R^2 fəzasında elə vektorlar çoxluğunu tapın ki, onların $N = (n_1, n_2)$ vektoru ilə skalyar hasili d-yə bərabər olsun.

Axtarılan çoxluğu L ilə işarə edək, onda $L = \{X : XN = d\}$ olar. Əgər $X = (x_1, x_2)$ olarsa, onda

$L = \{(x_1; x_2): n_1x_1 + n_2x_2 = d\}$. Həndəsi nöqteyi-nəzərdən bu $\frac{dN}{N^2}$ nöqtəsindən keçən və N vektoruna perpendikulyar olan düz xəttdir. (Əmin olun ki, $\frac{dN}{N^2}$ nöqtəsi L - in üzərindədir).

Tutaq ki, məsələn, $N = (3, 4)$ və $d = 5$, onda L $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ nöqtəsindən keçən və N vektoruna perpendikulyar olan xəttidir (şəkil 1).



Şəkil 1.

Adi xətti fəza ilə evklid fəzası arasında normallaşdırılmış fəza. Bu xətti fəzadır və hər bir X vektoru üçün onun *norması* adlanan $\|X\|$ ədədi qarşı qoyulur və aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a) $\|X\| \geq 0$ və $\|X\| = 0$ yalnız və yalnız $X = 0$ olduqda;

b) $\|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|$ ixtiyari X vektoru və λ ədədi üçün;

j) $\|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ ixtiyari X, Y vektorları üçün.

Bu şərtlərdən göründüyü kimi norma evklid fəzasında vektorun uzunluğuna çox oxşayır.

Qeyd. Bizim üçün əsas evklid fəzası olajaq; yəni ədədi xətti fəza istənilən sonlu ölçülü və sklayar hasilin müəyyən olduğu fəza. Lakin bir çox baxdığımız anlayışlar istənilən evklid fəzasına və hətta normallaşmış və ümumi xətti fəzaya aid etmək olar.

R^n fəzasında təyin oluna bilən bir sıra tipik çoxluqlara baxaq.

Hipermüstəvi - $G(X, d) = \{Y : YX = d\}$ çoxluğudur, burada X Evklid fəzasının ixtiyarı fiksə olunmuş elementidir, yəni bu elə vektorlar çoxluğudur ki, onların verilmiş X vektoru ilə skalyar hasili sabit d ədədinə bərabər olsun. X vektoru bu hipermüstəvinin normal vektoru adlanır. Müxtəlif d -lər üçün $G(X, d)$ hipermüstəviləri kəsişmmirlər, ona görə də onları *paralel* adlandırırlar. $n = 3$ olduqda üçölçülü fəzada onlar əsl paralel müstəvilər olur. Yarımfəza - $P(X) = \{Y : YX \geq 0\}$ çoxluğudur, burada X – Evklid fəzasının ixtiyari elementidir. Yarımfəzanın tərifindəki bərabərsizliyin jiddi və qeyri-jiddi olmasından asılı olaraq, yarımfəza qapalı və ya açıq adlanır (deməli yuxarıdakı tərifdə qapalı yarımfəza nəzərdə tutulur). Onlar uyğun olaraq $G(X, 0)$ sərhəd hipermüstəvini özündə saxlayır və ya saxlamır. Yarımfəza aşağıdakıların çoxölçülü analoqudur: a) $n = 1$ olduqda başlanğıj nöqtəli və ya başlanğıj nöqtəsiz şüa; b) $n = 2$ olduqda sərhəd düz xəttli və ya sərhəd düz xəttsiz yarım müstəvi; j) $n = 3$ olduqda sərhəd yarımmüstəvili və ya sərhəd yarımmüstəvisiz «həqiqi» yarımfəza və s.

Mərkəzi X nöqtəsində olan r radiuslu $k(x.r)$ kürəsi $\{x : |y - x| \leq r\}$ çoxluğuna deyilir. Əgər tərifdə jiddi bərabərsizlik olarsa, onda kürə açıq, əgər qeyri-jiddi bərabərsizlik olarsa, onda kürə qapalı adlanır.

Birölçülü halda-bu uyğun olaraq açıq interval və qapalı interval olar ki, buna da seqment deyirlər. İkiölçülü halda – bu açıq dairə, yəni onu əhatə edən çevrəsiz və çevrəsi ilə birlikdə dairə olar. Xətti fəzada iki X, Y nöqtəsindən keçən düz xətt $-L = \{X + \lambda(Y - X) : \lambda \in R\}$ *çoxluğuna* deyirlər. R^n fəzasında bu çoxluğu belə də vermək olar:

$$L = \left\{ Z : \frac{(z_1 - y_1)}{(y_1 - x_1)} = \ldots = \frac{(z_n - y_n)}{(y_n - z_n)} \right\}$$

3. Evklid fəzasının topologiyası. Fəzanın topologiyası–limitə keçmək nöqteyi-nəzərindən onun hansı quruluşa malik olması sualının javabıdır. Bu nöqteyi-nəzərdən E evklid (normallaşdırılmış) fəzasının topologiyası ədədlər fəzasının topologiyasına çox oxşayır – yalnız X ədədinin mütləq qiyməti X vektorunun uzunluğu (norması) ilə əvəz olunur, bunun da nətijəsində $A \in E$ nöqtəsinin $\varepsilon-$ ətrafı - $O_\varepsilon(A) = \{X : (X - A) < \varepsilon\}$ çoxluğu olur ki, bu da mərkəzi A nöqtəsində olan ε radiuslu kürədir. Əgər çoxluq ona daxil olan istənilən nöqtənin hər hansı ətrafını da özündə saxlayırsa, onda belə çoxluğa *açıq çoxluq* deyilir. Əgər elə m ədədi tapmaq mümkün olsa ki, bütün $X \in M$ üçün $|X| \leq M$ olarsa, M çoxluğu məhdud çoxluq adlanır.

Tərif 1. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $K \in N$ tapmaq mümkün olsa ki, istənilən $n > K$ üçün $|X_n - A| < \varepsilon$ olsun, onda $A \in E$ elementi $(X_n) \subset E$ ardıjıllığının limiti adlanır. Bu belə işarə edilir: $A = \lim_{n\to\infty}(X_n)$.

Tərif 2. Əgər istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq mümkün olsa ki, $0 < |X - A| < \delta$ olduqda $|f(x) - a| < \varepsilon$ olsun, onda a ədədinə X A-ya yaxınlaşdıqda $(X \to A)$ $f(x)$ funksiyasının *limiti* deyilir və $a = \lim_{x \to A} f(x)$ kimi işarə edilir.

Beləliklə, $a = \lim_{\Delta x \to 0} f(B + \Delta x)$ belə başa düşülür:

istənilən $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq olar ki, $0 < |\Delta X| < \delta$ olduqda $|f(B + \Delta X) - a| < \varepsilon$ olur.

Tərif 3. Əgər $f(x)$ funksiyası A nöqtəsinin müəyyən ətrafında təyin olunubsa və $\lim_{x \to A} f(x) = f(A)$ olarsa, $f(x)$ funksiyası A nöqtəsində *kəsilməz* adlanır.

Evklid (normallaşdırılmış) fəzasında sonsuz kiçilən kəmiyyətə neçə tərif verildiyini xüsusi olaraq yada salaq. Tutaq ki, $\alpha(x)$ evklid fəzasında təyin olunmuş funksiyadır, onda əgər $\lim_{x \to 0} \alpha(x) = 0$ olarsa α *sonsuz kiçilən kəmiyyət* adlanır. İndi sonsuz kiçilən kəmiyyətlərin nisbətinə baxmaq olar, yəni nə vaxt onlar ekvivalentdirlər, nə vaxt biri digərindən daha yüksək tərtibdən sonsuz kiçiləndir və s.

Misal 3. R^n–də verilmiş $M(X) = \max|x_i|$ funksiyasının X ilə eyni tərtibdən sonsuz kiçilən olduğunu yoxlayın.

Doğurdan da, $M(X) \le |X| \le nM(X)$ olar ki, bunu da isbat etmək lazım idi.

Buradan belə çıxır ki, R^n fəzasında vektorlar ardıjıllığının limiti yalnız və yalnız o zaman sıfıra bərabər olar ki, bu ardıjıllığın vektorlarının hər bir komponenti sıfra yaxınlaşsın. Birdəyişənli funksiyaların limitlərinin və kəsilməzliyinin, sonsuz kiçilən kəmiyyətlərin və s. əsas xassələri çoxdəyişənli funksiyalar üçün də öz güjündə qalır. Bütün bunlar bizə imkan verir ki, çoxdəyişənli ədədi funksiyalar üçün diferenisal hesabının zəruri anlayışlarına birdəyişənli funksiyalardakına analoci tərif verək.

4. Evklid fəzasında verilmiş funksiyaların xassələri. Evklid fəzasının zəngin strukturunu nəzərə alaraq, birdəyişənli funksiyalar yçyn təyin olunmuş bir çox anlayışlar (bax. 4.2. p.2). Evklid fəzasında verilmiş çoxdəyişənli funksiyalar üçün də analoji olaraq köçürülür. Aydındır ki, birdəyişənli və çoxdəyişən funksiyaların bir sıra oxşar cəhətləri olduğu kimi fərqli cəhətləri var. Oxşarlıq ondan ibarətdir ki, çoxdəyişənli funksiyaların elə xassələri yoxdur ki, o xassələr birdəyişənli funksiyalarda olmasın. Lakin çoxdəyişənli funksiyalar üçün olan anlayışlar bir qayda olaraq birdəyişənli funksiyalarda tanış olduğumuz anlayışlardan mürəkkəb olur. Birdəyişənli funksiyalar cüt, tək, artan, azalan, məhdud və s. ola bilər. Bu anlayışlar çoxdəyişənli funksiyalar üçün necə olur? Məsələn, çoxdəyişənli funksiya nə vaxt artan və ya azalan adlanır. Birdəyişənli funksiyalar üçün bu anlayışları yada salaq: $f(x)$ funksiyası M çoxluğunda artan (azalan) adlanır, əgər $x_1, x_2 \in M$ və $x_1 < x_2$ olduqda $y_1 < y_2$ $(y_1 > y_2)$ olur; $f(x)$ funksiyası M çoxluğunda azalmayan (artmayan) adlanır, əgər $x_1, x_2 \in M$ və $x_1 \le x_2$ olduqda $y_1 \le y_2$ $(y_1 \ge y_2)$ olur. Beləliklə, hər şeydən əvvəl tədqiq olunan M çoxluğundan götürülmüş vektor dəstləri üçün tərtib nisbətləri müəyyənləşməlidir. Məsələn, əgər funksiyanın arqumuntləri ədədi xarakterlidirsə və ya xətti fəzanın elementləridirsə, onda artan və ya azalmayan çox dəyişənləri funksiyaların tərifi birdəyişənli funksiyalarda olduğu kimi verilir: M çoxluğunda verilmiş $y(x)$ funksiyası artan (azalan) adlanır, əgər $x_1, x_2 \in M$ və $x_1 < x_2$ olduqda $y_1 < y_2$ $(y_1 > y_2)$ olsun. $y(x)$

funksiyası M çoxluğunda azalmayan (artmayan) adlanır, əgər $x_1, x_2 \in M$ və $x_1 \le x_2$ olduqda $y_1 \le y_2$ $(y_1 \ge y_2)$ olsun.

Misal 4. Bölmə 7.1. – də verilmiş 1, 2 misalındakı bəzi funksiyaları yada salaq:

a) Düzbucaqlı paralelipipedin həcmi $V = abc$ burada a, b, c onun uzunluğu, eni və hündürlüyüdür.

b) Heron düsturuna əsasən üçbucağın sahəsi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, burada a, b, c üçbucağın tərəflərinin uzunluğu, $p = (a+b+c)/2$ yarım parmetridir, yəni üçbucağın sahəsi üç arqumentli–onun tərəflərinin uzunluqlarının funksiyasıdır;

c) İki cisim arasında qravitasiya qüvvəsi $F = \gamma mM/R^2$, burada *m, M* cisimlərin kütləsi, R–onlar arasındakı məsafə və γ qravitasiya sabitidir;

ç) Müəssisə *n* növ məhsul istehsal edir və onları uyğun olaraq $P_1, \cdots, P_n$ qiymətinə satır; Satışın həcmi $x_1, \cdots, x_n$ olduqda $W = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$ olur;

d) 2 ölçülü kvadrat matrisin ΔA - determinantı bu matrisin bütün dödr elementinin funksiyasıdır:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ olduqda } \Delta(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

e) Mənzil haqqı mənzilin bütün sahəsindən, yaşayış sahəsindən, yaşayanların sayından, elektrik enerjisinin, qazın, soyuq və isti suyun qiymətindən, yaşayanların imtiyazlarından asılıdır.

Əgər iki mənzil üçün bütün bu göstəricilər eyni olsa, onda mənzil haqqları da eyni olar. Deməli, mənzil haqqı bu göstəricələrin funksiyasıdır;

ə) Firmanın ödəyəcəyi vergi xüsusi metodika ilə hesablanır, əgər iki firma üçün bu göstəricilər eyni olarsa, onda vergi də eyni olar; deməli, verginin miqdarı bu göstəricilərin funksiyaasıdır.

Yuxarıdakı funksiyalardan hansı artandır?

Cavab: *«a», «b», «c».*

Təyin oblastı sıfra nəzərən simmetrik olan *f* funksiyası üçün $f(-x)=f(x)$ $\left(f(-x)=-f(x)\right)$ istənilən $x\in D(f)$ olarsa, $f(x)$ *funksiyası cüt (tək) funksiya adlanır.* Əgər elə *m* varsa ki, istənilən $x\in M$ üçün $f(X)\le m$ $\left(f(x)\ge m\right)$ olsun, onda *f* funksiyası M çoxluğunda yuxarıdan (aşağadan) məhdud funksiya adlanır.

Yuxarıdan və aşağıdan məhdud olan funksiyalar həmin çoxluqda məhdud funksiyalar adlanırlar. Qabarıq M çoxluğunda $X,Y\in M$ və istənilən $0\le\lambda\le1$ üçün $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $\left(\ge\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\right)$ olarsa, onda *f* funksiyası qabarıq (çökük) adlanır.

Çoxdəyişənli funksiyadan «çox» sayda birdəyişənli funksiyalar almaq olar. Tutaq ki, $y=y(x_1,\cdots,x_n)$ – n dəyişənli funksiyadır. $x_2^0,\cdots,x_n^0$ – dəyişənlərinin qiymətlərini fiksə edək, x_1 - isə dəyişir. Sonda birdəyişənli funksiya alarıq: $y=y(x_1,x_2^0,\cdots,x_n^0)=y_1(x_1)$. «Funksiya $y_1(x_1,\cdots,x_n)$ $x_2= =x_2^0,\cdots,x_n=x_n^0$ olduqda x_1 - ə görə artandır» ifadəsinin nə olbuğu indi aydındır – bu $y_1(x_1)$ funksiyası üçün deyilmiş ifadədir. Analoji olaraq funksiyanın x_1 - ə görə tək və ya cüt olmasını və s. başa düşmək lazımdır.

Misal 5. $a)$ $z=x-y$ funksiyası ixtiyari y üçün x-ə görə artandır və istənilən x üçün y-ə görə azalandır; $b)$ $z=x^2y$ funksiyası ixtiyari y üçün x-ə görə cüt funksiyadır və istənilən x üçün y-ə görə tək funksiyadır; $v)$ $z=(2+y)\sin x$ funksiyası ixtiyari y üçün x-ə görə dövri funksiyadır.

МЯСЯЛЯЛЯР

1. Tutaq ki, *A*– evklid fəzasının ixtiyariri elementidir. İsbat edin ki, $\lim_{n\to\infty} A/n = 0$.

2. R^2 – fəzasında $\{(x, y): x^2 - y = 0\}$ çoxluğu məhdud-durmu?

3. *E* evklid fəzasında hər hansı *A* vektorunu fiksə edək. $L = \{\lambda A : \lambda \in R\}$ çoxluğu bu fəzada düz xəttdir (bax p.2). Bu çoxluğun qapalı olmasını göstərin, ona görə ki, onun tamamlayıcısı E / L açıqdır. *L* çoxluğu məhduddurmu?

4. İsbat edin ki, ixtiyari hipermüstəvi qapalı çoxluqdur, ona görə ki, onun tamamlayıcısı açıq çoxluqdur. Hipermüstəvi məhdud çoxluqdurmu?

5. R^2, R^3 fəzalarında funksiyanın səviyyə xətti «vektorun uzunluğu» nə deməkdir? $S = \{X : |x| = d\}$ çoxluğu R^2, R^3 - də necə adlana bilər?

6. $X = (x_1, \cdots, x_n)$ vektoru üçün tutaq ki, $\|x\| = \max_i |x_i|$. İsbat edin ki, bu funksiya normanın tərifini ödəyir (bax p.1). Göstərin ki, bu norma «vektorurn uzunluğuna» ekvivalentdir, yəni bir normaya görə sıfırın ətrafı digər normaya görə sıfırın hər hansı ətrafını özündə saxlayır.

Mövzu 8.
XÜSUSİ TÖRƏMƏLƏR

8.1. Çoxdəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələri

1. Xüsusi törəmələr. Çox yer tutan işarələrdən qaçmaq məqsədilə burada yalnız üç dəyişəndən asılı funksiyalara baxacağıq.

Daha çox dəyişəndən asılı funksiaylar üçün bütün mexanizm tamamilə analojidir. Beləliklə, tutaq ki, ədədi $u = f(x, y, z)$ funksiyası açıq *D* oblastının müəyyən ətrafında təyin olunmuşdur. Bu oblastdan hər hansı $M(a,b,c)$ nöqtəsi götürək. Əgər y, z dəyişənlərinin qiymətlərini uyğun olaraq b, c - yə bərabər götürsək, x-i isə dəyişək, onda *u* faktiki olaraq bir x dəyişənindən asılı funksiya olar (heç olmasa a nöqtəsinin müəyyən ətrafında). Ona görə də bu funksiyanın a nöqtəsinin ətrafında törəməsinin olması sualını qoymaq olar. x-ə Δx artımı verək, onda funksiya $\Delta u = f(a+\Delta x, b, c) - f(a, b, c)$ artımını alar ki, buna da x-ə görə xüsusi artım deyilir.

Limitin tərifinə əsasən

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u / \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(a+\Delta x, b, c) - f(a, b, c) \right) / \Delta x .$$

Bu törəmə $f(x,y,z)$ funksiyanın (a, b, c) nöqtəsində x-ə görə xüsusi törəməsi deyilir. Xüsusi törəmni $\partial u/\partial x$ və ya u'_x və ya $f'_x(a, b, c)$ kimi işarə edirlər. Analoji olaraq x, z-i uyğun olaraq a, c - yə bərabər hesab edib y-i dəyişsək alarıq:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \Delta u / \Delta y = \lim_{\Delta y \to 0} \left(f(a, b+\Delta y, c) - f(a, b, c) \right) / \Delta y.$$

Bu limitə $f(x,y,z)$ funksiyasının (a, b, c) nöqtəsində y-ə görə xüsusi törəməsi deyilir və $\partial u/\partial y$ və ya u'_y və ya $f'_y(a, b, c)$ ilə işarə edilir.

Eyni qayda ilə $f(x,y,z)$ funksiyasının (a, b, c) nöqtəsində z'-ə görə xüsusi törəməsi təyin olunur və $\partial U/\partial z$ və ya U'_z və ya $f'_z(a, b, c)$ kimi işarə edilir. Xüsusi törəmələrin hesalanması adi törəmənin hesablanması ilə müqayisədə heç bir yenilik tələb etmir. Sadəcə olaraq xüsusi törəməni hansı dəyişənə görə hesalayırıqsa, digər dəyişənləri sabit kimi qəbul edirik.

Misal 1. $u = x^2 y + 2z$ funksiyasının xüsusi törəmələrini tapaq. $\partial u/\partial x = 2xy; \quad \partial u/\partial y = x^2; \quad \partial u/\partial z = 2$

Əgər bütün xüsusi törəmələri yığsaq, onda üç ölçülü vektor $(\partial u/\partial x,\ \partial u/\partial y,\ \partial u/\partial z)$ alarıq.

Bu vektoru adətən ∇U kimi işarə edirlər və qradiyent adlandırırlar. Ümumi halda n dəyişənli funksiya üçün bu vektor $\nabla U(x_1, \cdots, x_n) = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n)$ olar.

2. İki və daha yüksək tərtibli xüsusi törəmələr. Xüsusi törəmələr həmin arqumentlərin funksiyaları olduğundan onların da xüsusi törəmələrini tapmaq olar. Bu törəmələr ikinci tərtib xüsusi törəmələr adlanır.

Misal 2. $u = x^2 y + 2z$ funksiyasının ikinci tərtib xüsusi törəmələrini tapaq.

$$\partial u/\partial x = 2xy,\ \partial u/\partial y = x^2,\ \partial u/\partial z = 2$$

$$u''_{xx} = (2xy)'_x = 2y\ ; \quad u''_{xy} = (2xy)'_y = 2x;$$

$$u''_{yx} = (x^2)'_x = 2x\ ; \quad u''_{yy} = (x^2)'_y = 0;$$

$$u''_{zx} = (2)'_x = 0\ ; \quad u''_{zy} = (2)'_y = 0;$$

$$u''_{xz} = (2xy)'_z = 0; \quad u''_{zz} = (2xy)'_z = 0$$

$$u''_{yz} = (x^2)'_z = 0$$

Ardıcıl olaraq müxtəlif törəmələrdən alınan törəmələrə qarışıq törəmələr deyilir.

Qarışıq törəmələr aşağıdakılardır:

$$u''_{xy} = u''_{yx} = 2x\ ; \quad u''_{xz} = u''_{zx} = 0\ ; \quad u''_{yz} = u''_{yz} = 0.$$

Bu nəticələr təsadüfü deyildir, belə ki, funksiya üzərinə qoyulmuş müəyyən şərtlər daxilində qarışıq törəmələr bərabər olur. Adətən iqtisadiyyatda istifadə olunan funksiyalar üçün bu şərtlər ödənir. Birtərtibli və yüksək tərtibli törəmələrin tapılmasında istifadə olunan bütün qaydalar çoxdəyişənli funksiyaların xüsusi törəmələrinin tapılmasında da öz gücünü saxlayır–məsələn, mürəkkəb funksiyanın törəməsinin tapılması qaydası. Bunu misalla yada salaq.

Misal 3. Tutaq ki, $u=(2x+y^3)^2$. Mürəkkəb funksiyanın törəməsinin tapılma qaydası tətbiq etsək, alarıq:

$$u'_x = 2(2x+y^3)\cdot 2 = 4(2x+y^3) = 8x+4y^3;$$

$$u'_y = 2(2x+y^3)\cdot 3y^2 = 12xy^3+6y^5; \quad u''_{xx} = (8x+4y^3)'_x = 8;$$

$$u''_{xy} = (8x+4y^3)'_y = 12y^2;$$

$$u''_{yx} = (12xy^3+5y^5)'_x = 12y^2; u''_{yy} = (12xy^2+5y^5)'_y = 24xy+30y^4$$

və s.

Başqa misal olaraq parametrdən asılı funksiyanın törəməsinin tapılması qaydasını qeyd edə bilərik. Tutaq ki, $u=f(x,y,z)$ və x,y,z dəyişənlərinin hər biri *t* parametrinin funksiyasıdır, $x=a(t)$, $y=b(t)$, $z=c(t)$. x,y,z -in yerinə *t* ilə olan ifadəni funksiyada yazsaq, görərik ki, *u* *t* -dən asılı mürəkkəb funksiyadır: $u=f(a(t),\ b(t),\ c(t))$. u'_t - törəməsini necə tapaq? Əlbətdə, onu bir dəyişəndən asılı funksiyanın törəməsinin tapılması qaydası ilə tapmaq olar. Digər tərəfdən isbat etmək olar ki, $u'_t = u'_x\cdot x'_t + u'_y\cdot y'_t + u'_z\cdot z'_t$.

Əlbətdə, görmək olar ki, u'_x ,u'_y , u'_z - i funksiyasının x,y,z arqumentlərinə görə xüsusi törəmələridir, x'_t, y'_t, z'_t isə $x=a(t),\ y=b(t),\ z=c(t)$ funksiyalarının adi törəmələridir.

Misal 4. Tutaq ki, $u=xy^2$ və $x=t,\ y=t$, onda $u=t^3$ və $u'_t=3t^2$. Digər tərəfdən xüsusi törəmələrdən istifadə edərək, alarıq:

$$u'_t = u'_x\cdot x'_t + u'_y\cdot y'_t = y^2\cdot 1 + 2xy\cdot 1 = t^2+2t^2 = 3t^2$$

Bəzən çoxdəyişənli funksiya qeyri-aşkar şəkildə, hər hansı bərabərliklə-çoxdəyişənli düsturlarla verilir. Məsələn, tutaq ki, $F(x, y, z) = 0$ - üç dəyişəndən asılı ifadədir və ixtiyari *x, y* üçün *z* -in yalnız bir qiymətin tapmaq olar ki, $F(x, y, z) = 0$ şərtini ödəsin. Beləliklə, $F(x, y, z) = 0$ bərabərliyi *z* - funksiyasını *x, y* -dən asılı təyin edir, yəni *z* iki dəyişəndən asılı funksiyadır. Belə funkstyanın xüsusi törəmələrinin tapılmasına misalla göstərək.

Misal 5. Tutaq ki, $x^2 y + z = 0$. $\partial z/\partial x$ xüsusi törəməsini tapmaq üçün bərabərlikdə y sabit hesab edərək x görə diferensiallayaq və hesab edək ki, $z - x$-dən asılıdır. Onda alarıq: $2xy + \partial z/\partial x = 0$ deməli, $\partial z/\partial x = -2xy$. Bu nəticəni asanlıqla yoxlamaq olar. Doğrudan da z -i asanlıqla x, y - dən asılı aşkar şəkildə+ifadə etmək olar: $z = -x^2 y.$ $\partial z/\partial x = -2xy$.

3. Xüsusi törəmələrin iqtisadi mənası. Misal kimi Kobba-Duqlasın istehsal funksiyasını götürək (bax.7.1. p.3) $y = AK^{\alpha} L^{\beta}$, burada A, α, β mənfi olmayan sabitlərdir və $\alpha + \beta \leq 1$; *K* - dəyər və ya natural ifadəsində fondun həcmidir, məsələn dəzgahların sayı, L - əmək resurslarının həcmidir, məsələn fəhlələrin sayı; y - buraxılan məhsulun dəyər ifadəsində həcmidir.

$l = y/L$ kəmiyyətini təbii olaraq orta əmək məhsuldarlığı adlandıraq-bu bir fəhlənin istehsal etdiyi məhsulun (dəyər ifadəsində) miqdarıdır. $f = K/L$ kəmiyyətini təbii olaraq orta fond qurucusu və yaxud sadəcə fond qurucusu adlandırırlar. Bu bir vahid əmək resursuna məsələn, bir fəhləyə düşən fondun dəyəridir. $f = y/K$ kəmiyyətini təbii olaraq fond verimi adlandırırlar – bu bir dəzgaha düşən məhsulun (dəyər ifadəsində) miqdarıdır.

Digər tərəfdən, müəssisənin indiki vəziyyətini fiksə edək, yəni fondların *K* həcmini və fəhlələrin L sayını. Onlara uyğun $y = y(K, L)$ - məhsul istehsal olunur. Əgər əlavə bir fəhlə götürsək, onda buraxılışın artımı belə olar: $\Delta y = y(K, L+1) - y(K, L)$. Bu xüsusi artımdır və ona görə də $\Delta y \approx y'_L(K, L) \cdot \Delta L$, $\Delta L = 1$ olduğundan alarık ki. $\Delta y \approx y'_L(K, L)$

Nəticə: istehsal funksiyasının əmək resurslarının həcminə görə xüsusi törəməsi (qısa olaraq buraxılışın əməyə görə törəməsi) təqribi olaraq əlavə bir fəhlənin istehsal etdiyi məhsulun əlavə dəyərinə bərabərdir. Bu səbəbdən də $y'_L = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1}$ xüsusi törəməsi əmək məhsuldarlığının son həddi adlanır.

Əgər fondu bir vahid artırsaq–daha bir dəzgah alsaq, onda bu dəzgahda istehsal olunan məhsulun əlavə dəyəri təqribi olaraq istehsal funksiyasının fondun həcminə görə xüsusi törəməsinə bərabər olar. Bu xüsusi törəmə $y'_k = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}$ fond verimi adlanır.

Həm əmək məhsuldarlığının son həddi, həm də fond veriminin son həddi mütləq kəmiyyətlərdir.

İqtisadiyyatda isə aşağıdakı suala cavab vermək son dərəcə əhəmiyyətli və əlverişlidir: əgər fəhlələrin sayı 1% artsa və ya fond 1% artsa məhsul istehsalı neçə faiz artar? Bu suala cavab vermək üçün «funksiyanın arqumentə görə elastikliyi» anlayışından və ya «nisbi törəmə»(bax. 5.1. p.2) anlayışından istifadə edirlər.

Yada salaq ki, birdəyişənli $y = f(x)$ funksiyası halında funksiyanın arqumentə görə elastikliyi $\left({(\Delta y / y)}\big/{(\Delta x / x)} \right)$ və ya ${y'_x}\big/{(y/x)}$ kəmiyyətinə deyilir. Çoxdəyişənli funksiyalar üçün adi törəmə xüsusi törəmə ilə əvəz olunur. Yenidən

Kobba-Duqlas istehsal funksiyasına baxaq. Məhsul buraxılışının əməyə görə $E_L^y = y'_L \big/ (y/L)$ elastikliyini tapaq.

Yuxarıda tapdığımız y'_L xüsusi törəməsinin və $y-in\ K, L$ vasitəsilə ifadəsini yerinə yazsaq alarıq:

$$E_L^y = \beta A K^\alpha L^{\beta-1} \Big/ (AK^\alpha L^\beta / L) = \beta.$$

Beləliklə β parametri aydın iqtisadi mənaya malikdir, bu əməyə görə buraxılışın elastikliyidir. α parametri də analoji məna daşıyır – fonda görə buraxılışın elastikliyi.

Misal 6. Tutaq ki, istehsal funksiyası Kobba-Duqlas funksiyasıdır. Məhsul buraxılşını 3% artırmaq üçün fondu 6% və ya fəhlələrin sayına 9% artırmaq lazımdır. 1997-ci ildə bir işçi bir ayda 1 mln. rub məhsul istehsal etmişdir, bütün işçilərin sayı 1000-dir. Əsas fondlar 10 milyard rub. qiymətləndirilmişdir. İstehsal funksiyasını və orta fondödəmə kəmiyyətini yazın.

Görürük ki, buraxılışın əməyə görə elastikliyi $\beta = 1/3$. Fonda görə isə $\alpha = 1/2$ deməli Kobba-Duqlas funksiyası aşağıdakı kimidir: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Verilənləri nəzərə alsaq: $10^6 \cdot 1000 = A(10^{10})^{1/2}(1000)^{1/3}$ yəni $A = 1000$. *Nəticədə alarıq:*

Kobba-Duqlas funksiyası $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$

orta fondverimi $k = y/k = 10^6 \cdot 1000/10^{10} = 0{,}1$ - ə bərabərdir.

МЯСЯЛЯЛЯР

1. Aşağıdakı funksiyaların 1-ci və 2-ci tərtib bütün törəmələrini tapın:

$a)\ u = (\sin x + \cos y)^2;\quad b)\ u = x^2 + y^2 - 4xy;\quad v)\ u = xy + x/y$

2. $u = x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4$ funksiya üçün $\partial^4 u/\partial x^4$, $\partial^4 u/\partial x^3 \partial y$, $\partial^4 u/\partial y^4$ törəmələrini tapın:

3. Aşağıdakı funksiyaların 1-ci və 2-ci tərtib törəmələrini tapın:

$a)\ u = f(x^3 + y^3 + z^3)$; $b)\ u = f(x, x/y)$; $v)\ u = f(x, xy, xyz)$.

4. Tutaq ki, $u = px$, burada p - sabit vektordur $(p_i, \cdots, p_n)$. İsbat edin ki,

$$\partial u/\partial x_i = p_i\ ;\ \nabla u = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n) = p.$$

5. 7.1. bölməsindəki 3-cü məsələyə baxın. Xərclər və mənfəət funksiyasının buraxılan məhsulun həcminə görə xüsusi törəmələrini tapın. Bu törəmələrin iqtisadi mənası nədir? Həmin arqumentlərə görə bu funksiyaların elastikliyini tapın və iqtisadi mənalarını təyin edin.

6. Tutaq ki, istehsal funksiyası $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$ Kobba-Duqlas funksiyasıdır. Əmək məhsuldarlığının orta və ən son həddini tapın. Məhsul buraxılışının əməyə və fondlara görə elastikliyini müəyyən edin.

8.2. Чохдяйишянли функсийаларын диференсиалы. Истигамятя эюря тюрямя

1.Чохдяйишянли функсийаларын диференсиаллашмасы. Чохдяйишянли функсийаларын тядгигинин давамыны цч дяйишянли функсийаларын тимсалында бахаг. Хцсуси олараг йада салаг ки, $S = 0(p)$ ишаряси «*с* кямиййятинин *П* иля мцгайисядя сонсуз кичилян» олмасы демякдир. Бирдяйишянли функсийада олдуьу кими бу о демякдир ки, $\lim\limits_{p \to 0} \frac{S}{p} = 0$

Тутаг ки, $U = f(x, y, z)$– цч дяйишянли функсийадыр. $\frac{\partial u}{\partial x}$ хцсуси тюрямсинин Δx артымына щасили U функсийасынын x -я эюря *диференсиалы* адланыр вя $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x$ ишаря олунур. Яэяр асылы олмайан x -ин артымыны онун dx диференсиалы щесаб етсяк, онда аларыг ки, $d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx$.

Яэяр x, y, z дяйишянляринин a, b, c гиймятлярини алдыьыны гябул етсяк вя онлара $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ артымлары версяк, онда $U = f(x, y, z)$ функсийасы $\Delta u = \Delta f(a, b, c) = f(a + \Delta x, b + \Delta y, c + \Delta z) - \; - f(a, b, c)$ артымыны алар. Буна функсийанын *там артымы* дейилир.

Тяриф 1. $u = f(x, y, z)$ функсийасынын (a, b, c) нюгтясиндя там артымы $\Delta f(a, b, c) = f'_x(a, b, c)\Delta x + f'_y(a, b, c)\Delta y + \; + f'_z(a, b, c)\Delta z + 0(\rho)$ шякилиндя эюстяриля билярся, онда функсийа щямин нюгтядя диференсиалланан адланыр, бурада $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, йяни ρ ядяди $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ векторунун узунлуьудур.

Беляликля, гыса йазсаг аларыг:

$$\Delta u = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z + o(\rho) \qquad (1)$$

Гейд едяк ки, бирдяйишянли $y(x)$ функсийасы цчцн a $y(a + \Delta x) = y(a) + y'(a)\Delta x + 0(\Delta x)$ мунасибятинин доьрулуьу цчцн зярури вя кафи шярт нюгтясиндя $y'(a)$ тюрямсинин олмасыдыр, чохдяйишянли функсийа цчцн хцсуси тюрямялярин олмасы (1) мцнасибятинин люьрулуьу цчцн цмумиййятля десяк кафи дейилдир, бунун цчцн хцсуси тюрямяляр бахылан нюгтянин щяр щансы ятрафында щям дя кясилмяз олсунлар.

Яэяр функсийа (a,b,c) нюгтясиндя диференсиалла-нандырса, онда онун щямин нюгтяся артымынын хятти щиссяси, йяни

$$u'_x\Delta x+u'_y\Delta y+u'_z\Delta z=f'_x(a,b,c)\Delta x+f'_y(a,b,c)\Delta y+f'_z(a,b,c)\Delta z$$

функсийанын бу нюгтяйя *диференсиалы* (там) адланыр вя du иля вя йахуд $df(a,b,c)$ иля ишаря едилир. Асанлыгла эюрмяк олар ки, там диференсиал хцсуси диференсиалларын ъяминя бярабярдир.

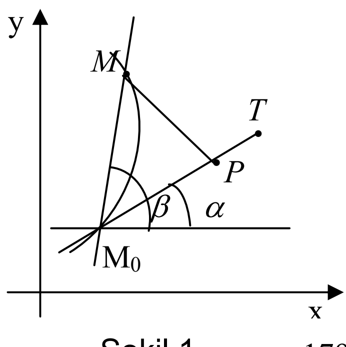
Мисал 1. Тутаг ки, $u=x^2y+2z$. Онун диференсиалыны тапаг $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy;\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2;\ \frac{\partial u}{\partial z}=2$.

Беляликля,

$$du=2xy\cdot dx+x^2\cdot dy+2dz\ .$$

2. Диференсиалын щяндяси мянасы. Йада салаг ки, бирдяйишянли $y=f(x)$ функсийасынын x нюгтясиндя тюрямяси онун бу нюгтядяки $\Delta f(x)$ артымынын аргументин артымына олан нисбятини, аргументин артымы $\Delta x\to 0$ шяртиля *лимитиня* дейилир. Щяндяси олараг $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ нисбяти β буъаьынын танэенсидир (шякил 1). β буъаьы M_0 вя M нюгтяляриндян кечян кясянля OX охунун арасындакы буъагдыр. Яэяр $\Delta x\to 0$-са, онда M нюгтяси M_0 нюгтясиня йахынлашыр, β буъаьы ися α буъаьына йахынлашар.

α - буъаьы M_0 нюгтясиндя функсийанын графикиня чякилмиш тохунанла OX



Şəkil 1.

оху арасындакы буъагдыр,

беляликля $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\beta = tg\alpha$.

$f(x)$ яйрисини кясянин лимит вязиййятиня йахынлашар ки, она да x нюгтясиндя $f(x)$ функсийасынын графикиня чякилмиш *тохунан* дейилир.

Бурадан аларыг $f'(x) = tg\alpha = k$, бурада k щямин нюгтядя чякилян тохунанын буъаг ямсалыдыр. Беляликля, $y = f(x)$ функсийасынын графикиня x_0 нюгтясиндя чякилян тохунанын тянлийи $y = y_0 + y_0'(x_0)(x - x_0)$ шяклиндя олар.

Asanlaqla görmək olar ki, toxunana aşağıdakı kimi də tərif vermək olar.

Tərif 2. Əgər k əyrisinin dəyişən M nöqtəsindən M_0T düz xəttinə qədər olan məsafə $|M_0M|$ sıfıra yaxınlaşdıqda $|M_0M|$- ə nisbətən daha yüksək tərtibli sonsuz kiçilən kəmiyyət olsa M_0T düz xətti k əyrisinin M_0 nöqtəsində *toxunanı* adlanır, (yəni $\frac{|MP|}{|M_0M|} \to 0$). Çoxdəyişənli funksiyalarda da buna oxşar hal mövcuddur. Çoxdəyişənli funksiyanın diferensialının həndəsi mənasına iki dəyişənli $z = f(x, y)$ funksiyası üçün göstərək.

Yuxarıda verdiyimiz tərifə analoji olaraq müstəviyə toxunanın tərifini verək.

Tərif 3. Əgər P səthinin dəyişən M nöqtəsindən bu müstəsiyə qədər olan $|MP|$ məsəfəsi $|M_0M|$ sıfıra yaxınlaşdıqda $|M_0M|$-lə müqayisədə daha yüksək tərtibli sonsuz kiçilən olarsa, yəni $\frac{|MP|}{|M_0M|}$ nisbəti sıfıra yaxınlaşarsa M_0K müstəvisi P səthinə M nöqtəsində *toxunan* adlanır.

Tutaq ki, P səthi $z = f(x, y)$ tənliyi ilə verilmişdir, yəni $z = f(x, y)$ funksiyasının qrafikidir. İsbat etmək olar ki, bu səth $M(x_0, y_0)$ nöqtəsində yalnız və yalnız $f(x, y)$ funksiyası bu nöqtədə diferensiallanan olduqda toxunana malik ola bilər. Bu halda toxunan müstəvi aşağıdakı tənliklə verilir:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (2)$$

Ümumi halda, yəni funksiya istənilən sayda dəyişəndən asılı olduqda $u = u(x_1, ..., x_n)$ olduqda toxunan müstəvi *hipermüstəvi* adlanır və funksiya $X^0 = (x_1^0, ..., x_n^0)$ nöqtəsində yalnız və yalnız o zaman diferensiallanan adlanır ki, həmin nöqtədə $u - u_0 = f'_{x^1}(x^0)(x_1 - x_1^0) + ... + f'_{x^n}(x^0)(x_n - x_n^0)$ tənliyi ilə verilmiş toxunan hipermüstəvi olsun.

Tutaq ki, $X - X^0\,(x_1 - x_1^0, ..., x_n - x_n^0)$ - vektordur, onda qısa olaraq toxunan hipermüstəvinin tənliyi belə yazılar: $u - u_0 = \Delta f(X^0)(X - X^0)$

Çoxdəyişənli funksiyanın diferensialının həndəsi mənası və onun nöqtədə diferensiallanan olmasının mahiyyəti bundan ibarətdir.

3. İstiqamətə görə törəmə, funksiyanın qradiyenti. $u(x_1, ..., x_n)$ funksiyasının $x_1, ..., x_n$ görə xüsusi törəmələri koordinat oxları istiqamətində funksiyanın dəyişmə sürətini ifadə edir. Məsələn, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ funksiyanın x_1-ə görə dəyişmə sürətidir. Nəzərdə tutulur ki, x_1 yalnız OX_1 oxuna paralel dəyişir, $x_2, ..., x_n$ isə dəyişməz qalır.

Tutaq ki, $u = f(x, y, z)$ üç dəyişənli funksiyadır. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nöqtəsini və bu nöqtədən keçən hər hansı istiqamətləndirici l düz xəttini (oxunu) fiksə edək. Fərz edək ki, $M(x, y, z)$ bu düz xəttin başqa bir nöqtəsidir və $|M_0M| - M_0$ nöqtəsindən M nöqtəsinə qədər olan məsafə işarə edilmişdir. Bu məsafə «+» işarəsi ilə götürülür, əgər M_0- dan M - ə istiqamət *Ox* istiqaməti ilə üst-üstə düşürsə, əks halda «-» işarə ilə götürülür. Tutaq ki, M qeyri-məhdud şəkildə M_0–a yaxınlaşır, onda $\lim\limits_{M \to M_0} \frac{|f(M) - f(M_0)|}{|M_0M|}$ funksiyanın l istiqamətində *törəməsi* adlanır və $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$ və ya $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}$ ilə işarə edilir.

Bu törəmə funksiyanın M_0 nöqtəsində l istiqamətində dəyişmə sürətini xarakterizə edir.

Tutaq ki, l düz xətti OX, OY, OZ oxları ilə α, β, γ bucaqlarını əmələ gətirir, onda l düz xətti t parametri Vasitəsilə parametrik asılılıqlarla verilir: $x - x_0 = t \cdot Cos\alpha$, $y - y_0 = t \cdot Cos\beta$, $z - z_0 = t \cdot Cos\gamma$. Beləliklə, parametrik şəkildə verilmiş funksiyarın diferensiallanması qaydasına əsasən (bax 8.1. b.2) alarıq:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t = f'_x Cos\alpha + f'_y Cos\beta + f'_z Cos\gamma$$. Bu

isə M_0 nöqtəsində l istiqamətli törəmədir.

Əlbəttə, istiqamət uyğun vektorla verilə bilər. Asanlıqla göstərmək olar ki, vektor M nöqtəsində xüsusi törəmələrdən təşkil edilərsə, onda həmin vektor $u = f(x, y, z)$ funksiyasının artma istiqamətini göstərər. Bu vektor funksiyanın verilmiş nöqtədə *qradiyenti* adlanır və $\Delta u = (u'_x, u'_y, u'_z)$ -lə işarə edilir (bax 8.1. b.1)

Misal 2. $u = x^2 + yz$ funksiyasını $(1,4,9)$ nöqtəsində elə istiqamətini tapın ki, funksiya ən böyük sürətlə artsın. Əvvəlcə xüsusi törəmələri hesablayaq $u'_x = 2x,\ u'_y = z,\ u'_z = y$; $\Delta u = (2x, z, y)$ verilmiş nöqtədə alarıq: $\Delta u = (2{,}9{,}4)$

Toxunan müstəvinin (2) tənliyini və qradiyentin tərifini müqayisə etsək, görərik ki, funksiyanın qradiyent toxunan müstəvinin normal vektorudur. Bu ümumi halda da doğrudur–verilmiş nöqtədə funksiyanın qradiyenti hipermüstəvinin həmin nöqtədə normal vektorudur.

4. Mürəkkəb asılılıqların xəttiləşdirilməsi. Kobba-Duqlas funksiyasının timsalında istehsal funksiyasının xəttiləşdirilməsi imkanını göstərək. Müəssisənin cari vəziyyətini – fondların həcmini K, fəhlələrin sayını L, uyğun məhsul buraxılışını $y = y(K, L)$ fiksə edək. Fəhlələrin sayının kiçik dəyişməsinə dL və fondların həcminin kiçik dəyişməsinə dK uyğun məhsul buraxılışının Δy dəyişməsini təqribi olaraq tam diferensiala bərabər götürək: $dy = y'_K dK + y'_L dL$ əmək məhsuldarlığının son həddi, y'_L-isə fond veriminin son həddidir. Onda $y'_L dL$ - əlavə məhsulun dəyəri olar. Bu əlavə məhsul dK əlavə olunmuş fondların hesabına istehsal olub. Aşağıdakı nəticəni alarıq.

Nəticə. Fəhlələrin sayını və fondların həcmini kiçik artırdıqda məhsul buraxılışının dəyəri təqribi olaraq əlavə olunmuş fəhlələrin əvvəlki həcmdə fondlarda istehsal etdikləri əlavə məhsulun dəyəri ilə əvvəlki sayda fəhlələrin əlavə olunmuş fondlarda istehsal etdikləri məhsulun dəyərinin cəminə bərabərdir. Beləliklə, hesabat üçün əmək məhsuldarlığının son həddini və fond verilişinin son həddinin mövcud vəziyyətini götürmək olar. Xəttiləşdirmənin ümumi ideyası da bundan ibarətdir $u(x_1,...,x_n)$ funksiyasını $X^0 = (x_1^0,...,x_n^0)$ nöqtəsi ətrafında xətti $L(x) = u(x^0) +$

$+u'_{x^1}\left(x^0\right)\left(x_1-x_1^0\right)+\ldots+u'_{x^n}\left(x_n-x_n^0\right)$ funksiya ilə əvəz etmək. Burada $u(x)-L(x)$ fərqi X nöqtəsindən X^0 nöqtəsinə qədər olan məsafə ilə müqayisədə daha yüksək tərtibli sonsuz kiçiləndir.

5. Faydalılıq funksiyasının diferensial xassələri.

□□ □□□□□□□□□ □□ □□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□ (□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□ 7.1. □.3)

Çoxölçülü faydalılıq funksiyası $u(x_1,\ldots,x_n)$-$X(x_1,\ldots,x_n)$ əmtəə dəstinin u faydalılığına hər hansı individin (şəxsin) verdiyi subyektiv ədədi qiymətdir. O azalmayandır, yəni $X_1 \le X_2$ olduqda $u(X_1) \le u(X_2)$ olur, digər tərəfdən o çökükdür. Bundan əlavə fərz edəcəyik ki, hər bir əmtəə arzu olunandır, yəni əgər $X \ge Y$ və $x_i > y_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ olarsa, onda $u(X) > u(Y)$. Fərz edək ki, U funksiyası diferensiallanandır və II tərtib törəmələri var. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ – xüsusi törəməsinə i-ci əmtəənin faydalılığının *son həddi* deyilir. Faydalılıq funksiyasının azalmayan olmasını və hər bir əmtəənin arzuolunan olması şərtini daha güclü şərtlə – bütün xüsusi törəmələrin müsbət olması ilə əvəz edək. Faydalılıq funksiyasının xüsusi törəmələrindən düzəlmiş vektoru $\frac{\partial u}{\partial X}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ təbii olaraq faydalılığın son hədd vektoru adlandırırlar yada salaq ki, həmin vektora həm də *qradiyent* deyilir.

Qradiyent funksiyanın qiymətlərinin ən böyük artımının istiqamətini göstərir.

Alman alimi K.Hossen ilk dəfə faydalılıq funksiyasının əsas xassələrini göstərmişdir. Əmtəənin istehlakı artıqca, faydalılığı azalır. Bu *Hossenin birinci qanunu* adlanır.

Sadə misalla izah etsək belə çıxır ki, əgər siz acsınızsa, onda birinci hamburqeri çox böyük həvəslə yeyirsiniz, ikinci bir o qədər xoş gəlmir və s. Diferensiallama dilində bu o deməkdir ki, arqumentlər artıqda faydalılığın son həddi azalır, yəni ikinci xüsusi törəmələr mənfi olur.

Misal 3. $U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ faydalılıq funksiyası üçün etinasızlıq əyrisini çəkin (faydalılığın sabitlik xətti). Faydalılığın son həddi vektorunu tapın. Hossenin birinci qanununun ödənildiyini yoxlayın.

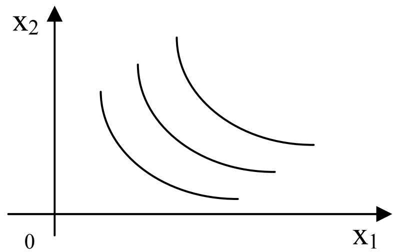
Həlli. Faydalılığın sabitlik əyrilərini quraq: $u_C = \{(x_1, x_2) : \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = C\}$ (şəkil 2). Xüsusi törəmələri tapaq:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2}}{\left(2\sqrt{x_1}\right)}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1}}{\left(2\sqrt{x_2}\right)}$$

Beləliklə faydalılığın son həddi vektoru

$$\Delta u = \left(\frac{\sqrt{x_2}}{\left(2\sqrt{x_1}\right)}\right), \left(\frac{\sqrt{x_1}}{\left(2\sqrt{x_2}\right)}\right)$$ olar.



Şəkil 2.

Hossenin birinci qanunun ödənildiyini yoxlamaq üçün ikinci tərtib xüsusi törəmələri tapaq:

$u''_{x_1x_1} = -\left(\frac{1}{4}\right)x_1^{-\frac{3}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$, $u''_{x_2x_2} = -\left(\frac{1}{4}\right)x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{3}{2}}$ bu törəmələr mənfidirlər, bu da *Hossenin birinci qanununun* ödənildiyini göstərir.

Aşağıdakı funksiyalar faydalılıq funksiyalarına misaldır:

Mənfəət funksiyası $u(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$;

Neklassik funksiya $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ burada $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

MƏSƏLƏLƏR

1. Düz dairəvi silindirin oturacağının radiusu və hündürlüyü kiçik artıqda onun həcminin nələrdən asılı artdığın təsvir edin. Eyni işləri düzbucaqlı paralelepipedin üç ölçüsünün kiçik artımı ilə əlaqədar həmçinin artması və üçbucağın sahəsinin onun üç tərəfinin funksiyası üçün göstərin.

2. Aşağıdakı funksiyaların diferensiallarını ümumi şəkildə və verilmiş (1,1) nöqtəsində tapın:

$$a)\ u = (x^2 + y)^3;\ \ b)\ u = x^2 - y^2 + 4xy;\ c)\ u = xy + x - y$$

3. Faydalılıq funksiyasının qradiyentini və faydalılığın son həddini tapın.

$$a)\ u = 3x_1 + 5x_2;\ \ b)\ u = \min\{x_1, 2x_2\}$$

4. Hər hansı yerin xəritəsində adətən-maili xətdən– sabit hündürlük xəttindən istifadə edirldər. Bu xəritədə müxtəlif nöqtələrdə təqribi qradiyenti bilmək olarmı?

Мювзу 9.

ІГТІСАДІЙЙАТДА ОПТІМАЛЛАШДЫРМА МЯСЯЛЯЛЯРІ

9.1. Чохдяйишянли функсийаларын екстремумлары

Funksiyanın ekstremumu və onun tapılması. Bu mövzunun gedişində biz birdəyişənli funksiyaların uyğun anlayışlarını yada salacağıq. Birdəyişənli funksiyanın ekstremumunun tərifi 5.2. bölməsində verilmişdir. Bu anlayışın vacibliyini nəzərə alaraq onu bir də yada salaq. Əgər a nöqtəsinin müəyyən ətrafında $f(x)$ funksiyasının qiyməti $f(a)$ ən böyük (ən kiçik) olarsa, onda $f(a)$ funksiyanın *maksimumu (minimumu)* adlanır. Başqa sözlə desək bu ətrafda $f(x)\leq f(a)$ $\left(f(x)\geq f(a)\right)$ bərabərsizliyi ödənir. Arqumentin uyğun a qiymətinə *makismum (minimum) nöqtəsi* deyilir.

Funksiyanın maksimumları və minimumları onun *ekstremumları*, maksimum və minimum nöqtələrinə isə *ekstremum nöqtələri* deyilir. Çoxdəyişənli funksiyaların ekstremumları da eyni cür təyin olunur. Yada salaq ki, bir ölçülü halda nöqtənin ətrafı dedikdə mərkəzi həmin nöqtə olan açıq intervalı özündə saxlayan ixtiyari çoxluq başa düşülür.

Çoxölçülü halda isə nöqtənin ətrafı dedikdə mərkəzi həmin nöqtədə olan açıq kürəni özündə saxlayan ixtiyarı çoxluq başa düşülür (bax bölmə 7.2. b.3).

Yəni nöqtənin ətrafını təyin edərkən ədədlər arasındakı adi məsafə, çox- dəyişənli funksiyanın təyin olunbuğu Evklid fəzasındakı məsafə ilə əvəz olunur. Yada salaq ki, əgər nöqtə hər hansı ətrafı ilə birlikdə oblasta daxil olarsa, onda belə nöqtə *oblastın daxili nöqtəsi* adlanır.

Əgər $f'(a)=0$ və yaxud $f'(a)$ yoxdursa, onda a nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının *böhran nöqtəsi* adlanır. Əgər a nöqtəsi $f(x)$ funksiyasının daxili nöqtəsidirsə və $f'(a)=0$ olarsa, onda a nöqtəsinə $f(x)$ funksiyasının *stasionar nöqtəsi* deyilir.

Teorem. (*Ekstremumun zəruri əlaməti*). Əgər funksiyanın daxili nöqtədə ekstremumu varsa, onda bu nöqtə funksiyanın böhran nöqtəsidir, əgər bu nöqtədə törəmə varsa, onda həmin nöqtə stasionar nöqtədir.

Tutaq ki, $u=f(x_1,...,x_n)-n$ dəyişənli funksiyadır. Birdəyişənli funksiyada olduğu kimi, bütün xüsusi törəmələrin sıfıra bərabər olduğu və ya törəmələrdən bəziləri yoxdursa, onda belə nöqtəyə funksiyanın *böhran nöqtəsi* deyilir. Əgər nöqtə funksiyanın təyin oblastının daxili nöqtəsidirsə və bütün xüsusi törəmələr sıfıra bərabərdirsə, onda bu nöqtəyə funksiyanın *stasionar nöqtəsi* deyilir.

Teorem 1. (*Çoxdəyişənli funksiyanın ekstremumunun zəruri əlaməti*). Əgər funksiyanın daxili nöqtədə ekstremumu varsa, onda bu nöqtə funksiyanın böhran nöqtəsidir və əgər həmin nöqtədə bütün xüsusi törəmələri də varsa, onda bu nöqtə stasionar nöqtədir.

Bu teoremin isbatı birdəyişənli funksiyada olduğu kimidir (bax bölmə 6.1. b.1).

Beləliklə, ekstremum üçün «şübhəli» nöqtələr bütün xüsusi törəmələrin sıfıra bərabər olduğu və yaxud bəzi xüsusi törəmələrin olmadığı nöqtələrdir. Əgər funksiya hər yerdə xüsusi törəmələrə malik olarsa, onda bu nöqtələrin koordinatlarını tapmaq üçün aşağıdakı tənliklər sistemini həll etmək lazımdır: $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_n} = 0. \end{cases}$

Misal 1. $z = x^2 + (y-1)^2$ funksiyasının ekstremumlarını tapın.

Xüsusi törəmələri tapıb, sıfıra bərabər etsək, aşağıdakı tənliklər sistmeini alarıq:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-1) = 0.$$

Bu sistemin həlli aşkardır: $x = 0,\ \ y = 1.$

Bütün x, y–lər üçün $z \geq 0$ olduğundan tapdığımız $(0,1)$ nöqtəsi minimum nöqtəsidir.

2. Ekstremumun kafi şərti. Birdəyişənli funksiyanın ekstremumları üçün sadə kafi əlamətlər var (bax bölmə 6.1. b.1).

Teorem. (Ekstremumun birinci kafi əlaməti). **Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası a nöqtəsinin müəyyən ətra-**

fında kəsilməz, a nöqtəsi istisna olmaqla bu ətrafın hər yerində diferensi allanandır. Onda:

1. $x < a$ **olduqda** $f'(x) \geq 0$ **və** $x > a$ **oduqda** $f'(x) \leq 0$ **olarsa,** a **nöqtəsi funksiyanın maksimum nöqtəsidir;**

2. $x < a$ **oduqda** $f'(x) \leq 0$ **və** $x > a$ **olduqda** $f'(x) > 0$ **olarsa, onda** a **nöqtəsi funksiyanın minimum nöqtəsidir.**

Teorem 1. (Ekstremumun ikrinci kafi əlaməti). **Tutaq ki,** $f(x)$ **funksiyası və onun törəmələri** $f'(x)$ **və** $f''(x)$**,** a **nöqtəsinin müəyyən ətrafında kəsilməzdirlər və** $f'(a) = 0$**. Onda:**

1. Əgər $f''(a) < 0$ **olarsa,** a **nöqtəsi funksiyanın maksimum nöqtəsidir;**

2. Əgər $f''(a) > 0$ **olarsa,** a **nöqtəsi funksiyanın minimum nöqtəsidir.**

Çoxdəyişənli funksiyalar üçün ekstremumun kafi əlaməti çox mürəkkəbdir. İki dəyişənli funksiya ilə kifayətlənək.

Tutaq ki, $z = f(x, y)$ və M -stasionar nöqtədir, yəni $f'_x(M) = f'_y(M) = 0$. Aşağıdakı işarələri qəbul edək: $A = f''_{xx}(M),\ B = f''_{xy}(M),\ C = f''_{yy}(M),\ D = AC - B^2$.

Teorem 2. (Eksktremumun kafi əlaməti). **Əgər** $D > 0$ **və** $A < 0$ **olarsa *M* nöqtəsi maksimum, əgər** $D > 0$ **və** $A > 0$ **olarsa, onda *M* nöqtəsi minimumdur. Əgər** $D < 0$ **olarsa, onda ekstremum yoxdur.**

Funksiyanın hər hansı çoxluqda ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin tapılması isə birdəyişənli funksiyada olduğu kimidir:

a) ekstremuma «şübhəli» olan bütün daxili nöqtələrin tapılması («Şübhəli» nöqtə bütün xüsusi törəmələrin sıfıra barəbər olduğu nöqtələr və ya xüsusi törəmələrin olmadığı nöqtələr);

b) bu nöqtələrə baxdığımız çoxluğun sərhədində yerləşən bir neçə «şübhəli» nöqtələri əlavə etmək;

c) bu çoxluqda funksiyanın ən böyük və ən kiçik qiymətlər aldığı nöqtələri tapmaq.

Məsələn, xətti proqramlaşdırma məsələsində bu qayda ilə hərəkət edirlər (bax.bölmə 3.1.). Yada salaq ki, xətti funksiyaların ekstremumlarının xətti məhdudiyyətlər çərçivəsində tapılması xətti proqramlaşdırma məsələlərini əhatə edən məsələlər sinfini təşkil edir. İsbat olunmuşdur ki, belə məsələlrdə funksiyanın ekstremumları varsa, bu ekstremumlar mümkün çoxluğun kənar nöqtələrində ola bilər. Kənar nöqtə-tədqiq olunan çoxluğun sərhədində yerləşən xüsusi nöqtədir.

3. Şərti ekstremum, Laqranjın vuruqlar üsulu. Tutaq ki, $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ funksiyasının $\varphi_j(x) = 0,\ j = 1, \cdots, m;\ m < n$ məhdudiyyətləri şərti ilə ekstremumunun tapılması lazımdır. Bu halda belə hərəkət edirlər:

a) $n + m$ dəyişəndən (n əvvəlki $x_1, \cdots, x_n$ və m yeni $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$) asılı Laqranj funksiyasını tərtib edirlər

$$L(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{m} x_j \varphi_j(x) .$$

b) aşağıdakı tənliklər sistemini tərtib edirlər və onu həll edirlər:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial L/\partial x_n = 0, \\ \partial L/\partial \lambda_1 = 0, \\ \vdots \\ \partial L/\partial \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Yəni Laqranj funksiyasının ekstremumunun «şübhəli» nöqtələri tapırlır;

c) ekstremumun «şübhəli» nöqtələr məsələsini həll edirlər (məsələn yuxarıdakı 2-ci teoremin köməyi ilə), burada fərz edirlər ki, aşağıdakı münasibətlər yerinə yetirilir:

$$\sum_{i=1}^{n} \partial\varphi_j / \partial x_i \cdot dx_i = 0\ ,\ \ j = 1, \cdots, m$$

4. İstehlakçının seçilməsinin optimallaşdırılması məsələsi. Bu məsələyə şərti ekstremumların tapılması üçün yuxarıda təsvir olunmuş Laqranjın vuruqlar üsuluna əlavə kimi baxaq.

Hesab edəcəyik ki, hər bir əmtəənin qiyməti p_i-dir, individ gəliri *Q* -dür (hər hansı pul miqdarı). Bu miqdar çərçivəsində o, hərəkət edir, özünə lazım olan əmtəə alır. $x = (x_1, \cdots, x_n)$–əmtəə dəstini almaq üçün $c(x) = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$ miqdarda pul xərcləmək lazımdır $C(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = PX$. Beləliklə, individ elə *X* əmtəə dəsti ala bilər ki, $PX \le Q$ olsun. Deməli, Q gəliri ilə o, aşağıdakı əmtəə dəstləri çoxluğu əldə edə bilər:

$B = B(P, Q) = \{X : X \ge 0,\ PX \le Q\}$. Bu çoxluq büdcə çoxluğu adlanır (bax bölmə 2.1. b.3)

Təklif 1. Büdcə çoxluğu məhdud və qapalıdır.

İsbatı. Tutaq ki, $r = \min p_i$, onda əgər $x \in B$ olarsa, $x_i \le Q/r$, $i = 1,\cdots,n$, yəni *B* çoxluğu məhduddur. Qapalılığı isbat edək. Tutaq ki, $x_k \in B$, ixtiyari $k \in N$ və $x_k \to z$. Onda xətti funksiyanın kəsilməzliyinə görə $px_k \to pz$ və $px_k \le Q$ olduğundan $PZ \le Q$ olar. Deməli, $Z \in B$ alarıq. Büdcə çoxluğunun sərhədi $G = \{X \in B : PX = Q\}$ çoxluğuna deyilir. G sərhədi – iki əmtəə olduqda düz xətt parçası, üçbucaqla məhdudlaşan müstəvi hissəsi–üç əmtəə olduqda, ümumi halda isə əmtəə fəzasında hipermüstəvinin hissəsi olar.

Büdcə çoxluğu $B(P,Q)$, Q - gəlirindən və P qiymət sistemindən asılıdır, lakin individin şəxsi xarakterindən, məsələn, onun nəyə üstünlük verməsindən asılı deyil. İstehlakçı əldə etdiyi gəliri təbii ki, makismal fayda ilə xərcləmək istəyir. Bu isə aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsinə gətirir:

$PX = p_i x_i + \cdots + p_n x_n$ büdcə məhdudiyyəti şərti ilə $u(x_1,\cdots,x_n)$ faydalılıq funksiyasını maksimallaşdıran $X = (x_1,\cdots,x_n)$ əmtəə dəstini tapın. Məsələnin mahiyyətinə görə bütün dəyişənlər mənfi olmayan qiymətlər alır, yəni $x_i \ge 0,\ i = 1,\cdots,n$.

Baxılan məsələni daha qısa şəkildə belə ifadə etmək olar:

$$\begin{cases} u(X) \to \max, \\ Px \le Q, \\ x \ge 0 \end{cases} \qquad \text{və yaxud belə} \qquad \begin{cases} u(x) \to \max \\ x \in B(P,\, Q) \end{cases}$$

$u(x)$ öz arqumentlərinin kəsilməz funksiyası olduğundan, *B*-büdcə çoxluğu məhdud və kompakt olduğundan, *u(x)* funksiyası *B* çoxluğunda öz maksimumunu alır, yəni (1) məsələsinin həlli var. Aydındır ki, *c(X)* funksiyasının istənilən maksimum X^*- nöqtəsi G büdcə çoxluğunun sərhədində olar. Döğrudan da, əgər əksini fərz etsək, yəni maksimum nöqtəsi - $Z \notin G$, onda $PZ < Q$. Bu zaman istehlakçı $Q - PZ$ miqdarda pulu istifadə etmir və bu pula o, əlavə əmtəə dəsti - y ala bilər, burada hesab etmək olar ki, $Y>0$. O zaman $Y \in B$ olar, lakin $u(Z+Y) > u(Z)$ - hər bir əmtəənin arzu edilən olduğu üçün. Alırıq ki, Z -maksimum nöqtəsi büdcə çoxluğundadır, bu isə ziddiyətdir.

Təklif 2. Əgər $u(x)$ ciddi çökükdürsə, onda (1) məsələsinin həlli yeganədir, yəni büdcə çoxluğunda faydalılıq funksiyasının yalnız bir maksimum nöqtəsi var.

Yada salaq ki, əgər ixtiyari X, Y üçün $0 < \lambda < 1$ olduqda $u(\lambda X + (1-\lambda)Y) > \lambda u(X) + (1-\lambda)u(Y)$ olarsa, onda u(X) funksiyası ciddi çökük adlanır.

İsbatı. Fərz edək ki, A və C iki maksimum nöqtələridir, yəni $u(X) \le u(A) = u(C)$ istənilən $X \in B$ üçün. Biz artıq bilirik ki, A və C nöqtələri büdcə çoxluğunun sərhədində yerləşirlər, yəni $PA = PC = Q$. $E = A/2 + C/2$ nöqtəsinə baxaq. Görürük ki, $PE = P(A/2 + C/2)$, yəni $E \in B$. $u(x)$ funksiyası ciddi çökük olduğundan alarıq: $u(E) > u(A) = u(C)$. Ziddiyyət aldıq, belə ki buradan çıxır ki, A və C funksiyanın büdcə çoxluğunda maksimum nöqtələridir.

Beləliklə, faydalılıq funksiyası ciddi çökük olduqda büdcə çoxluğunda bu funksiyanın yeganə maksimum nöqtəsi var. Deməli, istehlakçının seçimi hətta qalmır ki, öz pullarını ən böyük faydalılıqla xərcləsin, beləki, faydalılıq funksiyasını maksimallaşdıra yeganə əmtəə dəsti var. Bu yeganə nöqtə tələb nöqtəsi və yaxud sadəcə olaraq istehlakçının tələbi adlanır. Bu nöqtəni X^* - ilə işarə edək. Tələb nöqtəsini öyrənək. Hələlik bilirik ki, bu nöqtə büdcə çoxluğunun sərhədində yerləşir.

Beləliklə (1) məsələsi aşağıdakı məsələyə gətirilir:

$$\begin{cases} u(X) \to \max, \\ PX = Q \end{cases} \quad \text{və ya} \quad \begin{cases} u(X) \to \max, \\ X \in B(P,\ Q) \end{cases} \qquad (2)$$

Bu məsələni Laqranjın vuruqlarının köməyi ilə həll etmək olar. Laqranj funksiyasını düzəldək $L(X,\lambda) = U(X) + \lambda(Q - PX)$. Xüsusi törəmələri tapaq və sıfıra bərabər edək:

$$\begin{cases} \partial L/\partial x = 0, \\ \partial L/\partial \lambda = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial u/\partial x - \lambda P = 0, \\ Q - PX = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \partial u/\partial X = 0, \\ Q - PX = 0. \end{cases}$$

5. Tələb nöqtəsinin xarakteristikası. Belə bir nəticə alırıq: tələb nöqtəsi büdcə çoxluğunun sərhədində yerləşir və onlunla xarakterizə olunur ki, faydalılıq həddi vektoru, qiymətlər vektoru ilə mütənasibdir. Belə də demək olar: tələb nöqtəsində əmtəənin faydalılıq həddinin onun qiymətinə olan nisbəti sabit kəmiyyətdir: (3) $\left(\partial u/\partial x_i\right) \big/ p_i = \lambda^*$, ixtiyarim $i = 1, \cdots, n$ üçün bu bərabərlik doğrudur.

Əgər, deyək ki, *i*-ci əmtəə *j*-ci əmtəədən 3 dəfə bahadır, onda onun bir vahid azalması j-ci əmtəənin 3 vahid artırılması ilə kompensasiya edilir. Bunu belə ifadə etmək olar: qiymətləri eyni olan əmtəələr qarşılıqlı əvəzolunandırlar. Başqa sözlə desək, individə əlverişli deyildir ki, bu istəyini onunla eyni qiymətdə olan digəri ilə əvəz etsin və ümumiyyəilə istehlakın strukturunu dəyişmək, onun vəziyyətini yalnız pisləşdirə bilər. Tələb nöqtəsinin bu xarakteristikası Hossenin 2-ci qanunu adlanır.

Misal 2. İstehlakçının tələb funksiyasını tapaq. Faydalılıq funksiyası $u(x_1,\ x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ Əvvəlcə xüsusi törəmələri tapaq:

$\partial u/\partial x_1 = \sqrt{x_2}/\left(2\sqrt{x_1}\right)$, $\partial u/\partial x_2 = \sqrt{x_1}/\left(2\sqrt{x_2}\right)$, deməli

aşağıdakı tənliklər sistemini alırıq: $\begin{cases} \left(\partial u/\partial x_1\right)\Big/\left(\partial u/\partial x_2\right) = p_1\big/p_2 \\ P_1X_1 + P_2X_2 = Q \end{cases}$

və ya $\begin{cases} \left(\sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1})\right)\Big/\left(\sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2})\right) = p_1\big/p_2, \\ p_1x_1 + p_2x_2 = Q \end{cases}$

Nəticədə: $\begin{cases} x_1/x_2 = p_1/p_2 \\ p_1x_1 + p_2x_2 = Q. \end{cases}$ yəni $x_1^* = Q\big/(2p_1)$, $x_2^* = Q\big/(2p_2)$

MƏSƏLƏLƏR

1. p qiyməti və Q gəliri üçün aşağıdakı faydalılıq funksiyaları üçün tələb nöqtəsini tapın (həndəsi və analitik):

a) $u(x_1,\ x_2) = \min\{x_1\ ,\ 2x_2\}$; b) $u(x_1,\ x_2) = 2x_1 + 3x_2$

Həlli: a) $u(x_1,\ x_2) = \min\{x_1\ ,\ 2x_2\}$ funksiyası göstərir ki, birincə və ikinci əmtəənin 2:1 nisbətindən artığı istehlakçıya xeyir gətirmir. İstehlakçı o zaman xeyir götürür ki, hər iki əmtəə 2:1 nisbətini saxlamaqla artsın. Belə faydalılıq funksiyası olan əmtəələr qarşlıqlı biri-birini tamamlayan əmtəələr adlanırlar (məsələn, çay və qənd). Həndəsi olaraq belə tələb funksiyasının tapılması - həlli şəkil 1.a – da təsvir olunmuşdur. Analitik həlli isə aşağıdakı kimidir:

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 = Q \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

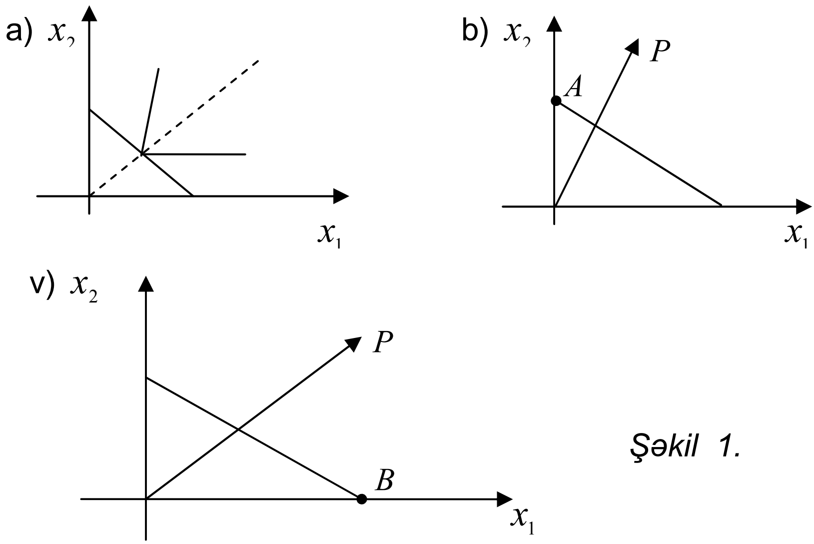
Bu sistemi həll edərək tapırıq:

$$x_1^* = Q/(2p_1 + p_2)\,, \qquad x_2^* = Q/(2p_1 + p_2)$$

b) Həndəsi həlli şəkil 1.b – də verilib. Nəzərdə tutulur ki, $p_1/p_2 < 2/3$

$p_1/p_2 > 2/3$ halında isə həndəsi həll şəkil 1. c-də verilmişdir.

Şəkil 1.b-də tələb nöqtəsi büdcə çoxluğunun A təpəsində, şəkil 1.c – də isə B təpəsində yerləşir.



Şəkil 1.

$p_1/p_2 = 2/3$ olduqda tələb nöqtələri sonsuz saydadır: büdcə çoxluğunun sərhədindəki ixtiyari nöqtə tələb nöqtəsidir.

2. Aşağıdakı funksiyaların ekstremumların araşdırın:

$a)\ z = x^2 - (y-1)^2$; $\quad b)\ z = (x - y + 1)^2$; $\quad v)\ z = x^2 + y^2 - 3xy$;

$q)\ z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; $\quad d)\ z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

3.Aşağıdakı funksiyaların şərti ekstremum nöqtələrini tapın:

$a)\ z = xy,$, əgər $x + y = 1$ olsa; $b)\ z = x/a + y/b$, əgər $x^2 + y^2 = 1$ olarsa; $v)\ z = x^2 + y^2$, əgər $x/a + y/b = 1$ olarsa.

4.Aşağıdakı funksiyaların şərti ekstremum nöqtələrini qrafik üsulla tapın:

$a)\ z = xy$ və $z = 2x + 3y$ funksiyalarının $x^2 + y^2 = 1$ olduqda maksimum nöqtələrini;

$b)\ z = x^2 + y^2$ və $z = 2x + 3y$ funksiyalarının $xy = 1,\ \ x > 0$ olduqda minimum nöqtələrini.

5. Müəyyən tutumu olan açıq düzbucaqlı vanna hansı ölçülərində ən kiçik səthə malik olar?

6. Verilmiş radiuslu yarımkürənin içərisinə ən böyük həcmli düzbücaqlı paralelepiped çəkin.

9.2. İqtisadiyyatın «qızıl qaydası»

1. Birresurslu firma üçün iqtisadiyyatın «qızıl qaydası». Təsəvvür edək ki, biznesmen firmanın rəhbəridir. O, fikirləşir ki,əlavə bir işçi götürsün. Bu məsələnin həlli üçün çox sadə qayda var: əlavə işçini yalnız o zaman götürmək lazımdır ki, onun qazandığı əlavə gəlir ona verilən əmək haqqından çox olsun. Bu sadə qayda iqtisadi cəhətdən çox əhəmiyyətli olduğu üçün onu iqtisadiyyatın «qızıl qaydası» adlandırılır. Bir resurslu firma üçün bu qayda bölmə 6.1. b.3-də göstərilmişdir. Qısa olaraq əsas momentləri təkrar edək. Fərz edək ki, firma yalnız bir əmtəə istehsal edir və onun miqdarını *y* ilə işarə edək. Yalnız bir resurdan istifadə olunur.

Firma $y = F(x)$ istehsal funksiyası vasitəsilə tamamilə xarakterizə edilir. İstehsal funksiyası buraxılan əmtəənin həcmi ilə sərf olunan resurs həcmi *x* arasındakı asılılığı göstərir.

Fərz olunur ki, istehsal funksiyası iki aksiomu ödəyir:

1. Təyin oblastının heç olmazsa bir hissəsində–iqtisadi E oblastı adlanan hissədə bu funksiya azalmayandır, bu oblastda onun törəməsi $F'(x)$ mənfi deyildir.

2. İqtisadi oblastın qabarıq S altçoxluğu var ki, $\{x \in S; F(x) \geq a\}$ altçoxluğuda bütün a-lar üçün qabarıqdır. Bu çoxluqda ikinci törəmə müsbət deyildir.

Bu iki aksiomun iqtisadi mənası üzərində dayanaq. Birinci aksiom hökm edir ki, istehsal funksiyası trivial, lakin mübahisəsiz düzgünlüyü əks etdirir. Az da olsa normal iqtisadiyyatda xərclərin artımı buraxılışın azalmasına səbəb ola bilməz. İkinci aksiomda yalnız ikinci törəmənin müsbət olmamasının iqtisadi mənasını aydınlaşdıraq. Bu xassə iqtisadiyyatda azalan gəlir qanunu adlanır. Sərf olnan resursun həcminin artması ilə, müəyyən momentdə (S oblastına çıxdıqda) məhsul həddi azalır. Klassik misal olaraq fiksə edilmiş sahədə buğda istehsalına yeni-yeni insan qüvvəsinin əlavə edilməsini göstərmək olar. Hesab edəcəyik ki, istehsal funksiyasının zəruri törəmələri var və bütün oblastda hər iki aksiomu ödəyir.

Tutak ki, p - vahid resursun qiyməti, v isə buraxılan vahid məhsulun qiymətidir.

Deməli mənfəət W nəticədə x - in funksiyası olaraq belə ifadə edilər: $W(x) = vF(x) - px$.

Beləliklə firma məsələsinə gəlirik:

$$\begin{aligned} &W(x) \to \max, \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{1}$$

$W(x)$-in törəməsini sıfıra bərabər edərək, alarıq:

$$F'(x) = p/v \tag{2}$$

Aydındır ki, emal olunan resursun həcmi müsbətdir, nöqtə daxili nöqtədir, yəni ekstremum nöqtəsidir. Digər tərəfdən, ikinci törəmə müsbət olmadığından bu maksimum nöqtəsidir.

Beləliklə, istehsal funksiyasına qoyulan təbii şərtlər daxilində (2) münasibəti firma məsələsinin həllini verir, yəni emal olunan resursun həcmini verir ki, bu da maksimum gəlir verən buraxılışı təmin edir. (2) münasibətini verən a nöqtəsini firmanın optimal həlli adlandıraq. (2) münasibətinin iqtisadi mənası üzərində dayanaq.Yada salaq ki, $F'(x)$ məhsul həddi adlanır, $\nu F'(x)$ - məhsul həddinin dəyəridir. Məhsul həddi bir vahid əlavə resursun verdiyi məhsuldur. Vahid resursun qiyməti p - dir, yəni tarazlıq alınır. İstehsala əlavə bir vahid resurs cəlb etmək olar və onun alınmasına p qədər vəsait sərf etmək lazımdır, nəticədə uduş olmayacaq, belə ki, əldə etdiyimiz vəsait, əlavə resursun alınmasına sərf olunan vəsaitə bərabərdir. Deməli (2) münasibətini verən optimal nöqtə tarazlıq nöqtəsidir.

İstehsal funksiyasına qoyulan müəyyən şərtlər daxilində (2) münasibətinə verilən firma məsələsinin optimal həlli bütün p və ν üçün yeganə olar.

Beləliklə, (1) məsələsində a^* həlli p və ν üçün yeganədir. Alınan $a^* = a^*(p, \nu)$ funksiyası resursa tələb funksiyası adlanır. Bu funksiya məzmunca nəyi ifadə edir? Əgər resursun qiyməti p, buraxılan məhsulun qiyməti ν - dirsə, onda firma öz istehsal funksiyası ilə xarakterizə olunur və $a^*(p, \nu)$ funksiyasına uyğun olaraq emal olunan resursun həcmini müəyyən edir, bu həcmdə resursu bazardan alır, yəni bu firmanın resursa olan tələb funksiyasıdır. Emal olunan resursun həcmini bilərək, bu həcmi istehsal funksiyasında yerinə qoyaraq, qiymətin funksiyası kimi istehsal olunan məhsulun həcmini alarıq.

Axırıncı funksiya məhsulun təklif funksiyası adlanır. Aydındır ki, emal olunan resursun həcmi müsbətdir və deməli (2) münasibəti ilə tapılan nöqtə daxili nöqtədir, yəni ekstremum nöqtəsidir. İkinci törəmənin müsbət olmadığını da nəzərə alsaq, onda alarık ki, bu nöqtə maksimum nöqtəsidir.

Misal 1. Bir neçə balıqçı ailəsi birlikdə böyük olmayan gəmiyə malikdirlər. Balıq ovunun həcmi *y* (gündə kq-a), gəmidə olan balıqçıların miqdarından asılıdır, bunu *x*-ə işarə edək, $y = 100\sqrt{x}$. Bir kq balığın qiyməti 8000 rubldur, balıqçıların əmək haqqı P=100000 (rub/gün). Əmək haqqından başqa xərc nəzərə alınmır. Balıqçılar briqadasının optimal ölçüsünü tapın.

Həlli. Birinci həll üsulu. Mənfəət bərabərdir gəlir çıxılsın əmək haqqı

$$W = 8000y - 100\,000x = 80000\sqrt{x} - 100000x$$

Törəməni tapıb sıfıra bərabər edək:

$$W' = 400000/\sqrt{x} - 100000 = 0$$

Buradan alarıq ki, $x = 16$.

İkinci həll üsulu – (2) münasibətindən istifadəyə əsaslanır $50/\sqrt{x} = 100\,000/8000$; $x = 16.$

Tapdığımız 16 ədədi eyni zamanda gəmidə işləyən balıqçıların optimal miqdarıdır.

2. Çoxresurslu firma üçün iqtisadiyyatın «qızıl qaydası». Ümumi halda, yəni firma bir resurs deyil, bir neçə resursdan istifadə etdikdə nəzəriyyə yuxarıda şərh olunanla analojidir. Beləliklə, firma bir əmtəə istehsal edir, onu *y* ilə işarə edək. Sərfiyat-resursları vektorunu $X = (x_1, \cdots, x_n)$ ilə işarə edək. Sərfiyyat bir mənalı olaraq buraxılışı müəyyən edir və bu əlaqə istehsal funksiyası $y = F(x)$-lə təyin olunur. Fərz edək ki, istehsal funksiyası diferensiallanmanın zəruri şərtlərini ödəyir və həm də 1,2 (bax p.1) aksiomlarındakı şərtlərə analoji şərtləri ödəyir:

1) Bu funksiya iqtisadi *E* oblastında azalmayandır, onun xüsusi törəmələri bu oblastda mənfi olmayandır;

2) Baxılan qabarıq *S* alt çoxluğunda istənilən $\{X \in E : F(x) \geq a\}$ alt çoxluğu bütün a - lar üçün qabarıqdır. Bu şərtlərin iqtisadi mənası tamamilə bir resurs halı üçün eynidir:

1) xərclərin artırılması buraxılışın azalmasına səbəb ola bilməz;

2) azalan gəlirlilik və ya azalan verimlilik qanunu ödənilməlidir. Tutaq ki, $P = (p_1, \cdots, p_n)$ - resursların qiymətləri vektorudur və ν - buraxılan vahid məhsulun qiymətidir. Onda mənfəət $W - X$ - in funksiyasıdır və

$W(x) = \nu y - px = \nu F(x) - px$. Beləliklə, çox resurslu firma məsələsinə gəlirik:

$$W(x) \to \max,$$

$$x \geq 0$$

$W(x)$ funksiyanın xüsusi törəmələrini sıfıra bərabər edərək, alarıq:

$$\nu \cdot \partial F / \partial x = P \qquad (3)$$

Hesab edəcəyik ki, bütün xərclər müsbətdir(sıfır xərcləri ata bilərik). Onda (3) münasibətilə müəyyən olunan nöqtə, daxili nöqtə olar, yəni stasionar nöqtədir.

İstehsal funksiyasının ödəcəyi ikinci şərt isə onun makismum nöqtəsi olmasına təminat verir. Beləliklə, istehsal funksiyası üzərinə təbii şərtlər qoymaqla (3) münasibəti çox resurslu firma məsələsinin həllini verir, yəni emal olunan resursların x^* həcmini müəyyən edir, nəticədə $y^*=F(X^*)$ buraxılışı alınır. X^* və ya (X^*, Y^*) nöqtəsi firmanın optimal həlli adlanır.

Çoxölçülü halda $\partial F / \partial x = (\partial F / \partial x_1 , \cdots, \partial F / \partial x_n)$ Məhsul-vektorunun fon həddi və ya məhsul – həddi vektoru adlanır. Bu vektor, sərfiyyat-resursları vektorunun dəyişməsinə münasibətdir. (3) münasibətləri hökm edir ki, optimal nöqtədə məhsul həddi vektoru qiymət vektoruna münasibətdir və mütənasiblik əmaslı vahid məhsulun qiymətidir. Daha sonra, $v \cdot \partial F / \partial x -$ bir vahid i - ci resursun əlavə verdiyi məhsulun i - ci məhsul həddinin dəyəridir. Lakin i - ci resursun bir vahidinin dəyəri p_i – ə bərabərdir, yəni müvazinətə gəlirik: istehsala əlavə bir vahid i - ci resurs cəlb etmək olar, onun alınmasına p_i – xərc çəkmək lazımdır, nəticədə uduş olmayacaq, ona görə ki, xərclədiyimizə bərabər əlavə pul əldə edəcəyik. Deməli, (3) münasibətilə alınan optimal nöqtə tarazlıq nöqtəsidir.

İstehsal funksiyası üzərinə qoyulan təbii şərtlər (bax aksiom 1.2 p.1) daxilində firma məsələsinin optimal həlli (3) münasibətləri ilə tapılır və bütün $v > 0$ və $p > 0$ üçün yeganədir. Beləliklə, $X^*(v, P)$ vektor funksiyası və ya $x_i^* = x_i^*(v, P)$ funksiyası alınar. Bu n funksiya məhsulun və resursun verilmiş qiymətlərinə uyğun resurslara tələb funksiyası adlanır.

Məzmunca bu funksiya nə deməkdir?

Əgər resursun qiyməti *P* - dirsə, buraxılan əmtəənin qiyməti v - sə , onda istehsalçı emala olunan resursların həcmini $x_i^*(v, p)$ funksiyası görə müəyyən edir və bununla da firmanın optimal ölçüsü müəyyənləşir. Emal olunan resursların həcmini bilərək və bu qiyməti istehsal funksiyasında yerinə qoysaq, onda qiymətdən asılı olan məhsul buraxılışını alarıq.

Misal 2. 1997-ci ildə *E* ticarətçidən ibarət qrup *N* satıcı ilə birləşməyi qərara alır. İşə başlayan gündən mənfəət (gündəlik gəlir minus xərclər, əmək haqqı hesabı alınmır). $W = 60\,000(EN)^{1/3}$ düsturu ilə ifadə olunur. Hər bir ticarətçinin əmək haqqı 12000 rub/gün. Satıcınınki isə 8000 rub/gün təşkil edir. Satıcılardan və ticarətçilərdən ibarət qrupun optimal tərkibini tapın.

Həlli. (3) münasibətindən istifadə edərək tənliklər sistemini düzəldək və həll edək:

$$\begin{cases} \partial W/\partial E = 60\,000(1/3)E^{-2/3}N^{1/3} = 12\,000, \\ \partial W/\partial N = 60\,000(1/3)E^{1/3}N^{-2/3} = 8\,000 \end{cases}$$

Birinci tənliyi 2-yə bölsək alarıq: $N/E = 3/2, \quad N = (3/2)E$. Bu qiyməti ikinci tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq:

$$8\,000 = 60\,000(1/3)E^{1/3}\left[(3/2)E\right]^{-2/3};$$

Nəticədə alarıq: $E = 125/18 \approx 7, \quad N = 10$

MƏSƏLƏLƏR

(bütün göstəricilər 1997-ci ilə aiddir)

1. Zavod bir ayda 10 mln. rublluq məhsul verir və onun əsas fonduda 10 mln. rubl dəyərindədir. İqtisadçilar hesablayıblar ki, məhsul buraxılışını 1 mln. rubl artırmaq üçün, 3 mln. rublluq avadanlıq almaq lazımdır. Burada paradoks yoxdurmu? Əgər fəhlələrin sayı 1000 nəfər olarsa istehsal funksiyasını tapın (burada nəzərdə tutulur ki, bu funksiya Kobba-Duqlas funksiyasıdır və $\alpha + \beta = 1$).

2. Fermer təsərrüfatının əsas fondları 10 mln. dəyərindədir. Onun (işçisi–fermer) ailəsinin üzvüləri var. Gəliri artırmaq üçün fermer təsərrüfata öz əmisi oğlunu dəvət edir və görür ki,

gəlir 8% artdı və 13 mln. manat oldu. Kobba-Duqlas funksiyasının ifadəsini yazın (hesab edin ki, $\alpha+\beta=1$).

3. Biznesmen böyük olmayan avtonəqliyyat müəssisəsi açmağı və əhaliyə xidmət etməyi qərara alır. Statistika ilə tanış olarkən, o, görür ki, gündəlik gəlir avtomobillərin A sayından və işçilərin n sayından asılı *y*=90000. $A^{1/2}N^{1/4}$ düsturu ilə ifadə olunur. Gündəlik xərclərin miqdarı bir maşın üçün 40000 rubldur , gündəlik əmək haqqı 10000 rubldur. Avtomobillərin və fəhlələrin optimal sayını tapın.

4. Biznesmen pivə barı açmaq istəyir. Fərz edək ki, gəlir *y* stolların *M* sayından və ofisiantların F sayından asılı olaraq *y*=20000 : $M^{2/3}F^{1/4}$ düsturu ilə ifadə edilir. Bir stolun xərci 5000 rubldur, ofisiantın əmək haqqı 10000 rubldur. Stolların optimal sayını tapın.

9.3. İqtisadiyyatda çoxkriteriyalı optimizasiya məsələləri

1. Çoxkriteriyalı optimallaşdırma məsələsi anlayışı. Adi (bir kriteriyalı) optimallaşdırma məsələsi belə ifadə edilir: $z = f(x)$ funksiyasına ekstremum (məsələn, maksimum) verən $X \in D$ nöqtəsini tapın. Burada D – mümkün həllər oblasiıdır, $f(x)$ - qəbul edilən X həllindən asılı olaraq, yeganə optimallıq kriteriyası arasındakı asılılığı ifadə edir. Qərar qəbul edən şəxsin rolu D – oblastını müəyyənləşdirən şərtlərin verilməsi və $f(x)$ məqsəd funksiyasının təsvirindən ibarətdir. Çoxkriteriyalı optimallaşdırma məsələlərində şərait başqa cür olur – bir neçə məqsəd funksiyaları olur $z_1 = f_1(X_1), \cdots, z_m = f_m(X)$, bu funksiyalar mümkün həllər çoxluğunun müxtəlif nöqtələrində öz makismal qiymətlərini ala bilərlər. Bu halda qərar qəbul edən şəxs nəinki D mümkün həllər çoxuğunu təsvir etməlidir, məqsəd funksiyalarını verməlidir, həm də son qərarın prinsipini göstərməlidir.

Bu səbəbdən də çoxkriteriyalı məsələlərin həllində subyektiv faktorun rolu, bilik və intuisiyanın rolu, bir kriteriyalı məsələlərə müqayisədə xeyli artır.

Misal 1. İki növ məhsul buraxmaq üçün üç növ resursdan istifadə olunur. Xərc norması qiymət matrisi *A*, resurslarınehtiyat matrisi B məlumdur:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = (1, \quad 1, \quad 4), \quad P = (17, \quad 12), \quad B = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 39 \end{pmatrix}.$$

Əgər X vahid məhsulun istehsalı planlaşdırılırsa, onda lazım olan resursların miqdarı QAX, nəzərdə tutulan gəlir PX olar və onda mənfəət $W = PX - QAX$ olar. Gəlirin və mənfəətin eyni zamanda maksimum olmasını arzu etmək olar. Bu halda iki məqsəd funksiyalı məsələ alarıq:

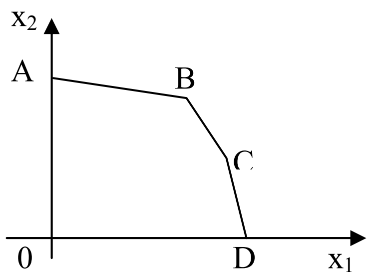
$$PX \to \max,$$
$$(P - QA)X \to \max,$$
$$AX \le B, \quad x \ge 0$$

və yaxud açıq şəkildə

$$z_1 = 17x_1 + 12x_2 \to \max,$$
$$z_2 = 5x_1 + 5x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 20,$$
$$x_1 + x_2 \le 15,$$
$$3x_1 + x_2 \le 39$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Mümkün çoxluğu qrafiki təsvir edək.

Şəkildən göründüyü kimi OABCD beşbucaqlısını alarıq. (Yada salaq ki, xətti funksiya mümkün çoxluğun künc) nöqtələrinin birində ekstremumu alır bölmə 3.1 b. 2). Deməli, hər iki funksiya maksimumlarını *A, B, C, D* (şəkil 1) nöqtələrinin birində alır.



Şəkil 1.

Aşağıdakı cədvəli düzəldək.

Təpə nöqtələri	*A(0,10)*	*B(10,5)*	*C(12,3)*	*D(13,0)*
Z_1 funksiyası	*120*	*230*	*240*	*221*
Z_2 fnuksiyası	*50*	*55*	*51*	*39*

Cədvəldən göründüyü kimi maksimal qiymət $z_1=240$ və ona uyğun optimal həll *C(12,3)* –dür; maksimal qiymət $z_2=55$ və ona uyğun optimal həll *B(10,5)* –dir.

Ən yaxşı həllin seçilməsi qərar qəbul edən şəxsin son qərarından asılıdır.

2. Paretoya görə optimallıq. Bu anlayış bütün iqtisadi nəzəriyyədə ən vacib anlayışlardan biridir. Bununla belə burada sağlam fikirdən əlavə heç nə yoxdur. $z_1,\ldots,z_m$ - m kriteriyalı D mümkün çoxluğu çox kriteriyalı məsələyə baxmağı davam etdirək.

Üstünlük prinsipi. Tutaq ki, X,Y iki mümkün həlldir, onda bütün $i=1,2,...,m$ üçün $Z_i(X)\geq Z_i(Y)$ olarsa və elə k tapmaq mümkün olsa ki, $Z_k(X)>Z_k(Y)$ olsun deyirlər ki, X Y - ə görə üstündür.

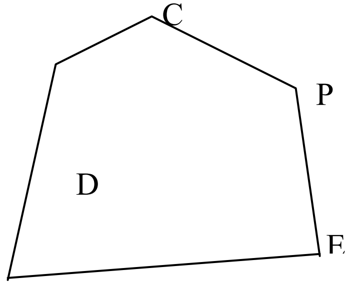
Əgər X Y – dən üstündürsə, onda heç bir halda Y ən yaxşı həll ola bilməz.

T həlli yalnız o zaman üstün olmayan həll adlanır ki, T – dən üstün olan X həlli olmasın. Deməli, ən yaxşı həlli üstün olmayanların içərisindən axtarmaq lazımdır.

Tərif. Üstün olmayan həllər çoxluğu *Pareto çoxluğu* və yaxud *Paretoya görə optimallıq çoxluğu* adlanır. Beləliklə, çox kriteriyalı optimal məsələdə ən yaxşı həlli Pareto çoxluğunda axtarmaq lazımdır.

Misal 2. OXY müstəvisində hər hansı D çoxluğuna baxaq. Bu çoxluq oyun çoxluğu adlanır. İki oyunçu oyun oynayırlar. Oyunun mənası ondan ibarətdir ki, onlar birlikdə (X,Y)– cüt ədədlərini göstərirlər.

Əgər bu nöqtə D çoxluğuna düşərsə, birinci oyunçu x, ikinci oyunçu y miqdarında pul udur. Sonra növbəti partiya oynanılır və s. Hər bir oyunçu çox udmaq istəyir, bunun üçün onlar qarşılıqlı hərəkət etməli, birlikdə oynamalı, öz hərəkətlərini fikirləşməlidirlər.



Şəkil 2.

Tam aydındır ki, əgər $x' \geq x, y' \geq y$ və $x' > x$ və ya $y' > y$ olarsa, onda (x', y') nöqtəsi (x, y) nöqtəsindən üstün olar. Deməli, şəkil 2-dən göründüyü kimi D çoxluğu üçün üstün olmayan nöqtələr çoxluğu və ya Pareto çoxluğu CPE sınıq xəttidir.

3. Mübadilə modeli, qiymətlər. İnsanlar öz şeylərini başqa şeylərə dəyişmək ümidi ilə bazara gəlirlər. Bu tamamilə təbii bazardır, burada pul işləmir (güclü infilyasiya olduqda, müharibə zamanı belə bazarlar bir müddət fəaliyyət göstərə bilərlər). Hamı bazarı gəzir və baxırlar ki, nəyi nə ilə dəyişsinlər. Asanlıqla görmək olar ki, belə dəyişmələr hər iki tərəf üçün çox faydalı ola bilər. Klassik misal olaraq, göstərmək olar ki, əgər uzağı və yaxını yaxşı görməyən iki nəfərin çeşməkləri dəyişikdirsə, onda onların öz çeşməklərini dəyişmələri hər ikisi üçün nə qədər faydalı olmasıdır. Bu üsulla onların hər biri özü üçün çox qiymətli şey əldə edirlər. Qeyd edək ki, insanlar əvvəl baxırlar, bir-birləri ilə dəyişmənin şərtlərini razılaşdırırlar və hələlik bir şey dəyişmədən informasiya mübadiləsi gedir, mübadilə şərtləri vaxtaşırı dəyişir. Saat 17.00-da hamı öz seçimini müəyyənləşdirir, mübadilə şərtləri sabitləşir və insanlar öz şeylərini dəyişib, dağılırlar. Xüsusi qeyd edək ki, hər kəs öz mübadiləsini özünün üstünlük verdiyi əlamətlər sisteminə görə aparırı. Bu əlamətlər sistemi və ya iştirakçıların faydalılıq funksiyaları optimallıq kriteriyalarını müəyyənləşdirir. Tutaq ki, u_i-i –ci iştirakçının faydalılıq funksiyasıdır. n- kriteriyalı optimallaşdırma məsələsi alırıq ki, buna da Pareto optimallıq anlayışı tətbiq oluna bilər. Aydındır ki, bu kriteriyalara görə axırıncı paylanma Paretoya görə optimal olacaq. Bundan başqa heç bir iştirakçı üçün bu paylanma başlanğıcdan pis ola bilməz (belə ki, mübadilə hər tərəfin razılığı ilə həyata keçirilir). Bu şəraiti təhlil edən riyaziyyatçılar isbat edirlər ki, informasiya mübadiləsi zamanı əmtəələr arasında müəyyən proporsiyalar yaranır ki, bu da əslində əmtəələrin qiymətləridir.

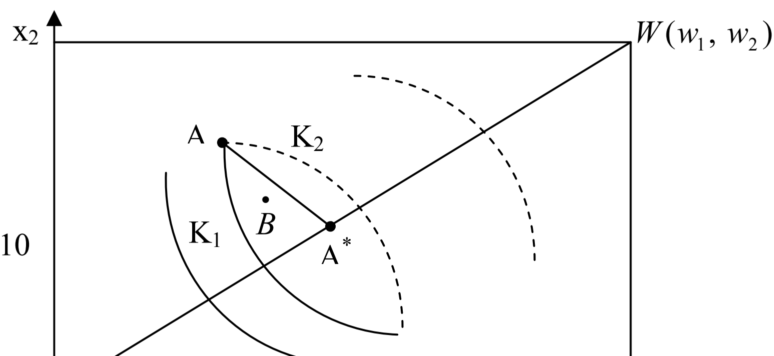
Ümumi hala baxmadan, iki iştirakçının iki əmtəə dəyişməsi prosesi ilə kifayətlənəcəyik.

4. Edjvort yeşiyi. Tutaq ki, u_i i–ci iştirakçının faydalılıq funksiyasıdır. w_i – ilə hər iki iştirakçıda olan i– ci əmtəənin miqdarını işarə edək. Fərz edək ki, $X=(x_1,x_2)$ – birincinin mülkiyyətidir, onda qalan əmtəələr $(W-X)$ ikincininki olar. $X^0=(x_1^0,\ x_2^0)$ – la birinci iştirakçının başlanğıc mülkiyyətini işarə edək, onda $W-X^0$ ikincinin başlanğıc mülkiyyəti olar. Ümumiyyətlə, iştirakçıların sayı cəmi iki olduğundan, kifayətdir ki, birinci olan əmtəələri göstərmək, qalanları ikincidə olacaq.

Əgər bütün bü məlumatları OX_1X_2 koordinat sisteminə köçürsək, onda Edjvort yeşiyi alınar. İxtiyari (x_1,x_2) nöqtəsi əmtəələrin paylanmasına uyğun olar: birincidə nə qədər varsa, qalanları (w_1-x_1,w_2-x_2) -ikincidədir. Tam əyri xətlər birincinin etinasızlıq əyrisidir, qırıq xətlərlə ikincinin etinasızlıq xətləri göstərilib.

Еджворт йешийи ашаьыдакы суала ъаваб вермяйя имкан йарадыр: илк вериляняря эюря сон пайланма неъя олар (бцтцн мцмкцн мцбадилядян сонра)?

A və B nöqtələrinə baxdıqda, görürük ki, B nöqtəsi A –dan üstün mövqedədir, belə ki, $u_1(B)>u_1(A)$ və $u_2(B)>u_2(A)$. Aydındır ki, əgər iştirakçıların vəziyyəti A nöqtəsidirsə, onda onlar həvəslə B nöqtəsinə keçirlər – bunun üçün birinci ikinciyə a_2-b_2 vahid 2-ci əmtəə verir əvəzində b_1-a_1 vahid birinci əmtəə alır.



Beləliklə, əgər iştirakçıların başlanğıc vəziyyəti A nöqtəsidirsə, onda bu nöqtə son vəziyyət ola bilməz–nəzəriyyədən məlumdur ki, son paylanma Paretoya görə mütləq optimal olmalıdır. Edjvort yeşiyində olan nöqtənin Paretoya görə optimal olduğunu necə bilmək olar?

İxtiyari C nöqtəsinə baxaq. Tutaq ki,

$V_1(C)=\{K : u_1(K)\geq u_1(C)\}$ və $V_1^+(C)=\{K : u_1(K)>u_1(C)\}$

$V_2(C)=\{K : u_2(K)\geq u_2(C)\}$ və $V_2^+(C)=\{K : u_2(K)>u_2(C)\}$

Aşağıdakılar aşkardır.

Təklif 1. C nöqtəsi Paretoya görə yalnız və yalnız o zaman optimal olar ki, $V_1^+(C)\cap V_2(C)$, $V_2^+(C)\cap V_1(C)$ çoxluqlarının hər ikisi boş çoxluq olsun.

Əgər faydalılıq funksiyaları «yaxşı» funksiyalardırsa, məsələn diferensiallanandırlarsa, onda aşağıdakı təklif doğrudur.

Təklif 2. C nöqtəsi Paretoya görə o zaman optimal olar ki, iştirakçıların bu nöqtədə çəkilən etinasızlıq əyriləri ümumi toxunana malik olsunlar.

Bu təklifləri isbat etməyəcəyik.

Misal 4. Tutaq ki, iştirakçılar eyni faydalılıq funksiyalarına malikdirlər $u_1=u_2(x_1,x_2)=x_1x_2$.Pareto çoxluğunu tapaq. Son paylanmanı necə tapmalı?

İştirakçıların etinasızlıq əyrilərinin ($T=(a,b)$ nöqtəsində çəkilən) ümumi toxunanı olması üçün zəruri və kafidir ki, bu əyrilərin normal vektorları kollinear olsunlar.

$\varphi(x_1, x_2) = C$ əyrisinin normal vektoru $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$ - vektorudur.

Birincinin *(a, b)* nöqtəsindən keçən etinasızlıq əyrisi $x_1x_2 = C_1$ olar, burada $C_1 = ab$ İkincinin həmin nöqtədən keçən etinasızlıq əyrisi $(w_1 - x_1)(w_2 - x_2) = C_2$ olar, burada $(w_1 - x_1)(w_2 - x_2) = C_2$.

Birincinin normal vektoru (x_2, x_1) olar, yəni *(b,a)* ikin-cininki, isə-$\left(-(w_2 - x_2), -(w_1 - x_1)\right)$,yəni $\left(-(w_2 - b), -(w_1 - a)\right)$.

Beləliklə vektorlar kollinear olduğundan, $\frac{b}{a} = \frac{(w_2 - b)}{(w_1 - a)}$.

Buradan $\frac{b}{a} = \frac{w_2}{w_1}$, yəni Paretoya görə bütün optimal nöqtə-lər kooridinat başlanğıcını $W = (w_1, w_2)$ (bax.şəkil 3) nöqtəsi ilə birləşdirən düz xətt parçası üzərindədir. Bu da o deməkdir ki, X^*- başlanğıc paylanmadırsa, son paylanma ümumiyyətlə desək yeganə deyildir. Son paylanma çoxluğu belə tapılır: başlanğıc vəziyyət olan X – dən iştirakçıların k_1 və k_2 etinasızlıq əyrilərini çəkərək, k_1k_2 «linzasın» alırıq. Bu linzanın OW parçası ilə kəsişməsi bütün mümkün son paylanma çoxluğudur.

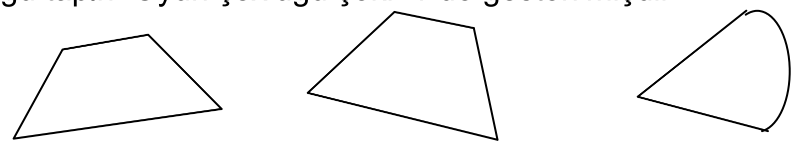
□□□□□□□□□□

Çox kriteriyalı, bir neçə $f_1, \ldots, f_m$ məqsəd funksiyalı optimallaşdırma məsələlrində belə hərəkət edirlər: Yeni kriteriyə yardırlar $f = c_1 f_1 + \ldots + c_m f_m$ - burada C_i- çəki əm-salları adlanan və ya sadəcə çəkilər adlanan ədədlərdir (əgər məqsəd funksiyalarının hamısının maksimumunu tapmaq tələb olunursa, onda C_i-lər müsbətdir). Məsələn, əgər $f_i - i$–ci buraxılışın həcmidirsə, onda C_i -satış qiymətləri kimi götürülə bilər və o zaman f - bütün buraxılışın dəyəri olar. İki məqsəd funksiyalı XP məsələsinə baxaq:

$$x_1 \to \max,$$
$$x_2 \to \max,$$
$$x_1 + 3x_2 \le 18,$$
$$x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Satış qiymətlərini C_1 və C_2 ilə işarə edərək, iki kriteriyanı biri ilə əvəz edək – bütün buraxılışın qiyməti ilə $C_1x_1 + C_2x_2$. Optimal buraxılışın necə dəyişməsini və onun qiymətinin C_1 və C_2 asılı olaraq dəyişməsini izləyin.

2. İki oyunçu oynayırlar. Pareto görə optimal çoxluğu tapın. Oyun çoxluğu şəkil 4-də göstərilmişdir.



Şəkil 4.

3. Aşağıdakı siyaları cütlükləri üçün Edjvort yeşiyini tədqiq edin:

a) $u_1 = u_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$;

б) $u_1 = u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$;

c) $u_2(x_1, x_2) = \min\{x_1, 2x_2\}$; $u_2(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$

Mövzu 10.
QEYRİ-MÜƏYYƏN VƏ MÜƏYYƏN İNTEQRAL

10.1. Qeyri-müəyyən inteqral və onun xassələri

İnteqral–riyaziyyatın ən mühüm anlayışlarından biridir. Bu anlayış elmin, texnikanın, iqtisadiyyatın bütün sahələrində geniş tətbiq edilir. Dünyagörüşlü əhəmiyyətə malikdir. Əvvəlcə ona təmiz riyazi nöqteyi-nəzərindən baxaq.

1. Diferensiallama və inteqrallama–qarşılıqlı tərs - əməllərdır. Məlum olduğu kimi *diferensiallama* ümumiyyətlə desək, verilmiş ixtiyari funksiyanın törəməsinin tapılmasına deyilir. Burada törəmənin aydın mexaniki mənası var–əgər $S(t)$ gedilən yolun zamandan asılılığıdırsa, onda $S'(t)$ törəməsi t anında ani sürət, $S''(t)$ törəməsi və ya ikinci törəmə isə t anındakı təcildir.

Tərs məsələni də qoymaq olar: əgər $a(t)$ təcilin zamandan asılılığı məlumdursa, t anında sürəti necə tapmalı? Və yaxud hər bir zaman anında sürət məlumdursa,gedilən yolu necə tapmalı. Dəqiq riyazi nöqteyi nəzərdən bu tip məsələlər sinifi belədir: $f(x)$ funksiyası məlumdur, törəməsi bu funksiyaya bərabər olan $F(x)$ funksiyasını necə tapmalı?

Tərif. Əgər $F(x)-f(x)=F'(x)$ olarsa $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının *ibtidai funksiyası* və yaxud *inteqralı* adlanır.

Verilmiş ümumiyyətlə desək ixtiyari funksiyanın ibtidai funksiyasının tapılmasına *inteqrallama* (bu məsələ ilə əlaqədar kompleks məsələlərə – inteqral hesabı) deyilir. Gördüyümüz kimi bu məsələ diferensiallamanın tərsidir.

Düz məsələ:	Tərs məsələ:
diferensiallama	inteqrallama
$f(x)\to f'(x)$	$f(x)=F'(x)\to F(x)$

Beləliklə, əgər $F'(x) = f(x)$ olarsa, onda $f(x)$, $F(x)$ funksiyasının törəməsidir, $F(x)$ isə $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Lakin $F(x)$–lə bərabər $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyası ixtiyari $F(x)+c$, burada *c* - sabitdir funksiyası da olacaq, belə ki $(F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$.

İsbat etmək olar ki, $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyaları bununla qurtarır, yəni $f(x)$ funksiyasının ixtiyari ibtidai funksiyası $F(x)+c$ şəkilindədir, burada $F(x)$–hər hansı ibtidai funksiyadır. Deməli, $f(x)$ funksiyasının bütün ibtidai funksiyalarını tapmaq üçün, bir ibtidai funksiyanın tapılması kifayətdir, qalanları bütün mümkün sabitləri əlavə etməklə alınar. Beləliklə, $F(x)+c$ ifadəsi (burada *c*-ixtiyari sabitdir, $F(x)$ isə $f(x)$ funksiyasının hər hansı ibtidai funksiyasıdır) törəməsi $f(x)$ olan funksiyaların ümumi ifadəsidir. Bu ifadə $f(x)$ funksiyanın *qeyri-müəyyən inteqralı* adlanır və $\int f(x)dx$ ilə işarə edilir; $f(x)dx$ hasili inteqralaltı ifadə , $f(x)$ isə *inteqralaltı funksiya* adlanır.

Misal 1. $(x^3)' = 3x^2$ olduğundan, $\int 3x^2 dx = x^3 + c$; $(Sin2x)' = 2Cos2x$ olduğundan $\int 2Cos2xdx = 0{,}5Sin2x + c$; $\int e^x dx = e^x + c$

Bir daha qeyd edək: qeyri-müəyyən inteqralın tərifindən bilavasitə çıxır ki, onun törəməsi inteqral altı funksiyaya bərabərdir, yəni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \qquad (1)$$

Əgər $F(x)$ funksiyası $f(x)$-in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $dF(x) = f(x)dx$ və alarıq ki, $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$. Dəgər tərəfdən $\int dF(x) = F(x) + c$ olduğundan deyə bilərik ki, «d» və «$\int$» işarələri ardıcıl yazılarsa, onda bir-birini yox edir.

Misal 2. İnteqral işarsindən istifadə edərək yaza bilərik ki, $S(t) = \int v(t)dt$ və $v(t) = \int a(t)dt$. Düzxətli bərabərsürətli hərəkəti təhlil edək. Məsələn, ağırlıq quvvəsinin təsiri ilə tutaq ki, $a(t) = Const = g$. Onda $v(t) = gt + c$ olar, burada *c* ixtiyari sabitdir. Sürəti təyin etmək üçün hələlik verilənlər kifayət deyil. Bu fiziki mənadan da aydındır. v - nin hər hansı qiymətini fiksə etmək üçün hər hansı anda sürəti bilmək lazımdır. Tutaq ki, $v(t_0) = v_0$ onda $v(t) = v_0 = gt_0 + c$. Beləliklə, $c = v_0 - gt_0$ və alırıq ki, sürətin zamandan asılılıq qanunu belə olar: $v(t) = g(t - t_0) + v_0$. $S(t) = \int v(t)dt = \int (g(t - t_0) + v_0)\, dt = \frac{g(t - t_0)^2}{2} + v_0 t + c$

Tutaq ki, $S(t_0) = S_0$, onda $c = S_0 - v_0 t$ və nəticədə alarıq: $S(t) = \frac{g(t - t_0)^2}{2} + v_0(t - t_0) + S_0$.

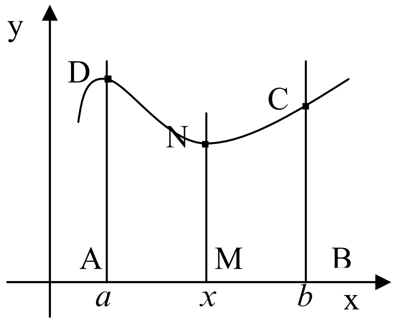
v_0, S_0- qiymətlərini şərti olaraq sürətin başlanğıc qiyməti və t_0 *anında yolun qiyməti* adlandırırlar.

Misal 3. 2x funksiyasının *x=2* olduqda *4*-ə bərabər olan ibtidai funksiyasını tapın.

$\int 2xdx = x^2 + c$ olduğundan, $2^2 + c = 4$ qəbul edib, alarıq ki, *c=0*. Deməli axtarılan ibtidai funksiya x^2– na bərabərdir. Adətən ibtidai funksiya anlayışını dəqiqləşdirirlər, belə ki, deyirlər ki, $F(x)$– funksiyası $f(x)$-in $[a,b]$ parçasında (intervalda və s.) ibtidai funksiyasıdır, əgər bu parçanın ixtiyarı nöqtəsində (uclarda söhbət bir tərəfli törəmələrdən gedə bilər) $F'(x) = f(x)$ olarsa.

2. İnteqralın həndəsi anlamı

$[a,b]$ parçasında kəsilməz, yalnız mənfi olmayan qiymətlər alan $y=f(x)$ funksiyasına baxaq. $f(x)$ əyrisi ilə, iki şaquli *x=a* və *x=b* düz xəttləri ilə, $[a,b]$ parçası ilə, OX oxu ilə məhdudlaşan *ABCD* fiquruna baxaq (şəkil 1.) Bu fiqur əyrixətli trapesdir *ADNM* – dəyişən fiqurun sahəsinin davranışını öyrənək. Bu fiqur *x=a* və $[a,b]$ parçasında götürülmüş ixtiyari *x* nöqtəsindən qaldırılmış şaquli düz xəttlə məhdudlaşıb. x dəyişdikdə bu sahə də dəyişər, yəni bu sahə *x* – in funksiyasıdır;bu funksiyanı *P(x)* – lə işarə edək.



Şəkil 1.

P(x) funksiyasının törəməsini tapaq.

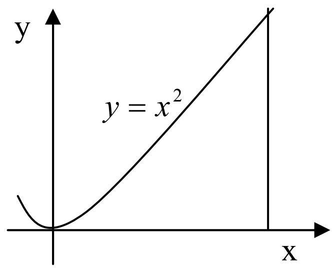
Ümumi qayda ilə *x* – ə müəyyən Δx artımı verək; onda *P* sahəsi də ΔP artımını alar.

Tutaq ki, m və M $f(x)$ funksiyasının $[x, x+\Delta x]$ parçasında uyğun olaraq ən kiçik və ən böyük qiymətləridir, onda $m\cdot\Delta x \le P \le M\cdot\Delta x$ olar. Buradan alarıq ki, $m \le \frac{\Delta P}{\Delta x} \le M$ $\Delta x \to 0$ - da $f(x)$ kəsilməzliyinə görə m və M, $f(x)$-ə yaxınlaşar, onda $\frac{\Delta P}{\Delta x} \to f(x)$. Beləliklə,

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x).$$

Axırıncı bərabərlik Nyuton-Leybnis teoremi adlanan məşhur teoremin doğruluğunu göstərir: dəyişən $P(x)$ sahəsinin *x*– ə görə törəməsi $y = f(x)$ ordinatına bərabərdir. Başqa sözlə desək $P(x)$ dəyişən sahəsi $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Digər ibtidai funksiyalardan onun fərqi $P(a)=0$ olmasındadır. İstənilən başqa $F(x)$ ibtidai funksiya $P(x)$ – dən yalnız sabitlə fərqlənir. Beləliklə, *ABCD* əyrixətli trapesinin sahəsi $P(b)=P(b)-P(a)=(F(b)+c)-(F(a)+c)=$ $=F(b)-F(a)$ burada $F(x)$ funksiyası $f(x)$-in istənilən ibtidai funksiyasıdır.

Misal 4. $y=x^2$ parabolası , *OX* oxu və absisi *x* olan şaquli xətlə məhdudlanmış fiqurun $P(x)$ sahəsini tapaq. x^2 – funksiyasının ibtidai funksiyası $\frac{x^3}{3}$ olduğundan axtarılan sahə



Şəkil 2.

$P(x)=\frac{x^3}{3}-0=\frac{x^3}{3}$ olar (bax.şəkil 2)

Bir daha təkrar edək: $[a,b]$ parçasında verilmiş, kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün tamamilə düzgün olaraq başa düşülməlidir ki, ibtidai funksiya olaraq dəyişən $P(x)$ əyrixətli trapesin sahəsi götürülə bilər (şəkil 1). İnteqralın daha bir həndəsi anlamı belədir: məlumdur ki, törəmənin qiyməti toxunanın meyl bucağının tangensidir. Ona görə də $f(x)$ funksiyası üçün ibtidai funksiyanın tapılması elə $F(x)$ funksiyasının tapılması deməkdir ki, onun qrafikinə *x* - nöqtəsində toxunan bucaq əmsalı $f(x)$ olsun.

3. Əsas inteqralların cədvəli. Diferensial hesabının hər bir düsturu təsdiq edir ki, hər hansı $F(x)$ funksiyası üçün onun törəməsi $f(x)$–dir. Bu düsturlar həm də inteqral hesabının əsas düsturlarını yazmağa əsas verir:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Diferensiallamanın aşağıdakı düsturlarını götürək (bölmə 5.1. b.3):

$1)\, c' = 0;$

$2)\, \left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1};$

$3)\, \left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a;$

$4)\, \left(e^{x}\right)' = e^{x};$

$5)\, (\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

$6)\, (\log_a x)' = \dfrac{1}{(x\ln a)};$

$7)\, (Sinx)' = Cosx;$

$8)\, (Cosx)' = -Sinx;$

$9)\, (tgx)' = \dfrac{1}{Cos^2 x};$

$10)\, (Ctgx)' = -\dfrac{1}{Sin^2 x};$

Bunlardan istifadə edərək, aşağıdakı inteqrallama düsturlarını alarıq:

$1)\ \int 0\cdot dx = c;\ (a \neq -1)$

$2)\ \int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\quad ;$

$3)\ \int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + c;$

$4)\ \int e^{x}dx = e^{x} + c;$

$5)\ \int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + c;.$

$6)\ \int \dfrac{1}{x}dx = \log_a x\cdot\ln a + c;$

$7)\ \int \cos x dx = \sin x + c;$

$8)\ \int Sinxdx = -\cos x + c;$

$9)\ \int \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c;$

$10)\ \int \dfrac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + c$

Bu düsturlara tez-tez tələb olunan dörd düsturu da əlavə edək:

11) $\int \frac{dx}{(1+x^2)} = arctgx + c;$ 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c;$

12) $\int \frac{dx}{(1-x^2)} = \left(\frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{(1+x)}{(1-x)}\right| + c;$ 14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c.$

Misal 5. a) $\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx$ (2) düsturunu tətbiq edərək $\frac{1}{\left(3/2\right)} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c = \left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}} + c$ alarıq, b) $\int e^{3x}dx = \left(\frac{1}{3}\right)e^{3x} + c$

4. İnteqrallamanın sadə qaydaları

1. Əgər k-sabitdirsə və $k \neq 0$, onda $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. Doğrudan da, diferensiallama qaydasına əsasən sağ tərəfin törəməsi $\left(\int kf(x)dx\right)' = kf(x)$ olar ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu. Beləliklə, sabit vuruğu inteqral işarəsi xaracinə çıxartmaq olar.

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ yenə də sağ tərəfm diferensiallayaraq sol tərəfdəki inteqralaltı funksiyanı alarıq ki, bunu da isbat etmək lazım idi. Beləliklə, cəmin (fərqin) qeyri-müəyyən inteqralı bu funksiyaların inteqrallarının cəminə (fərqinə) bərabərdir.

3. Əgər $\int f(x)dx = F(x) + c$ olarsa, onda $\int f(ax+b)dx = \left(\frac{1}{a}\right)F(ax+b) + c$. Doğrudan da, $F'(x) = f(x)$ olduğundan $\left(\left(\frac{1}{a}\right)F(ax+b) + c\right)' = F'(ax+b) = f(ax+b)$ olar ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

Xüsusi halda $a = 1$ və ya $b = 0$ olduqda alarıq:

$\int f(x+b)dx = F(x+b) + c$, $\int f(ax)dx = \left(\frac{1}{a}\right)F(ax) + c$

Misal 4. Qeyd etdiyimiz qaydalardan istifadə edərək, aşağıdakı inteqralları hesablayaq:

$$a)\int\left(6x^2-3x+5\right)dx=\int 6x^2dx-\int 3xdx+\int 5dx=2x^3-\left(\frac{3}{2}\right)x^2+5x+c;$$

$$b)\ \int\sin^2 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\frac{x}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)\sin 2x+c;$$

$$v)\ \int(1-x)(2+x)dx=\int\left(2-x-x^2\right)dx=2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+c;$$

$$c)\ \int\left(\frac{x+1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\sqrt{x}dx+\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left(\frac{2}{3}\right)x^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{x}+c.$$

5. Dəyişəni əvəz olunması ilə inteqrallama. Bu üsulun əsasını aşağıdakı qeyd təşkil edir.

Qeyd: Əgər $\int g(t)dt=G(t)+c,$ olarsa onda

$$\int g(p(z)p'(z))dz=G(p(z))+c, \qquad (2)$$

olar.

Doğrudan da bu bilavasitə diferensiallama qaydasında alınır:

$$\left(G\left(p(z)\right)+c\right)'=c'\left(p(z)\right)\cdot p'(z)=g\left(p(z)\right)\cdot p'(z).$$

Tutaq ki, $\int f(z)dz$ inteqralını hesablamaq tələb olunur. Əgər mümkündürsə, yeni dəyişən olaraq z-dən asılı $t=p(z)$ funksiyasını elə seçək ki, inteqralaltı funksiya aşağıdakı şəkil alsın: $f(z)dz=g\left(p(z)\right)\cdot p'(z)dz$, burada $g(t)$ inteqrallama üçün daha əlverişli funksiyadır. Yuxarıda dediyimiz kimi kifayətdir ki, $\int g(t)dt=G(t)+c$ inteqralını tapaq və $t=p(z)$ əvəzləməsi vasitəsilə axtarılan inteqralı ala bilərik. Adətən sadə şəkildə $\int f(z)dz=\int g(t)dt$ kimi yazırlar və nəzərə alırlar ki, t -dən asılı funksiyada sağ tərəfdə göstərilən əvəzləmə aparılıb.

Məsələn, $\int \sin^2 z \cdot \cos z\, dz$ inteqralını hesablayaq. $d(\sin z) = \cos z dz$ olduğundan $t = \sin z$ əvəzləməsini aparsaq alarıq: $\int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + c = \frac{\sin^3 z}{3} + c$.

6. Hissə-hissə inteqrallama. Tutaq ki, $u = f(x),\ v = g(x)$, x - dən asılı funksiyalardır və kəsilməz törəmələri var: $u = f'(x)$ və $v = g'(x)$. Onda hasilin diferensiallama qaydasına görə $d(uv) = udv + vdu$ və yaxud $udv = d(uv) - vdu;\ \int d(uv) = uv$. olduğundan nəticədə alarıq:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{3}$$

Bu düstur *hissə-hissə inteqrallama* qaydasını ifadə edir.

Tutaq ki, məsələn, $\int x \cdot \cos xdx$ inteqralını hesablamaq lazımdır. $u = x,\ \cos xdx = d(\sin x)$ qəbul etsək, alarıq ki, $du = dx,\ v = \sin x$. (3) düsturundan istifadə edək:

$$\int x \cdot \cos xdx = x \sin x - \int \sin xdx = x \sin x + \cos x + c$$

Axırda qeyd edək ki, müxtəlif funksiyaları inteqrallamaq üçün çox sayda düsturlar, inteqrallama qaydaları, geniş cədvəllər və s. mümkündür ki, bunlardan da yeri gəldikdə istifadə edəcəyik.

MƏSƏLƏLƏR

Sadə inteqral düsturlarından istifadə edərək aşağıdakıları tapın.

1. $\int (2x+1)^2 dx$ (əvvəlcə mötərizəni kvadrata yüksəldin),

2. $\int (2-x^2)^2 dx$ (analoji qayda ilə),

3. $\int \frac{(1+x^2)}{x} dx$ (əvvəlcə hədbəhəd bölün),

4. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)}$ (belə çevirmə aparın:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)} = \frac{(x^2+1-1)}{(1+x^2)} = 1 - \frac{1}{(1+x^2)}$$ və s.),

5. $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)}$ (4-cü misala analoji olaraq),

6. $\int \frac{(x^2+3)dx}{(x^2-1)}$ (4-cü misala analoji olaraq),

7. $\int (1+\sin x - \cos x)dx$

8. $\int \frac{dx}{(x+a)}$; $\int (2x-3)^{10} dx$; $\int \frac{dx}{(2+3x^2)}$; $\int \frac{dx}{(2-3x^2)}$.

9. Dəyişəni əvəz edərək aşağıdakı inteqralları tapın:

$$\int \ln x dx; \int x \cdot e^{-x} dx; \int x \cdot \cos x dx; \int \arcsin x dx.$$

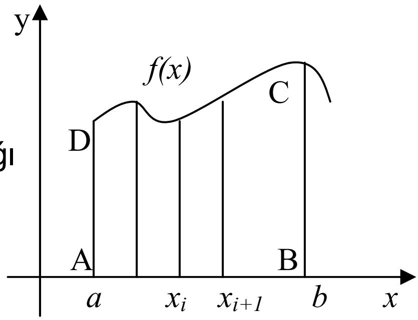
10.2. Müəyyən inteqral və onun xassələri

1. Əyrixətli trapesin sahəsi. Əyrixətli trapesin sahəsinin tapılması məsələsinə qayıdaq (bax. bölmə 10.1 p.2).

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında mənfi olmayan $y = f(x)$ funksiyası təyin olunmuşdur. $f(x)$ –əyrisi, iki şaquli $x = a$ və $x = b$ düz xətləri, $[a,b]$ parçası ilə məhdudlaşan *ABCD* fiquruna, yəni əyrixətli trapesə baxaq.

Trapesin AB oturacağını $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək və bölgü nöqtələrindən şaquli düz xətlər çəkək.

Nəticədə trapes bir neçə hissələrə bölünər. Hər bir hissəni-zolağı oturacağı və hündürlüyü eyni olan düzbücaqlı ilə əvəz edək. Düzbucaqlının hündürlüyü olaraq müəyyənlik üçün zolağın ən sol tərəfini götürək (şəkil 1). Bu halda əyrixətli trapes düzbücaqlılardan ibarət pilləvari fiqurla əvəz olunar. Onda hər bir zolağın sahəsi, onu əvəz edən düzbucaqlının sahəsinə təqribən bərabər olar və əyrixətli trapesin sahəsi isə bu düzbucaqlılardan ibarət pilləvari fiqurun sahələrinin cəminə bərabər olar.



Şəkil 1.

i–ci düzbucaqlının oturacağı $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ olar, onda onun sahəsi $f(x_i)\Delta x_i$-ə brabər olar, bu halda bütün pilləvari fiqurun sahəsi $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ – ə bərabər olar. Deməli, əyrixətli trapesin sahəsi təqribi olaraq $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$ bərabərdir. $\Delta x_i \to 0$– da bu bərabərliyin xətası da sıfıra yaxınlaşar və onda alarıq:

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

ABCD əyrixətli trapesin sahəsi (1) limitinin varlığından asılıdır. Elə funksiyalar var ki, onlar üçün (1) limiti yoxdur. Bu halda deyirlər ki, *ABCD* trapesinin sahəsi yoxdur.

2. Müəyyən inteqralın tərifi. Tutaq ki, $y = f(x)$ funksiyası hər hansı $[a,b]$ parçasında verilmişdir. Parçanı bir neçə nöqtələrlə hissələrə bölək. Bu nöqtələri $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ ilə işarə edək. $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ fərqlərinin ən böyüyünü λ ilə işarə edək. Hər bir $[x_i, x_{i+1}]$ parçasında ixtiyari ξ_i nöqtəsi seçək və belə cəm düzəldək: $\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$

Əgər hər bir $\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq mümkün olsa ki, $\lambda < \delta$ olduqda $|S - \sigma| < \varepsilon$ olsun, onda deyirlər ki, $\lambda \to 0$ -da σ cəminin *S* limiti var və belə işarə edirlər:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$$

Tərif. Əgər $\lambda \to 0$-da σ cəminin *S* limiti varsa, bu limitə $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasındakı *müəyyən inteqralı* deyilir və $\int_a^b f(x)dx$ ilə işarə edilir. $f(x)$ funksiyası isə $[a,b]$ parçasında *inteqrallanan* adlanır.

a və *b* ədədləri uyğun olaraq inteqralın *aşağı* və *yuxarı sərhədi* adlanır. Fiksə edilmiş sərhədlərdə müəyyən inteqral sabit ədəddir. Müəyyən inteqralın bu tərifi Rimana məxsusdur, buna görə də buna *Riman inteqralı* da deyirlər. Müəyyən inteqralın başqa tərifləri də var, lakin onlar bizə lazım olmayacaq. Müəyyən inteqralın təsvir olunan tərifindən onun təqribi hesablanmasında istifadə olunur. İnteqrallama parçasını hər hansı *h* addımı ilə keçirlər və $\sum_i f(\xi_i)h$ cəmini tapırlar. Bu isə $\int_a^b f(x)dx$ inteqralının təqribi qiymətidir. Daha dəqiq qiymət almaq üçün *h* addımını azaltmaq lazımdır.

3. Müəyyən inteqralın xassələri. Bu xassələrin bəzilərini isbatsız qəbul edəcəyik.

1. İnteqrallama parçasında inteqrallanan funksiyanın məhdudluğu zəruridir.

İsbatı. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası məhdud deyildir. Onda, $[x_i, x_{i+1}]$ hissələri nə qədər keçik olsa da bu hissələrin birində məsələn, $[x_i, x_{i+1}]$ - də funksiya qeyri – məhdud olar. Deməli, bu parçada $f(\xi_i)\Delta x_i$ ifadəsi ξ_i-nin seçilməsindən asılı olaraq istənilən qədər böyük qiymət ala bilər və σ – da sonlu limit ala bilməz.

2. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda bu funksiya inteqrallanandır, yəni $\int_a^b f(x)dx$ var.

3. Əgər hər iki f və g funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda onların cəmi, fərqi və hasili də inteqrallanandır və bundan əlavə

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

4. Əgər parçada məhdud olan funksiya sonlu və ya hesabı sayda kəsilmə nöqtələrinə malikdirsə, onda bu parçada funksiya inteqrallanandır.

5. Monoton, parçada məhdud funksiya həmin parçada inteqrallanandır. Bu ona görədir ki, belə funksiyanın kəsilmə nöqtələri hesabı saydadır.

6. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda həmin funksiya daha kiçik parçalarda da inteqrallanandır. Əgər $f(x)$ $[a,c]$, $[c,b]$ parçalarında inteqrallanandırsa, onda $[a,b]$ parçasında da inteqrallanandır və

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

7. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandır, $a<b$. Onda; *a)* əgər $f(x)\geq 0$ olarsa, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$; *b)* əgər $f(x)>0$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx > 0$, *c)* inteqralın sərhədlərini dəyişdikdə onun işarəsi dəyişər; *ç)* əgər $[a,c]$ parçasında $f(x)\geq 0$ və $[c,b]$ parçasında $f(x)\leq 0$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b |f(x)|dx$ olar.

Müəyyən inteqralın bir sıra xassıləri çox təbiidir.

8. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ – də inteqrallanandırsa, $a<b$ və $m \leq f(x) \leq M$ olarsa, onda

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \text{ olar.}$$

İsbatı. Asanlıqla görmək olar ki, $[a,b]$ parçasını kiçik hissələrə necə bölməkdən asılı olmayaraq aşağıdakı ikiqat bərabərsizlik doğru olacaq:

$$m(b-a) \leq \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leq M(b-a)$$

Buradan isə göstərilən bərabərsizlik alınır.

9. Əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları $[a,b]$ parçasında inteqrallanan funksiyalardırsa, $a<b$ və $f(x)\le g(x)$ olarsa, onda $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

4. Orta qiymət haqqında teorem. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, $a<b$ və $m\le f(x)\le M$ – dirsə, onda elə μ ədədi varki $m\le\mu\le M$ və

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a) .$$

İsbatı. 8-ci xassəyə əsasən:

$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Bərabərsizliyin bütün tərəflərini $(b-a)$ –ya bölsək, alarıq: $m\le \left|\frac{1}{(b-a)}\right|\cdot\int_a^b f(x)dx \le M$

$\left|\frac{1}{(b-a)}\right|\cdot\int_a^b f(x)dx = \mu$ qəbul etsək alarıq: $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$

$a>b$ olduqda isbat bir qədər mürəkkəbləşir, onu göstərməyəcəyik.

5. Yuxarı sərhədi dəyişən müəyyən inteqral

Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda bu funksiya ixtiyari $[a,x]$ parçasında da inteqrallanan olar, burada $a\le x\le b$, yəni ixtiyari belə x üçün $\int_a^x f(t)dt$ inteqralı var; onu $P(x)$–lə işarə edək $P(x)=\int_a^x f(t)dt$.

Teorem 1. **Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında inteqrallanandırsa, onda $P(x)$ həmin parçada kəsilməzdir.**

İsbatı. x-ə ixtiyari *h* artımı versək ($x+h$ $[a,b]$ parçasından kənara çıxmamaq şərti ilə), onda funksiyanın yeni qiymətini alarıq:

$$\int_{x}^{x+h} f(t)dt = \mu \cdot h$$

8-ci xassəyə görə alarıq:

$\int_{x}^{x+h} f(t)dt = \mu \cdot h$, burada μ ədədi $f(x)$ funksiyasının $[a,b]$ parçasındakı ən kiçik və ən böyük qiymətləri arasındadır. Deməli, əgər $h \to 0$ olarsa, $\mu \cdot h \to 0$. Bu isə baxdığımız x nöqtəsində $P(x)$ funksiyasının kəsilməzliyini göstərir.

Teorem 2. **Əgər fərz etsək ki, $f(x)$ funksiyası $d \in [a,b]$ nöqtəsində kəsilməzdir, onda bu nöqtədə $P(x)$ törəməsi var və $f(d)$- yə bərabərdir.**

İsbatı: Teorem 1-ə əsasən alarıq ki, $P(d+h) - P(d) = \mu \cdot h$

Aydındır ki, $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyinə görə $h \to 0$ olduqda $d\mu \to f(d)$ olar, beləliklə

$$\lim_{h \to 0} \frac{(P(d+h) - P(d))}{h} = P'(d) = f(d)$$

Teorem 3. **Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadırsa, onda bu parçada yuxarı sər-**

hədi dəyişən inteqral $P(x)=\int_a^x f(t)dt$**,** $f(x)$ **funksiyasının ibtidai funksiyasıdır.**

Beləliklə, kəsilməz funksiya üçün inteqral hesabının əsas məsələsinin ibtidai funksiyanın tapılmasının həmişə həlli var.

Qeyd. İbtidai funksiyası olmayan funksiyalarda mövcuddur. Məsələn, «işarə (siqnum)» funksiyası

$$y = Sgnx = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

Bu funksiya heç bir funksiyanın törəməsi ola bilməz, belə ki, törəmənin xassəsinə görə o, bütün intervaldakı qiymətləri ala bilir, verilmiş funksiya isə, məsələn 1/2 qiymətini ala bilmir.

6. İnteqral hesabının əsas düsturları. Yuxarıda göstərilən kimi (teorem 3) $[a,b]$ parçasında kəsilməz $f(x)$ funksiyası üçün yuxarı sərhədi dəyişən inteqral $P(x)=\int_a^x f(t)dt$ $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Tutaq ki , $F(x)-f(x)$ – in ixtiyari ibtidai funksiyasıdır, onda $F(x)=P(x)+c$. Sabit *c*-ni asanlıqla müəyyən etmək olar, belə ki, $P(a)=0$ deməli $c=F(a)$ buradan isə $F(x)=F(a)+\int_a^x f(t)dt$. Nəticədə alarıq:

$$\int_a^b f(t)dt = P(b)-P(a) \quad \text{və yaxud} \quad \int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a) \qquad (2)$$

Bu *inteqral hesabının əsas düsturudur*. $\int_a^b f(t)dt$ inteqralının qiyməti inteqral altı funksiyanın ixtiyari ibtidai funksiyasının $x=a$ və $x=b$ qiymətlərindəki fərqinə bərabərdir. Bu düstur kəsilməz funksiyanın müəyyən inteqralını hesablamaq üçün səmərəli və sadə vasitədir. Bir çox funksiyaların ibtidai funksiyalarını elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə etmək mümkündür. Bu hallarda müəyyən inteqral bilavasitə (2) düsturu ilə hesablanır. $F(b)-F(a)$ fərqini adətən $F(x)\Big|_a^b$ simvolu ilə işarə edirlər, (2) düsturunu isə aşağıdakı şəkildə yazırlar:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b \tag{3}$$

Misal 1. İnteqral hesabının əsas düsturunu tətbiq edərək aşağıdakı inteqralları tapın və uyğun əyri-xətli trapesləri çəkin.

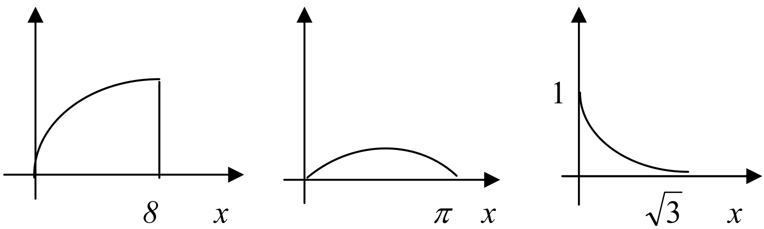
a) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx$; b) $\int_0^\pi \sin x dx$; c) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)}$

Həlli. a) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx = \int_0^8 x^{\frac{1}{3}}dx = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^8 = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot 8^{\frac{4}{3}} = 12;$

b) $\int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2;$

c) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = arctg\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}.$

Qeyd. Əgər $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməz olarsa, onda teorem 3-ə görə onun ibtidai funksiyası var. Məsələn, belə ibtidai funksiyalardan biri $\int_a^x f(t)dt$ inteqralıdır.



Şəkil 2.

Zəruri deyildir ki, bu və ya digər ibtidai funksiya elementar funksiyalar vasitəsilə ifadə oluna bilsin. Məsələn, ehtimal nəzəriyyəsində çox mühüm rol oynayan $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}$ - funksiyasının ibtidai funksiyası var, çünki bu funksiya kəsilməzdir. Bu ibtidai funksiyalardan biri, məsələn, $\Phi(x)=\int_0^x\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ -dir. Bu funksiya isə elementar funksiyalar vasitəsilə heç bir üsulla ifadə olunmur. Buna baxmayaraq bu funksiya Laplas funksiyası kimi çox məşhurdur və yaxşı öyrənilib və onun qiymətlər cədvəli var.

7. Müəyyən inteqralda dəyişənin əvəz olunması və hissə-hissə inteqrallama üsulu. Tutaq ki, $\int_a^b f(x)dx$ inteqralını hesablamaq tələb olunur, burada $f(x)$ funksiyası

$[a,b]$ parçasında kəsilməz funksiyadır. $x=\varphi(t)$ qəbul edək və $\varphi(t)$ funksiyasının aşağıdakı şərtləri ödədiyini fərz edək:

a) $\varphi'(t)$ hər hansı $[\alpha,\beta]$ intervalında təyin olunmuş kəsilməz funksiyadır və *t* $[\alpha,\beta]$ intervalında dəyişdikdə $[a,b]$ intervalından kənara çıxmır;

b) $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$;

c) $[\alpha,\beta]$ intervalında $\varphi'(t)$ kəsilməz törəməsi var.

Onda aşağıdakı düstur doğrudur:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{4}$$

Misal 2. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx$ inteqralını $x=aS\operatorname{int}$ əvəzləməsinin köməyi ilə hesablayaq, burada $\alpha=0;\quad \beta=\pi/2$

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} Cos^2 tdt = \left(\frac{a^2}{2}\right)\left(t+\frac{Sin2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Hissə-hissə inteqrallamaya gəldikdə isə qeyri-müəyyən inteqrlda hissə-hissə inteqrallama şərtləri daxilində alarıq:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{5}$$

Bu düstur müəyyən inteqralda hissə-hissə inteqrallama düsturunu ifadə edir.

MƏSƏLƏLƏR

1. Aşağıdakı inteqralları tapın:

a) $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$; b) $\int\limits_{0}^{2} |1-x| dx$; c) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

ç) $\int\limits_{0}^{4} (x^2 - x) dx$; d) $\int\limits_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

2. Dəyişəni əvəz etməklə aşağıdakı inteqralları tapın:

a) $\int\limits_{1}^{4} \frac{xdx}{\sqrt{5-x}}$; b) $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$;

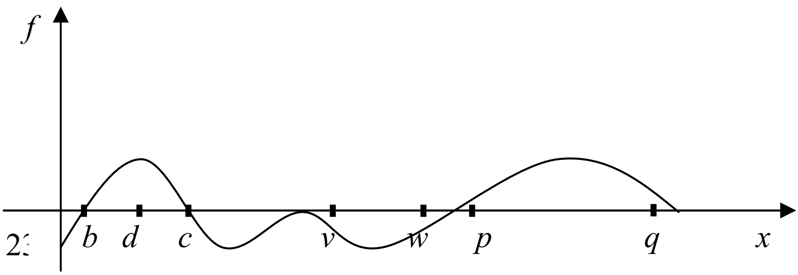
c) $\int\limits_{0}^{a} x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$; ç) $\int\limits_{1}^{3} \frac{xdx}{\sqrt{3+x^2}}$;

3. Hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə aşağıdakı inteqralları tapın:

a) $\int\limits_{0}^{\ln 2} xe^{-x} dx$; b) $\int\limits_{0}^{\pi} x \cdot Sinx dx$; c) $\int\limits_{0}^{2\pi} x^2 \cdot Cosx dx$;

4. Tutaq ki, $F(x) = \int\limits_{0}^{x} f(t) dt$, $f(t)$-kəsilməzdir.

İnteqralın həndəsi anlamından istifadə edərək, isbat edin ki, $F(x)$ funksiyası *b* nöqtəsində minimuma və *c* nöqtəsində maksimuma malikdir, *d* nöqtəsi isə əyilmə nöqtəsidir (şəkil 3). $F(x)$ funksiyasının qrafiki $[p,q]$ parçasında yuxarıya doğru qalxan maili düz xətt, $[v,w]$ parçasında isə aşağıya doğru enən maili duz xəttdir.



Şəkil 3.

5. İsbat edən ki, Laplas funksiyası $\Phi(x)=\int\limits_0^x \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ tək funksiyadır və ciddi artandır.

10.3 Müəyyən inteqralın tətbiqləri

1. Əyrinin uzunluğu, fiqurun sahəsi və cisimin həcmi. Limitlər nəzəriyyəsi, diferensial və inteqral hesabı imkan yaradır ki, əyrinin uzunluğu, fiqurların sahələri, cismin həcmi anlayışları dəqiq riyazi şəkildə müəyyən olunsun, onların əsas xassələri isbat olunsun. Fiqurların sahələrindən başlayaq. Hesab edəcəyik ki, düzbücaqlının, üçbucağın və ümumiyyətlə çoxbucaqlının sahəsi məlumdur.

Müstəvi üzərində ixtiyarı, məhdud qapalı oblast təşkil edən (*P*) fiqurunu götürək. Onun sərhədini qapalı əyri və ya bir neçə belə əyrilər kimi təsəvvür edəcəyik. (*P*) fiqurunun tamamilə içərisində yerləşən bütün mümkün (*A*) çoxbucaqlılarına və *P* fiqurunu bütünlükdə içərisində saxlayan (*B*) çoxbucaqlılarına baxaq. Əgər *A* və *B* onların uyğun sahələridirsə, onda həmişə $A \le B$ olar.

Tərif. Əgər hər iki sərhəd $P_* = Sup\{A\}$ və $P^* = Sup\{B\}$ üst-üstə düşərsə, onda onların ümumi qiyməti *P fiqurunun sahəsi* adlanır. Bu tərifə istinad edərək sahələrin fundamental xassəsini isbat etmək olar: əgər *(P)* müstəvi oblastı iki hissəyə *(P_1)* və *(P_2)* bölünübsə, onda $P = P_1 + P_2$ olar, bu şərtlə ki, üç P, P_1, P_2 ədədlərindən ikisi mövcud olsun. Sahənin bu xassəsinə *additivlik* deyilir. Bu xassə ixtiyari sonlu sayda hissələrə də tətbiq edilə bilər. Bu xassədən həm də çıxır ki, müstəvi fiqurunun hissəsinin sahəsi bütün fiqurun sahəsindən kiçikdir. Xüsusi halda müstəvi fiqur əyrixətli trapes olduqda(bax bölmə 10.1 p.2) onun sahəsi

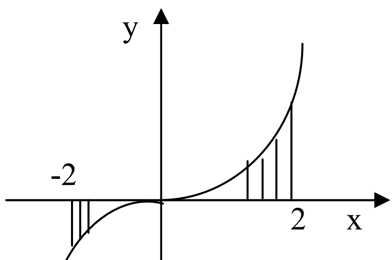
a) b) c)

anlayışı müəyyən inteqral anlayışına gətirlir. Əyrixətli trapesin sahəsi $\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqalına bırabərdir.

Əgər trapes tamamilə absis oxundan aşağıda yerləşirsə, onda $f(x) \leq 0$ olar və $\int_c^d f(x)dx$ mənfi olar. Mütləq qiymətcə həmin əyrixətli trapesin sahəsini verər (bax şəkil 1 b). Ümumi halda $\int_p^q f(x)dx$ inteqralı əyrixətli trapesin sahəsinin cəbri cəmini verər, absis oxundan yuxarıda yerləşən sahə bu cəmə «üstəgəl» işarəsi ilə, absis oxundan aşağıda yerləşən sahə isə «çıxma» işarəsi ilə daxil olar (şəkil 1, c).

Misal 1. Əyri $y = x^3$ tənliyi ilə verildikdə, ştrixlənmiş fiqurun sahəsini tapın (şəkil 2)

Həlli. Axtarılan sahə-



$$S=-\int_{-2}^{0}x^3dx+\int_{0}^{2}x^3dx=-\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{0}+\left.\frac{x^4}{4}\right|_{0}^{2}=4+4=8\cdot$$

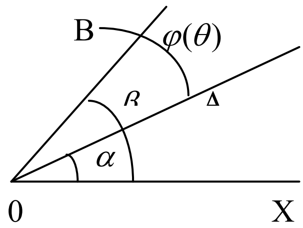
Oxşar qayda ilə polyar

koordinatlarla verilmiş

fiqurların sahələri hesablanır.

OA və *OB* şüaları ilə və

$(\alpha=\angle OAX,\beta=\angle BOX)$ kəsilməz $\rho=\varphi(\theta)$ əyrisi ilə məhdudlaşan *P* sektorunun (şəkil 3) sahəsi $S=\left(\frac{1}{2}\right)\int_{\alpha}^{\beta}(\varphi(\theta))^2\,d\theta$.



Şəkil 3.

Təqri ... əcminin hesablanması məsələsinə yanaşmaq olar. Hesab edəcəyik ki, düzbucaqlı paralelipipedin, prizmanın və ümumiyyətlə çoxüzlü cisimlərin sahələri məlumdur.

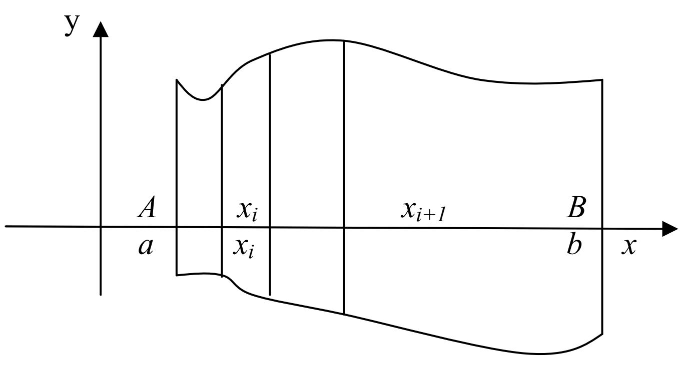
Məhdud qapalı oblast təşkil edən fəzada ixtiyari (ϑ) cisimi götürək. (ϑ) cismində tamamilə yerləşən bütün mümkün çoxüzlü cisimlərə–(*K*) çoxüzlülərinə baxaq. Bundan əlavə (ϑ) cismini tamamilə öz daxilində saxlayan (*L*) çoxüzlülərinə də baxaq. Əgər *K* və *L* uyğun olaraq onların həcmidirsə, onda $K\leq L$ olar.

Tərif. Əgər hər iki sərhəd üst-üstə düşərsə (ϑ_*- dəqiq yuxarı, ϑ^*- dəqiq aşağı sərhəd), onların ümumi qiyməti ϑ (ϑ) *cisminin həcmi* adlanır.

Bu tərifə istinad edərək həcmin additivliyini və cimsin istənilən hissəsinin həcminin onun bütün həcmindən kiçik olduğunu isbat etmək olar. Həcmlərin hesablanması üçün müəyyən inteqraldan istifadə etmək olar. Sonrakı bölmədə bunu tam şəkildə göstərəcəyik. İndi isə sadə misalla kifayətlənək.

Misal 2. $y = f(x)$ funksiyasının qrafikinin *OX* oxu ətrafında fırlanmasından alınan səth və *x=a, x=b* müstəviləri ilə (şəkil 4) məhdudlaşan cisimin həcmini tapın.

Həlli. $[AB]$ parçasını $x_0 = a < ... < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə hissələrə bölək (şəkil 4.) Asanlıqla görmək olar ki, (ϑ) cisminin ϑ həcmi, təqribi olaraq $\sum_{i=0}^{n-1} \pi\left(f(x_i)\right)^2 \Delta x_i$ cəminə bərabərdir, burada $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. $[AB]$ parçasını daha kiçik hissələrə bölsək bu cəm $\int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx$ inteqralı olar ki, bu da axtarılan cismin həcmidir.



Şəkil 4.

Məsələn, əgər $y = kx,\ k \ge 0,\ a = 0,\ b = h$ olarsa, onda alarıq

$$\int_0^h \pi(kx)^2 dx = \pi k^2 \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^h = \pi k^2 \frac{h^3}{3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)(kh)^2 h = \left(\frac{\pi}{3}\right) r^2 h \cdot$$

Bu isə hündürlüyü *h* , radiusu *r=kh* olan dairəvi konusun həcmidir.

Nəhayət əyrinin uzunluğu haqqında.

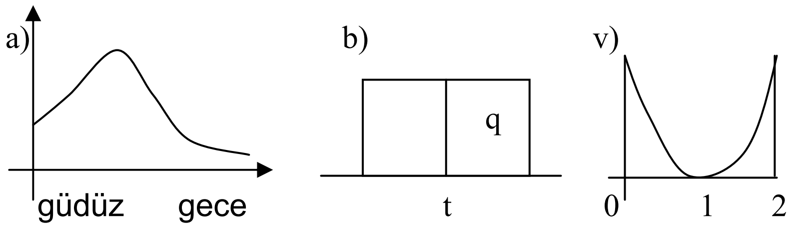
Əyrinin uzunluğu bu əyrinin daxilinə çəkilmiş sınaq xəttin uzunluğunun yuxarı sərhədi kimi təyin olunur. Bu yuxarı sərhəd fiqurların sahələri və cisimlərin həcminə oxşar şəkildə müəyyən inteqralla ifadə oluna bilər.

2. Mexaniki və fiziki tətbiqləri. Bu tətbiqlər prinsipial xarakter daşısalar da (bu tətbiqlərdə inteqralsız keçinməyin mümkün olmaması ilə ifadə olunan) iqtisadçılar üçün az maraq kəsb edirlər. Aşağıdakı əyani izahla kifayətlənəcəyik.

Yada salaq ki, sürət təcilin inteqralıdır, gedilən yol isə sürətin inteqralıdır. Avtomobilin sürətini onun təkərlərinin fırlanma sürəti ilə müəyyən etmək olar. Təyyarənin sürətini necə təyin etmək olar? Havasız fəzada raketin sürətini necə təyin edək? Məlumdur ki, bir çox raketlər uçuş zamanı avtonom hərəkət edirlər. Onların sürətini və yerini necə müəyyən etmək olar. Təcili zamana görə inteqrallayaraq raketin sürətini, öz növbəsində sürəti inteqrallayaraq raketin yerini tapmaq olar. Aydındır ki, uzun müddətli kosmik uçuşlar zamanı planetlərlə ulduzlarla və s. ilə oriyentasiya etmək olar.

3. İnteqral anlayışının iqtisadi və başqa izahları. İnteqralın həndəsi anlayışından istifadə edək.

A. 100-vatlıq elektrik lampası mənzildə 1 saat işlədikdə 0,1 kVt, 2 saatda isə 0,2 kVt və s. elektrik enerjisi sərf edir. Sutkada onu bir neçə dəfə yandırırlar, söndürürlər və bu səbəbdən də onun nə qədər elektrik enerjisi sərf etdiyini bilmək çox çətin olur. Nəzərə alsaq ki, mənzildə onlarla lampa, elektrik qızdırıcı, televizor və digər cihazlar işləyir bu məsələ daha da çətinləşir. Sutka ərzində istehlakçıların müəyyən edilmiş elektrik gücləri dəyişir (şəkil 5 a)



Şəkil 5.

Bir sutkada elektrik sərfini necə hesablayaq? Sadə halda, sabit elektrik cəryanında istehlakçı vahid zamanda *q* qədər enerji sərf edirsə, onda *T* zamanında *q, t* qədər elektrik enerjisi sərf edər (şəkil 5,b). Bu isə düzbucaqlının sahəsidir, dəyişən cəryan olduqda isə elektrik cərəyanı sərfi *q(t)* , *a* zamanından *b* zamanına qədər əyri-xətli trapesin sahəsinə bərabər olar (şəkil 5,v) Bu sahə isə $\int_a^b q(t)dt = F(b) - F(a)$ inteqralına bərabərdir, burada $F(t)$ funksiyası $-\,q(t)$ – nin hər hansı ibtidai funksiyasıdır.

Misal üçün tutaq ki, $q(t) = (t-1)^2$ (bax şəkil 5, c) yəni enerji istehlakı əvvəlcə enir, sonra yenidən qalxır. Bu funksiya üçün ibtidai funksiya məsələn, $\frac{(t-1)^3}{3}$ - dür. Deməli, elektrik sərfi 0 zamanından 2 zamanına qədər dəyişdikdə $\left.\frac{(t-1)^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2}{3}$ olar. Reallıqda isə ibtidai funksiya rolunu elektrik sayqacı oynayır.

B. Tamamilə oxşar qayda ilə su sayqacı zavodun artan su sərfini hesablayır. Bu sayğacın əsas detalı onun içərisində olan kiçik turbindir, onun fırlanması sürəti boruda axan suyun sürəti ilə mütanasibdir. Aydındır ki, suyun ani sərfi onun sürətilə mütənasib olmalıdır.

C. Avtomobilin cihazları içərisində spidometr də var. Bu adi, faktiki olaraq iki cihazdan ibarətdir: spidometrin özü, yəni istənilən vaxtda avtomobilin sürətini göstərən və istismara verilən vaxtdan onun neçə km yol getdiyini göstərən hissə. Bu hissəyə kilometrajın sayğacı da deyirlər. Bu sayğacın göstəricisi avtomobilin sürətinin vaxtdan asılılığının ibtidai funksiyasıdır. Digər ibtidai funksiyalardan bunun fərqi ondadır ki, istismarın başlanğıcında bu funksiyanın qiyməti sıfıra bərabərdir.

Ç. Elektrik yükü q, gərginliyi E olan elektrik sahəsində Eq qüvvəsi təsir edir. Əgər yükün kütləsi m olarsa, onda təcil də dəyişər. Bu halda yükün hərəkəti mürəkkəb xarakter alır. Hesablamalar aparmaq üçün inteqralın tətbiqi zəruri olur .

D. Ölkədə əhalinin artması sürəti bir çox amillərdən asılıdır–əhalinin öz sayından, həyat səviyyəsindən, ənənələrdən və s. Hesablamalar üçün mürəkkəb riyazi aparatdan, o cümlədən diferensial tənliklərdən və inteqrallardan istifadə olunur.

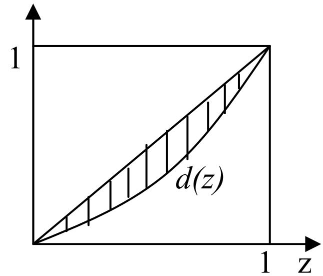
E. Neft yataqlarında çox sayda quyular fəaliyyət göstərir. Onların iş rejimləri müxtəlifdir (bəziləri təmirə dayanır və s.). Bu səbəbdən də bütün yatağın gücü (yatağın debiti) vaxtdan asılı $q(t)$ funksiyasıdır. Onda yataq a zamanından b zamanına qədər $\int_a^b q(t)dt$ - qədər neft verər.

Ümumi halda əgər ani vaxtda istehsalın gücü $P(t)$-dirsə, onda a zamanından b zamanına qədər quyu

$\int_a^b \mathrm{P}(t)dt$ miqdarda məhsul verər.

Ə. İnteqralların, cəmiyyətin sosial-iqtisadi quruluşunun təhlili üçün, tətbiqinin mümkünlüyünü göstərməkdən örtü əyani və çox maraqlı misal ölkənin sərvətinin bölünməsini təmin edən *«Cinni diaqramı və ya əyrisi»* adlanan məsələdir.

d(z) funksiyasına baxaq, belə ki, bu funksiya göstərir ki, cəmiyyətin ən kasıb *z*-hissəsi bütün ölkə 1 sərvətinin d(z) hissəsinə malikdirlər (şəkil 6). Əgər sərvətin paylanması müntəzəm olsaydı, onda *d(z)* funksiyasının qrafiki kvadratın diaqonalı boyunca *d(z)* gedərdi. Ştrixlənmiş hissənin sahəsi nə qədər böyük olarsa, sərvət o qədər qeyri-müntəzəm paylanar. Bu sahənin göstərən ədəd *«Cinni əmsalı»* adlanır. Çox sayda analoji xarakteristikalar fikirləşmək olar; məsələn əmək haqqının paylanmasını qiymətləndirmək üçün və ya əməkdaşlar arasında aksiyaların bölünməsi və s.

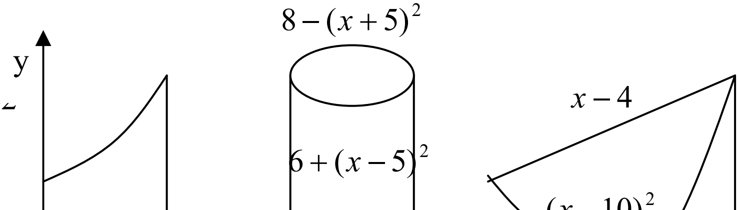


Şəkil 6.

Uyğün «Cinni» funksiyası yəqin ki, çox mürəkkəb olacaq və inteqralsız keçinmək mümkün deyildir.

MƏSƏLƏLƏR

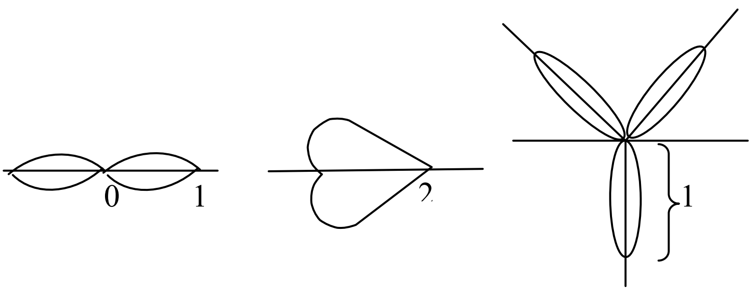
1. Məktəb proqramından məlum olan dairənin sahəsi, dairə sektorunun və seqmentinin sahələrinin düsturunu polyar koordinatlarda sahələrin hesablanması düsturları (bax p.1) vasitəsilə alın.



2. Məktəb kursundan məlum olan piramidanın, kəsik piramidanın, dairəvi konusun və kəsik konusun həcminin düsturlarını çıxarın (bax p.1).

3. Şəkil 7-də olan fiqurların sahələrini tapın.

4. Polyar koordinat sistemində verilmiş fiqurların sahələrini tapın (şəkil 8):a) $r^2 = Cos2\varphi$ – lemniskat; b) $r^2 = 1 + Cos\varphi$ -kardioid; c) $r = Sin3\varphi$ - üç yarpaq



Şəkil 8.

5. Həm elektrik sayğacı, həm də avtomobilin kilometrajının sayğacı hər hansı kəmiyyətlərin şkalasına malikdir. Məsələn, kilometrajın sayğacı 100000 km-dən sonra sıfrı göstərir. Bundan sonra spidometrlə bu sayğacın «qarşılıqlı münasibəti» necə olacaq?

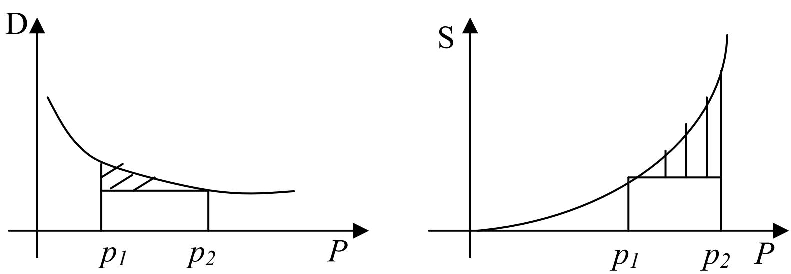
6. «Jiquli» avtomobillərinin bir çox modellərində kilometrajın sayğacından əlavə bir sayğacda var ki, sürücü istənilən vaxt onu sıfra çevirə bilər. Spidometrlə bu sayğacın «qarşılıqlı münasibəti» necədir?

7. Elektrik sayğacı, su sayğacı və avtomobilin kilometraj sayğacı inteqral və ya cəmləyən cihazlara aid başqa misallar da göstərin. Elektrik sayğacının köməyi ilə universal inteqrator düzəltmək olar. Qəbul edək ki, sayğacın fırlanması ondan keçən cəryanla düz mütənasibdir.

Tutaq ki, hər hansı *x* kəmiyyətinin inteqratorunu düzəltmək lazımdır. X kəmiyyəti zamanın funksiyasıdır x*(t)*. Əvvəlcə aralıq cihazı düzəldək. Bu cihaz *x*-ə görə *x*-lə mütanasib cərəyan istehsal edir: $i=kx$, k – hər hansı sabitdir. Cərəyan sayğacın təkərciyini fırladan sahə yaradır. O zaman sayğacın göstəricisi $F(T)=\int_0^T i(t)dt$ olar, burada o – sayğacın işlənməsinin başlanğıcıdır.

Aydındır ki, *k* sabiti dəqiqliyilə sayğacın göstəricisi *x(t)* – nin ibtidai funksiyasıdır.

8. Şəkil 9-da *p* qiymətindən asılı *D* tələb və *S* təklif funksiyalarının qrafikləri verilmişdir. Ştrixlənmiş sahələrə və ya uyğun inteqrallara hansı iqtisadi məna vermək olar?



Şəkil 9.

9. Cinni funksiyası x^2 , x^3 olarsa, sərvətin cəmiyyətdə bölünməsinin Cinni əmsalını tapın.

10. Aşağıdakı məşhur məsələyə baxaq:

Adam çiynində kökləri və budaqları kəsilmiş ağac aparır. Ağacın hansı tərəfi ağır olar: kök tərəfi yoxsa baş tərəfi?

Mövzu 11.
QEYRİ-MƏXSUSİ VƏ ÇOXQAT İNTEQRALLAR

11.1. Qeyri-məxsusi və çoxqat inteqrallar

1. Sonsuz sərhədli inteqralların tərifi. 10.1-10.3 bölməsində sonlu intervalda verilmiş məhdud funksiyaların müəyyən inteqrallarını öyrəndik. Qeyri-məxsusi inteqrallar göstərilən anlayışın sonsuz intervalda və qeyri-məhdud funksiyalar üçün ümumiləşmədir. Əvvəlcə sonsuz interval halı üçün inteqral anlayışından başlayaq.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası $[a,\infty)$ intervalında təyin olunmuş və bu intervalın istənilən sonlu $[a, A]$ hissəsində inteqrallanan funksiyadır. Deməli, istənilən $A \geq a$ üçün $\int_a^A f(x)dx$ - inteqralı var.

Əgər $A \to \infty$ -da bu inteqralın limiti (sonlu və ya sonsuz) varsa, ona $f(x)$ funksiyasının a - dan ∞ -a qədər *qeyri-məxsusi inteqralı* deyilir və $\int_a^\infty f(x)dx$ kimi işarə edilir.

Bir daha qeyd edək ki,

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)dx \tag{1}$$

Əgər limit sonludursa, onda deyirlər ki, (1) inteqralı yığılandır və $f(x)$ funksiyası $[a,\infty)$ sonsuz intervalda *inteqrallanan* adlanır. Əgər (1) limiti sonsuzdursa və ya yox-dursa, onda inteqral *dağılan* adlanır.

Analoji qayda ilə $\int_{-\infty}^a f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı təyin edilir, belə ki, $\lim_{A\to-\infty} \int_A^a f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx$. $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx$ - inteqralı isə belə təyin edilir: istənilə a ədədini götürək və əgər $\int_{-\infty}^a$ və $\int_a^\infty$ inteqrallarının hər ikisi varsa, onda $\int_{-\infty}^\infty$ inteqralı da var və onların cəminə bərabərdir.

Misal 1. Yer kürəsindən şaquli hərəkət edən cismə yer kürəsinin səthində hansı minimal sürət vermək lazımdır ki, cisim yerə qayıtmasın.

Həlli. Yer radiusu r=6371 km olan kürə şəkilindədir. Yerin cazibə qüvvəsi *F(r)=gm* , burada *g=9.8 m/c* *m*-cismin kütləsidir. Yer səthindən *h* hündürlükdə bu qüvvə *F(r+h)=gmr²/(r+h)²* olar. Cisimin qayıtmaması üçün onu sonsuzluğa uzaqlaşdırmaq lazımdır. Bunun üçün $\int_0^{\infty} F(r+h)dh$ qeyri-məxsusi inteqralı hesablamaq lazımdır.Bu inteqralı tapmaq üçün $\int_0^{H}$ inteqralını tapıb *H*-ı sonsuzluğa yaxınlaşdıraq. $\int_0^{H} \frac{gmr^2}{(r+h)^2} dh = gmr^2 \left(\frac{-1}{r+h} \right) \Big|_0^{-H} = gmr^2 \left(\frac{1/r - 1}{(r+H)} \right) =$ $= gmHr/(r+H)$. $H \to \infty$ -da bu ifadənin limiti *gmr*-ə bərabər olar. Bu *potensial enerjidir*. Əgər onu kinetik enerjiyə çevirsək alarıq: $gmr = \left(\frac{1}{2}\right) mv^2, \qquad v = \sqrt{2gr} = 11.17\, km/c$

Bu isə axtarılan sürətdir.

2. Qeyri-məhdud funksiyaların qeyri-məxsusi inteqralları. Sonlu $[a,b]$ parçasında verilmiş, qeyri-məhdud $f(x)$ funksiyasına baxaq. Fərz edək ki, ixtiyarı $[a, b-\varepsilon]$ intervalında $f(x)$ məhdud və inteqrallanan, $[b-\varepsilon, b]$ intervalında isə qeyri-məhduddur, burada $0 < \varepsilon < b - a$. *b* nöqtəsi *xüsusi nöqtə* adlanır.

$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ inteqralının $\varepsilon \to 0$ limitinə (sonlu və ya sonsuz) $f(x)$ funksiyasının a *- dan b - ə qədər qeyri –məxsusi inteqralı deyilir* və $\int_a^{b} f(x)dx$ ilə işarə edilir.

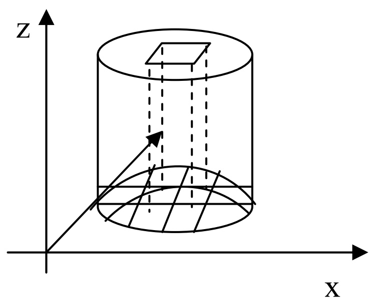
Bir daha qeyd edək ki,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (2)$$

Əgər limit sonludursa, onda deyillər ki, (2) inteqralı *yığılandır* və $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ intervalında *inteqrallanan* adlanır. Əgər limit sonsuzdursa və ya yoxdursa, onda deyirlər ki, inteqral *dağılandır*.

Misal 2. Funksiya $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ixtiyari $[0,1-\varepsilon]$ $(0<\varepsilon<1)$ intervalında inteqrallanandır və $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\Big|_0^{1-\varepsilon} =$ $= \arcsin(1-\varepsilon)$. $\lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin(1-\varepsilon) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ olduğundan tədqiq etdiyimiz qeyri-məxsusi inteqral $\frac{\pi}{2}$ bərabərdir.

3. İkiqat inteqrallar, tərif. Əyrixətli trapesin sahəsinin tapılması (bax bölmə 10.1 b. 2, bölmə 10.2 b.1.) sadə (bir ölçülü) müəyyən inteqral anlayışına gətirilir, ikiqat inteqral anlayışına isə silindrik tirin həcminin tapılması məsələsi gətirir. Yuxarıdan $z=f(x,y)$ səthi ilə, yanlardan silindrik səthlərlə, aşağıdan müstəvi (*P*) fiquru ilə (şəkil 1) məhdudlaşan *(V)* cisminə baxaq. Bu cisimin həcmini tapmaq tələb olunur. Bunun üçün (*P*) oblastını əyri setlərlə (P_1), … , (P_n) hissələrinə bölək və oturacaqları həmin hissələr olan silindrik dirəklərə baxaq. Bu dirəklər cəm halında verilmiş cismi təşkil edirlər. Hər bir (P_i) hissəsində (x_i,y_i) nöqtəsi götürək, onda



Şəkil 1.

dirəklərin həcmi (oturacağı

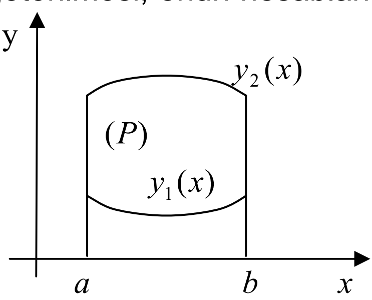
(P_i)) təqribən $f(x_i, y_i)P_i$ olar. P_i-(P_i) hissəsinin sahəsidir. Onda bütün cismin *(V)* cəmi təqribi olaraq $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)P_i$ olar. Daha dəqiq qiymət almaq üçün (P_i) hissələrini kiçiltmək lazımdır. (P_i)-hissələrinin ən böyüyünün diametrinin sıfıra yaxınlaşması şərtilə limitə keçsək dəqiq qiymət alarıq. Deməli, $V = \lim \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)P_i$

Bu şəkildə limit $f(x, y)$ funksiyasının (*P*) oblastı üzrə *ikiqat inteqralı* adlanır. İkiqat inteqral $\iint\limits_{(P)} f(x, y)dP$ simvolu ilə işarə olunur. Onda cisimin həcmi aşağıdakı şəkildə olar:

$$V = \iint\limits_{(P)} f(x, y)dP$$

Göründüyü kimi ikiqat inteqral adi inteqralın ikidəyişənli funksiya üçün ümumiləşməsidir. Sathlərin sahələrini tapmaq üçün ikiqat inteqraldan istifadə edirlər. Tutaq ki, səth (*P*) oblastında $f(x, y)$ funksiyası ilə verilirb. Əgər funksiya və oblast sahəsini müəyyən ikiqat inteqralın köməyi ilə hesablamaq olar.

4.İkiqat inteqralın təkrar inteqrala gətirilməsi. İkiqat inteqralın təkrar inteqrala gətərilməsi, onun hesablanması üçün tətbiq olunur. Yenidən silindrik tirə baxaq (şəkil 1.), yalnız indi müstəvi (*P*) oblastı şəkil 2-də olduğu kimidir, yəni aşağıdan *$y_1(x)$* əyrisi ilə



Şəkil 2.

və yuxarıdan *$y_2(x)$* əyrisi ilə, yanlardan isə şaquli *$x=a$* və *$x=b$* xətləri ilə məhdudlaşıb.

Teorem. Əgər (*P*) oblastında təyin edilmiş $f(x,y)$ funksiyası üçün ikiqat $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ inteqralı varsa və hər bir $x\in[a,b]$ üçün sadə $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ inteqralı varsa, onda

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \cdot$$

Burada $\int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$ *təkrar inteqral* adlanır.

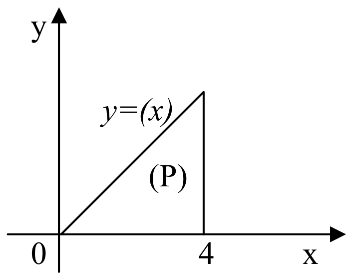
Misal 3. $f(x,y)=x^2+y^2$ «qapağı» olan və (*P*) oblastında duran (şəkil 3) silindrik cismin həcmini tapın.

Həlli. Axtarılan v həcmi $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ ikiqat inteqralıdır.

Bu ikiqat inteqralı təkrar gətirək:

$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_0^{\text{н}} dx \int\limits_0^x \left(x^2+y^2\right)dy$$

$$\int\limits_0^x \left(x^2+y^2\right)dy = \left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^x = \frac{4}{3}\cdot x^3$$



Şəkil 3.

olduğundan axtarılan həcm $V=\int\limits_0^4 \left(\frac{4}{3}\right)\cdot x^3dx = x^{\frac{4}{3}}\Bigg|_0^4 = \frac{256}{3}$

5. Üçqat inteqrallar. Sıxlığına görə qeyri-bircins cisimlərin kütləsinin tapılması məsələsi üçqat inteqrallara gətirilir. Həcmi (*V*) olan cismə baxaq. Bu cismin sıxlığı *f(m)* cisimin nöqtələrində sabit kəmiyyət deyildir. Bu cisimin *M* kətləsini tapmaq tələb olunur.

Bunun üçün cisimin həcmini *(V)*-ni $(V_i),\ldots,(V_n)$ hissələrinə bölək. Hər bir (V_i) hissəsindən bir m_i nöqtəsi götürək, onda hissələrin həcmləri təqribi olaraq $f(m_i)v_i$ olar (yada salaq ki, *V*, (*v*) – nin həcmidir). Butun cisimin həcmi təqribi olaraq $\sum_{i=1}^{n} f(m_i)V_i$ bərabər olar. Dəqiqliyi artırmaq üçün (v_i) – hissələrinin sayını artırmaqla, onların ölçülərini azalitmaq lazımdır. Bütün (v_i) –in ən böyük diametrinin sıfıra yaxınlaşması şərtilə limitə keçsək dəqiq qiymət alarıq, belə ki, $M = \lim \sum_{i=1}^{n} f(m_i)V_i$

Bu limit *f(m)* funksiyasının (V) oblastında *üçqat inteqralı* adlanır. Üçqat inteqral $\iiint\limits_{(V)} f(m)dV$ simvolu ilə işarə edilir. Beləliklə cisimin kütləsi üçün düstur aşağıdakı şəkildə olur:

$$M = \iiint\limits_{(V)} f(m)dV \tag{3}$$

Üçqat inteqral da ikiqat inteqral kimi adi inteqralın ümumiləşməsidir, lakin üç dəyişənli funksiya üçün. Üçqat inteqralı hesablamaq üçün onu adi təkrar inteqrala gətirmək lazımdır. Üçqat inteqralları hesablamau üçün başqa üsullarda mümkündür.

Misal 4. $f(x,y,z) = x + y + z$ sıxlığı ilə verilmiş və misal 3-də göstərilmiş silindrik cisiminin kütləsini tapın.

Həlli. Axtarılan kütlə aşağıdakı üçqat inteqrala bərabərdir: $\iiint\limits_{(V)} f(m)dV$. Bu inteqralı təkrar inteqrala gətirək.

$\iiint\limits_{(v)} f(m)dv = \iint\limits_{(P)} dP \int\limits_0^{x^2+y^2} (x+y+z)dz$. Daxili inteqral bərabərdir $f(x,y) = \frac{y^4}{2} + y^3 + y^2(x+x^2) + yx^2 + x^3$. İndi isə ikiqat $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP$ - nı hesablayaq: $\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^4 f(x,y)dy$.

$$\int\limits_0^4 \left(\left(\frac{y^4}{2} + y^3 + y^2(x+x^2) + yx^2 + x^3\right)dy = \left(\frac{y^5}{10} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}(x+x^2) + x\frac{y^2}{2} + yx^3\right)\right|_0^4 =$$

$$= \left(\frac{y^5}{10} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} \cdot (x+x^2) + x \cdot \frac{x^2}{2} + x \cdot x^3\right) = \left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^3}{3}\right) + \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3} + x^4\right) + \frac{x^3}{2} =$$

$$= \left(\frac{13}{30}\right)x^5 + \left(\frac{19}{12}\right)x^4 + \left(\frac{1}{2}\right)x^3 = K(x)$$

Nəhayət $\int\limits_0^4 K(x)dx = \left[\left(\frac{13}{180}\right)x^6 + \left(\frac{19}{60}\right)x^5 + \left(\frac{1}{8}\right)x^4\right]\Bigg|_0^4 = \ldots = 652{,}1$.

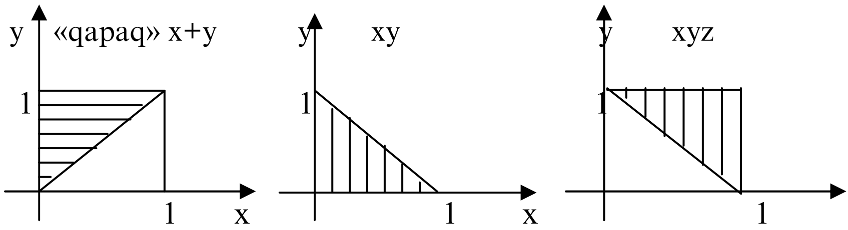
MƏSƏLƏLƏR

1. $f(x)$ funksiyasının $[0,\infty]$ intervalında orta qiyməti $\lim\limits_{A\to\infty} \frac{1}{A} \int\limits_0^A f(x)dx$ ədədinə deyilir. Belə intervalda *Sinx* funksiyasının orta qiymətini tapın. Bu funksiyanın orta qiymətini başqa yolla tapmaq olarmı?

2. $\int\limits_0^\infty ae^{-x}dx = 1$ bərabərliyini ödəyən a - nı tapın.

3. Nəzərə alaraq ki, $\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{1}{2}$ Laplas funksiyasının təqribi qrafikini qurun (bax bölmə 10.2 p.6 məs. 5).

4. Müstəvi oblastda dayanmış və «qapağı» olan silindrik cisimin həcmini tapın, sonra şəkil 4-də göstərilən sıxlığa malik bü cisimlərin kütləsini tapın.



x

oblast

sıxlıq $x+y+z$ $\qquad$ $2x+y$ $\qquad$ $x+2z$

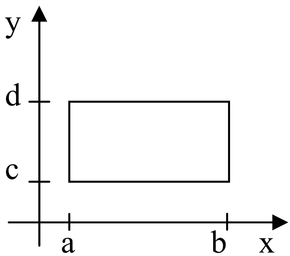
5. $\iint\limits_{(P)} (x^2 + y^2)dP$ ikiqat inteqralını hesablayın, burada inteqrallama oblastı (P), radiusu 4; mərkəzi koordinat başlanğıcında olan dairədir.

6. $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)dV$ üçqat inteqralını hesablayın, burada inteqrallama oblastı (V) radiusu 8, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan kürədir.

7. Radiusu r, sıxlığı mərkəzdə maksimal D qiymətindən, səthində minimal d qiymətinə qədər müntəzəm paylanan kürənin kütləsini tapın.

8. Tutaq ki, $f(x, y) = g(x)h(y)$.

Əmin olun ki,



$$\iint\limits_{(P)} f(x,y)dP = \int\limits_a^b g(x)dx \int\limits_c^d h(y)dy \qquad \text{(P)}$$

üçqat inteqral üçün uyğun

məsələni formalaşdırın.

9. Dənizə düşən təyyarə dənizin dibində maili vəziyyətdədir. Təyyarəyə təsir edən suyun təzyiqini necə hesablamaq olar? (onun sudan qaldırılması imkanını qiymətləndirmək üçün nələr lazımdır)?

Mövzu 12.

SADƏ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN TƏRİFİ VƏ HƏLLİ

12.1. Sadə diferensial tənliklərin tərifi və həlli

1. Diferensial tənliyin tərifi. Asılı olmayan dəyişənlərlə, onlardan asılı funksiyalarla və bu funksiyaların həmin dəyişənlərə görə törəmələri ilə əlaqədar olan istənilən münasibətlər *diferensial tənliklər* adlanır. Əgər asılı olmayan dəyişən bir olarsa və deməli törəmə adi olarsa, onda tənlik adi *diferensial tənlik* adlanır. Biz yalnız belə tənlikləri öyrənəcəyik və bu səbəbdən də «adi» sözünü diferensial tənlik ifadəsinin qarşısından buraxacağıq. Tənliyə daxil olan törəmənin ən yüksək tərtibinə *tənliyin tərtibi* deyilir. Beləliklə, n tərtibli diferensial tənliyi ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \qquad (1)$$

burada *u* *x*-dən asılı funksiya , $y', \ldots, y^{(n)}$ -bu funksiyanın törəmələridir. Əgər *y(x)* funksiyanı və onun törəmələrini (1) tənliyəndə yerinə yazdıqda eynilik alınarsa, *y(x)* – funksiyası (1) *diferensial tənliyinin həlli* adlanır.

Misal 1. $y' = 2x$ birtərtibli diferensial tənliyə aid misaldır. Bu tənliyin həlli $y(x) = x^2 + c$ şəklində olan ixtiyari funksiyadır, burada *c*–ixtiyari sabitdir. Bunu yoxlamaq üçün $y = x^2 + c$ funksiyasının törəməsini tapıb, tənlikdə yerinə yazmaq lazımdır.

Misal 2. $y'' + y = 0$ İkitərtibli diferensial tənlikdir. Bu tənliyin həlli məsələn, $y = cos x$ funksiyasıdır. Bunu yoxlamaq üçün *cosx* ikinci tərtib törəməsini tapıb, tənlikdə yerinə yazmaq lazımdır.

Adi tənliklərdə olduğu kimi, diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsas məsələsi – verilmiş diferensial tənliyin bütün həllərinin tapılmasıdır. Diferensial tənliyin həllərinin tapılması bu tənliyin *inteqrallanması* adlanır. Tənliyi bütün həllərinin kompakt yazılışı onun *ümumi həlli* adlanır. Məsələn, I misalda ümumi həll $y = x^2 + c$ şəkilində olar, burada *c* ixtiyari sabitdir, bu sabitin müxtəlif qiymətlərində xüsusi həllər alınır. Adətən, diferensial tənliyi həll edərkən əlavə şərtləri ödəyən xüsusi həllərin tapılması tələb olunur. Məsələn, tələb olunur ki, $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən xüsusi həlli tapın. Belə əlavə şərtlərə *başlanğıc şərtləri* deyilir. Baxdığımız misallarda tənliklərin həlli çox sadəliklə tapılmışdır, lakin mürəkkəb tənliklərin həllərini tapmaq üçün təqribi inteqrallama üsullarından, kompüterlərın tətbiqindən istifadə etmək zəruri olur.

Diferensial tənliklərə həm də asılı olmayan dəyişənlərin diferensialları ilə axtarılan funksiyaların diferensiallarını əlaqələndirən tənliklər aiddir. Məsələn, *2dx+3dy=0* diferensial tənlikdir.

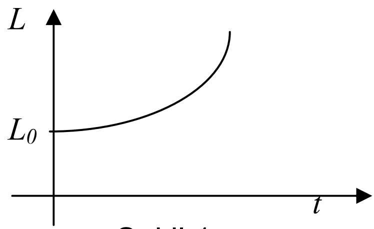
2. Diferensial tənliklərə gətirilən məsələlər. Bir çox təbiətşünaslıq məsələləri diferensial tənliklərə gətirilir. Bir neçə belə misallara baxaq.

A. Cisimin hərəkət sürətinin zamandan asılılığı. Fərz edək ki, *x* oxu boyunca hərəkət edən nöqtənin hər zaman anında sürəti $v(t)$– dir, belə ki, $v(t)$ kəsilməzdir. Bundan əlavə, məlumdur ki, t_o anında nöqtənin absisi x_o-dır. Nöqtənin hərəkət qanununu tapmaq lazımdır, yəni onun absisinin zamandan asılılığını tapmaq tələb olunur. Bu məsələnin həlli mürəkkəb deyildir-belə ki, absisin dəyişmə sürəti, yəni törəmə $x'(t)$– sürətdir. Beləliklə, diferensial tənlik alırıq: $x'(t)=v(t)$. Bu tənliyi həll etmək $v(t)$ ibtidai funksiyasının tapılması deməkdir. $v(t)$ kəsilməz olduğundan onun ibtidai funksiyası var və inteqral şəkilində belə yazıla bilər: $\int_{t_0}^{t} v(t)dt + c$ burada *c* ixtiyari sabitdir və asanlıqla təyin oluna bilər: $x(t_0)=x_0$ olduğundan $c = x_0$ olar. Diferensial tənliyin həllini nəticədə belə alarıq: $x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

B. Fondların hərəkəti. K ilə fondların natural və ya dəyər ifadəsində kəmiyyətini işarə edək. Fondlar dedikdə-dəzgahlar, binalar və s. başa düşülür. Bütün bunlar sınırlar, köhnəlirlər, işləyib sıradan çıxırlar və s. Bu prosesə deyirlər ki, fondlar sıradan çıxır. Fondların sıradan çıxma sürəti, sıradan çıxma əmsalı ilə ifadə olunur. Belə ki, əgər 10 ildə fondlar tam yeniləşirsə, onda sıradan çıxma əmsalı 1/10-ə bərabər olar. Sıradan çıxma əmsalını μ ilə işarə edək. Onda bir ildə fondlar μK qədər azalar, Δt müddətində isə $\mu K \Delta t$ qədər azalar (hesab olunur ki, fondların sıradan çıxması müntəzəm şəkildə olur).

Digər tərəfdən investisiya-maliyyə qoyuluşu fondların artmasına səbəb olur. Fərz edək ki, bir ildə J ölçüdə investisiya qoyuluşu fondları ρJ artırıb ($\rho = 1$ qəbul etmək olardı, lakin investisiyanın bir həissəsi əmək haqlarına, digər xərclərə gedir), onda Δt müddətində fondlar $\rho J \Delta t$ qədər artar. İxtiyari t momentinə və onun Δt artımına baxaq. Onda $K(t+\Delta t)=K(t)-\mu K\Delta t+\rho J\Delta t$ olar. $\Delta t\to 0$ -la diferensial tənlik alarıq:. $\frac{dK}{dt}=-\mu K+\rho J$. Qeyd edək ki, J sabitdir.

V. Demoqrafik məsələ. Ölkənin əhalisini t anında $L(t)$ ilə işarə edək. Əhalinin Δt zamanında artımını onun sayına L və Δt-yə mütənasib qəbul edək, onda



Şəkil 1.

$L(t+\Delta t)=L(t)+\alpha L(t)\Delta t$ olar. $\Delta t\to 0$ olaraq diferensial tənlik alarıq: $\frac{dL}{dt}=\alpha L(t)$.

Bu tənliyin ümumi həlli

$L(t)=L_0e^{-\alpha t}$ olar, burada

L_0-0 momentində əhalinin

sayıdır (müşahidəyə başlayanda). Əhalinin belə artımı *eksponensial* (şəkil1) adlanır. Aydındır ki, belə artım uzun müddət davam edə bilməz-əks mexanizm işə düşər: həyat səviyyəsinin aşağı düşməsi, doğumların azalması və s. Bu səbəbdən də əhalinin artımı dayanır.

3. Törəməyə görə həll olunmuş birtərtibli tənliklər. Bir tərtibli diferensial tənlikləri çox hallarda törəməyə nəzərən həll edib $y' = f(x,y)$ şəkilində yazmaq olur. Əgər $f(x,y)$ yalnız x-dən asılı olarsa, onda $y' = f(x)$ tənliyini alarıq. Beləliklə, əgər $f(x)$ ibtidai $F(x)$ funksiyasına malikdirsə, məsələn əgər $f(x)$ kəsilməzdirsə, onda göstərilən diferensial tənliyin $y = F(x) + c$ şəkilində ümumi həll var.

c sabitinin konkret qiymətini tapmaq üçün başlanğıc şərtindən istifadə etmək olar $y(x_0) = y_0$ bu halda konkret xüsusi həll aşağıdakı kimi olar:

$$y(x) = F(x_0) + (y_0 - F(x_0)) \qquad (2)$$

Ümumi halda $y' = f(x,y)$ olduqda, $f(x,y)$– funksiyası üzərinə müəyyən məhdudiyyətlər qoymaqla göstərmək olar ki, bu tənliyin yeganə həlli var, onun ümumi həlli bir ixtiyari sabitdən asılıdır, əgər $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərti verilərsə, bu şərti ödəyən yeganə xüsusi həlli tapırıq.

Misal 3. $y' = e^x$ diferensial tənliyinin $y(0) = 1$ şərtini ödəyən həllini tapın.

Həlli. e^x - funksiyası üçün ibtidai funksiya məsələn, e^x olduğundan (2) düsturuna əsasən axtarılan həll $y(x) = e^x + (1 - e^0) = e^x$.

4. Dəyişnlərinə ayrıla bilən tənlik

$$f(x)dy + g(x)dx = 0 \qquad (3)$$

şəkilindəki tənliyə *dəyişənlərinə ayrılmış*, bu şəkilə gətirilə bilən tənliklərə isə *dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlik* deyilir. $f(y)$ və $g(x)$ funksiyalarını kəsilməz funksiyalar hesab edəcəyik.

Fərz edək ki, $y(x)$ bu tənliyin həllidir, onda $y(x)$ yerinə yazsaq eynilik alarıq və onu inteqrallasaq alarıq:

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{4}$$

Bu eyniliyi (3) tənliyinin bütün həlləri ödəyir. Bu eyniliyi (3) tənliyinin bütün həlləri ödəyir. Bu fikirin tərsi də döğrudur. Əgər hər hansı $y(x)$ funksiyası (4) tənliyini eyniliyə çevirirsə, onda (4) tənliyini diferensiallayaraq, görərik ki, bu funksiya (3) tənliyinin həllidir. Bütün bunlar aşağıdakı tərifin doğruluğunu göstərir.

Tərif. Diferensial tənliyin $y(x)$ həllini x-in qeyri-aşkar funksiyası kimi təyin edək $\Phi(x,y)$ tənliyinə diferensial tənliyin *inteqralı* deyilir. Əgər bu münasibət diferensial tənliyin bütün həllərini təyin edirsə, onda o, diferensial *tənliyin ümumi inteqralı* adlanır. Deməli, (4) tənliyi (3) diferensial tənliyinin ümumi inteqralıdır. Mümkündür ki, qeyri-müəyyən inteqrallar $\int f(y)dy, \int g(x)dx$ elementar funksiyalar vasitəsi ilə ifadə olunmasınlar, hətta bu halda da (3) diferensial tənliyinin inteqrallanması yerinə yetirilmiş hesab edilir, belə ki, tənlik daha sadə, öyrənilmiş məsələyə qeyri-müəyyən inteqralın hesablanmasına gətirilib. $y(x_0) = x_0$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həlli aşağıdakı tənlikdən təyin edirlər:

$$y_0 + \int_{y_0}^{y} f(y)dy = x_0 + \int_{x_0}^{x} g(x)dx$$

Misal 4. $xdx + ydy = 0$ tənliyini həll edin.

Dəyişənlər ayrılmışdır, belə ki, *dx* – in əmsala *x* – dən asılı funksiyadır, *dy*–in əmsalı isə *y*–dən asılı funksiyadır. İnteqrallayaraq alarıq: $\int xdx + \int ydy = c$ və ya $x^2 + y^2 = c^2$. Aldığımız ifadə mərkəzi koordinat başlanğıcında olan konsentrik çevrələr ailəsidir. Dəyişənlərinə ayrıla bilən tənliklərə misal olaraq birtərtibli bircins diferensial tənlikləri göstərmək olar, yəni $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ şəkilinindəki tənlikləri. $z=\frac{y}{x}$ qəbul edək, onda alarıq:

$$y=zx,\ \frac{dy}{dx}=\frac{xdz}{dx}+z,\ \frac{xdz}{dx}+z=f(z),\ \frac{dz}{(f(z)-z)}=\frac{dx}{x}\ .$$

Axırıncı tənlik dəyişənlərinət ayrılmışdır.

5. Birinci tərtib xətti tənliklər. Bernulli tənliyi. Axtarılan funksiya və onun törəməsinə nəzərən xətti olan tənliyə *birinci tərtib xətti diferensial tənlik* deyilir. Xətti tənliyin ümumi şəkili belədir:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=f(x) \qquad (5)$$

burada $P(x)$ və $f(x)$ – kəsilməz funksiyalardır. Əgər $f(x)$ eynilik kimi sıfra bərabər olarsa, (5) tənliyi aşağıdakı şəkilə düşər:

$$\frac{dy}{dx}=-P(x)y$$

və *xətti bicins tənlik* adlanır. Bu tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlikdir:

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx\cdot$$

İnteqrallayaraq alarıq

$$y=ce^{-\int P(x)dx} \qquad (6)$$

Qeyri–bircins xətti (5) tənliyinin həllini tapmaq üçün sabitin variyasiyası üsulunu tətbiq edirlər. Bu üsulu tətbiq etmək üçün əvvəlcə uyğun tənliyi inteqrallamaq lazımdır

$\frac{dy}{dx} = -P(x)y$. Yuxarıda göstərildiyi kimi onun ümumi həlli $y = ce^{-\int P(x)dx}$ olar. Sabit c üçün bu funksiya bircins tənliyin həllidir. İndi qeyri-bircins tənliyin həllini tapmaq üçün *c* – i *x* – in funksiyası kimi götürmək *c(x).*

c(x)-i seçməyə çalışaq, $y = ce^{-\int P(x)dx}$ funksiyasını diferensiallayaq və (5) tənliyində yerinə yazaq.

Onda alarıq: $y' = c'e^{-\int P(x)dx} + ce^{-\int P(x)dx} \cdot (-P)$,

$c'e^{-\int P(x)dx} + ce^{-\int P(x)dx} \cdot (-P) + py = f(x)$

$ce^{-\int P(x)dx} \cdot (-P) + py = 0$ olduğundan $c'e^{-\int P(x)dx} = f$ buradan taparıq ki, $c = \int f(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_1$. Beləliklə, $y = c(x)e^{-\int P(x)dx} = c_1e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$. Bu isə c_1 sabitini özündə saxlayan ümumi həlldir. $c_1=0$ götürüb xüsusi həlli alarıq $y_0(x) = e^{-\int P(x)dx}\int f(x)e^{\int P(x)dx}dx$. Buradan görünür ki, ümumi həlli belə yazmaq olar: $y(x) = c_1e^{-\int P(x)dx} + y_0(x)$ yəni ümumi həll (5) tənliyinin xüsusi həlli ilə (6) tənliyinin ümumi həllinin cəminə bərabərdir.

Misal 5. $y' + y = 2x$ tənliyini həll edin.

Həlli. $y' + y = 0$ uyğun bircins tənliyi inteqrallayaq. Bu dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlikdir. $\frac{dy}{y} = -dx$ onun həlli $y = ce^{-x}$ olar. *c* – ni *x*-in funksiyası qəbul edək, onda $y' = c'e^{-x} - ce^{-x}$ olar, bunu əvvəlki tənlikdə yerinə yazsaq, alarıq $c'e^{-x} - ce^{-x} + ce^{-x} = 2x$ və ya $c'e^{-x} = 2x$ $c' = 2xe^{x}$

$c = \int 2xe^x dx$. Bu inteqralı hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə tapa bilərik. $c = 2e^x(x-1) + c_1$; $y(x) = (2e^x(x-1) + c_1)e^{-x}$; $y(x) = 2(x-1) + c_1 e^{-x}$

Bir çox diferensial tənliklər xətti tənliklərə gətirilir. Məsələn Bernulli tənliyi adlanan aşağıdakı tənlik:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 1 \tag{7}$$

(*n=1* olduqda xətti tənlik alınar, ona görə də bu hal istisna edilir)

(7) tənliyini aşağıdakı şəkildə yazaq:

$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x)$. $y^n = z$ əvəzləməsi vasitəsilə bu tənlik xətti tənliyə gətirilir. Doqrudan da $y^{1-n} = z$ bərabərliyini diferensiallayaraq, taparıq: $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ bunu (7) bərabərliyində yerinə yazsaq $\frac{1}{(1-n)} \cdot \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$ xətti tənliyini alarıq.

MƏSƏLƏLƏR

1. Aşağıdakı tənliklərin ümumi həllini tapın:

$a)\ y' = 2x - 4;$ $\qquad b)\ y' = 1 - e^{-x};$

$v)\ y' = x + Sinx;$ $\qquad g)\ y' = 7 + Cosx;$

$d)\ y' = xe^x.$

2. Aşağıdakı tənliklərin *x=0* olduqda vahidə bərabər olan xüsusi həllini tapın:

$a)\ y' = x;$ $\qquad b)\ y' = \sin x;$ $\qquad g)\ y' = \ln x.$

3. Dəyişənlərinə ayrıla bilən tənliklərin ümumi həllini tapın:

$$a)\ xyy' = 1 - x; \qquad b)\ yy' = \frac{(1-2x)}{y};$$

$$v)\ y' = 10^{x+y}; \qquad g)\ e^{-x}\left(1 + \frac{dx}{dt}\right) = 1.$$

4. Bircins tənliklərin ümumi həllini tapın:

$$a)\ y' = \frac{y^2}{x^2} - 2; \quad b)\ y' = \frac{(x+y)}{(x-y)}; \quad v)\ y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}; \quad g)\ y' = \frac{2xy}{(x^2 - y^2)}.$$

5. Xətti tənliklərin ümumi həllini tapın:

$$a)\ y' + 2y = 4x; \quad b) y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad v)\ y' + y = \cos x; \quad g) y' + y = \sin x.$$

6. Hindistanın əhalisi təqribən 1 milyard nəfərdir və ildə 3% artır. Bu tempi saxlamaqla 20 ildən sonra nə qədər əhali olacaq?

7. Yarım saat ərzində cisim 100 dərəcədən 50^0C qədər soyuyub (ətraf mühitin temperaturu 0^0 C-dir). Soyumaq prosesinin tənliyini yazın.

8. Suyun müqaviməti qayığın sürətilə düz mütənasibdir. Avarçəkənlər avarı dayandırdıqdan sonra qayığın hərəkət tənliyini yazın.

9. Fərz edək ki, ailənin aylıq gəliri sabitdir, xərclər isə yığımla mütənasibdir. Yığım stabilləşəcəkmi?

Mövzu 13.
BİRTƏRTİBLİ VƏ YÜKSƏK TƏRTİBLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

13.1. Evans və Solou modeli

Bu bölmədə geniş məşhur olan iqtisadi xarakterli iki dinamik modeli öyrənəcəyik: əvvəlcə bir əmtəəli bazarda bərabərölçülü qiymətləri müəyyən edən Evans modelini, sonra isə dinamik bir sektorlu iqtisadi inkişaf modelini öyrənəcəyik. İkinci model «Solou»-nun baza modeli kimi məşhurdur.

1. Evans modeli. Bir əmtəəli bazara baxılır, zaman kəsilməz qəbul edilir. Tutaq ki, $d(t), S(t), P(t)$–uyğun olaraq t anında tələb, təklif və əmtəənin qiymətidir.

Həm tələb və həmdə təklif qiymətin funksiyalarıdır, yəni $d(p)=a-bp,\ \ a,b>0$– qiymət artdıqca tələb azalır, $S(p)=\alpha+\beta p,\ \ \alpha,\beta>0$ –qiymət artıqca təklif artır. Təbii olaraq hesab etmək olar ki, $a>\alpha$, yəni sıfır qiymətində tələb təklifi qabaqlayır. Əsas fərziyyə ondan ibarətdir ki, qiymət tələb və təklifin nisbətindən asılı olaraq dəyişir: $\Delta p=\gamma(d-S)\Delta t$, burada $\gamma>0$ yəni qiymətin artması tələbin təklifi qabaqlaması ilə düz mütanasibdir. Beləliklə, diferensial tənlik alırıq $\frac{dp}{dt}=\gamma(d-S)$. Bu tənlikdə tələb və təklifin qiymətdən xətti asılılığını yazsaq, xətti qeyri – bircins diferensial tənlik alarıq:

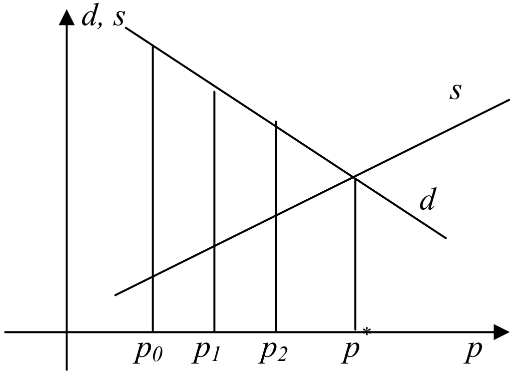
$$\frac{dp}{dt}=-\gamma((b+\beta)p-a+\alpha), \quad p(0)=p_v \qquad (1)$$

Bu tənliyin stasionar nöqtəsi var: $p^*=\frac{(a-\alpha)}{(b+\beta)}>0$.

Göründüyü kimi, $\frac{dp}{dt}>0,\ p^*>p$ və $\frac{dp}{dt}<0,\ p^*<p$ olduqda. Buradan çıxır ki, $\lim_{t\to\infty} p(t)=p^*$. $p_0<p^*$ olduqda qiymət artaraq p^* – a yaxınlaşır, $p_0>p^*$ olduqda isə azalaraq yaxınlaşır. p^* - bərabər ölçülü qiymətdir–yəni bu qiymətdə tələb və təklif bərabərdir:

$$d(p)=S(p)\to a-bp=\alpha+\beta p\to p^*=\frac{(a-\alpha)}{(b+\beta)}.$$

Bərabər ölçülü qiymət həmçinin qrafiki yolla da tapıla bilər – tələb və təklif düz xətlərinin kəsişməsi kimi. Tələb düz xətti $d(p)=a-bp$ və təklif düz xətti $S(p)=\alpha+\beta p$ (şəkil 1)



Şəkil 1.

Bölmə 12.1 b. 5 – də belə tənliklərin həlli üsulu göstərilmişdir–*sabitin variasiyası üsulu*. Bu üsula görə ümumi həlli, uyğun bircins tənliyin – $\frac{dp}{dt}+\gamma(b-a)p=0$ ümumi həlli ilə bircins olmayan (1) tənliyinin hər hansı bir xüsusi həllinin cəminə bərabərdir. Bunun üzərində ətraflı dayanmayaraq (1) tənliyinin həllini yazaq :

$$p(t)=p_0e^{-\gamma(b+\beta)t}+\frac{(a-\alpha)}{(b+\beta)}\left[1-e^{\gamma(b+\beta)t}\right] \qquad (2)$$

və ya
$$p(t)=p_0e^{-\gamma(b+\beta)t}+p*\left[1-e^{\gamma(b+\beta)t}\right]$$

Göründüyü kimi $\lim_{t\to\infty}p(t)=p*$.

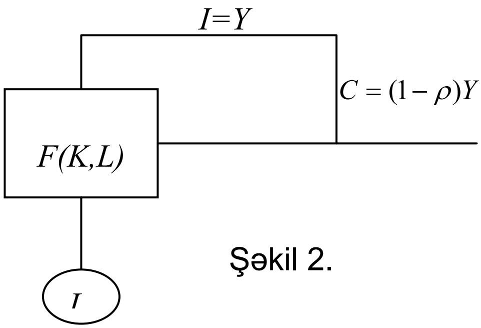
Evans modelinin diskret analoquna baxaq. Diskret modeldə bazar aşağıdakı kimi fəaliyyət göstərir: səhər bazarda hər hansı *S* təklifi və *d* tələbi aşkar edirlər. Onların qiymətindən asılı olaraq əmtəələrin qiyməti müntəzəm artmağa və ya azalmağa başlayır: əgər səhər tələb təklifdən çoxdursa qiymət artır. Əgər təklif tələbdən çoxdursa qiymət azalır. Tutaq ki, başlanğıc qiymət p_0 – dır, $S(p_0)<d(p_0)$. Beləliklə, qiymət artmağa başlayır. Gün ərzində qiymət p_1 -ə qədər artır. Sonrakı gün təklif və tələb bu p_1 qiymətinə uyğun olacaq yenə də $S(p_1)<d(p_1)$ olacaq və qiymət artmağa başlayacaq və s. (şəkil 1). Lakin bazarın hörümçək toru modelindən fərqli olaraq (bax bölmə 4.1. b.4) tarazlıq nöqtəsi dəyişmir, yəni əgər qiymət tarazlıqdan kiçikdirsə, kiçik də qalacaq və bütün proses tarazlıq nöqtəsindən sol tərəfdə olacaq, əgər qiymət tarazlıqdan böyuk olarsa, böyük də qalacaq və bütün proses tarazlıq nöqtəsindən sağ tərəfdə olacaq.

2. Solou modelinin parametrləri. İqtisadiyyata vahid tam kimi baxılır (struktur bölmələrsiz), burada vahid universal məhsul istehsal olunur, bu məhsul qeyri – istehsal sferasında, həm də isehsalatda istifadə oluna bilər. İstehsal sferasında istehlaka investisiya kimi baxmaq olar. Bu model mühüm makroiqtisadi aspektləri, o cümlədən təkrar istehsal prosesini kifayət qədər adekvat təsvir edir. İqtisadiyyatın vəziyyəti Solou modelində beş dəyişənlə verilir: $Y-$ son məhsul, $L-$ əmək resursları, $K-$ istehsal fondları, $J-$ investisiya, C-qeyri–istehsal istehlakının ölçüsü. Bütün dəyişənləri qarşılıqlı əlaqədədirlər və zamandan asılı olaraq dəyişirlər, yəni *t* zamanının funksiyalarıdırlar. Qəbul edəcəyik ki, zaman kəsilməzdir. $K,L-$ in ani göstəriciləri üçün fərz edəcəyik ki, $K,L-$ uyğun fondlar və əmək resurslarının *t* momentindəki qiymətləridir. Hesab edəcəyik ki, resurslar (istehsal və əmək) tam şəkildə istifadə olunur. İllik son məhsul hər bir zaman momentində orta illik fondların və əməyin funksiyalarıdır: $y=F(K,L)$. Beləliklə, $F(K,L)$-bütün xalq təsərrüfatının istehsal funksiyasıdır. Son məhsul qeyri – istehsal istehlakına və investisiyaya sərf olunur: $Y=C+J$. Son məhsulun investisiya üçün istifadə olunan *hissəsinə yığım norması* ρ deyək, onda $J=\rho Y, C=(1-\rho)Y$. Hesab edəcəyik ki, yığım norması sabitdir: $\rho=Const, \quad 0<\rho<1.$

İnvestisiya sıradan çıxmış fondların bərpası üçün, onların artırılması üçün istifadə olunur.

Əgər fərz etsək ki, fondların aradan çıxması sabit əmsalla $\mu, \ 0<\mu<1$ baş verir, onda $K=K(t+\Delta t)-K(t)=\rho Y\Delta t-\mu K\Delta t$ olar və buna görə də $\frac{dk}{dt}=\rho Y-\mu K$ olar. Əgər qəbul etsək ki, əmək resurslarının artımı, mövcud əmək resurslarına mütənasibdir, yəni $\Delta L=vL\cdot\Delta t$. Onda $\frac{dL}{dt}=vL$ diferensial tənliyini alarıq, onu həll edərək taparıq: $L = L_0 e^{vt}$, burada $L_0 = L(0)$ – müşahidə başlayanda əmək resurslarının miqdarı, $t = 0$. Beləliklə, Solou modeli (şəkil 2) sxem və ya sistem tənliklərlə verilir:

$$
\begin{aligned}
& C = (1-\rho)Y; \\
& Y = F(K,L); \qquad\qquad (3) \\
& L = L_0 e^{vt}; \\
& \frac{dk}{dt} = \rho y - \mu k, \;\; K(0) = K_0
\end{aligned}
$$



Şəkil 2.

$F(K,L)$ funksiyası istehsal funksiyalarının şərtlərini ödəyir (bax. bölmə 6.1. b. 3 və ya bölmə 9.2 b.1) və xətti – bircinsdir, yəni $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$. Orta əmək məhsuldarlığın $y = \frac{Y}{L}$ və orta fond təminatı $k = \frac{K}{L}$ olduğundan alarıq $y = \frac{Y}{L} = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = F(k, 1)$ axırıncı funksiyanı $f(k)$ ilə işarə etsək, alarıq $y = f(k)$.

k – nın *t* – yə görə törəməsini tapaq:

$$
\frac{dk}{dt} = \frac{d(K,L)}{dt} = \frac{(K'L, KL')}{L^2} = \frac{K'}{L} - K\left(\frac{L'}{L^2}\right) =
$$

$$
= \frac{(\rho Y - \mu K)}{L} - \frac{Kv}{L} = \rho y - (\mu + v)k
$$

Nəticədə: $\frac{dk}{dt}=\rho f(k)-(\mu+\nu)k, \qquad k(0)=k_0=\frac{k_0}{L_0}$ (4)

(3) modelinin makroiqtisadi göstərəciləri (4) tənliyi vasitəsilə tamamilə təyin olunur və əmək resurslarının dinamikası $L=L_0e^{\nu t}$.

(4) tənliyi başlanğıc şərtləri ilə verilmiş dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir, buna görə də onun yeganə həlli var. Bu tənliyin yalnız bir neçə xüsusi həllərini tədqiq edək.

3. Solou modelində stasionar trayektoriyalar. Stasionar trayektoriyaya baxaq, yəni elə trayektoriyaya ki, fond qurucu *k* sabitdir və deməli öz başlanğıc qiymətinə bərabərdir: $k(t)=const=k_0$.

Belə sabit qiymətə hər başlanğıc bərabər olmadığı üçün onu k^0 - la işarə edək. Fond yaratmanın belə qiymətinə *stasionar qiymət* deyilir, əlbəttə bu qiymət stasionar trayektoriya üzərindədir: $\frac{dk}{dt}=0$.

Stasionar trayektoriyada makrogöstəricilərin özlərini necə apardığına baxaq. Makrogöstəricilər dedikdə K,L,C,J,Y nəzərdə tutulur (4) tənliyinə görə, əgər $\frac{dk}{dt}=0$ olarsa, onda $\rho f(k)-(\mu+\nu)k=0$ olar və deməli k^0 – aşağıdakı tənliyin həlli olar:

$$\rho f(k)-(\mu+\nu)k=0 \tag{5}$$

İsbat edək ki, bu tənliyin həlli var.

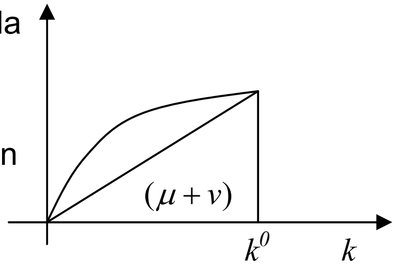
$f(k)=F(k,1)$ olduğundan, $f'(k)>0$ olar, digər tərəfdən $k\to\infty$ - da $f'(k)\to 0$ olduğundan $f(k)$ artan funksiyadır və onun artma tempi azalandır. Eyni zamanda $(\mu+\nu)k$

sabit templə artır. Deməli, $\rho f'(0) > (\mu + v)$ olarsa (5) tənliyinin yeganə k^0 həlli olar, $k > 0$ (şəkil 3) .

Beləliklə, stasionar trayektoriyada K, L, C, J, Y özlərini neçə aparır?

$L(t) = L_0 e^{vt}$, $k = \dfrac{K(t)}{L(t)}$ olduğundan

$K(t) = k^0 L(t) = k^0 L_0 e^{vt}$ olar.



Şəkil 3.

Analoji olaraq, $Y(t) = f(k^0) L(t) = f(k^0) L_0 e^{vt}$.

$C(t) = (1 - \rho) Y(t) = (1 - \rho) f(k^0) L_0 e^{vt}$, $J(t) = \rho f(k^0) L_0 e^{vt}$. Bir yerdə birləşdirək:

$$L(t) = L_0 e^{vt};$$

$$K(t) = k^0 L_0 e^{vt};$$

$$Y(t) = f(k^0) L_0 e^{vt};$$

$$J(t) = \rho f(k^0) L_0 e^{vt}.$$

Belə bir nəticə alarıq: stasionar trayektoriyada bütün əsas makrogöstəricilər eksponensial artır və əmək resurslarına mütənasib olurlar.

4. İqtisadi artımın «qızıl qaydası». Beləliklə, stasionar rejimdə yığımın optimal norması fondlara görə elastiklik əmsalına bərabərdir (iqtisadi artımın *«qızıl qaydası».* Qeyd edək ki, *Kobba-Duqlas* istehsal funksiyası üçün doğrudur. Başqa istehsal funksiyaları üçün bu qayda başqa cür ola bilər.

MƏSƏLƏLƏR

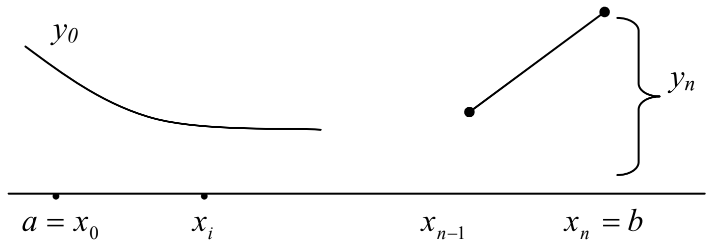
1. 1) tənliyini ətraflı həll edin.

2. Tələb və təklif funksiyalarını aşkar şəkildə zamanı funksiyası kimi yazın. Bunun üçün qiymətin zamandan asılı (2) düsturu ilə ifadə olunan asılılıqdan istifadə edin.

13.2. Diferensial tənliklər haqqında bəzi ümumi məlumatlar

1. Diferensial tənliklərin təqribi həlli üçün Eyler üsulu. Kvadraturalarla inteqrallanan, yəni həlli inteqrallar vasitəsilə yazıla bilən diferensial tənliklər sinifi çox dardır. Bu səbəbdən də nəzəriyyə və praktikaya lazım olan tənlikləri həll etmək üçün diferernsial tənliklərin təqribi həllərini tapmaq üçün üsulları inkişaf etdirmək tələbi zəruri olur. Ədalət naminə demək lazımdır ki, diferensial tənliklər üzrə mütəxəssis olmayanlar üçün diferensial tənliklərin təqribi həllərinin axtarılıb tapılması üçün özlərinin məşgul olması mənasız olardı. Lakin bir sıra əsas üsulların müəyyən momentlərini bilmək faydalı olardı. Qeyd edək ki, həllərin adi qayda ilə tapmaq çox zəşmət tədəb edir, yaxınlaşmının dəqiqliyi kifayət etmir və kompüterdən istifadə etmək zəruri olur. Onu da qeyd edək ki, indii hesablama texnikasının inkişaf etdiyi bir vaxtda, hətta kvadraturalarla inteqrallanan tənliklərində təqribi həllərini tapmaq üçün kompüterlərin tətbiqi məqsədəuyğun sayılır. Hətta həllər elementar funksiyalarla ifadə olunan tənliklərə də kompüterlərin tətbiqi məqsədəuyğundur, belə ki, bu funksiyaların qiymətlərini tapmaq üçün cədvəllərdən istifadə etmək daha çox zəhmət və vaxt tələb edir.

Diferensial tənliklərin təqribi həlli üçün Eyler üsuluna baxaq. Bu ən qədim və ən sadə üsullardan biridir. Bu üsulla $\partial y/\partial x = f(x, y)$ tənliyinin təqribi həlli tapılır. Bu üsulun mahiyyəti ondan ibarətdir ki, (x_0, y_0) nöqtəsindən keçən inteqral əyrisi sınıq xətlə əvəz olunur, hər bir hissə–düz xətt parçası müəyyən bir nöqtəsində inteqral əyrisinə toxunur (şəkil 1).



Şəkil 1.

Bu üsulu $[a, \ b]$ parçasında $a<b$ inteqral əyrisinin təqribi hesablanmasına tətbiq edərkən $[a, \ b]$ parçası $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ nöqtələri vasitəsilə n sayda bərabər hissələrə bölünür və $h = (b-a)/n$ hesablamanın addımı adlanır. Axtarılan həllin x_i nöqtəsindən təqribi qiymətini y_i ilə işarə edək və $f(x_i, y_i)$ - in qiymətini isə y_i'-lə işarə edək. y_i- i hesablamaq üçün $[x_0, x_1]$ parçasında inteqral əyrisini x_0 nöqtəsində onun toxunanının parçası ilə əvəz edək. $y_1 = y_0 + y_0'h.$ Analoji olaraq $y_2 = y_1 + y_1'h$ və s. Nəticədə alarıq: $y_n = y_{n-1} + y_{n-1}'h.$ Beləliklə, Eyler sınıq xəttini alırıq. Təbii olaraq gözləmək olar ki, $h \to 0$ - da Eyler sınıq xətti axtarılan inteqral əyrisinin qrafikinə yaxınlaşar və deməli addım kiçildikcə Eyler üsulu $[a, b]$ parçasında daha dəqiq qiymət verir. Bu doğurdan da belədir. Əgər $f(x, y)$ funksiyası praktiki nöqteyi-nəzərdən çox da məhdudlaşdırıcı olmayan bir neçə şərti ödəyirsə. Öz sadəliyinə görə Eyler üsulu praktikada tez – tez tətbiq edilir – burada ən mürəkkəb $y_i' = f(x_i, y_i)$ qiymətinin hesablanmasıdır. Lakin bəzi hallarda təqribi qiyməti hesablamaq üçün daha dəqiq üsullardan istifadə edirlər ki, bunları da xüsusi ədəbiyyatdan öyrənmək olar.

2. Həllin varlığı və yeganəliyi teoremi. Əgər $dy/dx = f(x,\ y)$ tənliyində $f(x, y)$ funksiyası $D\colon x_0 - a \le x \le x_0 + a,\quad y_0 - b \le y \le y_0 + b$ düzbucaqlısında kəsilməz funksiyadırsa, *D* düzbucaqlısında Lipşits şərtini ödəyərsə: $\left|f(x,\ y_1) - f(x,\ y_2)\right| \le N \cdot \left|y_1 - y_2\right|$, burada *N*– sabit-dir, onda x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında bu tənliyin həmin nöqtədən keçən yeganə həlli var. Bu teorem yalnız x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında həllin varlığına və yeganəliyinə təminat verir. Lipşits şərtinə gəldikdə isə deyə bilərik ki, əgər $f(x, y)$ funksiyasının *D* düzbucaqlısında *y* - ə görə məhdud xüsusi törəməsi varsa, onda Lipşits şərtləri ödənir. Bu teoremin isbatı ona əsaslanır ki, teoremin şərtləri daxilində Eyler sınıq xətti limitdə inteqral əyrisini verir. Praktiki vacibliyinə görə diferensial tənliklər nəzəriyyəsi çox yaxşı inkişaf edib. Misal olaraq diferensial tənliyin hissələrinin xassələri haqqında teoremi göstərmək olar.

Həllin diferensiallanması haqqında teorem.

Əgər $(x_0,\ y_0)$ nöqtəsinin müəyyən ətrafında, yəni bu nöqtənin ətrafında müəyyən düzbucaqlıda, $f(x, y)$ funksiyasının *n* – ci tərtibə qədər (*n* daxil olmaqla) kəsilməz xüsusi törəmələri varsa, onda $dy/dx = f(x,\ y)$ tənliyinin $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən $y(x)$ həlli x_0 nöqtəsinin müəyyən ətrafında *n*-ci tərtibə qədər (*n* daxil olmaqla) kəsilməz törəmələri var.

3. Diferensial tənliyin həllinin dayanıqlığı haqqında anlayış. Hər hansı real hadisəni riyazi təsvir etmək üçün onu sadələşdirmək zərurəti meydana gəlir. Bu zaman hadisəyə təsvir edən vacib faktorları seçib, nəzərə alırlar, az vacib olan faktorları ilə atırlar. Burada həmin sual ortaya çıxır: Sadələşdirmə uğurla həyata keçirilibmi? Ola bilər ki, nəzərə alınmayan faktorlar öyrənilən hadisəyə güclü təsir edir, onun kəmiyyət və keyfiyyət xarakteristikalarını dəyişə bilirlər. $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərti ilə verilmiş $dy/dx = f(x, y)$ diferensial tənliyinə baxaq. Bu növ başlangıc şərtləri adətən hər hansı ölçmənin nəticəsidir və deməli müəyyən xətalarla alınmışdır. Bu xətaların axtarılan həllə necə təsvir etməsi sualı ortaya çıxır. Əgər başlanğıc şərtlərinin kiçik dəyişməsi həlli güclü dəyişərsə, belə həll adətən heç bir tətbiqi həll daşımır və öyrənilən hadisəyə onu tətbiq etmək olmaz. Əgər başlanğıc şərtlərin kiçik dəyişməsi həllin də kiçik dəyişməsinə səbəb olursa, onda həll başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılıdır. Bu məsələ praktika üçün çox vacibdir.

Həllərin kəsilməz asılılığı haqqında teorem.

Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminin şərtləri ödəndikdə tənliyin həlli (x_0, y_0) nöqtəsinin hər hansı ətrafında başlanğıc şərtlərdən kəsilməz asılı olar. Bu teremi aydınlaşdıraq. Bunun üçün $dy/dx = f(x, y)$ tənliyinin yeganə həllini $y(x, x_0, y_0)$- ilə işarə edək, belə ki, $x = x_0$ olduqda $y = y_0$ olur. Uyğun olaraq $x = \bar{x}$ olduqda $\bar{y}(\bar{x}, \bar{y})$ qiymətini - (x_0, y_0)- a yaxın qiymət alan, həlli $y(x, \bar{x}, \bar{y})$- lə işarə edək.

Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminə görə (x_0, y_0) nöqtəsinin elə *K* ətrafını tapmaq olar ki, yəni (x_0, y_0) nöqtəsini özündə saxlayan elə *K* düzbucaqlısı və x_0 nöqtəsinin elə *J* ətrafı (x_0 nöqtəsini üzərində saxlayan *J* parçası) var ki, istənilən $(\bar{x}, \bar{y}) \in K$ nöqtəsi üçün yeganə $y(x, \bar{x}, \bar{y})$ həlli var ki, bu nöqtədən keçir və *J* - nin ətrafında təyin edilib. Həllin başlanğıc şərtlərindən kəsilməz asılılığı teoreminə görə ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün elə düzbucaqlı $P \subseteq K$ tapmaq olar ki, $(\bar{x},\ \bar{y}) \in P$ olduqda, $\left| y(x,\ x_0, y_0) - y(x,\ \bar{x}, \bar{y}) \right| \le \varepsilon$ olar və bu münasibət üçün bütün *J* parçasında doğru olar (şəkil 2). Başqa sözlə, əgər $(\bar{x},\ \bar{y})$ nöqtəsi (x_0, y_0) nöqtəsinə yaxındırsa, onda bütün *J* intervalında uyğun inteqral əyriləri də yaxın olar. Bu teorem həllin başlanğıc şərtlərdən kəsilməz asılılığını sonlu *J* intervalında, x_0 nöqtəsinin ətrafında göstərir.

Əgər bu məsələlər sonsuz intervalda tədqiq edilərsə, onda həllin dayanıqlığından danışmaq olar. Dayanıqlılıq anlayışı praktiki vacib anlayışdır. Praktikada dayanıqlı olmayan həllərdən çox az hallarda istifadə olunur.

4. Yüksək tərtibli diferensial tənliklər və diferensial tənliklər sistemi haqqında anlayış. *n*–tərtibli diferensial tənliyin ümumi şəkli aşağıdakı kimidir:

$$F(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n)}) = 0,$$

və ya onu yüksəktərtibli törəməyə nəzərən həllə etmək mümkün olarsa,

$$y^{(n)} = f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

Belə tənliklər üçün aşağıdakı teorem doğrudur.

Həllin varlığı və yeganəliyi teoremi.

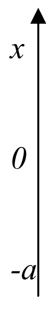
Onda əgər başlanğıc qiymətləri ətrafında f bütün arqumentlərinin kəsilməz funksiyasıdırsa və ikincidən başlayaraq bütün arqumentlərinə görə Lipşits şərtini ödəyəirsə (1) tənliyinin yeganə

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ *y(x)* həlli var və bu həll aşağıdakı şərtləri ödəyir.

Bu teorem birtərtibli diferensial tənliyin uyğun teoreminin dəqiq ümumiləşməsidir (bax b.2).

n tərtibli diferensial tənliyin ümumi həlli onunu bütün həllərinin kompakt yazılışıdır. *n* tərtibli tənliyin ümumi həllində *n* parametr–ixtiyari sabitlər iştirak edir. Bu parametrlər qismində $x = x_0$ olduqda funksiyanın və onun törəmələrinin qiymətləri götürülə bilərlər. Xüsusi halda 2 tərtibli $y'' = f(x, y, y')$ tənliyi üçün ümumi həll iki c_1 və c_2 parametrlərdən asılıdır, məsələn $x = x_0$ olduqda y və y' qiymətlərindən. Əgər bu qiymətləri fiksə etsək, yəni (x_0, y_0) nöqtəsini versək və əlavə olaraq x_0 nöqtəsində axtarılan inteqral əyrisinin toxunanının istiqamətini versək, onda bu şərtlər daxilində verilmiş tənliyin yeganə inteqral əyrisi müəyyən olunur.

Misal 1. Yaydan yük asılmışdır. Yay dartılmıyanda və yığılmayanda yükün *x* koordinatı sıfıra bərabər qəbul edəcəyik – bu tarazlıq vəziyyətidir. Biz yükü aşağı dartanda, yay yükü yuxarı çəkməyə çalışacaq. Müəyyən limitdə *x* – in dəyişməsi Huk qanunu görə, yayın yükü tarazlığa qurtarması qüvvəsi *x* kəmiyyətinə mütənasib olacaq və əks işarəli olacaq. Deməli təcildə belə olmalıdır və beləliklə yükün yayda hərəkəti proesesini təsvir edən diferensial tənlik, yəni x'' koordinatının *t* zamanından asılılığı belə olacaq: $x'' = -kx$ (burada başqa qüvvələr məsələn, havanın müqaviməti nəzərə alınmır). Başlanğıc şərtləri: $x(0) = -a,\ x'(0) = 0$ aşağıdakı həlli verər, $x(t) = -a\cos\sqrt{k}\ t$. Yoxlamaq üçün, $x(t)$-ni 2 dəfə diferensiallayıb, tənlikdə yerinə yazsaq, əmin olarıq ki, doğurdan da



Şəkil 3.

$x(t)$ tənliyin həllidir. Yoxlamaq olar ki, bu həll başlanğıc şərtlərini ödəyir. Həllin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremə əsasən deyə bilərik ki, tapdığımız axtarılan həlldir.

n tərtibli diferensial tənliyi, birtərtibli diferensial tənliklər sisteminə gətirmək olar. Doğurdan da y' - i y_1 - lə, y'' - i y_2 ilə, $\cdots y^{(n-1)}$ - i y_{n-1} -lə işarə etsək, alarıq:

$$\begin{cases} y' = y_1 \\ y'_1 = y_2 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Bu sistem üçün xüsusi və ümumi həll anlayışlarını, həmçinin başlanğıc şərtləri daxil etmək olar.

Başlanğıc şərtləri hər hansı x_0 nöqtəsində $y, y_1, \cdots, y_{n-1}$ funksiyalarının qiymətləri kimi vermək olar, yəni *n* tərtibli tənliyin başlanğıc şərtləri.

Bu mülahizənin tərsi də doğrudur. Əgər ixtiyari (3) birtərtibli diferensial tənliklər sistemi verilərsə:

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, \cdots, y_n), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, \cdots, y_n), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(x, y_1, \cdots, y_n) \end{cases} \tag{3}$$

Onda onu uyğun tərtibli bir tənliyə gətirmək olar ki, onu da həll etmək, əvvəlki tənliklər sistemini həll etməkdən sadə ola bilər.

Misal 2. Birinci tərtib iki tənlikdən ibarət tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} dy/dx = z, \\ dz/dx = y. \end{cases}$$

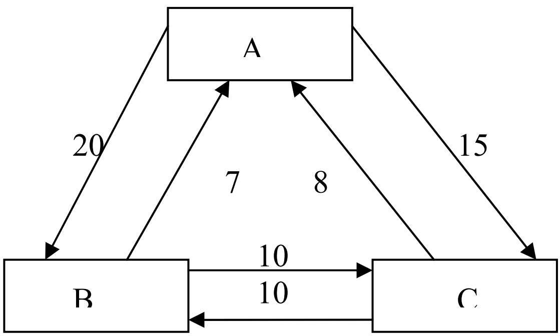
Həlli. Birinci tənliyi diferensiallayıb alarıq: $y'' = z'$. İkinci tənlikdən z'-in qiymətini nəzərə alsaq taparıq ki,

$y'' = y$ Bu tənliyin ümumi həlli $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ olar. Nəticədə alarıq ki, $z = c_1e^x - c_2e^{-x}$.

MƏSƏLƏLƏR

«Kəşfiyyatçı haqqında məsələni» (bax. bölmə 1.3 p.1) yada salaq. Məxfiləşdirilmiş şəhərdə 100000 fəhlə üç böyük zavodda işləyir, şəhərdə başqa zavod yoxdur. Kəşfiyyatçı kadrların yerdəyişməsi haqqında məlumat əldə edir. Bir ildə A zavodunda işləyən hər min nəfərdən 20 nəfəri B zavoduna, 15 nəfəri isə C zavoduna keçir və s. Şəhər sakit stabil uzun illərdir ki, yaşayır. Bu şəraitdə kəşfiyyatçı hər zavodda işləyən fəhlələrin sayını müəyyən edir. Siz bunu edə bilərsinizmi?

Bü məsələ həll olunub. Bu zavodlarda işləyən fəhlələrin sayının ödədiyi diferensial tənliyi quraq. Kadrların yerdəyişməsi fəhlələrin sayının dəyişməsinin sürəti olduğunu nəzərə alsaq, aşağıdakı diferensial tənliklər sistemini alarıq. Bu sistemə fəhlələrin ümumi sayını göstərən tənlik də əlavə edilib.



$$\begin{cases} da/dt = -0{,}035a + 0{,}007b + 0{,}008c \ ; \\ db/dt = 0{,}020a - 0{,}017b + 0{,}010c \ ; \\ dc/dt = 0{,}015a + 0{,}010b - 0{,}018c \ ; \\ a + b + c = 100\ 000 \end{cases} \qquad (4)$$

Məsələnin dəqiq qoyuluşu üçün başlanğıc şərtləri, yəni başlanğıc momentdə hər zavodda işləyən fəhlələrin sayını əlavə etmək lazımdır:

$a(0) = a$, $b(0) = b$, $c(0) = c.$ Eyni zamanda isbat etmək olar ki, bu şərtlərdən asılı olmayaraq $t \to \infty$ - da $a(t),\ \ b(t),\ \ c(t)$ funksiyaları hər hansı $a',\ b',\ c'$ sabitlərinə yaxınlaşır. Bu ədədlərə stasionar qiymətlər deyilir və onların törəmələri sıfıra yaxınlaşır. Əgər törəmələri sıfıra bərabər etsək, aşağıdakı cəbri tənliklər sistemini həll etsək, bu sabitlərin qiymətlərini asanlıqla taparıq:

$$\begin{cases} 0 = -0{,}035a + 0{,}007b + 0{,}008c \ ; \\ 0 = 0{,}020a - 0{,}017b + 0{,}010c \ ; \\ 0 = -0{,}015a + 0{,}010b - 0{,}018c \ ; \\ 0 = a + b + c - 100\ 000. \end{cases}$$

Bu tənliklər sistemi bölmə 1.3. b.1–də həll edilmişdir.

Qeyd edək ki, belə diferensial tənliklər sistemi kütləvi xidmət nəzəriyyəsində geniş istifadə edilir.

Mövzu 14.
ƏDƏDİ VƏ QÜVVƏT SIRALARI

14.1. Ədədi və qüvvət sıraları

1. Sıranın cəmi. Tutaq ki, hər hansı sonsuz ədədlər ardıcıllığı verilmişdir:

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \qquad (1)$$

Bu ədədlərdən düzəldilmiş

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

(2)

simvolu sonsuz sıra, (1) ədədlərinə isə sıranın hədləri deyilir.

Cəm işarəsindən istifadə edərək (2) əvəzinə belə yazırlar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (2, a)$$

Sıranın birinci bir neçə ardıcıl hədlərinin cəminə onun xüsusi cəmi deyilir:

$$A_1 = a_1 \; ; \; A_2 = a_1 + a_2 \; ; \; \cdots ; \; A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \; ; \cdots \qquad (3)$$

Xüsusi cəmlər ardıcıllığının $n \to \infty$ - da sonlu və sonsuz limitinə sıranın cəmi deyilir və belə yazılır:

$$A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{və ya} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, .$$

Əgər sıranın cəmi sonlu olarsa, onda onu yığılan sıra, əks halda isə (əgər sıranın cəmi sonsuzdursa və ya cəmi yoxdur) sıra dağılan adlanır. Beləliklə, sıranın cəminin olması sualı onun xüsusi cəmlər ardıcıllığının limitinin olması ilə eyni- güclüdür. Sıranın yığılan və ya dağılan olması sualı isə onun xüsusi cəmlər ardıcıllığının sonlu limitinin olması ilə eyni güclüdür. Bu fikirin tərsi də doğrudur: hər hansı $\{b_n\}$ ardıcıllığının limitinin olması sualı $b_1 + (b_2 - b_1) + + \cdots + (b_n - b_{n-1}) + \cdots$ sırasının cəminin olması ilə eynigüclüdür.

Misal 1. Sonsuz sıraya misal olaraq yaxşı tanıdığız həndəsi silsiləni göstərə bilərik $b, bq, bq^2, \cdots, bq^{n-1}, \cdots \; q \neq 1_0$ olduqda onun xüsusi cəmi

$S_n = (b - bq^n)/(1-q)$. Məlum olduğu kimi $|q|<1$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b/(1-q)$ olur. Bu isə sonsuz azalan həndəsi silsinin cəmidir. $|q| \geq 1$ olduqda belə həndəsi silsilə dağılan sıraya misaldır, belə ki, $q \geq 1$ olduqda onun cəmi sonsuzdur. $q \leq -1$ olduqda isə həndəsi silsilənin cəmi yoxdur.

İqtisadiyyatda sonsuz sıralar və onların cəmi əsasən nəzəri tədqiqatlarda ortaya çıxır. Tutaq ki, müddətsiz, nominal dəyəri 1000 dollar və 3 faizli kuponu olan istiqrazın bazar qiymətinə baxılır. Bu o deməkdir ki, bu istiqrazın sahibi hər il 30 dollar alır. Belə sonsuz ödənişlərin əsl qiymətini necə təyin etmək olar? Bir qayda olaraq hər bir valyuta inflyasiyanı çox zərərli hesab edirdilər, lakin bu müharibədən sonra demək olar ki, hamı kiçik faizli inflyasiyanı (yəni 1-2 % -li) faydalı hesab etməyə başladılar. Əgər inflyasiya bir ildə 2% olarsa, onda, bir ildən sonra alınacıq 30 dollar $30/(1+0{,}02)$ dollar, 2 ildən sonra $30/(1+0{,}02)^2$ və s. olacaq. Belə çıxır ki, hər il alınan sonsuz 30 dollar, aşağıdakı sıranın cəmi ilə ekvivalentdir: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 30 \Big/ (1+0{,}02)^2$, yəni sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi ilə ekvivalentdir.

Məlum düsturla hesablamaq olar ki, bu sıranın cəmi 1530 dollardır. Keçmiş və gələcək ödənişlərin bugünkü ekvivalentlərini tapmaq digər şəraitlərdə də tətbiq olunur. Məsələn, tutaq ki, firmanın gələcək fəaliyyətində iki strategiyaya baxılır. Bu strategiyalardan hansının yaxşı olduğunu bilmək üçün gələcək mənfəəti bu gün hesablamaq vacibdir. Gələcək mənfəətin bugünkü, ekvivalenti sonsuz sıranın cəmi şəkilində ifadə olunur. Hansı cəm böyükdürsə, ona uyğun strategiya daha yaxşı hesab olunur və seçilir.

2. Yığılan sıraların xassələri və yığılma əlamətləri. Bu mövzudakı isbatlar çox sadədir və buraxılmışdır.

Əgər (2) sırasında birinci *n* sayda hədləri atsaq, onda alınan

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots \tag{4}$$

sırası (2) sırasının *n* - ci həddən sonrakı qalığı adlanır.

A. Əgər (2) sırası yığılandırsa, onda onun istənilən (4) qalığı da yığılandır, əksinə (4) qalığının yığılmasından çıxır ki, (2) sırası da yığılandır. Beləliklə, sıranın sonlu sayda hədlərinin atılması və bir neçə yeni hədlərin əlavə edilməsi onun yığılmasına və yaxud dağılan olmasına təsir etmir.

B. Sıranın *m* - ci həddindən sonrakı dağılanı r_m - lə işarə edək. Onda əgər əvvəlki sıra yığılandırsa, $m \to \infty$ - da r_m sıfıra yaxınlaşar.

C. Yığılan sıranın a_m - ümumi həddi sıfıra yaxınlaşar. Bu şərt sıranın yığılması üçün zəruri şərtdir; bu şərt ödənmədikdə sıra yığılan ola bilməz, yəni sıra dağılan olar. Lakin bu şərt kafi deyildir, bu şərt ödənildikdə belə sıra dağılan ola bilər. Yığılan sıraların sadə xassələrini göstərək.

Ç. Əgər yığılan sıranın hər bir həddini eyni bir ədədə vursaq, sıranın yığılan və ya dağılan olması pozulmur, cəmi isə həmin ədədə vurulur.

D. İki yığılan sıranın hədbəhəd toplamaq və ya çıxmaq olar, belə ki, $(a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \cdots$ sırası da yığılan olar və onun cəmi $A \pm B$ - ə bərabər olar.

3. Sabit işarəli sıraların yığılma əlamətləri. Belə sıraların bütün hədləri ya mənfi deyildir, ya da müsbət deyildir. Bütün hədləri mənfi olmayan, yəni qısa desək müsbət hədli sıraları öyrənək. Beləliklə, tutaq ki;

$$a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n \cdots \tag{5}$$

sırasının bütün hədləri mənfi deyildir $a_n \geq 0$. Onda aydındır ki, bütün xüsusi cəmlər də mənfi olmayacaq və xüsusi cəmlər ardıcıllığı A_n monoton artan olacaq. Belə ardıcıllığın həmişə limiti var: əgər bu ardıcıllıq yuxarıdan məhduddursa, onda sonlu, əks halda isə sonsuz limit var. Aşağıdakı nəticəni alırıq.

Nəticə: Müsbət sıranın həmişə cəmi var; əgər xüsusi cəmlər yuxarıdan məhdud olarsa, onda cəm sonlu, sıra isə yığılan və əks halda cəm sonsuz, sıra isə dağılandır. Müsbət hədli sıraların yığılma əlamətlərinə keçməzdən əvvəl harmonik sıranın dağılan olmasını isbat edək. Aşağıdakı sıraya harmonit sıra deyilir:

$$1/1 + 1/2 + \cdots + 1/n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$$

Aydındır ki, aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$1/(n+1) + \cdots + 1/(2n) > n \cdot 1/(2n) = 1/2$$

Sıranın birinci iki həddini ataq, onda qalanlarını hər qrupda 2, 4, 8, …2^k, …, hədlər olmaqla qruplara bölək:

$$\underbrace{(1/3 + 1/4)}_{2} + \underbrace{(1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8)}_{4} + \cdots +$$
$$+ \underbrace{\left(1/(2^k + 1) + 1/(2^k + 2) + \cdots + 1/(2^k + 2^k)\right) + \cdots}_{2^k}$$

Bu cəmlərin hər biri ayrılıqda $\frac{1}{2}$ - dən böyük olar. Tutaq ki, H_n– ilk n sayda həddin cəmidir, onda $H_{2^k} > k \cdot 1/2$ olar. Görürük ki, xüsusi cəmlər yuxarıdan məhdud deyildir. Deməli, harmonik sıra dağılandır. Sıraların yığılan və ya dağılan olmasını müəyyən etmək üçün çox vaxt onları başqa sıra ilə müqayisə edirlər, elə sıralarla ki, onların yığılan və ya dağılan olmaları müəyyən olunmuşdur.

Teorem 1. Tutaq ki, iki (A) və (B) müsbət sıraları verilmişdir:

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n + \cdots \qquad \text{(A)}$$

$$b_1 + b_2 + \cdots b_n + \cdots \qquad \text{(B)}$$

Əgər müəyyən nömrədən başlayaraq $a_n \le b_n$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda (B) sırasının yığılmasından (A) sırasının yığılması çıxır və ya (A) sırasının dağılmasından (B) sırasının dağılması çıxır.

Misal 2. $\sum_{n=2}^{\infty}\left[1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}\right]$ $(\sigma > 0)$ sırası üçün *n* - ci xüsusi cəm $1 - 1/n^{\sigma}$ - ya bərabərdir, $n \to \infty$ onun limiti 1-ə bərabərdir, deməli bu sıra yığılandır. İndi isə bu sıra ilə müqayisə edərək $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\sigma}$ $(\sigma > 0)$ sırasının yığılan olduğunu göstərək.

$1/x^{\sigma}$ azalan funksiyadır. Bu funksiyaya $[n-1,\ n]$ intervalında Laqranjın orta qiymət teoremini (bax bölmə 5.2. b.1) tətbiq edərək alarıq $1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma} = \sigma/(n-\theta)^{1+\sigma}$, burada $0 < \theta < 1$. $1/n^{1+\sigma} < 1/(n-\theta)^{1+\sigma}$ olduğundan $1/n^{1+\sigma} < \left[1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}\right]/\sigma$ olar. Yuxarıda göstərmişdik ki, $\sum_{n=2}^{\infty}\left[1/(n-1)^{\sigma} - 1/n^{\sigma}\right]$ sırası yığılandır. Deməli teorem 1-ə görə $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{1+\sigma}$ sırası da yığılandır.

Praktikada teorem 1-dən alınan aşağıdakı teorem daha əlverişli olur. (Fərz edəcəyik ki, (B) sırasında müəyyən həddən başlayaraq, bütün hədlər ciddi müsbətdir).

Teorem 2. Əgər $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = k$ olarsa, onda (B) sırasının yığılmasından (A) sırasının yığılması çıxır, nəzərdə tutulur ki, $k > 0$ - dır. Beləliklə, $0 < k < \infty$ olduqda hər iki sıra eyni zamanda ya yığılır və ya da dağılır.

Aşağıdakı teorem 3 teorem 1 – in nəticəsidir.

Teorem 3. Əgər müəyyən nömrədən başlayaraq $a_{n+1}|a_n \le b_{n+1}|b_n$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda (B) sırası yığılandırsa (A) sırası da yığılan olar əgər (A) sırası dağılan olarsa, onda (B) sırası da dağılan olar. (Fərz olunur ki, nəinki $b_n \ne 0,$ həm də $a_n \ne 0$).

Misal 3. 1-3 teoremlərindən istifadə edərək, harmonik sıra ilə və misal 2-dəki sıra ilə müqayisə edərək, Aşağıdakı sıraların yığılan və ya dağılan olmalarını müəyyən edək.

Teorem 1 – ə əsasən:

1) $\sum_{n}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)}$ sırası dağılandır: $1/\sqrt{n(n+1)} > 1/(n+1)$;

2) $\sum_{n}^{\infty} 1/\sqrt{n(n+1)}$ sırası yığılandır: $1/\sqrt{n(n^2+1)} > 1/n^{3/2}$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n!/n^n$ sırası yığılandır: $n!/n^n < 2/n^2 \ (n > 3)$.

Teorem 2-yə əsasən:

4) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n\sqrt[n]{n})$ sırası dağılandır: $1/(n\sqrt[n]{n}):1/n \to 1$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos x/n)$ - sırası yığılandır: $(1-\cos x/n):1/n^2 \to x^2/2$

Sıraların yığılan və ya dağılan olması üçün daha iki əlaməti göstərək. Bu sıranın həndəsi silsilə ilə müqayisəsinə əsaslanır.

Koşi əlaməti. (A) sırası üçün $K_n = \sqrt[n]{a_n}$ ardığıllığını düzəldək. Əgər heç olmazsa kafi qədər böyük *n* – lər üçün $k_n \le q$ bərabərsizliyi ödənərsə, burada *q* - sabitdir və vahiddən kiçikdir, onda (A) sırası yığılandır; əgər müəyyən nömrədən başlayaraq $k_n \geq 1$ olarsa, onda (A) sırası dağılandır.

Dalamber əlaməti. *(A)* sırası üçün $L_n = a_{n+1} | a_n$ ardıcıllığını düzəldək. Əgər heç olmazsa kafi qədər böyük *n* - lər üçün $L_n \leq q$ bərabərsizliyi ödənərsə, burada *q* – sabitdir və vahiddən kiçikdir, onda *(A)* sırası yığılandır, əgər müəyyən nömrədən başlayaraq $L_n \geq 1$ olarsa, onda *(A)* sırası dağılandır.

Makloren–Koşinin inteqral əlaməti. Bu əlamət formasına görə əvvəlkilərdən fərqlənir. O, sıranın inteqralla müqayisəsinə əsaslanır.

Tədqiq olunan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasını $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ şəkildə yazaq, burada f funksiyası $x \geq 1$ olduqda kəsilməz, müsbət və monoton azalandır.

Tutaq ki, $F(x)$ - funksiyası $f(x)$ - in hər hansı ibtidai funksiyasıdır, belə ki, $f(x) > 0$ olduğundan $x \to \infty$ - da $F(x)$ artandır, sonlu və ya sonsuz limiti var. Bu limit sonlu olduqda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[F(n+1) - F(n) \right] \tag{6}$$

sırası yığılandır. Bu limit sonsuz olarsa, onda sıra dağılan olar. Tədqiq etdiyimiz sıranı bu sıra ilə müqayisə edək.

Laqranjın orta qiymət haqqında teoreminə əsasən (bax bölmə 5.2. b.1) alarıq:

$F(n+1) - F(n) = f(n+\theta)$, burada $0 < \theta < 1$. $f(x)$ monoton azaldığından

$$a_{n+1} = f(n+1) < F(n+1) - F(n) < f(n) = a_n .$$

Əgər (6) sırası yığılan olarsa, onda teorem 1-ə əsasən $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n+1)$ sırası da yığılan olar. Beləki, bu sıranın hər bir həddi (6) sırasının uyğun həddindən kiçikdir. Onda əvvəlki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası da yığılan olar. Əgər (6) sırası dağılandırsa, onda əvvəlki sıra da dağılan olar, beləki, onun hər bir həddi (6) sırasının uyğun həddindən böyükdür. Buradan isə inteqral əlaməti alınır: qəbul etdiyimiz fərziyyələrlə $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının yığılan və ya dağılan olması $n \to \infty$-da $F(x)$ funksiyasının sonlu limitinin olub-olmamasından asılıdır. $F(x)$ ibtidai funksiyasını $\int_1^x f(t)dt$ şəkilində götürmək olar.

Məlum olduğu kimi $x \to \infty$-da bu inteqralın limiti qeyri-məxsusi inteqral $\int_1^x f(t)dt$ (bax bölmə 11.1 b.1) adlanır.

Deməli badığımız sıranın yığılan və ya dağılan olması bu inteqralın sonlu və ya sonsuz limitinin olmasından asılıdır. Sıraların yığılması üçün daha dəqiq və daha mürəkkəb əlamətlər var. Bu əlamətlərlə xüsusi ədəbiyyatda tanış olmaq olar.

4. İşarəsini dəyişən sıralar. Müsbət və mənfi işarəsi hədləri növbə ilə dəyişən sıralar belə adlanırlar. Belə sıralar üçün çox sadə və əlverişli yığılma əlaməti var.

Leybnis əlaməti. Əgər işarəsini dəyişən sıranın $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \cdots,$, burada $c_n \geq 0$ hədləri mütləq qiymətcə monoton azalandırsa və sıfıra yaxınlaşırsa, onda sıra yığılan olar. Qeyd etmək lazımdır ki, bu sıranın qalığının işarəsi sıranın birinci həddinin işarəsi ilə eyni olar və mütləq qiymətcə birinci həddən kiçik olar.

Misal 4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \big/ n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$

və $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \big/ n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \cdots$

Hər iki sıra Leybnis əlamətinə görə yığılandır. Sıranın mütləq yığılan olmasını aydınlaşdraq. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - sırasının hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn sıra yığılan olarsa, onda əvvəlki sıra mütləq yığılan adlanır, yəni əgər $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - sırası yığılandırsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - sırası mütləq yığılan adlanır.

Aydındır ki, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ müsbət sıradır və onun yığılması üçün 3-cü bənddə hazırlanmış bütün aparatdan istifadə etmək olar. Qeyd etmək lazımdır ki, sıra özü yığıla bilər, lakin mütləq yığılmayan olar. Məsələn 4-cü misaldakı birinci sıra yığılandır, lakin onun hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzələn sıra harmonik sıra olduğundan dağılandır.

5. Qüvvət sıraları. Aşağıdakı şəkildə verilən sıralar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{7}$$

qüvvət sıraları adlanır.

Teorem 4. Əgər (7) sırası $x = d$ olduqda yığılandırsa, onda $|x| < |d|$ şərtini ödəyən istənilən x üçün mütləq yığılandır.

İsbatı. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n d^n = a_0 + a_1 d + a_2 d^2 + \cdots$ sırasının yığılan olmasından çıxır ki, onun ümumi həddi sıfıra yaxınlaşar və deməli məhduddur, $|a_n d^n| \le M$. Tutaq ki, $|x| < |d|$. Onda, $|a_n x^n| = |a_n d^n|\left(|x^n / d^n|\right) \le M |x/d|^n$ olar.

Deməli, sıranın hədləri həndəsi silsilənin $M + M|x/d| + M|x/d|^2 + \cdots$ uyğun həddindən kiçikdir, burada

$|x/d|<1$. Bu silsilə azalan olduğundan yığılandır, onda teoremi 1-ə əsasən $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|,\ |x|<|d|$ sırası da yığılan olar.

Elə qüvvət sıraları vardır ki, *x* - in sıfırdan fərqli heç bir qiymətində yığılan olmur.

Məsələn, $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ - sırasının $x \neq 0$ olduqda dağılan olmasını Dalamber əlaməti ilə göstərmək olar. Fərz edək ki, *x* - in elə qiymətləri var ki, (7) sırası yığılandır. Belə *x* – lərin çoxluğunu S - ilə işarə edək. Əgər bu çoxluq yuxarıdan məhdud olmazsa, onda teorem 4-ə əsasən belə sıra ixtiyari *x* üçün mütləq yığılan olar. Əgər S çoxluğu məhdud olarsa, onda R onun yuxarı sərhəddidirsə $|x|>R$ olduqda (7) sırası dağılan olar, $|x|<R$ olduqda yığılan olar, $x=\pm R$ olduqda sıranın yığılması və ya dağılması aydın deyil.

Teorem 5. Hər bir qüvvət sırası üçün yığılma oblastı bütün $[-R, R]$ intervalıdır, üç nöqtələri daxil ola da bilər, olmaya da bilər. R sonsuzluqda sıfırda ola bilər. Bu intervalın daxilində $(-R, R)$ sıra mütləq yığılır. R ədədinə sıranın yığılma radiusu deyilir. Yığılma radiusunu tapmaq üçün belə hərəkət edirlər. Aşağıdakı ardıcıllığı düzəldirlər $S_1=|a_1|,\ S_2=\sqrt{|a_2|}$, $S_3=\sqrt[3]{|a_3|},\cdots$, ...

Bu ardıcıllıq ümumi halda bir çox limit nöqtələrinə malik ola bilər, yəni öz alt ardıcıllıqlarının limitlərinə. İsbat etmək olar ki, bu limitlərin ən böyüyünün tərs qiyməti yığılma radiusuna bərabərdir.

Misal 5. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n^p$ - sırasının yığılma intervalını və yığılma radiusunu tapaq. $S_n=\sqrt[n]{|a_n|}=n^{n/p}$ ardıcıllığını düzəldək. $\lim_{n\to\infty} n^{n/p}=1$ olduğundan, yığılma radiusu $R=1/1=1$ olar.

Deməli (-1, 1) intervalında baxılan sıra mütləq yığılandır. İntervalın uclarında yığılmanı tədqiq edək. $x=-1$ yalnız $p>0$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n/n^p$ - yığılır, $p<0$ olarsa sıranın hədləri sıfıra yaxınlaşmır. Qeyd edək ki, $1>p>0$ olduqda sıranın yığılması mütləq deyildir. $x=1$ $p>1$ olduqda $\sum_{n=0}^{\infty}1/n^p$ yığılandır.

MƏSƏLƏLƏR

1. Aşağıdakı sıraların yığılmasını göstərin və cəmləri-ni tapın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}1/\big(n(n+1)\big)\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}1/\big(n(n+3)\big)\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}1/\big((2n-1)(2n+5)\big),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(3^n+2^n)/6^n$$

2. Yığılma əlamətlərindən istifadə edərək sıraların yığılan və ya dağılan olduğunu göstərin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)/(n^2+1),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi/2^n\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\Big((\sqrt{n}-\sqrt{n+1})\Big),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}1/\sqrt{n^4+1}$$

3. İşarəsini dəyişən sıraların yığılan olduğunu göstə-rin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n-1)/(2n),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n/(n-\ln n)$$

4. Qüvvət sıralarının yığılma radiuslarını tapın:

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}x^n/n^2\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}x^n/\sqrt{n}\ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)\cdot x^n\ \ ,\ \ \sum_{n=1}^{\infty}x^n/(n+\sqrt{n})\,.$$

Hissə 3. Ehtimal nəzəriyyəsi və iqtisadiyyatda statistik üsullar

Çoxları hesab edirlər ki, ehtimal nəzəriyyəsi başa düşülmək və mənimsəmək üçün çətin elmdir. Ümumiyyətlə bu doğrudan da belədir. Bu elmi abstrakt və gündəlik işlərdən və məşğuliyyətlərdən uzaq hesab edənlər də az deyil. Bu isə yanılmadır. Əsl mənada isə biz ehtimal nəzəriyyəsi ilə tez-tez rastlaşırıq, artıq məktəbi qurtarıb, ali məktəblərə hazırlaşanda, müxtəlif situasiyaları düşünəndə məhz ehtimal nəzəriyyəsi mövqeyində fikirləşirik. Məsələn, dostunun «Sənin instituta qəbul olunmaq şansın necədir?» sualına təxminən belə cavab verirsiniz: «Fikirləşirəm ki, 80 faiz şansım var». Və bir-birinizi gözəl başa düşürsünüz. (Lakin cavab verən nəyi nəzərdə tuturdu və sual verən nəyi başa düşdüyünü həmişə aydınlaşdırmaq olmur). Tələbə auditoriyasında ehtimal nəzəriyyəsinin ilk mühazirəsində mən tələbələrə ehtimalla əlaqədar bir neçə suallar verdim və tələbələr suallara tamamilə doğru cavablar verdilər. Suallar çətin deyildir: «əgər metal pulu 10 dəfə atsaq, gerb üzü təxminən neçə dəfə düşər?», «Oyun zərini atdıqda cüt rəqəmin düşməsi çox ehtimallıdır, yoxsa 6 rəqəminin düşməsi?»

Bir az çətin suallara məsələn, «hansı qiymətli kağızlar daha etibarlıdır, dövlətin və yaxud hər hansı şirkətin?» – kimi suallarada tələbələr adətən düzgün cavab verirlər. Burada qeyd etmək lazımdır ki, verilən cavabların düzgün və keyfiyyətinə görə hətta ehtimal nəzəriyyəsini öyrənəndən sonra nəyisə əlavə etmək mümkün deyildir. Bu da onu göstərir ki, tələbələr ehtimal nəzəriyyəsi haqqında çox şeyləri bilirdilər, lakin bu biliklər yalnız intuitiv xarakter daşıyırdılar. Ehtimal nəzəriyyəsini öyrənmək bu bilikləri möhkəmləndirir, aydınlaşdırır və genişləndirir.

«Anna Karenina»-nın müəllifini bilməyən adamlara cahil deyirlər. Eyni sözü işığın sürətinin maddi cisimlərin ən böyük sürəti olduğunu bilməyənlərə də aid etmək olar. Bu səbəbdən də hər bir mədəni insan ehtimal nəzəriyyəsinin heç olmazsa sadə elementlərini bilməlidir, ona görə ki, bu nəzəriyyə bizim qarşımızda yeni stoxastik qanunauyğunluqlar, yəni müasir dünyanı daha dərindən dərk etmək üçün yeni dünyagörüşü bəxş edir. Bu qanunauyğunluqlarla başlayaq. Sizə uğurlar, səbr və inad!

Mövzu 15.
TƏSADÜFÜ HADİSƏLƏR

15.1. Təsadüfü hadisələr

1.Determinist və stoxostik qanunauyğunluqlar. İndiyə qədər öyrəndiyimiz qanunauyğunluqlar əsasən belə tip qanunauyğunluqlar idi: «Əgər kompleks A şərtləri ödənərsə, onda mütləq B hadisəsi baş verər» Məsələn, «Əgər suyu normal şəraitdə 100^0C qədər qızdırsaq, su qaynayar » və yaxud «əgər adam daşı yuxarı atsa, daş mütləq yerə düşər». Ola bilməz ki, beş nəfər daş atsın, dördünün daşı yerə düşsün, birininki isə havadan asılı qalsın. Belə qanunauyğunluqlara determinist qanunauyğunluqlar deyilir. Təsadüfü hadisələr də olur. Məsələn, beş nəfər metal pulu atır, bunların beşinində gerb üzünün mütləq düşməsini demək olarmı? Əlbəttə demək olmaz. Hadisə (məsələn, gerb üzünün düşməsi) ona görə təsadüfü adlanır ki, müəyyən kompleks şərtlər daxilində baş verə də bilər, baş verməyə də bilər. Bir misal da gətirək. Küçədə təsadüfü bir nəfəri saxlayıb, ondan üzr istəyərək keçən xəstələndiyini soruşsaq, yəgin ki, onun cavabını əvvəldən proqnozlaşdıra bilmərik. Beləliklə, təsadüfü hadisənin baş verəcəyini əvvəldən demək olmaz.

Yalnız bir halda, vahid sınaqda təsadüfi hadisənin baş verməsini demək mümkün deyil. Lakin statistikaya baxsaq, onda görərik ki, 1996-cı ilə Moskva sakini orta hesabla 8 gün xətələnib. Qeyd edək ki, Moskva hökumətinin uyğun şöbəsi üçün heç mənası yoxdur ki, konkret Sidorov M.M. 1996-cı ildə xəstələnib, ya yox. Bu şöbə Moskva şəhərinin əsas əhali kütləsi üçün qərar qəbul edir (dərman sifarişi,yeni xəstəxanaların tikintisi və s.), bu mənada ayrıca bir nəfər haqqında informasiya elə də mühüm deyil (Doğrudur baxır bu adam kimdr? Belə ki, mətbuatın məlumatına görə 5 noyabr 1996-cı ildə B. Yeltsinin məşhur əməlyatına Rusiyanın dövlət büdcəsindən 32 milyard rub pul xərclənmişdir). Qərarlar qəbul etmək üçün ümumiləşdirilmiş orta informasiya mühümdür.

Beləliklə, baş verən təsadüfü hadisələrin əsas toplumu-konkret halda 1996-cı ildə Moskva əhalisinin xəstələnməsi haqqında informasiyanın dəqiq qanunauyğunluğu var: hər bir nəfər Moskva sakini 8 gün xəstə olub. Belə qanunauyğunluqlar stoxastik (təsadüfü) qanunauyğunluqlar adlanırlar. Belə qanunauyğunluqlar heç də az deyildir, onlar bizi hər tərəfdən əhatə edirlər. Misallar gətirək.

Misal 1. 1996-cı ildə Moskvanın tərəvəz bazasına 1 milyon ton kartof gətirilib, Orta hesabla həmin il hər bir moskvalı 100 kq kartof yeyib. Əlbəttə, demək olmaz ki, konkret hər bir Moskva sakini bu qədər kartof yemişdir.

Misal 2. Ailəli kişilər vaxtlarını televizor qarşısında subay kişilərdən daha çox keçirir.

Misal 3. 1996-cı ildə Moskva əhalisi 1995-ci ildəkindən çox vergi ödəyiblər. Bu misalların hər birində göstərilən qanunauyğunluqlar böyük kütləni xarakterizə edir, lakin konkret bir nəfər haqqında heç bir informasiya vermir. Stoxastik qanunauyğunluğun determinist qanunauyğunluqan fərqi də məhz bundan ibarətdir.

Determinist qanunauyğunluğu çoxluğun hər bir elementini təsvir etdiyi halda, stoxastik qanunauyğunluq çoxluğu yalnız bütövlükdə, tam halında təsvir edir. Tədqiq olunan belə böyük çoxluq baş çoxluq adlanır. Nəzəri baxımdan bu çoxluq sonsuz da ola bilər. Tutaq ki, X çoxluğunun elementləri hər hansı a - əlamətinə görə öyrənilir. Fərz edək ki, bu əlaməti olan elementlərdən ibarət alt çoxluq A - dır. İstənilən X elementini götürsək, bu element a xassəsini ödəyə də bilər, ödəməyə də bilər.

Tutaq ki, tədqiq etmək üçün bir neçə element götürmüşük. Belə elementlərdən ibarət W alt çoxluğu seçmə adlanır. Yada salaq ki, ixtiyari Y çoxluğunun elementlərinin sayını $|Y|$ ilə işarə edirlər. Deməli $|W|$ seçmənin elementlərinin sayıdır və yaxud seçmənin həcmidir. Nəzərə alaq ki, $W \cap A$- a xassəsini ödəyən elementlərdir, deməli $|W \cap A|$ -seçmənin a xassəsini ödəyən elementlərinin sayıdır. $|W \cap A/W|$ isə A - nın elementlərinin W -dəki hissəsidir.

2. Tezlik və ehtimal. Ehtimal nəzəriyyəsinin ilkin ödənilmə mərhələsində biz çox sadə təsadüfü hadisələrə baxacayıq. Bir daha qeyd edək ki, təsadüfi hadisələr müəyyən sınaqlarla (təcrübə ilə) əlaqədardır. Bu sınaqlar nəticəsində hadisə baş verə də bilər, verməyə də bilər. Belə sadə sınaqlara misal olaraq metal pulun və ya oyun zərinin atılmasını göstərmək olar. Metal pulu simmetrik, çox nazik (nəzəri cəhətdən sonsuz nazik) sıxlığına görə bircins hesab edəcəyik. Metal pulun bir üzündə gerb, digər üzündə isə reşka (yazı) təsvir edilmişdir. Oyun zəri həndəsi düzgün kubikdir, sıxlığına görə bircinsdir; onun üzlərində 1-də 6-ya qədər rəqəmlər təsvir edilib. Metal pulun atılması ilə iki təsadüfü hadisə bağlıdır: gerb üzünün yuxarı düşməsi – onu G ilə işarə edək və ya yazı olan üzün yuxarı düşməsi-onu R ilə işarə edək. Oyun zərinin atılması ilə çox təsadüfi hadisələr bağlıdır. Məsələn altı hadisə l_i = «oyun zərinin yuxarı üzündə i rəqəminin olması», $i=1,\cdots,6;$ və yaxud D hadisəsi = «cüt rəqəmin düşməsi», və ya N= «tək rəqəmin düşməsi» və s. İntuisiyaya və adi sözlər olan «daha imkanlı», «bərabər imkanlı» və s. sözlərindən istifadə edərək baxılan hadisələri təhlil edək.

Metal pul simmetrik olduğundan G və R hadisələrinin hansının daha imkanlı olduğunu demək olmaz, ona görə də deyə bilərik ki, G və R eyniimkanlı hadisələrdir. Eyni səbəbdən bütün $l_i,\ i=1,\cdots,6$, hadisələri də eyniimkanlı hadisələrdir. Başqa tərəfdən D hadisəsi $l_i,\ i=1,\cdots,6$ hadisələrinin hər birindən daha imkanlıdır. Lakin belə xarakteristikalar hadisənin «təsadüfiliyi»-ni «daha imkanlı», «bərabər imkanlı» və s. sözlərlə ifadə etmək yalnız keyfiyyət xarakteri daşıyır.

Kəmiyyətçə qiymət vermək təşəbbüsü «ehtimal» anlayışına gətirir.

Tərif 1. Sınaq keçirdikdə hadisənin baş verməsi ölçüsü onun ehtimalı adlanır.

Sonralar biz bu tərifə daha dəqiq məna verəcəyik. Sınaq nəticəsində baş verən və ya baş verməyən hər hansı A təsadüfi hadisəsinə baxaq. Bu sınağı bir neçə dəfə təkrarlayaq, məsələn *n* dəfə. Çalışaq ki, bu sınaqları eyni şəraitdə bir-birindən asılı olmayaraq keçirək. Deyirlər ki, belə sınaqlar uzunluğu *n* olan E-seriyası əmələ gətirir. Tutaq ki, A hadisəsi E seriyasında *k* dəfə baş verib. Onda *k/n* kəmiyyəti A hadisənin E seriyasında tezliyi adlanır və $\gamma(A,\ \varepsilon)$ ilə işarə edilir. Aydındır ki, $0 \le \gamma(A,\ \varepsilon) \le 1$ həm də qeyd edək ki, iki $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ seriyalarında hətta eyni uzunluqlu olsalar belə $\gamma(A,\ \varepsilon_1) \neq \gamma(A,\ \varepsilon_2)$. Lakin ε_i seriyalarını $i = 1, 2, \cdots$, keçirdikdə seriyaların uzunluğu çox böyük olduqda $\gamma(A,\ \varepsilon_i)$ kəmiyyəti aşağıdakı mənada stabilləşir, sıxlaşır: əvvəlcə vergüldən sonrakı birinci rəqəm p_1 stabilləşir, sonra 2-ci rəqəm p_2 və s. Alınan $0, p_1, p_2 \cdots$ limit ədədini A hadisəsinin ehtimalı hesab etmək lazımdır. Adətən ehtimalı P hərifi ilə işarə edirlər. Yuxarıdakı misallarda göstərilən təsadüfü hadisələrin ehtimalları belə olar:

$P(G) = P(R) = 1/2$, $P(B) = 1/2$, $P(e_i) = 1/6$ istənilən $i = 1, 2, \cdots, 6$ üçün.

Əslində isə hadisənin tezliyi ilə ehtimalını əlaqələndirmək təsvir etdiyimizdən xeyli çətindir. Bu əlaqənin izahına qayıdacağıq. Hələlik isə aşağıdakı nəticə ilə kifayətlənək.

Tərif 2. Təsadüfi hadisənin ehtimalı uzun seriyalı sınaqlarda onun başvermə tezliyinin mücərrəd ifadəsidir. Ehtimalın belə başa düşülməsi praktikaya çox yaxındır, amma yuxarıdakı tərif (bax.tərif 1) ehtimal hqqında nəzəri təsəvvürlərin tez inkişaf etdirilməsinə imkan yaradır.

3. Ehtimalın hesablanmasının klassik düsturu. Məlumdur ki, ehtimal nəzəriyyəsi salon oyunlarının (poker, preferans və ya domino və s.) təhlilindən başlayıb. Bu oyunlarda kartın bir çox kombinasiyaları (və yaxud başqa elementləri) eyniimkanlıdır. Bu kartların eyni ölçüdə, eyni materialdan hazırlanmaları ilə və onu paylamazdan əvvəl diqqətlə qarışdırılması ilə əldə olunur.

Misal 4. «Preferansist məsələsinə» baxaq. Üç nəfər oynayır. Kartı paylayan hər iştirakçıya 10 kart paylayır 2 kartı isə üstəlik alınma üçün saxlayır. (Preferans oyununda cəmi 32 kart var. Altılıqlar oynamır). Üstəlik alınma üçün saxlanılan kartların iki tuz olması ehtimalı neçə olar?

Həlli. Bu məsələ aşağıdakı sadə məsələ ilə ekvivalentdir: kart dəstindən iki kart götürülür. Götürülən kartların tuz olmasa ehtimalı nə qədərdir? 32 kartdan 2 kartı neçə kombinasiya ilə götürmək olar? Elementar hesablamalar göstərir ki, $n=(32\times 31)/2=496$. Bunlardan neçəsi yalnız tuzlardan ibarətdir? Yenə də hesablamaq çətin deyildir ki, $m=(4\cdot 3)/2=6$. Onda $m/n=6/496=1/83,$, bu isə axtarılan ehtimaldır. Ehtimal nəzəriyyəsinin ilkin inkişafında belə hesablamalar aparırdılar. Bunun əsasında isə aşağıdakı klassik düstur durur.

Ehtimalın hesablanması üçün klassik düstur.

Tutaq ki, A hadisəsi $m(A)$ halda baş verir, bütün halların sayı isə *n* - dir, onda $P(A)=m(A)/n$.

Bir sınaqda *B, C* hadisələri birlikdə baş verə bilməzlərsə, onda onlar uyuşmayan və ya birgə olmayan hadisələr adlanırlar. Məsələn, yuxarıda göstərdiyimiz *G, R* uyuşmayan hadisələrdir.

Əgər sınaq nəticəsində hadisələr qrupunun hər hansı biri mütləq baş verərsə, onda belə deyirlər ki, bu hadisələr tam qrup təşkil edirlər. Yenə də yuxarıda göstərdiyimiz G,R hadisələri tam qrup təşkil edirlər. Yuxaprıda ehtimalın klassik düsturunda işlətdiyimiz «hal» sözünə indi aydınlıq gətirə bilərik.

Hal-eyniimkanlı, cüt-cüt uyuşmayan və tam qrup əmələ gətirən hadisələrdir. Klassik düsturu yadda saxlamaq və onu başa düşmək üçün «ehtimal piroqundan» istifadə edirlər. Təsəvvür edək ki, piroq *n* bərabər sektora – hallara bölüşmüşdür, piroqun A hissəsi $m(A)$ belə sektorlardan-hallardan ibarətdir, onun payı $m(A/n)$-dir. Klassik düsturun köməyi ilə hər hadisənin ehtimalını tapmaq mümkün deyildir. Bu düstur yalnız o zaman tətbiq edilə bilər ki, sınağın nəticəsi qruplara-hallara bölünsün, xüsusən hallar eyniimkanlı olmalıdırlar. Bütün hallar eyniimkanlılıq sınağın simmetrikliyinin nəticəsidir. Yuxarıdakı göstərdiyimiz metal pulun və yaxud oyun zərinin atılmasında simmetriklik aydın görünür. Ona görə də metal pulu atarkən G və R hadisələri tam qrup təşkil edirlər və bu hadisələrin hər birinin ehtimalı ½-ə bərabərdir. Oyun zərini atdıqda isə e_i , $i=1,\cdots,6$ hadisələri tam qrup təşkil edirlər, ona görə də $p(l_i)=1/6$.

Misal 5. İki oyun zəri birlikdə atılır. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın: *a)* düşən xalların cəmi cütdür; *b)* düşən xalların hasili 20-dən çoxdur.

Həlli. Klassik düsturdan istifadə edək. Oyun zərlərindən birini qara, digərini ağ adlandıraq. Tutaq ki, A – «*a*»-dan olan hadisədir, B –«*b*» -dən olan hadisədir.

Əmin olaq ki, 36 hadisə $l_{ik} =$ «ağ zərdə *i* rəqəmi, qara zərdə *k* rəqəmi» eyniimkanlı, tam qrup əmələ gətirən hallardır. Ona görə də *p=36.* A hadisəsi 18 halda, B hadisəsi isə 6 halda baş verər.

$\{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$. Deməli,

$P=18/36=1/2$, $P(B)=1/6$.

4. Kombinatorikanın elementləri. Kombinatorika müxtəlif kombinasiyalarda ədədlərin hesablanması ilə məşğul olur. Bunlardan ehtimal nəzəriyyəsində ən çox tətbiqini tapanlar permitasion, aranjeman və kombinizondur.

Aranjeman n elementdən m nizamlanmış m elementdən seçilmiş dəstdir. n elementdən m aranjemanlarının sayını A_n^m - lə işarə edirlər və $A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1)$. Aranjemanlar elementlərinin tərkibinə və nizamlanmasına görə fərqlənirlər.

Verilmiş çoxluğun bütün elementlərindən nizamlı şəkildə seçilmiş yerdəyişmələrin sayına permitasyon deyilir və P_n – lə işarə edilir. $P_n = n! = n(n-1)\cdots$

Permuitasiyonlar öz tərkibləri ilə deyil, yalnız elementlərin nizamı ilə fərqlənirlər.

Kombinezon p sayda elementdən götürülmüş nizamlanmamış m sayda ədədlərin dəstidir. n elementdən götürülmüş m sayda elementdən ibarət kombinzonları C_n^m işarə edirlər.

$$C_n^m = A_n^m / P_m = n(n-1)\cdots(n-m+1)/m!.$$

Kombinzonlar elementlərinin tərkibinə görə fərqlənirlər.

Misal 6. 36 kartdan ibarət olan dəstdən üç kartı təsadüfən götürək. Götürdüyümüz kartları qırmızı kərpiç dama və iki tuz olması ehtimalı neçə olar?

Həlli. Axtarılan hadisəni A ilə işarə edək. Klassik düstura əsasən $P(A) = m(A)/n$, burada $m(A)$ – qırmızı kərpiç dama və iki tuzdan ibarət olan bütün üçlüklərin sayıdır, n - isə 36 kartdan düzələn bütün üçlüklərin sayıdır. Bütün kartlar açıq üzünə çevirib, qırmızı kərpiç damanı kənarə qoyaq. İndi ona iki tuzu əlavə etmək lazımdır. $C_4^2 = (4 \cdot 3)/2$ - sayda üsulla bunu etmək olar.

$n = C_{36}^3 = (36 \cdot 35 \cdot 34)/3!$. Beləliklə,

$$P(A) = \big((4 \cdot 3)/2\big)\big((36 \cdot 35 \cdot 34)/3!\big) = 1/1190.$$

MƏSƏLƏLƏR

1. Balıqçılar göldən 100 balıq tuturlar, onları halqalayıb geriyə suya buraxırlar. Sonrası gün onlar 120 balıq

tuturlar, onlardan 10-u halqalanmış olur. Göldə nə qədər balıq var? Balıqçı yalnız bir balıq tutsa onun halqalanmış olması ehtimalı nə qədər olar?

Həlli. Göldəki balıqların sayını x-ilə işarə edək. Onda 100/x və 10/120 kəsrləri təxminən bərabər olmalıdırlar. Deməli balıqların ümumi sayı təqribən 1200-dir. Axtarılan ehtimal isə təqribən 100/1200=1/12 olar.

2. 6 hərfdən M, A, Ş, İ, N, A ibarət çoxluqdan bir-birinin ardınca təsadüfən dörd hərf götürülür və bir-birinin yanına qoyulur.

a) ŞİNA və b) MAŞA sözlərinin alınması ehtimalını tapın.

Həlli. Klassik düsturdan istifadə edək. Tutaq ki, X - «a» hadisəsidir, Y-isə «b» hadisəsidir.

$n = A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. A hərfi iki olduğundan

$m(X) = 2,\ m(Y) = 2$ olar.

Onda $P(X) = 2/360 = 1/180$, $P(Y) = 1/180$.

3. Yeşikdə 10 standart və 3 standart olmayan detal var. Tokar iki detalı eyni zamanda götürür: a) götürülən detallardan birinin standart olmaması, b) hər ikisinin standart olmaması ehtimalını tapın.

Həlli. Yenə də klassik düsturu tətbiq edə bilərik. Tutaq ki, X -«a» hadisəsi, Y -isə «b» hadisəsidir. bunları hesablayaraq taparıq: $P(X) = \dfrac{c_{10}^1 \cdot c_3^1}{c_{13}^2}$, $P(Y) = \dfrac{c_3^2}{c_{13}^2}$. Bundan

$$P(X) = \frac{5}{143} \approx \frac{1}{30},\ P(Y) = \frac{5}{286}$$

4. Kibrit qutusunu ataq. Bu qutunun hazırlandığı fabrikin etiketkasını yuxarı düşməsi ehtimalını hesablamaq üçün klassik düsturu tətbiq etmək olarmı?

Cavab. Olmaz, belə ki, uyğun hallar qrupunu müəyyən etmək olmaz. Bu hallar eyniimkanlı deyillər. Axtarılan ehtimalı yalnız tezliklə ehtimalın əlaqəsindən istifadə edərək təqribi hesablamaq olar.

5. Aşağıdakıları hesablayın:

A_8^3 , A_7^3 , C_5^2 , C_8^3 , P_4 , P_6

6. Altı cildlik seçilmiş əsərlər təsadüfən düzülür. 1-ci və 2-ci cilidlərin a) yanaşı olması, b) onların arasında yalnız bir cildin olması ehtimallarını tapın.

7. Yeşikdə 20 eyni detallar var, onlardan 15-i bir nömrəli zavodda hazırlanıb, qalanları isə iki nömrəli zavodda hazırlanıb. Çilingər bir-birinin ardınca 3 detal götürür. Bu detalların: a) bir nömrəli zavodda, b) iki nömrəli zavodda hazırlanması ehtimalını tapın.

8. Meymun yeddi dəfə yazı maşınının dillərinə əlini vurur (sadəlik üçün fərz edək ki, yazı maşının klaviaturasında 33 kiril əlifbasının hərifləri və 10 rəqəm var) Aşağıdakı sözlərin yazılması ehtimalını tapın a) primatı, b) çelovek.

9. Konvertdə 8 kişi və 2 qadın şəkili var. Konvertdən 4 şəkil götürülür. Aşağıdakı ehtimalları tapın: a) götürülən şəkillərdən düz ikisi qadın şəkilidir; b) heç olmazsa biri qadın şəkilidir.

15.2. Ehtimala aksiomatik yanaşma

1. Hadisələr üzərində əməllər. Tutaq ki, A, B – hər hansı sınaqla əlaqədar ixtiyari hadisələrdir.

Yalnız və yalnız A hadisəsi baş verməyəndə baş verən hadisəyə A-nın qarşılıqlı hadisəsi deyilir və $\overline{A}$ -ilə işarə edilir.

A və B hadisələrinin cəmi elə hadisəyə deyilir ki, o, yalnız A hadisəsi və yaxud B hadisəsi və ya hər iki A, B hadisələri baş verdikdə baş verir. A və B hadisələrinin cəmini $A \cup B$ ilə işarə edilir. A və B hadisələrinin kəsişməsi ilə hadisəyə deyilir ki, o, yalnız hər iki hadisə başverdikdə baş verir. A və B hadisələrinin kəsişməsini $A \cap B$ kimi işarə edirlər.

Hadisələrin cəminə və kəsişməsinə verdiyimiz tərif təbii şəkildə istənilən sayda hadisələr dəstinə də aiddir. Asanlıqla görmək olar ki, verilmiş sınaqla əlaqədar olan hadisələr küllüsü qarşılıqlı hadisələrə, hadisələrin cəminə və kəsişməsinə nəzərən qapalıdırlar. Belə hadisələr küllüsü hadisələr fəzası və yaxud hadisələr cəbri adlanırlar və Ω ilə işarə olunurlar.

Sınaq nəticəsində heç vaxt baş verə bilməyən hadisələrə mümkün olmayan hadisələr deyilir. Mümkün olmayan hadisələri ø simvolu ilə işarə edirlər (boş çoxluğun simvolu ilə). Sınaq nəticəsində həmişə baş verən hadisəyə yəqin hadisə deyilir. Yəqin hadisəni U ilə işarə edirlər.

Misal 1. Metal pulun atılmasına baxaq. Hadisələr fəzası Ω dörd hadisədən ibarətdir: ø , U gerb üzünün düşməsi G və reşka üzünün düşməsi R. Qeyd edək ki, G və R hadisələri qarşılıqlıdır.

Misal 2. Oyun zərinin atılmasına baxaq. Hadisələr fəzası Ω, $2^6 = 64$ hadisədən ibarətdir: ø , U altı hadisə $l_i =$ «zərin yuxarı üzündə *i* rəqəminin olması» $i = 1, 2, ...,6$; D hadisəsi « cüt rəqəmin düşməsi» və N hadisəsi « tək rəqəmin düşməsi» və s. Qeyd edək ki, D, N hadisələri qarşılıqlı hadisələrdir.

Hadisələr fəzasına baxarkən bəzi hadisələri elementar adlandırmaq məqsədəuyğundur. Bu elə hadisələrdir ki, onlardan bizi maraqlandıran bütün hadisələri «tərtib» etmək olar. Misal 2-də belə altı hadisələr l_i, $i = 1, 2, ...,6$ elementar hadisələr idi. Elementar hadisələr çoxluğunu ω ilə işarə edirlər. İstənilən hadisələr elementar hadisələrdən ibarətdir və bu elementar hadisələrin uyğun alt çoxluğu kimi eyniləşdirilə bilər. Misal 2-də D hadisəsi $\{e_2\ , e_4\ , e_6\ ,\}$, N hadisəsi isə $N = \{e_1\ , e_3\ , e_5\ ,\}$ - dir.

Misal 3. İki oyun zərinin ağ və qara birlikdə atılması sınağına baxaq. Əmin olaq ki, 36 hadisə l_{ik}= « ağ zərdə i, qara zərdə k rəqəminin düşməsi» elementar hadisələrdir.

«Düşən xalların hasillərinin 20-dən çox olması» hadisəsi $(4,6)$, $(5,5)$, $(5,6)$, $(6,4)$, $(6,5)$, $(6,6)$ olar.

Hər bir hadisəni elementar hadisələrin alt çoxluğu ilə eyniləşdirmək, hadisələr üzərində əməllərə nəzəri-çoxluq traktovkası (izahı) verir. Belə ki, A hadisəsi ilə qarşılıqlı hadisə ω / A - tamamlanmasına uyğundur, A, B hadisələrinin cəmi $A \cup B$ alt çoxluğuna, A, B hadisələrinin kəsişməsi $A \cap B$ alt çoxluğuna uyğundur. Baxdığımız əməllərdən başqa hadisələr üzərində digər əməllər də aparmaq olar.

A və B hadisələrinin fərqi yalnız o zaman baş verir ki, A baş verir, B isə baş vermir. A və B hadisələrinin fərqini $A \setminus B$ kimi işarə edirlər.

Misal 4. Tutaq ki A, B, C hadisələri verilmişdir. $\setminus$, $\cup$, $\cap$ əməllərinin köməyi ilə aşağıdakı hadisələri yazın: a) yalnız A hadisəsi baş verib; b) A və B hadisələri baş verib, C hadisəsi isə baş verməyib; c) heç olmazsa bir hadisə baş verib.

Cavab: a) $A \setminus (B \cap C)$ və ya $(A \setminus B) \setminus C;$
b) $(A \cap B) \setminus C$, c) $A \cup B \cup C$

Hadisələr üzərində əməllərdən istifadə edərək əvvələr daxil etdiyimiz anlayışları baş şəkildə ifadə etmək olar. Məsələn, hadisələr qrupu o zaman tam qrup adlanır ki, ora daxil olan bütün hadisələrin cəmi yəqin hadisə olsun. A və B hadisələrinin kəsişməsi mümkün olmayan hadisə olarsa, onda A və B uyuşmayandır.

2. Ehtimala aksiomatik yanaşma. İndi praktikanın məqsədləri üçün kifayət olan ehtimalın ilkin tərifini vermək olar. Bu tərif nəzəriyyənin inkişafı üçün sonralar dəqiqləşdiriləcək.

Tərif. Ehtimal hər bir hadisəyə 0 -dan 1-ə qədər ədədi qarşı qoyan P funksiyasıdır, onun aşağıdakı xassələrini qeyd etmək olar.

Xassə 1. P(ø)=0, $P(U) = 1$

Xassə 2. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ burada nəzərdə tutulur ki, A və B uyuşmayan hadisələrdir.

Yada salaq ki, sınaq nəticəsində birlikdə baş verə bilməyən A, B hadisələri uyuşmayan adlanırlar. Məsələn, G, R (bax misal 1, b.1) hadisələri uyuşmayandır. 15.1 bölməsində b. 2-də göstərilmişdir ki, ehtimal sınaq nəticəsində hadisənin baş vermə imkanının ölçüsüdür. Ölçü dedikdə cisimin kütləsini, torpaq sahəsinin sahəsini, cisimin həcmini və s. başa düşülür. Hər bir ölçünün əsas xassəsi ondan ibarətdir ki, iki obyektin cəminin ölçüsü, onların ölçüləri cəminə bərabər olsun. Bu xassə additivlik adlanır. Qeyd edək ki, ölçülərdə olduğu kimi ehtimallarda da additivlik xassəsi çox vacibdir. İnduksiya ilə isbat etmək olar ki, istənilən sonlu sayda cüt-cüt uyuşmayan hadisələrin cəminin ehtimalı onların ehtimallarının cəminə bərabərdir. Bu xassə sonlu additivlik adlanır. Yoxlayaq ki, ehtimalın klassik düsturla tapılması yuxarıda daxil etdiyimiz tərifi ödəyir. Doğrudan da boş çoxluq ø heç bir halı əhatə etmir, ona görə də $m(\varnothing)=0$, deməli $P(\varnothing)=0$. U yəqin hadisəsi isə bütün halları əhatə edir, ona görə də $m(V)=n$ deməli $P(V)=1$.

Əgər A, B uyuşmayan hadisələrdirsə, onda $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$ deməli $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

Nəzəriyyəni inkişaf etdirmək üçün xassə 2-i daha güclü xassə 3-lə (hesabi additivlik) əvəz edirlər.

Xassə 3. Cüt-cüt uyuşmayan ixtiyari $A_1,\ \cdots,A_n,\cdots$ hadisələri üçün $P(A_1\cup\cdots\cup A_n\cup)=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+\cdots$

Əgər ehtimaldan hesabi additivlik tələb edilirsə, onda hadisələr fəzasından da tələb etmək lazımdır ki, cəm, kəsişmə əməllərinə görə hesabı hadisələr ailəsi qapalı olsun. Belə hadisələr fəzası σ - cəbri hadisələr adlanırlar.

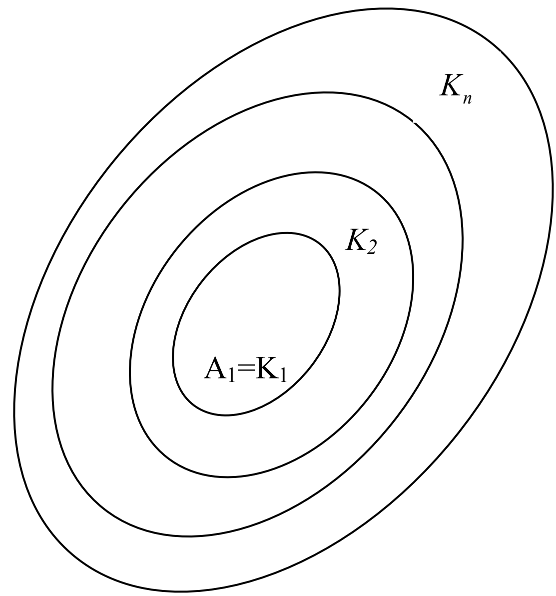
Hesabı additivlik xassəsi ehtimalın aşağıdakı xassəsinə ekvivalentdir.

Xassə 4. Əgər $\{A_n, n \in N\}$ hadisələrin genişlənən ardıcıllığıdırsa, yəni $A_n \subseteq A_{n+1}$ və $A = \cup \{A_n : n \in N\}$ onda $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P(A_n)$

İsbatı. Tutaq ki, $k_1 = A_1$ və $k_{n+1} = A_{n+1} \setminus A_n, n \in N$ onda $A = \cup \{k_n : n \in N\}$

(şəkil 1), nəzərdə tutulur ki, k_n, $n \in N$ cüt-cüt uyuşmayandır. Ehtimalın hesabı additivliyinə görə

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(K_n) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} P(K_i) \right) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$



Şəkil 1.

Ehtimalın tərifindən iki nəticəni çıxarmaq olar.

Nəticə 1. A hadisəsinin qarşılıqlı hadisəsinin ehtimalı $1 - P(A)$ - ya bərabər olar. Doğrudan da A və $\overline{A}$ uyuşmayan olduqlarından $P(A + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(U) = 1$ deməli $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Nəticə 2. İxtiyari iki A, B hadisələri üçün:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(Bu düstur cəmin genişlənmiş düsturu adlanır). Doğrudan da, $B = (B \setminus A) \cup (B \bigcap A)$ $(A \setminus B)$ və $(B \cap A)$ uyuşmayandırlar, onda $P(B)=P(B \setminus A)+P(B \cap A)$. $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus A)$. A və $(B \setminus A)$ hadisələri də uyuşmayandırlar, deməli $P(A \bigcup B)=P(A)+P(B \setminus A)$, bu düsturda $P(B \setminus A)= P(B)- P\,(A \bigcap B)$ yazsaq, nəticədə alarıq:

$$P(A \bigcup B)=P(A)+P(B)- P(A \bigcup B).$$

Misal 5. Aşağıdakı hadisələri ehtimallarının artan istiqamətində düzün. (A və B ixtiyari hadisələrdir): mümkün olmayan hadisə ø, yəqin hadisə U, A, $A \bigcup B$, $A \bigcap B$.

Cavab: ø, $A \bigcap B$, A, $A \bigcup B$, U.

3. Şərti ehtimal, hadisələrin asılı olması və asılı olmaması. *B* hadisəsinin baş verməsi şərti ilə hesablanmış A hadisəsinin ehtimalına onun *B* hadisəsinə nəzərən şərti ehtimalı deyilir və $P_B A$ kimi işarə edilir. Ehtimala aksiomatik yanaşmada şərti ehtimal $P_B A = P(A \bigcap B)/P(B)$ düsturu ilə hesablanır, burada $P(B) \neq 0$.

Misal 6. Oyun zərinin atılması sınağına baxaq. Tutaq ki, *D*= «cüt xalın düşməsi», *Q*= «4-dən kiçik rəqəmin düşməsi». Onda $P_D Q = 1/3$, $P_Q D = 1/3$. Şərti ehtimalın tərifini başqa şəkildə yazaq: $P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P_A(B)$. Bu ehtimalların vurma teoremidir (və ya düsturudur). Bu düstur sonrakı ümumiləşdirməyə də imkan yaradır:

$$P(A \bigcap B \bigcap C) = P(A) P_A B P_{A \cap B} C \quad \text{və s.}$$

Vurma düsturu bir sıra ehtimalları səmərəli hesablamaq üçün istifadə edilə bilər.

Misal 7. Qutuda 3 ağ, 3 qara və 3 sarı rəngli kürəcik var. Qutudan 3 kürəcik götürülür. Aşağıdakı hadisələrin ehtimallarını tapın: a) hər üç kürəcik eyni rənglidir; b) hər üç kürəcik müxtəlif rənglidir.

Həlli. Kürəciklər qutudan bir-birinin ardınca kiçik vaxt intervalları ilə götürülür. «a» hadisəsi üçün birinci kürəcik istənilən rəngli ola bilər, lakin ikinci kürəcik birinci ilə eyni rəngli olmalıdır və bunun ehtimalı 2/8–ə bərabər olar; üçüncü kürəcik də həmin rəngli olmalıdır və onun ehtimalı 1/7 olar. Ehtimalların vurma düsturuna əsasən alarıq: $P = 1\cdot(2/8)(1/7)$ Analoji qayda ilə «b» hadisəsi üçün alarıq: $P = 1\cdot(6/8)\cdot(3/7) = 9/28.$

Hadisələrin asılı olması və asılı olmamaması ehtimal nəzəriyyəsində mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Əgər A hadisəsinin ehtimalı onun *B* hadisəsinə görə şərti ehtimalına bərabər olarsa (bərabər olmazsa), onda A hadisəsi *B* hadisəsindən asılı olmayan (asılı) adlanır, yəni $P(A) = P_A(B)$ (uyğun olaraq $P(A) \neq P_B(A)$). İsbat edək ki, hadisələrin asılı olması və ya asılı olmaması qarşılıqlıdır, yəni əgər *B* hadisəsi A-dan asılı deyilsə, onda A-da B-dən asılı deyil. Tutaq ki, B A - dan asılı deyil, yəni $P_A(B) = P(B)$, onda ehtimalların vurma teoreminə əsasən:

$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B) = P(A)\cdot P(B).$ $P(A\cap B) = P(B)\cdot P_B(A)$.

Deməli, , $P(A) = P_B(A)$ yəni A hadisəsi B-dən asılı deyil. (Burada qəbul olunub ki, $P_A(B)$ və $P(B)$ sıfıra bərabər deyil).

Eyni zamanda isbat olundu ki, A və B hadisələrinin asılı olmaması aşağıdakı düsturun doğruluğu ilə ekvivalentdir: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. Bu səbəbdən də həmin düsturun yerinə yetirilməsini A və B hadisələrinin asılı olmamasının tərifi kimi götürmək olar. Çox hallarda hadisələrin asılı olması və ya asılı olmaması onların fiziki asılı olmamalarının nəticəsi kimi qiymətləndirilir. Aşağıdakı misala baxaq.

Misal 8. Texniki nəzarət şöbəsi məmulatların standartlığını yoxlayır. Məmulatın standart olması ehtimalı 0,9-a bərabərdir. Yoxlanılan iki məmulatdan a) yalnız bir standart; b) hər ikisi standart olması ehtimalını tapın.

Həlli. Tutaq ki, C_1= «birinci məmulat standartdır», , C_2= «ikinci məmulat standartdır». Fərz edək ki, A – «a»-hadisəsi. B isə «b» hadisəsidir.

Onda $A = (C_1 \cap \overline{C_2}) \bigcup (\overline{C}_1 \cap C_2)$ belə ki, $(C_1 \cap \overline{C_2})$ və $(\overline{C}_1 \cap C_2)$ hadisələri uyuşmayandır. Bundan əlavə aydındır ki, C_1 və C_2 asılı olmayandır. İsbat etmək olar ki, C_1 və $\overline{C}_1$, $\overline{C}_1$ və C_2 hadisələri asılı deyillər.

Deyilənləri yekunlaşdırsaq alarıq:

$$P(A) = P(C_1 \cap \overline{C}_2) + P(\overline{C}_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot (1 - P(C_2)) +$$
$$+ (1 - P(C_1)) \cdot P(C_2) = 2 \cdot (0{,}9 \cdot 0{,}1) = 0{,}18$$

MƏSƏLƏLƏR

1. Verilib $P(A) = 0{,}6;\ P(A \cup B) = 0{,}8;\ P(A \cap B) = 0{,}5$. Tapın: $P(B),\ P_A(B)$; A və B hadisələrinin asılı olub - olmadığını aydınlaşdırın.

Həlli. 2.3 bəndindəki düsturdan istifadə edək. Toplamanın genişlənmiş düsturuna əsasən alarıq:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Deməli, $P(B) = 0{,}8 + 0{,}5 - 0{,}6 = 0{,}7$. Şərti ehtimal düsturuna görə: $P_A(B) = P(A \cup B)/P(A)$. Analoji olaraq taparıq ki,

$$P_B(A) = 5/7.$$

$$P(A \cap B) = 0{,}5,\ P(A) \cdot P(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$$

olduğundan $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B);.$

Beləliklə, alırıq ki, A və B asılıdır.

2. Verilib: $P(A)>0{,}5;\ P(B)>0{,}8$. Bu şərtləri ödəyən A və B hadisələri:

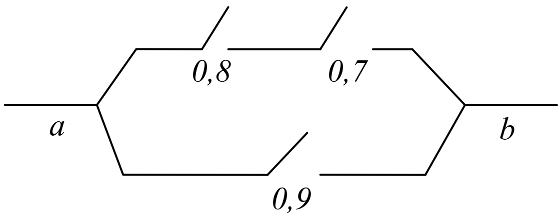
a) uyuşmayan olsunlar, b) bir-birini qarşılıqlı tamamlasınlar, $P(A\cap B)>0{,}2$ ola bilərmi?

Həlli: Fərz edək ki, *A* və B uyuşmayandır,

Onda, $A\cup B$-nin ehtimalı $P(A\cup B)=P(A)+P(B)>1{,}3>1$ olardı ki, bu da mümkün deyil. Deməli A və B bir-birini qarşılıqlı tamamlaya bilməzlər, belə ki, bir-birini qarşılıqlı tamamlayan hadisələr uyuşmayan olmalıdırlar. Toplamanın genişlənmiş düsturundan istifadə etsək alarıq:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)>$$
$$>1{,}3-P(A\cup B)>1{,}3-1>0{,}3$$

3. Sxemdə (şəkil 2) hər relenin yanında cərəyan verildikdə qapanmasının ehtimalı göstərilmişdir. Relelər bir-birindən asılı olmayaraq işləyirlər. Bütün relelərə cəryan verildikdə ab zəncirinin qapanması ehtimalını tapın.



Şəkil 2.

Həlli. Tutaq ki, C, D, E – uyğun relelərin öz sahəsində qapanmasıdır, onda P(C)=0,8; P(D)=0,7; P(E)=0,9. Tutaq ki, *X* – *ab* zəncirinin qapanmasıdır, onda $X=(C\cap D)\cup E$. Toplamanın genişlənmiş düsturuna əsasən alarıq: $P(X)=P(C\cap D)+P(E)-P((C\cap D)\cap E)$. Relelərin asılı olmamasından istifadə edək. $P((C\cap D)\cap E)=P(C)\cdot P(D)\cdot P(E)$ yuxarıdakıları nəzərə alsaq, nəticədə P(X)=0,8 · 0,7 + 0,9 – 0,8 · 0,9 · 0,7 = 0,9 + 0,56 · 0,1 = 0,956 olduğunu müəyyən edə bilərik.

4. İsbat edin ki, əgər A və B asılı olmayan hadisələrdirsə, onda A və $\overline{B}$; $\overline{A}$ və B cütlükləri də asılı olmayandır.

Həlli:

$$P(A\cap \overline{B}) = P(A) - P(A\cap B) = P(A) - P(A)\cdot P(B) =$$
$$= P(A)\cdot(1-P(B)) = P(A)\cdot P(\overline{B})$$

5. İki futbolçu meydançanın ortasından növbə ilə qapıya girənə qədər zərbə vururlar. Birinci oyunçunun sərrastlıq ehtimalı 0,5 ikincininki isə 0,4 – dür. Bürinci oyunçunun ilk olaraq sərrast zərbə vurması ehtimalını tapın.

Həlli. Birinci oyunçunun ilk sərrast zərbə vurmasına A ilə işarə edək. Onda, $A = A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k\cup\ldots$ burada A_k – birinci oyunçunun *k* – cı zərbəsinin qapıya girməsidir, ona qədər isə hər iki oyunçu qapıya girən zərbə vura bilməyib.

Asanlıqla görmək olar ki, $P(A_k) = (0{,}5\cdot 0{,}6)^{k-1}\cdot 0{,}5$. A_k – hadisələri cüt–cüt uyuşmayan olduqlarından, $k\in N$ alarıq: $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty}(0{,}5\cdot 0{,}6)^{k-1}\cdot 0{,}5$, bu isə sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmidir, ortaq vuruq (0,5 · 0,6) = 0,3 olduğundan axtarılan ehtimal 0,5 / (1-0,3) = 5/7 olar .

6. Aşağıdakı hadisələri ehtimallarının azalması istiqamətində düzün:

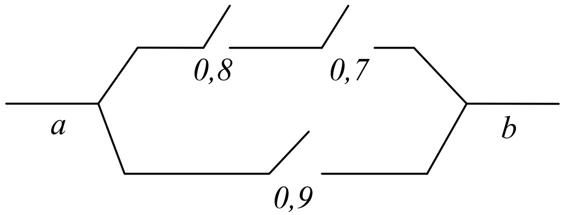
$A\cap B\cap C, A\cap C, A\cup B\cup C, B\cup C, B\cup(C\cap A)$ (A,B,C – ixtiyari hadisələrdir).

7. Verilmişdir: $P(A) = 0{,}8;\ P(A\cap B) = 0{,}5;\ P_B(A) = 0{,}5.$

Tapın:

$P(B),\ P_A(B), P(A \cup B)$. A və B hadisələrinin asılılığını yoxlayın.

8. Aşağıdakı sxemdə (şəkil 3) hər bir relenin yanında cərəyan verilərkən relenin öz sahəsində açılması ehtimalı verilmişdir. Relelər biri-birindən asılı olmayaraq işləyirlər. a - b – zəncirində cərəyan verilərkən relenin açılması ehtimalını tapın.



Şəkil 3.

9. Altı *M,A,Ş,İ,N,A* həriflərindən təsadüfi dördü bir -birinin ardınca götürülür və yan-yana qoyulur. *a) ŞİNA, b) MAŞA* sözünün alınması ehtimalını tapın. Ehtimalların vurma düsturundan istifadə edərək bu məsələni həll edin.

10. Binada bir-birindən asılı olmayaraq işləyən üç eyni lift var. Bir sutkada heç olmazsa bir liftin xarab olması ehtimalı 0,2-yə bərabərdir. Bir sutka ərzində 3-cü liftin xarab olması ehtimalını tapın.

11. (Banax məsələsi) Bir qutu kibrit islandığından onun alışması ehtimalı 0,5-ə bərabərdir. Dostlar növbə ilə kibriti yandırmaq istəyirlər. İlk dəfə birinci dostun kibriti yandırması ehtimalı necə olar?

15.3. Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas düsturları

1.Tam ehtimal düsturu. Bəzən sınaq apararkən müəyyən fərziyyələr irəli sürülür ki, sınaq nisbətən sadə keçsin. Belə fərziyyələrə *hipotezlər* də deyilir. Tutaq ki, *A* hadisəsinə baxılır və *A* hadisəsi cüt-cüt uyuşmayan $H_1,...,H_n$, hadisələri ilə birlikdə baş verə bilər.

Onda $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$

Bu düstur *tam ehtimal düsturu* adlanır.

Misal 1. Sexdə üç qrup dəzgahlar eyni detal istehsal edirlər. Onların məhsuldarlığı eynidir, lakin iş keyfiyyətləri müxtəlifdir. Məlumdur ki, birinci qrup dəzgahlar 3% , ikincilər–5%, üçüncülər 4% zay məhsul verir.Sexdə istehsal olunan bütün məhsullar növlərə ayrılmamış şəkildə anbara yığılıb. Əgər birinci qrup dəzgahlar 5, ikinci qrup 4 və üçüncü qrup 3 olarsa, onda təsadüfən götürülmüş bir detalın zay olması ehtimalını tapın.

Həlli. Üç fərziyyə mümkündür: H_1- detal birinci qrup dəzgahlarda, H_2 – ikinci qrup dəzgahlarda, H_3-3-ci qrup dəzgahlarda istehsal olunub. Götürülən detalın zay olması hadisəsini A ilə işarə edək, onda tam ehtimal düsturuna əsasən alarıq:

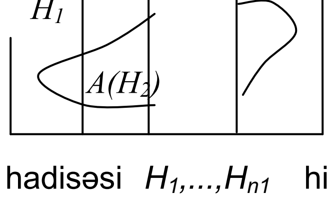
$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A).$$

$$P(H_1)=5/12,\ P(H_2)=4/12,\ P(H_3)=3/12.$$

Bu qiymətləri düsturda yerinə yazsaq,alarıq:

$$P(A)=47/1200\approx 1/26.$$

Tam ehtimal düsturunu isbat edək, (qrafik təsvir üçün şəkildə baxın)



Şərtə görə *A* hadisəsi $H_1,...,H_{n1}$ hipotezləri ilə birlikdə baş verdiyindən alarıq ki, $A\le H_1\cup...\cup H_n$. Onda

$A=(A\cap H_1)\cup...\cup(A\cap H_n)$ və $(A\cap H_1),...,(A\cap H_n)$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olduqlarından deməli,

$$P(A)=P(A\cap H_1)+...+P(A\cap H_n)\ .$$

Ehtimalların vurma düsturuna əsasən alarıq $P(A\cap H_i)=P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),\ i=1,...,n$. Beləliklə,

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+...+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)..$$

2. Beyes düsturu. Beyes düsturlarını başa düşmək üçün misala baxaq.

Məsələ 2. Sexdə ikinci növbədə işləyənlər, birinci növbədə işləyənlərdən iki dəfə az məmulat istehsal edirlər, zay məhsulları isə 1,5 dəfə çox olur. Hər iki növbədə istehsal olunan detallar növlərə ayrılmadan bir yerə yığılır. Təsadüfən götürülmüş bir detal qeyri-standart olur. Bu detalın ikinci növbədə hazırlanması ehtimalına tapın.

Həlli. Bu məsələni hələlik heç bir hazır düstur olmadan həll edək. Tutaq ki, ikinci növbədə n sayda detal hazırlanır, onda birinci növbədə 2n sayda detal hazırlanar. Fərz edək ki, birinci növbədə r% zay məhsul istehsal olunur, onda ikinci növbədə -1,5 r% zay məhsul olar.

Beləliklə bütün zay məhsullar *(2nr+1,5r)/100* olar. İkinci növbədə burada payı *1,5nr/(2nr+1,5nr)=1,5/3,5=3/7* olar. İndi isə Beyes düsturlarını çıxaraq və bu məsələni həmin düsturun köməyi ilə yenidən həll edək.

Aşağıdakı işarələri qəbul edək : H_1= «detal birinci növbədə istehsal olunub», H_2 = «detal ikinci növbədə istehsal olunub». Burada $P(H_1)=2/3$, $P(H_2)=1/3$. Bu ehtimallara *aprior (sınağa qədər) ehtimallar* deyilir. Bir detal götürək, biləndə ki, bu detal zaydır, demək hər hansı bir hadisə baş verib, bu hadisəni A ilə işarə edək. Belə çıxır ki, detalı bütün detallar içərisindən deyil, hər hansı alt çoxluqdan (bu halda zay detallar içərisindən) götürülüb. Belə bir sual meydana çıxır: götürülmüş zay detal hansı növbədə hazırlanıb, «birinci növbədə – H, hadisəsi», «ikinci növbədə – H_2 hadisəsi». Burada söhbət artıq şərti ehtimaldan gedir: *$P_A(H_2)$* və ya *$P_A(H_2)$*. Bu ehtimallara aposterior *(sınaqdan sonrakı) ehtimallar* deyilir. Şərt ehtimal düsturuna əsasən alarıq: $P_A(H_2)=\frac{P(A\cap H_2)}{P(A)}$. Ehtimalları vurma düsturuna görə taparıq:

$P(A\cap H_2)=P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)$; tam ehtimal düsturuna görə taparıq: $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)$. Bu qiyməti yerinə yazsaq, yekunda Bayes düsturlarını alarıq: $P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{\left(P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)\right)}$ – İki hipotez üçün.

Ümumi halda *n* – hipotez üçün Bayes düsturları aşağıdakı kimi olar:

$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n}P(H_k)\cdot P_{H_k}(A)\right)}$. İndi bu düsturu 2 misalına tətbiq edək. $P_{H_2}(A)=\left(\frac{3}{2}\right)\cdot P_{H_1}(A)$. Bu qiyməti Bayes düsturunda yerinə yazsaq alarıq:

$$P_A(H_2)=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot P_{H_1}(A)}{\left(\left(\frac{2}{3}\right)\cdot P_{H_1}(A)+\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\cdot P_{H_1}(A)\right)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{7}.$$

3. Bernulli düsturu. Bernulli düsturu əsasən aşağıdakı məsələlərin həllində istifadə olunur. Tutaq ki, *A* hadisəsi sınaq nəticəsində *P* ehtimalla baş verir. Bir-birindən asılı olmayan, eyni şəraitdə *n* sayda sınaq aparaq. Bu sınaqlarda *A* hadisəsinin k sınaqda, yəni k dəfə baş verməsinin ehtimalı $P_n k$ ilə işarə edək, onda yuxarıdakı suala Bernulli düsturu cavab verir: $P_n\,k = C_n^k p^k q^{n-k}$, burada $C_n^k - n$ elementdən k sayda kombinizonların sayı, $q=1-p$.

Misal 3. Bankın hər beşinci müştərisi faizlərini almaq üçün banka gəlir. Bankda indi altı nəfər xidmət üçün öz növbəsini gözləyir. Onlardan a) yalnız iki nəfərin; b) heç olmazsa bir nəfərin faizini alması ehtimalını tapın.

Həlli. «Növbədə duran müştəri öz faizini alacaq» – hadisəsini A ilə işarə edək, onda P=1/5, q=4/5. n = 6. «a»-nın cavabı P_6^2 –nin, «b»-nin cavabı isə $P_6(>0)$- n tapılmasıdır.

$$P_6\,2 = C_6^2(1/5)\cdot(4/5)^4 = 1/4$$

«b»-nin cavabı isə $1-P_6\,0 = 1-(4/5)^6 = 3/4$

İndi isə Bernulli düsturunu çıxaraq. Hər şeydən əvvəl hesab edəcəyik ki, *n* sınaqdan ibarət seriya bir mürəkkəb təcrübədir və bizi maraqlandıran odur ki, *A* hadisəsi ilə baş verəcək, yəni seriyanın müəyyən sınaqlarında o baş verəcək və müəyyən sınaqlarında baş verməyəcək. «Seriyalarda A hadisəsi k dəfə baş verdi» -hadisəsini *K* ilə işarə edək. *P(K)=?* Tutaq ki, *N={1,…,n}* və K onun k elementdən ibarət alt çoxluğudur. Fərz edək ki, sınaqlarda K – dan olan nömrələrdə *A* hadisəsi baş verir, digər sınaqlarda isə baş vermir. Bu mürəkkəb hadisəni A(K) ilə işarə edək, onun ehtimalını isə P(K) ilə işarə edək. Seriyanın sınaqları eyni şəraitdə və asılı olmayaraq keçirildiyindən $P(K) = p^k q^{n-k}$ olar. Qeyd edək ki, $K_1 \neq K_2$ oludqda mürəkkəb *A(K₁), A(K₂)* hadisələri uyuşmayan hadisələr olar. Bundan əlavə aydındır ki, $K = \cup\{A(K) : K \subset N, |K| = k\}$. Bu düsturda toplananlar uyuşmayan və eyni ehtimalı olan hadisələrdir, deməli $P(K) = Lp^k q^{n-k}$, burada *L* – toplananların sayıdır. Aydındır ki, toplananların saya *n* elementdən *k* sayda kombinezonların sayına bərabər olar. Deməli, axtarılan ehtimal $P_n k = C_n^k p^k q^{n-k}$ olar.

4. Kredit riski və onun azalması üsulları. Bankın mühüm sahələrindən biri kredit şöbəsidir. Kredit verərkən həmişə qorxu var ki, müştəri krediti qaytarmasın. Əlbəttə, sivil ölkələrdə kredit qaytarılmadıqda məhkəməyə müraciət edirlər, lakin çox hallarda banklar buna getmirlər. Kreditin qaytarılmaması əlbəttə, bankın bilavasitə itgisidir, bu işçilərin əmək haqqına təsir edir, hətta bankın müflis olmasına səbəb ola bilər. Bu səbəbdən də kreditin qaytarılmamasının qarşısını almaq, onun riskini azaltmaq kredit şöbəsinin vacib məsələlərindən biridir. Kreditin qaytarılması riskini azaltmaq üçün hansı üsullar mövcuddur?

Birinci, şöbə daima verilmiş kredit və onun qaytarılması haqqında informasiyanı sistemləşdirib, ümumiləşdirməlidir. Müştərilərin təsnifatı yaradılmalıdır (fiziki şəxs, dövlət orqanları, müəssisələr, başqa banklar və s.).

İkinci, şöbə (bütövlükdə bank) öz müştərilərinin kredit tarixini yaratmalıdır, o cümlədən potensial müştərilərinin (müştəri nə vaxt, harada, hansı krediti götürüb və onu necə qaytarıb). Hələlik bizdə bu məsələ çox pis təşkil olunub, çox müştərilərin kredit tarixi yoxdur. Bundan əlavə müştəri bankdırsa, onun krediti qaytarması onun balansının təhlili ilə qiymətləndirilir, əgər müəssisədirsə – onun planı, texniki səviyyəsi, inkişaf perspektivi ilə qiymətləndirilir.

Üçüncü, krediti təmin etmək üçün müxtəlif üsullar var, məsələn, müştəri girov qoyur və əgər krediti qaytarmırsa, onda bank girovun sahibinə çevrilir.

Dördüncü, bankda kreditin verilməsi üçün dəqiq təlimat olmalıdır (kimə hansı krediti vermək olar və hansı müddətə).

Beşinci, kreditin verilməsi haqqında dəqiq vəzifə bölgüsü olmalıdır. Məsələn, deyək ki, şöbənin adi işçisi 1000 dollardan çox olmayan kredit verə bilər, 10000 dollara qədər krediti şöbə müdüri verə bilər, 10000 dollardan 100000 dollara qədər krediti maliyyə üzrə vitse-prezident verə bilər, 100000 dollardan yuxarı krediti isə yalnız direktorlar şurası verə bilər.

Altıncı, qorxulu və həddindən böyük krediti vermək üçün bir neçə bank birləşir və belə krediti birlikdə verir.

Yeddinci, kreditlərin qaytarılmamasını sığorta edən sığorta şirkətləri mövcuddur (belə bir nöqteyi-nəzərdə var ki, kreditlərin qaytarılmaması sığortaya düşmür, bu artıq bankın öz riskidir).

Səkkizinci, kreditlərin verilməsi haqqında xarici məhdudiyyət mövcuddur (məsələn Mərkəzi bank tərəfindən təsdiq edilmiş), deyək ki, bir müştəriyə çox böyük kreditin verilməməsi haqqında və s.

Misal 4. Bankda kredit sorğularının statistikası belədir: 10%-dövlət orqanları,30%-başqa banklar, qalanları fiziki həxslərdir. Götürülən kreditlərinin qayıtmaması ehtimala uyğun olaraq belədir: 0,01;0,05 və 0,2. Növbəti kredit muraciətinin qaytarılmaması ehtimalını tapın. Bu kreditin hər hansı bank tərəfindən qaytarılmaması ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. Qaytarılmama ehtimalını tam ehtimal düsturu ilə tapaq. Tutaq ki, H_1-sorğu dövlət orqanları tərəfindən daxil olma, H_2-bank tərəfindən, H_3-fiziki şəxsdən və A - baxılan kreditin qaytarılmamasıdır. Onda

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(A) =$$
$$= 0{,}1\cdot 0{,}01 + 0{,}3\cdot 0{,}05 + 0{,}6\cdot 0{,}2 = 0{,}136 .$$

İkinci ehtimalı Bayes düsturu ilə tapaq:

$$P_A(H_2) = P(H_2)\times\frac{P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}015}{0{,}136} = \frac{1}{9} .$$

MƏSƏLƏLƏR

1. Bankın altı şöbəsi var. Bir-birindən asılı olmayaraq hər bir şöbə 0,2 ehtimalla səhərisi gün böyük məbləğdə pul sifariş verə bilərlər. İş gününün axırında vitse-prezidentlərdən biri daxil olan sifarişlərlə tanış olur. Aşağıdakı ehtimalları tapın: a) iki sifariş olub; b) heç olmasa bir sifariş olub. Əgər iki sifariş varsa, birinci şöbədən sifariş olmasının ehtimalı necə olar?

Həlli. Bu məsələni Bernulli düsturunun köməyi ilə həll etmək lazımdır. Yalnız axırıncı ehtimalın tapılması üzərində dayanaq. Bu $P_A(B)$ şərti ehtimaldır, burada A=«iki sifariş daxil olub», B=«sifariş birinci şöbədən daxil olub». Şərti ehtimal düsturuna əsasən alarıq:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot c_5^1 (0{,}2)^1 \cdot (0{,}8)^4}{\left(c_5^2 (0{,}2)^2 \cdot (0{,}8)^4\right)} = \frac{1}{3}$$

2. Bir partiya qarpızdan 80%-i yetişmiş, qalanları isə yetişməmişdir. Təsadüfən 4 qarpız götürülür. Onların içində: a) 3-dən az olmamaqla yetişənlərin; b) hamısı yetişmiş deyildir hadisələrinin ehtimallarını tapın.

3. İxtisaslaşdırılmış xəstəxanaya orta hesabla 70% *K*-xəstəliyi ilə, qalanları isə *M* xəstəliyi ilə daxil olurlar.

K xəstəliyinin tam sağalması ehtimalı 0,8-ə, *M* xəstəliyininki, isə 0,9-a bərabərdir. Xəstəxanaya daxil olan xəstə oranı sağlam tərk edir. Həmin xəstənin *K* xəstəliyi ilə xəstəxanaya daxil olması ehtimalını tapın.

Mövzu 16.
TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR VƏ ONLARIN XARAKTERİSTİKALARI

16.1. Diskret təsadüfi kəmiyyətlər və onların xarakteristikaları

1. Diskret təsadüfi kəmiyyətlər. Sınaq nəticəsində əvvəldən məlum olmayan ədədi qiymət alan kəmiyyətə təsadüfi kəmiyyət deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlər onun mümkün qiymətlər çoxluğunu təşkil edirlər. Beləliklə, təsadüfi kəmiyyətin hansı konkret qiymət alacağını demək olmasa da, bu qiymətin mümkün qiymətlər çoxluğundan olması aydındır və bu qiymətlər çoxluğu yaxşı məlum ola bilər.

Misal 1. Tutaq ki, oyun zərini atdıqda düşən xalın sayı Y -dir. Onda Y təsadüfi kəmiyyətdir və onun mümkün qiymətləri {1,2,3,4,5,6} olar. Əgər təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri hesabı olarsa, yəni mümkün qiymətləri $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ təbii ədədlər ilə nömrələmək olarsa, onda təsadüfi kəmiyyət diskret adlanır. Məsələn, misal 1-də Y təsadüfi kəmiyyəti diskretdir. Diskret təsadüfi kəmiyyət öz paylanma sırası ilə tam verilmiş olur. Paylanma sırası – iki sətirdən ibarət cədvəldir; birinci sətirdə təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri, ikinci sətirdə isə bu qiymətlərə uyğun ehtimallar yazılır.

Misal 2. Misal 1-dəki təsadüfi Y kəmiyyəti aşağıdakı paylanma sırasına malikdir:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Ümumi şəkildə diskret X təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırası aşağıdakı şəkildə olar:
burada $P_i = P(X = x_i)$

x_i	….	x_i	….
p_i	….	p_i	….

Paylanma sırası təsadüfi kəmiyyət haqqında tam informasiya verir.

Paylanma sırasını bilərək, müxtəlif ehtimalların necə tapılmasını göstərək. X - in mümkün qiymətlə çoxluğunu W ilə işarə edək. Qeyd edək ki, əgər a , b X-in müxtəlif qiymətləridirsə, onda $X=a$ və $X=b$ hadisələri uyuşmayan olar. X diskret təsadüfi kəmiyyət olduğundan W – hesabı çoxluqdur. Tutaq ki, V–W-nin hər hansı alt çoxluğudur, onda $(X \in V) = \bigcup\{X = f : f \in V\}$. $X = f,\ f \in V$ hadisələri cüt-cüt uyuşmayan olduqlarından, ehtimalın hesabı additivliyindən istifadə edərək (bax.15.2 b. 2) alarıq:

$$P(X \in V) = \sum_{f \in V} P(X = f)$$

Misal 3. İki oyun zərinin birlikdə atılmasına baxaq. Tutaq ki, Z-düşən xallarn cəmidir. Onda Z diskret təsadüfi kəmiyyətdir və onun paylanma sırası aşağıdakı kimi olar:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Aşağıdakı ehtimalları tapaq:

$$P(Z < 5), \qquad P(Z > 10), \qquad P(3 < Z < 7).$$

$$P(Z < 5) = P(Z = 2) + P(Z = 3) + P(Z = 4) = 1/36 + 2/36 + 3/36 = 1/6;$$

$$P(Z > 10) = P(Z = 11) + P(Z = 12) = 2/36 + 1/36 + 3/36 = 1/12;$$

$$P(3 < Z < 7) = P(Z = 4) + P(Z = 5) + P(Z = 6) = 1/3.$$

Qeyd edək ki, paylanma sırasındakı bütün ehtimalların cəmi vahidə bərabərdir. Döğrudan da, sınaq apararkən

X təsadüfi kəmiyyəti *W* – çoxluğundan hər hansı bir qiyməti alar, $(X \in W)$ yəqin olduğundan

$P(X \in W) = 1. \quad P(X \in W) = \sum_{f \in w} P(x = f) = 1$ olar.

2. Riyazi gözləmə və onun xassələri. Paylanma sırası diskret təsadüfi kəmiyyəti tam təsvir edir. Lakin çox hallarda təsadüfi kəmiyyət haqqında onun ümumi xarateristikalarını bilmək tələb olunur. Belə xarakteristikalardan ən mühümü riyazi gözləmə və dispersiyadır. Tutaq ki, X mümkün qiymətlər çoxluğu W olan və aşağıdakı paylanma sırası ilə verilmiş diskret təsadüfi kəmiyyətdir;

x_i	….	x_i	….
p_i	….	p_i	….

$\sum_{x_i \in W} x_i p_i$ sırasının cəminə (bu sıranın mütləq yığılması şərti ilə) *x*-in *riyazi gözləməsi* deyilir. Riyazi gözləməni $M[X]$ və ya m_x ilə işarə edirlər.

Misal 4. Təsadüfi Z kəmiyyətinin–iki oyun zərini birlikdə atdıqda düşən xalların cəminin riyazi gözləməsini tapaq.

$M[Z] = 2 \cdot (1/36) + 3 \cdot (2/36) + 4(3/36) + 5(4/36) + \cdots + 12 \cdot (1/36) = 7$

Aşağıdakı teorem riyazi gözləmənin rolunu aydınlaşdırır.

***Teorem.* Uzun seriyalı sınaqlarda təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi qiymətlərin ədədi ortası, təqribi onun riyazi gözləməsinə bərabərdir.**

Bu, keyfiyyətcə düzgün, lakin ifadə etmək baxımından ədədi orta ilə riyazi gözləmə arasında təqribi əlaqədir. Bu əlaqə sonralar daha dəqiq ifadə olunacaq (bax Çebışev teoreminə bölmə 17.1 b. 2) Tutaq ki, n sayda sınaq aparılıb və bu sınaqlarda X təsadüfi kəmiyyəti $a_1, \cdots, a_n$

qiymətlərini alıb, onda bu qiymətlərin ədədi ortası $S=(a_1+\cdots+a_n)/n$. Bu qiymətləri qruplaşdıraq – tutaq ki, *X* l_1 dəfə x_1 qiymətini, l_2 dəfə x_2 qiymətini alıb və s. onda $S=(x_1l_1+\cdots+x_ml_m)/n=x_1l_1/n+\cdots+x_ml_m/n$. Hər bir l_i/n kəsiri keçirilən sınaqlarda x_i -qiymətinin alınmasının tezliyidir və bu tezlik təqribən uyğun p_i ehtimalına bərabərdir. Beləliklə alarıq ki, $S=x_1p_1+\cdots+x_mp_m=M[x]$.

Riyazi gözləmənin xassələri.

1) Sabit kəmiyyətin riyazi gözləməsi özünə bərabər olar.

C sabitinin paylanma sırası belədir: $\left|\frac{c}{1}\right|$. C uyğun olaraq $M[C]=C\cdot 1=C$

2) İki təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir

İsbatı: Tutaq ki, x, y-iki diskret təsadüfi kəmiyyətlərdir, onda

$$P[x,\ y]=\sum_c cp(x+y-c)=\sum_{a,b}(a+b)P(x=a,\ y=b)$$

Əgər bu ikiqat cəmdə toplananları başqa cür qruplaşdırsaq alarıq:

$$\sum_{a,b}(a+b)p(X=a,\ Y=b)=\sum_a\sum_b ap(x=a,\ y=b)+\sum_{a,b}bp(x=a,\ y=b)=$$

$$=\sum_a\sum_b ap(x=a,\ y=b)+\cdots\sum_a a\sum_b p(x=a,\ y=b)+\cdots$$

$\sum_b p(x=a,\ y=b)=p(x=a)$ olduğundan alarıq:

$$\sum_a ap(x=a)+\sum bp(\ y=b)=M(X)+M(Y)$$

3) Təsadüfi kəmiyyətə sabit əlavə etsək, onun riyazi gözləməsi həmin sabit qədər artar.

Bu xassə daha ümumi xassənin (bax xassə 2) nəticəsidir.

4) Sonlu sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin riyazi gözləməsi onlrın riyazi gözləmələri. Cəminə bərabər olar. Xassə 2-dən riyazi induksiya üsulu ilə isbat olunur.

5) Təsadüfi kəmiyyəti sabitə vurduqda, onun riyazi gözləməsi həmin sabit dəfə artar.

$$M[kX] = \sum_a kaP(x = a) = k\sum aP(X = a) = kM[X]$$

6) Əgər $A \le X \le B$ olarsa, onda $A \le M[X] \le B$ olar.

Doğrudan da, $M[X] = \sum_a ap(X = a)$, bütün ehtimallar mənfi olmadığından, onda $M[X] = B\sum_a p(X = a) = B \cdot 1 = B.$

Analoji olaraq $M[X] \ge A$ alarıq.

7) Əgər *X, Y* asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $M[X,Y] = m_x, m_y$. İstənilən a, b ədədləri üçün $P(X = a,\ Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y - b)$ olarsa *X* və *Y* asılı olmayan adlanırlar.

İsbatı. $M[XY] = \sum_c cP(XY = c) = \sum_{a,b} abP(X = a,\ Y = b)$.

Asılı olmayan *x* və *y* təsadüfi kəmiyyətlər üçün $P(X = a,\ Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$ olduğundan alarıq:

$$\sum_{a,b} abP(X = a)P(Y = b) = \left(\sum_a aP(X = a)\right) \cdot \left(\sum_b bP(Y = b)\right) = M[X]M[Y].$$

3. Dispersiya və onun xassələri. Təsadüfi *X* kəmiyyətinin dispersiyası $D[X]$ ilə işarə edilir və $D(X) = M\left[(X - m_x)^2\right]$.

Dispersiyanın mahiyyətçə mənası-təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin onun riyazi gözləməsi ətrafında necə paylanmasının ölçüsüdür.

Misal 5. Tutaq ki, K təsadüfi kəmiyyəti yalnız iki qiymət alır (0 və 1) və bu qiymətləri alma ehtimalları uyğun olaraq *q* və *p* –dir, burada *p+q=1.* Dispersiyanı tapaq.

$M[K] = p. \quad D[K] = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq$

Dispersiyanı hesablamaq üçün çox hallarda başqa düsturdan, daha doğrusu $D[X] = M[X^2] - m_x^2$ düsturundan istifadə edirlər. Bu düsturu çıxardaq. Tərifə əsasən, $D[X] = M[(X-m_x)^2] = M[(X^2 - 2Xm_x + m_x^2)]$. Riyazi gözləmənin xassələrindən istifadə etsək, alarıq:

$$D[X] = M[X^2] - 2m_x M[X] + m_x^2 = M[X^2] - m_x^2$$

Dispersiyanın xassələri.

1). Sabit kəmiyyətin dispersiyası sıfıra bərabər olar.

$M[C] = C$ və $M[C^2] = C^2$ olduğundan alarıq ki, $D[C] = M[C^2] - ([C]^2) = 0$.

2) $D[x + C] = D[X]$.

$M[X + C] = M[X] + C$, olduğundan

$$D[X + C] = M[((X + C) - M[X + C]^2)] = M[(X + C - m_x - C)^2] =$$
$$= M[(X - m_x)^2] = D(X)$$

Aşağıdakı 3-5 xassələrinin də belə sadə isbatı var, buna görə də həmin isbatları buraxırıq.

3) $D[kX] = k^2 D[X]$

4) $D[X] \geq 0$

5) Əgər $X \leq B$ olarsa, onda $D[X] \leq B^2$ olar.

6) $D[X + Y] = D[X] + D[Y] + 2K_{xy}$ burada $K_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)]$. K_{xy} -ə təsadüfi *X, Y* kəmiyyətlərinin *korrelyasiya momenti* deyilir.

Doğrudan da,

$$D[X+Y]=M\left[((X+Y)-M[X+Y])^2\right]=M\left[((X+Y)-(m_x+m_y))^2\right]=$$
$$=M\left[(X-m_x)^2+2(X-m_x)(Y-m_y)+(Y-m_y)^2\right]=M\left[(X-m_x)^2\right]+$$
$$+2M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]++M\left[(Y-m_y)^2\right]=D[X]+2K_{xy}+D[Y].$$

Korrelyasiya momenti çox mühüm rol oynayır, o təsadüfi kəmiyyətlər arasında qarşılıqlı əlaqəni təsvir edir. Aşağıdakı fərziyyə ilə hələlik kifayətlənək.

Fərziyyə. Əgər *X, U* təsadüfi kəmiyyətləri asılı olmayandırlarsa, onda

$K_{xy}=0$ olar.

İsbatı.

$$K_{xy}=M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]=M\left[XY-m_xY-m_yX+m_xm_y\right]=$$
$$=M[XY]-2m_xm_y+m_xm_y=M[XY]-m_xm_y.$$

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər üçün $M[XY]=m_xm_y$, olduğundan, $K_{xy}=0$ olar.

Dispersiyanın kvadrat kökünə təsadüfi X kəmiyyətinin orta kvadratik sapması deyilir və $\sigma[X]=\sqrt{D[X]}$ - ilə işarə olunur. Dispersiyanın ölçüsü təsadüfi kəmiyyətin ölçüsünün kvadratına bərabərdir, orta kvadratik sapmanın ölçüsü isə təsadüfi kəmiyyətin ölçüsünə bərabərdir. Orta kvadratik sapmanı həmçinin σ_x - ilə də işarə edirlər.

4. Diskret təsadüfi kəmiyyətin kanonik paylanma qanunu. Belə paylanma qanunları üçdür: binomial, puasson və həndəsi silsilə ilə paylanma qanunları.

Təsadüfi X kəmiyyəti yalnız *0,1,...,n* qiymətlərini alarsa və $P(x=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ burada *q=1-p* olarsa, onda deyirlər ki, X kəmiyyəti *n, p>0* parametrlərinə görə binomial qanunla paylanmışdır.

Təsadüfi X kəmiyyətini aşağıdakı kimi təsvir etmək olar. Sınaq nəticəsində p ehtimalı ilə baş verən hər hansı A hadisəsinə baxaq. Biri-birindən asılı olmayan, eyni şəraitdə n sayda sınaqlar seriyası aparaq. Onda A hadisəsi bu seriyalarda təsadüfi sayda baş verir. Bu təsadüfi sayı X kəmiyyətinin qiyməti kimi qəbul edirlər. A hadisəsinin baş verdiyi sınaqları uğurlu adlandırsaq, onda bu seriyalarda uğurlu halların sayı X təsadüfi kəmiyyətinin qiyməti olar. Asanlıqla görünür ki, uyğun ehtimalı Bernulli düsturu ilə (bax b.3 bölmə 15.3) hesablayırlar.

Misal 6. $n = 4,\ p = 1/3$ parametrləri ilə verilmiş təsadüfi kəmiyyətin paylanma sırasını tərtib edin.

Həlli. Tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyəti X ilə işarə edək. X-in mümkün qiymətləri 0,1,2,3,4 və $P(X = k) = C_4^k (1/3)^k (2/3)^{4-k}$, olar.

Hesablamanın nəticələrini cədvəldə yazaq.

X:	0	1	2	3	4
	16/81	32/81	24/81	8/81	1/81

n və *p* parametrləri ilə binomial paylanmış təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq. Bunun üçün təsadüfi X kəmiyyətini A hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayı kimi qəbul edək. Hər bir $i=1,...,n$ üçün təsadüfi Z_1 kəmiyyəti daxil edək. Əgər A hadisəsi i-ci sınaqda baş verərsə $Z_i=1$, baş verməzsə, onda $Z_i=0$ götürülür.

Asanlıqla görərik ki, $X = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$ olar. Beləliklə, $M[X] = M[Z_1] + \cdots + M[Z_n]$. Bütün Z_i -lər eyni qayda ilə paylanıb və $M[Z_i] = P$ (5-ci misala bax) Deməli, $M[x] = np$. İndi isə dispersiyanı tapaq. Z_i –kəmiyyətləri asılı deyillər və $D[Z_i] = pq$ (bax 5-ci misala). Deməli, $D[Z] = npq$..

Əgər *y* təsadüfi kəmiyyəti yalnız *0,... k,...* qiymətlərini ala bilərsə və $P(Y=k)=e^{-a}\,a^k/k!$ olarsa. Onda deyirlər ki, təsadüfi *U* kəmiyyəti a*>0* parametrinə görə Puasson qanunu ilə paylanıb.

Riyazi gözləməni tapaq:

$$M[Y]=\sum_{k=0}^{\infty}ke^{-a}\,a^k/k!=ae^{-a}\left(\sum_{k=0}^{\infty}a^k/k!\right)=ae^{-a}e^a=a;\,.\ \sum_{k=0}^{\infty}a^k/k!=e^a$$

Dispersiyanı hesablamaq bir qədər çətindir; biz hesablamaları buraxaraq, yalnız nəticəni yazırıq: $D[Y]=a.$

Beləliklə, riyazi gözləmə və dispersiya ədədi olaraq *a* parametrinə bərabərdir, onların ölçüləri isə müxtəlifdir.

Misal 7. Tutaq ki, *N* təsadüfi kəmiyyəti a=2 parametri ilə Puasson qanunu ilə paylanmışdır. $P(Y=1),\ P(Y>0)$ ehtimalını tapın.

Həlli. $P(y=1)=e^{-2}\cdot 2^1/1!=2e^{-2}\approx 2/7,$

$P(Y>0)=1-P(y=0)=1-e^{-2}\cdot 2^0/0!=1-e^{-2}\approx 6/7$.

Qeyd etmək faydalıdır ki,

$e^{-1}\approx 0.37$; $e^{-2}\approx 1/7;$ $e^{-3}\approx 1/20; e^{-4}\approx 1/50$.

Aşağıdakı təklif binomial və puasson paylanmalarını əlaqələndirir.

Təklif. Puasson paylanması binomial paylanmanın limit vəziyyətidir. Daha dəqiq desək tutaq ki, X n,p parametrlərinə görə binomilan qanunla paylanmışdır və *n* çox böyük, *p*-isə çox kiçikdir, onda $P(X=k)\approx e^{-a}\cdot a^k/k!$ olar, burada $a=np$, k-isə çox kiçikdir, bu halda binomial paylanma təqribi olaraq puasson paylanması ilə əvəz olunur.

İsbatı. $P(X=k)$-nı qiymətləndirək. Bernulli düsturuna əsasən alarıq:

$$P(X=k)=C_n^k P^k(1-p)^{n-k}=\left(n(n-1)\cdots(n-k+1)/k!\right)\cdot(1-p)^{n-k}\approx$$
$$\approx\left((np)^k/k!\right)(1-p)^{n-k}\cdot(1-p)^{n-k}=\left((1-np/n)^n\right)\cdot(1-p)^{-k}\approx(1-np/n)^n\approx e^{-np}$$
olduğunu nəzərə alsaq, qiymətləndirmək istədiyimiz ehtimalın təqribi olaraq $e^{-a}\cdot a^k/k!$ - a bərabər olduğunu görərik.

Misal 8. Atıcı alayı (1000 nəfərədək adamdan ibarət) marş zamanı düşmən qırıcısı tərəfindən aşkar edilir. Əsgərlərin təxminən yarısı qırıcıya atəş açır. Təyyarənin vurulması ehtimalı nə qədərdir?

Həlli. Məsələnin şərtində təyyarənin bir atəşdə vurulması ehtimalı çatışmır. Qeyd edək ki, təyyarənin vurulması çox çətindir, ya gərək təyyarəçini vurasan (təyyarəçi isə güllə keçirməz oturacaqda oturur) və ya təyyarənin zəif yerinə (benzin bakına, matoruna və s.) dəymək lazımdır. Qəbul edək ki, ehtimal 0,002-ə bərabərdir. Təyyarəni vuran güllə X-binomial qanunla paylanıb, n=500 və p=0,002, $P(X>0)$-ı tapmaq lazımdır. Əvvəlcə təyyarənin vurulmaması ehtimalını $P(X=0)$ tapaq. Binomial qanunu puasson qanunu il əvəz edək; $a=np=1$. Onda,
$P(x=0)=e^{-1}\cdot 1^0/0!=e^{-1}\approx 0{,}37$. Deməli, axtarılan ehtimal təqribi olaraq 0,63-ə bərabər olar.

Əgər Z təsadüfi kəmiyyəti 1,...,k,... qiymətlərini ala bilirsə və $p(Z=k)=q^{k-1}\cdot p,$, burada $q=1-p$ olarsa, onda deyirlər ki, Z, təsadüfi kəmiyyəti $p>0$ parametri ilə hndəsi silsilə qanunu ilə paylanmışdır.

Z təsadüfi kəmiyyətini belə təsvir etmək olar. Sınaq nəticəsində p ehtimalı ilə baş verə bilən hər hansı A hadisəsinə baxaq. Eyni şəraitdə, biri-birindən asılı olmayan sınaqlar seriyası keçirək. Bu sınaqları A hadisəsi baş verənə qədər aparaq. Belə sınaqların sayını A hadisəsinin qiyməti kimi qəbul edək.

Misal 9. Avtomobil dükanında alıcılar avtomobil seçirlər. Bir qayda olaraq, alıcılar münasib bildikləri avtomobili tapana qədər, gördükləri avtomobilləri rədd edirlər. Rədd edilmiş avtomobillərə Z təsadüfi kəmiyyəti kimi baxaraq, onun paylanma sırasını tapın.

Həlli. Məsələnin şərtində ixtiyari avtomobilin alıcının xoşuna gəlməsi ehtimalı çatışmır. Tutaq ki, bu ehtimal 1/5 –dir. Onda Z-in paylanma sırası belə olar:

1	2	….	k
1/5	$(4/5)\cdot(1/5)$	….	$(4/5)^{k-1}\cdot(1/5)$

Həndəsi silsilə qanunu ilə paylanmış $p>0$ parametrli təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsini tapaq.

$$M(Z)=\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}p=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)^1=p\big(q/(1-q)\big)^1=$$

$$=p\Big(1/(1-q)^2\Big)=p/p^2=1/p$$

Təxminən eyni qayda ilə dispersiyanı tapmaq olar: $D(Z)=q/p^2$

MƏSƏLƏLƏR

1. Şirkət müxtəlif yerlərdə tikiləcək dörd evin layihəsinə baxır. Tikinti üçün vəsaiti gələcək sakinlər özləri verir. Evlərin tikilməsi üçün zəruri vəsaitin yığılması ehtimalı 0,8-ə bərabərdir. Hər bir tikilən ev layihə xərcinin 1/3 – hissəsini ödəyir. Şirkətin mənfəətinin paylanmasını tapın. Gözlənilən mənfəəti tapın.

Həlli. Bütün xərcləri a ilə işarə edək. Tutaq ki, X şirkətin tikə biləcəyi evlərin sayıdır. Onda X binomial paylanma qanunu ilə paylanıb, parametrləri isə n=4, p=0,8-dir. S mənfəəti X-dən $S=-a+(a/3)x$ düsturu ilə asılıdır. İndi isə paylanma sırasını yazaq

X:	0	1	2	3	4
	1/625	16/625	96/625	256/625	256/625

S:	$-a$	$-2a/3$	$-a/3$	0	$a/3$
	1/625	16/625	96/625	256/625	256/625

Bundan isə mənfəətin paylanma sırasını alarıq:

Gözlənilən mənfəət – S təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi olar. Onu aşağıdakı düsturla tapaq: $M[S]=\sum_i s_i p_i = a/15.$ $M[S]$-i belə də hesablamaq olar:

$$M[S]=\sum_i \left(-a+(a/3)x_i\right)p_i = -a\sum_i p_i + (a/3)\sum_i x_i p_i =$$

$$=-a+(a/3)M[x]==-a+(a/3)np=-a+(a/3)4\cdot 0{,}8=a/15.$$

2. Əmin olun ki, hər üç qanunda–binomial, puasson və həndəsi silsilə qanunlarında paylanma sırasındakı ehtimalların cəmi vahidə bərabərdir.

3. 100 dollarlıq əskinazların 1%-i qəlpdir; lakin bunlar çox incə düzəldiyindən pul dəyişmə məntəqəsinin işçisi onların onda birini həqiqi kimi qəbul edir. Bir gündə təxminən 200 ədəd 100 dollarlıq əskinaz qəbul edilir. Onların içərisində heç olması birinin qəlp olması ehtimalı na qədərdir?

4. Təsadüfi V kəmiyyətinin bütün mümkün qiymətləri tam ədədlər olarsa, onda V - tam qiymətli adlanır. Belə təsadüfi kəmiyyətə $\varphi(z)=\sum_k p_k z^k \left(p_k = p(V=k)\right)$ funksiyasını qarşı qoyaq. Belə funksiyaya istehsal funksiyası deyilir. İsbat edin ki, $M[V]=\varphi'(1),\ D[V]=\varphi''(1)+\varphi'(1)-\left(\varphi'(1)\right)^2$. Binomial, puasson və həndəsi silsilə qanunları ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərin istehsal funksiyalarını tapın.

16.2. Qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbulu

1. Nəticə və risklərin matrisi. Rəhbər, menecer rəhbərlik etdikləri kollektivin qarşısında duran problemləri həll etməyə borcludurlar. Rəhbər qərar qəbul etməyə borcludur. Qərar qəbul etmək nəzəriyyəsində xüsusi termin-qərar qəbul edən şəxs–QQŞ termini var. Bu bölmədə həmin termindən istifadə edəcəyik. Qərar qəbul etmək–hər hansı ekstremal məsələni həll etmək deməkdir, yəni müəyyən məhdudiyyətlər daxilində məqsəd funksiyası adlanan funksiyanın ekstremumunu tapmaq. Məsələn, 23.1. bölməsində baxdığımız xətti proqramlaşdırma belə ekstremal məsələlərin tam bir sinifini əhatə edir.

Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üsulları qeyri-müəyyənlik şəraitində qərar çıxarmağa kömək edir. Hər bir təsadüfliyi ehtimalla «ölçmək» mümkün deyildir.

Qeyri-müəyyənlik–daha geniş anlayışdır. Oyun zərini atdıqda hansı rəqəmin yuxarı düşməsi-qeyri-müəyyənliyi ilə, Rusiya iqtisadiyyatının 15 ildən sonra necə olacağı qeyri-müəyyənliyindən fərqlidir. Qısa desək, ayrı-ayrılıqda götürülmüş təsadüfi hadisələrdən fərqli olraq, kütləvi təsadüfi kəmiyyətlər ehtimal qanunauyğunluqlarına tabe olurlar. Tutaq ki, QQŞ (qərar qəbul edən şəxs) bir neçə mümkün həllərə baxır: *i=1,... , m.* Şərait qeyri - müəyyəndir, yalnız məlumdur ki, $j=1,\cdots,n$ variantlarından biri mümkündür. Əgər *i*-ci qərar qəbul olunarsa, şərait *j*-dirsə, onda firma (QQŞ-in rəhbərlik etdiyi) q_{ij}-gəliri əldə edər. $Q=(q_{ij})$ matrisinə nəticə matrisi deyilir. QQŞ hansı qərarı qəbul etməlidir? Bu şəraitdə rəhbərin riskli olmasından çox şey asılıdır. Bəs risqi necə qiymətləndirmək olar?

Tutaq ki, i-ci qərarın verə biləcəyi risqi qiymətləndirmək istəyirik. Bizə real şərait məlum deyil, əks halda biz ən çox gəlir gətirən ən yaxşı qərarı qəbul edərdik.

Başqa sözlə, əgər şərait j-sa, onda $q_j = \max_i q_{ij}$ gəliri təmin edən qərar qəbul olunardı. Deməli, i-ci qərarın qəbulu ilə, biz q_i gəlirini deyil, q_{ij} - gəlirini əldə etməyə risk edirik. Beləliklə, qəbul edilmiş qərar $r_{ij} = q_j - q_{ij}$ qədər az gəlir götürməyə risq edir.

$R = (r_{ij})$ matrisi risklər matrisi adlanır.

Misal 1. Tutaq ki, nəticə matrisi $Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

Risklər matrisini tərtib edək.

$$q_1 = \max_i q_{ij} = 8,\ q_2 = 5,\ q_3 = 8,\ q_4 = 12.$$

Beləliklə risklər matrisi $R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ olar.

Qeyd edək ki, biz ilk dəfədir ki, risklərin kəmiyyətcə qiymətləndirilməsi ilə rastlaşdıq. Aydındır ki, risk sahibkarlıq fəaliyyətinin ən mühüm kateqoriyalarından biridir. Məlum olduğu kimi sahibkarlar digər insanlardan yaxşı yaşayırlar. Bu onların riskinin nəticəsidir. Risk çox geniş anlayışdır, biz gələcəkdə bu anlayışa qayıdacağıq.

2. Tam qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbulu. Aşağıdakı qayda-zəmanət bu məsələdə müəyyən oriyentir rolunu oynaya bilər.

Vald qaydası (ifrat pessimizm qaydası).

i-ci qərara baxarkən, fərz edəcəyik ki, əslində şərait ən pisdir, yəni ən az gəlir gətirən qərardır: $a_i = \min_j a_{ij}$. İndi ən çox gəlir a_{i0} verən i_0 qərarını seçək. Beləliklə Vald qaydası zəmanət verir ki, i_0-qərarını verək, belə ki, $a_{i0} = \max_i a_i = \max_i(\min_j q_{ij})$. Yuxarıdakı misalda olduğu kimi alarıq: $a_1 = 2, a_2 = 2,\ a_3 = 3, a_4 = 1$. İndi 2, 2, 3,1 ədədlərindən maksimumunu tapaq. Bu – 3-dür. Deməli Vald qaydası zəmanət verir ki 3-cü qərarı qəbul edək.

Sevic qaydası (minimal risk qaydası).

Bu qaydanı tətbiq edərkən $R = (r_{ij})$ risklər matrisi təhlil edilir. *i*-ci qərara baxaraq fərz edəcəyik ki, əslində maksimal riskli şərait yaranır $b_i = \max_j r_{ij}$. İndi isə ən kiçik riskli i_0- qərarını seçək, burada b_{i0}- ən kiçikdir. Beləliklə, Sevic qaydası zəmanət verir ki, elə i_0 - qərarını seçək ki, $b_{i0} = \min_i b_i = \min_i(\max_j r_{ij})$ olsun.

Yuxarıdakı misala görə: $b_1 = 8, b_2 = 6,\ b_3 = 5, b_4 = 7$. İndi 8, 6, 5, 7 ədədlərindən minimumunu tapaq. Bu 5-dir. Deməli Valda qaydası 3-cü qərarın qəbuluna zəmanət verir.

Qurvits qaydası (şəraitə uyğun ölçülmüş pessimist və optimist yanaşma). $\left\{\lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda)\max_j q_{ij}\right\}$, maksimumunu təmin edən *i* qərarı qəbul edilir; burada $0 \le \lambda \le 1$. λ -nin qiyməti subyektiv nöqteyi-nəzərindən seçilir. Əgər λ vahidə yaxınlaşarsa, onda Qurvits qaydası Vald qaydasına yaxınlaşar, əgər λ sıfıra yaxınlaşarsa, onda Qurvits qaydası «çəhrayı optimizm» qaydasına yaxınlaşar (bunun nə olduğunu özünüz düşünün).

3. Qismən qeyri-müəyyənlik şəraitində qərarların qəbulu. Tutaq ki, baxılan sxemada real şəraitin *j* variantında inkişaf etməsinin P_j ehtimalı məlumdur. Belə vəziyyət qismən qeyri-müəyyənlik adlanır. Belə şəraitdə necə qərar qəbul edək? Aşağıdakı qaydalardan birini seçmək olar.

Gözlənilən orta gəlirin maksimumlaşdırılması qaydası.

i -ci qərarın reallaşdırıcı firmanın gəliri paylanma sırası $\left|\frac{q_{i1}}{p_1}\right|\dots\left|\frac{q_{in}}{p_n}\right|$ olan təsadüfi Q_i kəmiyyəti olar. $M[Q_i]$ riyazi gözləməsi gözlənilən orta gəlir olar və onu $\overline{Q}_i$ -lə işarə edirlər. Beləliklə, bu qayda maksimal orta gəlir verən qərarın edilməsini tövsiyə edir.

Gözlənilən orta riskin minimumlaşdırılması qaydası.

i-ci qərarın reallaşdırılmasında firmanın riski $\left|\frac{r_{i1}}{p_1}\right|\dots\left|\frac{r_{im}}{p_n}\right|$ paylanma sırası olan təsadüfi R_i kəmiyyəti olar.

$M[R_i]$ riyazi gözləməsi gözləniln orta riskdir, onu R_i - lə işarə edirlər. Bu qayda gözlənilən orta riskin minimumunu tövsiyə edir. Yuxarıda göstərilən ehtimallara uyğun orta risqi hesablayaq. Onda alarıq ki,

$\overline{R}_1 = 20/6,\ \overline{R}_2 = 4,\ \overline{R}_3 = 7/6,\ \overline{R}_4 = 32/6$.Gözlənilən minimum orta risk 7/6–ya bərabər olar, bu 3-cü qərara uyğundur.

Bəzən tam qeyri-müəyyənlikdə aşağıdakı qaydadan istifadə edirlər.

Eyniimkanlı Laplas qaydası. Burada hesab edirlər ki, bütün *p* ehtimalları bərabərdir. Bundan sonra yuxarıda göstərilən qaydalardan-tövsiyyələrdən hər hansı biri seçilir.

4. Risq orta kvadratik sapma kimi. *Riskə başqa bir yanaşma.* Gəliri Q təsadüfi kəmiyyəti ola hər hansı əməliyyata baxaq. Göstərildiyi kimi gözlənilən orta gəlir təsadüfi Q kəmiyyətinin, riyazi gözləməsidir. $\sigma_Q = \sqrt{D[Q]}$ orta kvadratik sapma isə gəlirin mümkün qiymətlərinin orta gözlənilən gəlir ətrafında səpələnməsinin ölçüsüdür. Bunu isə riskin ölçüsü kimi qəbul etmək olar. Yada salaq ki,

$$D[Q] = M\left[(M - M_Q)^2\right].$$

Misal 1-də 3-cü bənddəki ehtimallara görə Q_i gəlirlərinin r_i risqlərini tapaq. Paylanma sıraları, gözlənilən orta gəlir və yeni risklər:

Q_1:

5	2	8	4
1/2	1/6	1/6	1/6

$\overline{Q}_1 = 29/6 \approx 4{,}81$, $r_1 \approx 1{,}77$

Q_2:

2	3	4	12
1/2	1/6	1/6	1/6

$\overline{Q}_2 = 25/6 \approx 4{,}16$, $r_2 \approx 3{,}57$

Q_3:

8	5	3	10
1/2	1/6	1/6	1/6

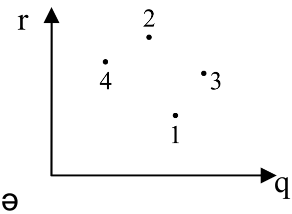
$\overline{Q}_3 = 7$, $r_1 \approx 2{,}30$

Q_4:

1	4	2	8
1/2	1/6	1/6	1/6

$\overline{Q}_4 = 17/6 \approx 2{,}81$, $r_4 \approx 2{,}54$

Gözlənilən orta gəliri və riskləri müstəvi üzərində qeyd edək; bunun üçün gəliri $\overline{Q} = q$ üfiqi ox risqləri isə şaquli ox kimi qəbul edək. (şəkilə baxın). Dörd nöqtə aldıq. (d, r) nöqtəsi nə qədər sağ tərəfdə olsa əməliyyat bir o qədər gəlirlidir, Nöqtə nə qədər yuxarıda olsa, bir o qədər əməliyyat risklidir. Deməli sağ və aşağı nöqtəni seçmək lazımdır. (d^1, r^1) nöqtəsi (d, r) nöqtəsinə



görə üstünlük təşkil edir, əgər $q' \geq q$ və $r' \geq r$ olarsa. Bizim misalda 1-ci əməliyyat 2- cidən , 3-cü 2-cidən, 3-cü isə 4-cüdən üstündür. Digər tərəfdən, 1-ci və 3-cü əməliyyatlar müqayisə olunmazdır, 3-cüdə gəlir çox, risq də çoxdur.

Hər bir nöqtəyə görə üstünlüyü olmayan nöqtə Paretoya nəzərən optimal nöqtə adlanır. Belə nöqtələrin çoxluğu isə Paretoya görə optimal çoxluq adlanır. Asanlıqla görmək olar ki, əgər baxılan əməliyyatlardan ən yaxşısını seçmək lazımdırsa, onda onu Paretoya nəzərən optimal çoxluqdan seçmək lazımdır.

5. Qərar qəbulu üçün Bayes yanaşması. Aşağıdakı misala baxaq.

Misal 2. Eksperiment aparan şəxs tamamilə eyni şəkildə olan iki kisə göstərdi və dedi ki, bu kisələrin birində 80% ağ və 20% qəhvəyi lobya var, digrində isə 80% qəhvəyi və 20 % ağ lobya var. Birinci kisəni ağ kisə, 2-ci kisəni isə qəhvəyi adlandıraq. Sonra o, kisələri apardı və bir kisə ilə qayıtdı və təklif etdi ki, gətirdiyi kisənin hansı olduğunu tapaq, əgər tapsanız 10 dollar alarsınız, tapmasanız heç bir şey almayacaqsınız. Asanlıqla görmək olar ki, sizin uduşunuz V təsadüfidir və onun paylanma sırası belədir:

10	0
1/2	1/2

Bir oyunda orta uduş $M[V] = (10 \cdot 1/2 + 0)$ dollar = 5 dollar. Bir müddət sonra eksperiment aparan oyunu mürəkkəbləşdirdi. O, təklif etdi ki, bir lobya götürək, onun rəngini görək və bundan sonra hansı kisə olduğunu deyək. Bunun üçün o, əvvəlcədən 1 dollar ödəməyi xahiş etdi. Siz bu oyuna gedib, 1 dolları ödəyəcəksinizmi? Çalışaq hesablayaq, 1 dolları ödəmək lazımdırmı?

İndi biz qarşımızda olan kisənin hansı rəngli olmasını təsadüfən deyil, çıxardığımız lobyanın rənginə uyğun deyəcəyik (bu «həlledici qayda» adlanır).

Bu ehtimal nə qədər olar? Aydındır ki, bu ehtimal çıxardığımız lobyanın hansı rəngli olması ehtimalına bərabərdir. Axırıncı ehtimal 0,8-ə bərabərdir. İndi orta, gözlənilən uduş 8 dollar oldu. Nəticə – 1dollar ödəmək lazımdır.

Bu misalda qərar qəbul edilməsinin Bayes yanaşmasının mahiyyəti göstərilmişdir. Fərz edək ki, iş adamı bazara yeni perspektivli əmtəənin çıxarılmasını fikirləşir. Amma o bilmir ki, əmtəə satılacaqmı? Şəraiti öyrənmək üçün o, sınaq partiyasını bazara çıxarır ki, görsün əmtəə satılarmı. Bundan sonra şərait müəyyənləşir və daha yaxşı proqnozlaşdırılır. Bu şəraiti dəqiqləşdirmək üçün bir sınaq da keçirmək və başqa momentləri təhlil etmək olar. Adi həyatda biz tez-tez belə üsullardan istifadə edirik. Məsələn, meşəyə gedərkən hava haqqında məlumatı dinləyirik və yaxud havanın necə olacağını bilmək üçün pəncərədən çölə baxırıq. Ümumiyyətlə Bayes yanaşması belə səslənir.

Tutaq ki, biz şəraitin ehtimal proqnozu S-i bilirik: $P(S = H_i) = P_i$. Belə proqnozu bilərək, gözlənilən orta gəliri *Q* - nü və yaxud $\overline{R}$-gözlənilən orta riski tapa bilərik. Ehtimalların paylanması $\{P_i\}$-ni dəqiqləşdirən sınaq əməliyyatı keçirilməsi imkanına baxaq. Ehtimalların yeni paylanması $\{P'_i\}$ olar. Ehtimalların yeni paylanmasına uyğun yeni xarakteristikalar: gözlənilən orta gəlir *Q*, gözlənilən orta risk $\overline{R'}$ və s. Əgər qərar qəbul edn şəxs qərara gəlsə ki, belə dəqiqləşdirmədə sınaq əməliyata özünü doğruldur, onda o, sınağı keçirir. Ehtimalların yeni paylanması $\{P'_i\}$ -i adətən Beyes düsturları ilə tapırlar.

MƏSƏLƏLƏR

1. Maliyyə əməliyyatlarının nəticələrinin sığortalanması. Bank bir illiyə 8%-lə 10 milyon rubl kredit verir. Kredit, dəyəri 10 milyon rubl olan yaşayış evini girov qoymaqla verilir. Riski azaltmaq üçün bank bu ev üçün 3% girov məbləğini ödəməklə *A* rubl sığorta polisi əldə edir. Sığorta şirkətində bu tip evlərin bir ildə yanması 0,01 qiymətləndirilir.

A=5; 10; 20 milyon olduqda bankın I gəlirinin paylanma sırasını və bankın orta gəlirini tapın.

Həlli. Aydındır ki, $I = -0{,}03A + S$, burada təsadüfi kəmiyyət *S* aşağıdakı paylanma sırasına malikdir:

Ev yanmır	Ev yanır
800 000	A – 10 000 000
0,99	0,01

Deməli, gözlənilən orta gəlir

$$M[J] = -0{,}03A + M[S] = -0{,}02A + 692000.$$

2. Nəticə matrisinə baxaq $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 3 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Risklərin matrisini tapın.

Vald, Sevidən, Qurvits qaydaları $\lambda = 1/4$ olduqda hansı həlli təklif edir? Tutaq ki, nəticə ehtimalları paylanması (1/4, 1/4, 1/2) - dir. Elə həlli tapın ki, gözlənilən orta gəliri maksimumlaşdırsın, gözlənilən orta risqi isə minimumlaşdırsın. Sınaq əmliyyatı ehtimalların paylanmasını dəyişir. İndi paylanma belə olar: (1/8, 1/8, 3/4).

Sınaq əməliyyatının neçəyə başa gəldikdə, onu keçirmək məqsədəuyğun olar (Kriteriya olaraq orta gözlənilən gəliri götürmək lazımdır)?

3. Təsadüfi gəlirlə üç müxtəlif əməliyyat aparan

Q_1:

-5	0	5	10
0,1	0,2	0,5	0,2

:

Q_2:

-5	0	5	10
0,3	0,2	0,1	0,4

:

Q_3:

-5	0	5	10
0,3	0,2	0,1	0,4

Bütün əməliyatlar üçün gözlənilən $\overline{Q}$ gəlirini, orta kvadratik sapmanı r hesablayın. Bu xarakteristikaları vahid şəkilə köçürün və əməliyyatların qrafiki təsvirini alın.

$E(\overline{Q}, r) = 10\overline{Q} - r$ düsturu vasitəsilə ən yaxşı və ən pis əməliyyatları tapın.

16.3. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər və onların xarakteristikaları

1. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin tərifi. Diskret təsadüfi V kəmiyyətinin mümkün qiymətlər çoxluğu hesabıdır, buna görə də onu paylanma sırası şəklində, yəni $\{P(V = x)\}$ ehtimallar dəsti vasitəsilə təsvir etmək mümkündür, burada x mümkün qiymətlər çoxluğundaki qiymətləri alır.

Elə təsadüfi kəmiyyətlər də vardır ki, onların mümkün qiymətləri hesabi deyildir (ən azı nəzəri planda), yəni onların mümkün qiymətləri hər hansı intervalı tamamilə doldurur. Belə təsadüfi kəmiyyətləri paylanma sırası ilə təsvir etmək mümkün deyildir və onları təsvir etmək üçün başqa üsullardan istifadə edirlər.

$P(V = x)$ ehtimalının əvəzinə $P(V < x)$ ehtimalından istifadə edirlər, burada x ixtiyari ədəddir.

Beləliklə, bütün *R* ədədlər çoxluğunda təyin olunmuş $F(x) = P(V < x)$ funksiyası anlayışına gəlirik və bu funksiya x nöqtəsində $P(V < x)$ ehtimalıdır. *F(x)* funksiyasına V təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası deyilir. Paylama funksiyası təsadüfi V kəmiyyətini tamamilə müəyyən edir, xüsusi halda onun köməyi ilə bizi maraqlandıran ixtiyari ehtimalı tapa bilərik. Məsələn, bu funksiyanın tərifinə əsasən alarıq: $P(V < b) = F(b)$. Belə ki, $(a \le V)$ və $(V < a)$ hadisələri qarşılıqlı olduqlarından,

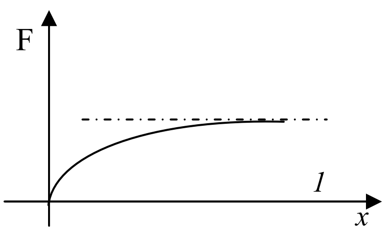
$P(a \le V) = 1 - P(V < a) = 1 - F(a)$ olar.

$(V < b) = (V < a) \cup (a \le V < b)$ olduğundan və axırıncı iki hadisə uyuşmayan olduğundan, onda $P(a \le V < b) = F(b) - F(a)$ olar.

Misal 1. Paylanma funksiyası aşağıdakı kimi olan S təsadüfi kəmiyyətinə baxaq.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & x > 0. \end{cases}$$

Belə təsadüfi *V* kəmiyyəti λ parametrli *üstlü paylanmış təsadüfi kəmiyyət* adlanır (şəkil 1).



Şəkil 1.

Bir neçə ehtimalları tapaq. Yuxarıda qeyd etdiyimiz ümumi düsturlardan alarıq:

$P(b < V) = 1 - P(V < b) = e^{-\lambda b}$

$P(a \le V < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

2. Paylanma funksiyasının xassələri.

Tutaq ki, $F(x)$ – təsadüfi V kəmiyyətinin paylanma funksiyasıdır.

1) Paylanma funksiyası öz arqumentinin azalmayan funksiyasıdır, yəni $a \le b$ olduqda $F(a) \le F(b)$ olar. Doğrudan da, $F(a) = P(V < a) \le F(V < b) = F(b)$ olar, belə ki, $(V < a)$ hadisəsi $(V < b)$ hadisəsinin bir hissəsidir.

2) $F(x)$ funksiyası istənilən nöqtədə soldan kəsilməzdir. Məsələn, isbat edək ki, $F(b) = \lim\limits_{x \to b-0} F(x)$. Tutaq ki, $\{a_n\}$ b–ə soldan yaxınlaşan hər hansı ardıcıllıqdır, onda $(V < b) = \cup\{(V < a_n) : n \in N\}$. Ehtimalın hesabi additivliyinə görə (bax 15.2 b.2) alarıq: $F(b) = P(V < b) = \lim\limits_{n \to \infty} P(V < a_n) = \lim\limits_{n \to \infty} F(a_n)$. Bu bərabərlik istənilən $\{a_n\}$ ardıcıllığı üçün doğru olduğundan, $F(x)$ funksiyası b nöqtəsində soldan kəsilməz olar. Eyni qayda ilə aşağıdakı iki xassəni də isbat etmək olar.

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{n \to \infty} F(n) = 0$.

4) $F(\infty) = \lim\limits_{n \to \infty} F(n) = 1$.

Mühüm bir təklifi isbat edək.

Təklif 1. Əgər paylanma funksiyası *C* nöqtəsində kəsilməz olarsa, onda $P(V = c) = 0$ olar. Beləliklə, əgər paylanma funksiyası kəsilməz olarsa, onda təsadüfi kəmiyyət ayrılıqda götürülmüş hər bir qiymətini sıfır ehtimalla alır.

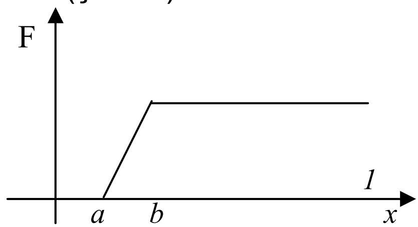
İsbatı. $F(x)$ funksiyasının kəsilməzliyindən alarıq: $\lim\limits_{x \to a+0} F(x) = F(a)$ $P(V = c) \le P(a \le V < b) = F(b) - F(a)$ istənilən $a \le c$ və $b > 0$ olduğundan, onda $P(V = c) \le \lim\limits_{x \to a+0} F(b) - F(a) = 0.$.

□□□□□ *2.* □□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□ □ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{x-b} & a<x\le b,\\ 1 & x>b.\end{cases}$$

V təsadüfi kəmiyyəti $[a,b]$ parçasında *müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət* adlanır (şəkil 2).

Niyə belə adlanır? Cavab üçün göstərək ki, bu təsadüfi kəmiyyətin ehtimalı necə hesablanır. $F(x)$ paylanma funksiyası kəsilməz olduğundan, ixtiyari ehtimal $P(V=c)$ sıfır olar.



Şəkil 2.

Deməli, ixtiyari $P(c\le V<d)$, $P(c\le V\le d)$, $P(c<V\le d)$, $P(c<V<d)$ ehtimalları bərabər olar.

$P(c<V<d)$, $c<d$ ehtimalını tapaq.

Əgər $d<a$ və ya $b<c$, onda $F(a)=F(b)$ və deməli $P(c<V<d)=0$ olar. İndi tutaq ki, $c<a<d<b$, onda $P(c<V<d)=F(d)-F(a)=\dfrac{d-a}{b-a}$. Yekunda da aşağıdakı nəticəyə gələrik.

Nəticə. Təsadüfi V kəmiyyətinin $[c,d]$ parçasında qiymət almasının ehtimalı $[c,d]$ parçasının $[a,b]$ parçasındakı payına bərabərdir, başqa sözlə desək, göstərilən ehtimal $[c,d]\cap[a,b]$ kəsişmə parçasının uzunluğuna mütənasib olar. Ədədi misalda bunu göstərək. Tutaq ki, V təsadüfi kəmiyyəti $[0,100]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır. Aşağıdakı ehtimalları tapaq:

$$P(0<V<60),\quad P(20<V<80),\quad P(-10<V<70),$$
$$P(0<V<120),\quad P(120<V<160),\quad P(V=5).$$

Yuxarıdakı nəticədən istifadə edərək, alarıq: $P(0 < V < 60) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$, $P(20 < V < 80) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$,

$P(-10 < V < 70) = \frac{7}{10}$, $P(0 < V < 120) = 1$, $P(120 < V < 160) = 0$.

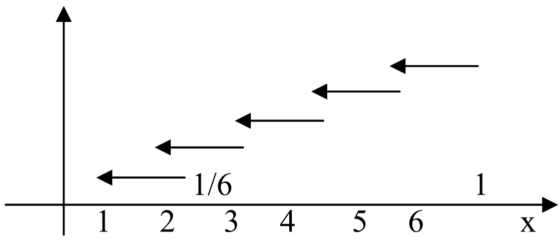
Axırıncı ehtimal $P(V = 5) = 0$ olar.

Misal 3. Oyun zərini atdıqda yuxarı üzə düşən xalların sayının paylanma funksiyasının qrafikini quraq.

Təsadüfi W kəmiyyətinin paylanma sırası aşağıdakı şəkildə olar:

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Uyğun qrafik şəkil 3-də verilmişdir.



Şəkil 3.

3. Кясилмяз тясадцфи кямиййятляр вя онларын хассяляри. ***Яэяр еля мянфи олмайан*** $f(x)$ ***функсийасы варса ки, ихтийари*** $a<b$ ***цчцн*** $P(a<V<b)=\int_a^b f(x)dx$ ***олсун. Онда В тясадцфи кямиййяти*** **кясилмяз** ***адланыр.*** $f(x)$ ***функсийасы В тясадцфи кямиййятинин ещтималынын*** **сыхлыг функсийасы** ***адланыр.***

Гейд едяк ки, $P(-\infty<V<\infty)=1$ олдуьундан $\int_a^b f(x)dx=1$ олар.

Интегралын сярщядляри сонсуз олдуьундн о, гейри-мяхсуси интегралдыр (бах.11.1.б.1). Ещтималын сыхлыг функсийасы мцхтялиф ещтималларын тапылмасы цчцн йахшы васитя ролуну ойнайыр. Онун васитясиля щям дя пайланма функсийасыны тапмаг олур. Доьрудан да $F(b)=P(V<b)$ олдуьундан ахырынъы ещтимал $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ -я бярабярдир. Беляликля, ашаьыдакы тяклиф доьрудур.

Təklif 2. Paylanma funksiyası sıxlıq funksiyasını inteqrallamaqla alınır: $F(b)=\int_{-\infty}^b f(x)dx$

Sıxlıq funksiyası tərifə görə bütün ədəd oxunda kəsilməz olduğundan, inteqrallanandır və ona görə də paylanma funksiyası da bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. Deməli, aşağıdakı təklif də doğrudur.

Təklif 3. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası hər yerdə kəsilməzdir. Buradan isə I təklifə əsasən aşağıdakı təklifi alarıq.

Təklif 4. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyət özünün hər bir ayrıca qiymətini sıfır ehtimalla alır.

Bu isə kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin diskret təsadüfi kəmiyyətdən əsas fərqidir. Buradan çıxır ki, kəsilməz təsadüfi kəmiyyət üçün $P(a \le V) = P(a < v)$,

$P(a < V < b) = P(a \le V \le b)$ və s. Bunlardan sonralar istifadə edəcəyik.

«Ehtimalın sıxlığı» adı necə alınıb?

Böyük olmayan $[x, x + \Delta x]$ intervalına baxaq. *V*– nin bu intervalda qiymət almasının ehtimalı

$P(x < V < x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$ olar.

Bu ehtimalın intervalın uzunluğunun nisbətinə baxaq, yəni vahid uzunluğa uyğun olan orta ehtimala baxaq və Δx sıfıra yaxınlaşdıraq. Limitdə paylanma funksiyasının törəməsini alarıq: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$

Əgər $f(x)$ həmin nöqtedə kəsilməzdirsə, onda bu törəmə var və törəmə bu halda $f(x)$ -ə bərabər olar (bax 10.2 b.5)

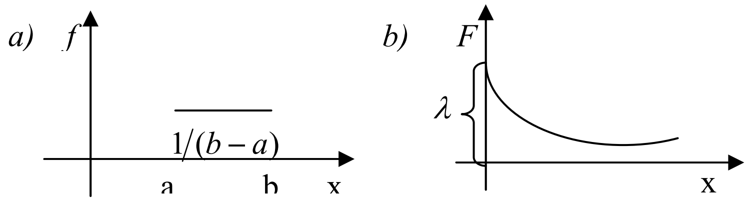
Beləliklə, aşağıdakı təklif doğrudur.

Təklif 5. Sıxlıq funksiyasının ksilməz olduğu nöqtələrdə paylanma funksiyasının törəməsi həmin nöqtədə sıxlıq funksiyasına bərabərdir. Adətən praktikada sıxlıq funksiyası sonlu sayda nöqtələr istisna olmaqla hər yerdə kəsilməz olur. Deməli, sıxlıq funksiyası və paylanma funksiyası aşağıdakı təkliflə biri – birinə bağlıdır.

Təklif 6. Sıxlıq funksiyasını tapmaq üçün paylanma funksiyasını diferensiallamaq lazımdır: $f(x) = F'(x)$.

Paylanma funksiyasını tapmaq üçün isə sıxlıq funksiyasını inteqrallamaq lazımdır: $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Misal 4. Aşağıdakı təsadüfi kəmiyyətlərin sıxlıq funksiyalarını tapın:
a) $[a,b]$ parçasında müntəzəm paylanmış; b) λ parametri ilə üstlü paylanmış təsadüfi kəmiyyətləri.



Şəkil 4.

Həlli. Paylanma funksiyalarının (misal 1,2) törəmələrini tapaq:

a) $$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b],\\ 0 & x\notin[a,b].\end{cases}$$

b) $$f(x)=\begin{cases}0 & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0.\end{cases}$$

Bu sıxlıq funksiyalarının qrafikləri şəkil 4, a və 4, b –də göstərilmişdir.

4. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyası. Kəsilməz təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi və dispersiyasının məzmunu diskret təsadüfi kəmiyyətdə olduğu kimidir (bax. 16.1, b.2) $f(x)$ sıxlığı ilə verilmiş kəsilməz *V* təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi
$M[V]=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$ düsturu ilə təyin edilir.

V–nin dispersiyası isə tamamilə diskret təsadüfi kəmiyyətdə olduğu kimidir, yəni $D[V]=M\left[(V-m_V)^2\right]=M\left[V^2\right]-m_V^2$

Misal 5. V təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapın:

a) $[a,b]$ parçasında müntəzəm paylanmış; b) λ parametrli üstlü paylanmış (1,2,4-cü misallarda baxın) təsadüfi kəmiyyətlərin.

Həlli. a) $M[V]=\int_a^b \frac{x}{(b-a)}dx=\frac{(a+b)}{2}$.

İndi dispersiyanı hesablayaq.

$$M[V^2]=\int_a^b \frac{x^2}{(b-a)}dx=\frac{1}{(b-a)}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b=\frac{(b^3-a^3)}{(3(b-a))}=\frac{(b^2+ab+a^2)}{3},$$

$m_V^2=\frac{(a+b)^2}{4}$ beləliklə, $D[V]=\frac{(b-a)^2}{12}$

b) $M[V]=\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx$. Bu qeyri – məxsusi inteqraldır, deməli, $\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_0^A x\lambda e^{-\lambda x}dx$. $\int_0^A x\lambda e^{-\lambda x}dx$ inteqralını hissə – hissə inteqrallayaraq, alarıq: $e^{-\lambda A}\left(-A-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{1}{\lambda}$ deməli, $M[V]=\frac{1}{\lambda}$.

Eyni qayda ilə dispersiyanı hesablaya bilərik: $D[V]=\frac{1}{\lambda^2}$.

5. Müntəzəm paylanma. Əgər V təsadüfi kəmiyyətinin ehtimalının sıxlığı $[a,b]$ parçasında sabitdirsə və bu parçadan kənarda sıfıra bərabərdirsə, onda deyirlər ki, təsadüfi kəmiyyət $[a,b]$ parçasında müntəzəm paylanmışdır. Aşağıda ehtimal paylanma və sıxlıq funksiyaları verilmişdir, bu funksiyaların qrafikləri isə

şəkil 5-də göstərilmişdir.

$$M[V]=\frac{(a+b)}{2},\quad D[V]=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Sıxlıq funksiyası:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & x\in[a,b],\\ 0 & x\notin[a,b].\end{cases}$$

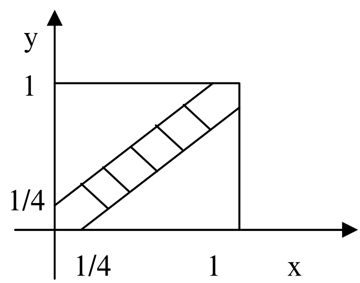
Paylanma funksiyası: $F(x)=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x\le b,\\ 1 & x>b.\end{cases}$

Misal 6. Cihazın şkalalara bölünməsinin qiyməti 0,5 atm.-dir. Operator cihazın göstəricisini çıxararkən yaxın tərəfə qədər yuvarlaqlaşdırır. Yuvarlaqlaşmanın səhvinin 0,1 –dən çox olmasının ehtimalı necə olar?

Cavab: 3/5

Misal 7. Oğlan və qız razılaşırlar ki, saatın altında 12-dən 13-ə qədər görüşsünlər, lakin heç biri gəlişinin anını dəqiqləşdirmirlər. Hər biri söz verir ki, digərini 15 dəqiqə gözləyəcək. Onların görüşmə ehtimalı necə olar? Oğlan qızı 10 dəqiqədir ki, gözləyir. Qalan vaxtda onların görüşmə ehtimalı necə olar?

Həlli. Tutaq ki, oğlanın gəlmə anını x, qızın ki, isə y-dir. Görüşmə şərti $|x-y|\le 1/4$-dir. Vahid kvadratda (şəkil 6)



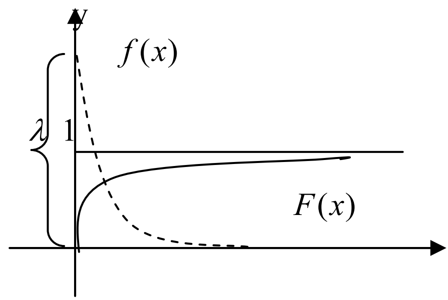
Şəkil 6.

Onların görüşmə nöqtələri çoxluğu ştrixlənmişdir. Məsələnin şərti deməyə İmkan verir ki, oğlanın və qızın gəlmə anları $[0,1]$ parçasıida müntəzəm paylanmışdır, onların gəlmə nöqtəsi isə vahid kvadratda müntəzəm paylanmışdır. Deməli, onların görüşmə ehtimalı, görüşmə nöqtələri çoxluğunun sahəsiən bərabər olar. Bu sahə 7/16-yə bərabərdir. Digər sualın həllini müstəqil həll etməyə çalışın. Bu misal göstərir ki, müntəzəm paylanmanı yalnız birölçülü halda deyil, digər hallarda da təyin etmək olar. Hər hansı D oblastını seçək və təsadüfi Z kəmiyyətini aşağıdakı kimi təyin edək: Z yalnız D oblastında qiymətlər alı rvə Z-in ε oblastında qiymətlər almasının ehtimalı $\varepsilon \cap D$ kəsişməsinin sahəsinə mütənasib olur. Belə təsadüfi kəmiyyətə D oblastında *müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyət* deyilir. Yuxarıdakı misalda hər iki gəncin gəlmə nöqtələri vahid kvadratda müntəzəm paylanmışdır.

6. Üstlü paylanma. Bu mühüm növ təsadüfi kəmiyyət haqqındakı informasiyanı sistemləşdirək.

Təsadüfi ϑ kəmiyyətinin ehtimalının sıxlıq funksiyası f(x) və paylanma funksiyası F(x) aşığıda verilən kimidirsə, bu funksiyalarınqrafikləri şəkil7 də oduğu kimidirsə, onda deyirlər ki, ϑ, λ parametrli üstlu paylanmışdır.

$M[V]=1/\lambda$, $D[V]=1/\lambda^2$



Şəkil 7.

Sıxlıq funksiyası: $$f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0.\end{cases}$$

Paylanma funksiyası: $F(x)=\begin{cases}0 & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x} & x>0.\end{cases}$

Цстлц пайланманын характеристик хассяси:

$$P_{(V>a)}(V>a+b)=P(V>b)$$

Исбаты. Шярти ещтималын тярифиня ясасян:

$$P_{(V>a)}(V>a+b)=\left(\frac{P((V>a+b)\cap(V>a))}{P(V>a)}\right).$$

Диэяр тяряфдян $(V>a+b)\cap(V>a)=(V>a+b)$, демяли

$$P(V>a+b)\cap(V>a)=\frac{P(V>a+b)}{P(V>a)}=\frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}=e^{-\lambda b}=P(V>b)$$

,буну да исбат етмяк тяляб олунурду.

Мисал 8. Сящяр идманы орта щесабла бир саат давам едир. Бу дяфя бир саатда о гуртармады. Сящяр идманынын даща 15–дягигядян аз олмайараг давам етмясинин ещтималы ня гядяр олар?

Həlli. Tutaq ki, V – səhər idmanının davam edəcəyi təsadüfi kəmiyyətdir. Əsas var ki, onun üstlü paylanacağını fərz edək. Bir saatı vahid zaman qəbul edək, onda $\lambda=1$ (belə ki, $M[V]=\frac{1}{\lambda}$). Üstlü paylanmanın xarakteristik paylanmasına əsasən: $P_{(V>1)}\left(V>1+\frac{1}{4}\right)=P\left(V>\frac{1}{4}\right)=e^{-\frac{1}{4}}=0{,}8\cdot$

Üstlü paylanma və hadisələrin sadə seli.

Tutaq ki, θ– təsadüfi zaman anında baş verən hadisələr ardıcıllığıdır. Məsələn, biz ulduzlu səmanı gecə saat 0-dan 3-ə qədər müşahidə edirik və «ulduzların düşməsini» qeyd edirik. Əlbətdə bir ulduzun düşməsi ilə digərinin düşməsi arasında təsadüfi zaman keçir. Tutaq ki, bu zaman intervalı bir-birindən asılı deyil və eyni bir λ parametri ilə üstlü paylanmışdır. Belə hadisələr seli *sadə sel* adlanır.

Göstərmək olar ki, belə selin hadisələrinin sayı Puasson qanunu ilə paylanır, onun parametri isə λt – yə bərabərdir, burada t – zaman intervalnın uzunluğudur.

Misal 8. «Təcili yardım» stansiyası tibbi yardım etmək üçün zənglər qəbul edir. Zənglər ort hesabla 5 dəqiqədən bir daxil olur. Yarım saatda: a) 3 zəngin; b) heç olmazsa bir zəngin daxil olması ehtimalı nə qədər olar.

Həlli. Stansiyaya zəng edənlər bir-birindən asılı olmayaraq hərəkət edirlər. Bu və digər səbəblər əsas verir ki, hadisələr selinin sadə olduğunu fərz edək. Bu da o deməkir ki, zənglərin sayı müəyyən zaman intervalında Puasson qanununa uyğun paylanmışdır: $P(y=k)=e^{a}\cdot\frac{a^k}{k!}$.

Bizim misalda zaman intervalı yarım saatdır, deməli, a yarım saatda zənglərin orta sayıdır, yəni $a=6$. İndi axtarılan ehtimalı tapaq:

a) $P(y=3)=e^{-6}\cdot\frac{6^3}{31}=\frac{1}{11}$; b) $P(y>0)=1-P\ (y=0)=1\cdot e^{-6}\approx 1$

□□□□□□□□□

1. □□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□. □□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□ 5-□ □□□□□□-□□□□□□ 25/3-□ □□□□□□□ □□□□□□, □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□ □□□□□.

[illegible]. [illegible] a, b [illegible]:

$$\begin{cases} (a+b)/2 = 5 \\ (b-a)^2 \big/ 12 = 25/3 \end{cases}$$

[illegible] a=0, b=10 [illegible].

2. [illegible] 10,0 –[illegible] 10,2 [illegible]. [illegible]- [illegible] 10,16-[illegible]. [illegible]?

3. [illegible]. [illegible], [illegible]. [illegible]. [illegible]?

[illegible]. [illegible], [illegible]. [illegible] [illegible]-[illegible] [illegible].

16.4 İnformasiyaların ilkin statistik işlənilməsi

1. İnformasiyaların ilkin statistik işlənilməsinin məqsədi. *Misal 1.* Tikiş fabrikinin marketinq şöbəsi 100 alıcının anketləşməsini həyata keçirir. Anketin sualları içərisində alıcıların kişi kostyumlarına olan tələbləri d var. Anketlərin işlənməsi aşağıdakı üstünlük paylanmasını verir:

1) Hazırlanma yerinə görə:

Ölkə daxilində	*Xaricdə*
60	*40*

2) Qiymətinə görə ABŞ dolların görə:

100	*100-200*	*200-300*	*300-400*	*400*
17	*38*	*37*	*6*	*2*

3) Rənginə görə:

qara	*açıq*	*neytral*
40	*20*	*40*

4) Jiletinə görə:

Jiletli	*Jiletsiz*
28	*72*

Gördüyü kimi istehsalın növləri alıcıların arzusundan asılıdır. Marketinq şöbəsi fabrikin müdiriyyətinə öz təkliflərini veirlər.

Misal 2. Böyük avtomobil zavodu 5 il əvvəl yeni avtomobil alan avtomobil sahibləri arasnda anketlşmə aparır.

Xüsusi halda şöbəni avtomobil sahiblərinin neçə *km* getdikləri də maraqlandırır. İnformasiyalar işləndikdən sonra aşağıdakı paylanma alınır (1000 km və anketləşdirilənlərin %-i)

50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300	300
2	6	16	32	30	12	2

Avtomobil zavodunun müdiriyyətində bu məlumatları çox vacib hesab etdilər– bu məlumatlar motor resurslarının və müxtəlif avtomobilin bir çox detallarının dəqiqləşməsində əsas rol oynadılar. Qeyd edək ki, baş çoxluq – az və ya çox eynicinsli obyektlərin böyük çoxluğudur və həm də obyektdən obyektə təsadüfi dəyişirlər. Bu xarakteristikalar baş çoxluqda necə paylanmışdır– bu çoxluğun öyrənməyin əsas məqsədidə budur. Əgər tədqiq olunan çoxluq kiçik olsaydı, onda onun elementlərinin hər birinin xarakteristikasını göstərməklə sadəcə olaraq hər elementi təsvir etmək olardı.

Lakin baş çoxluq çox böyükdür (tərifə əsasən). Hətta hər bir elementi təsvir etmək mümkün olsaydı belə (müasir kompüterlər bunu etməyə imkan verir) , alınan nəticələri həddindən çox olduğundan göstərmək praktiki olaraq mümkün olmur.

İnsan beyni bu həcmdə informasiyaları təhlil etmək üçün çox zəifdir. İnformasiyanın ilkin statistik işlənməsi də məhz bu məqsədə xidmət edir – bu informasiyaları kompakt, başa düşülən şəkildə ifadə etmək.

Misal 1, 2 –də anketlərdən götürülmüş informasiya ilkin işlənildikdən sonra kompakt, görünən şəkildə verilmişdir. Bundan əlavə, hər iki misalda marketinq şöbəsinin fikirinə görə anketlər çoxluğu baş çoxluğu adekvant təsvir edir.

2. Baş çoxluq və ondan seçmə. Baş çoxluğun bütün elementlərini tədqiq etmək məqsədəuyğun deyildir və yaxud aşağıdakı səbəblərdən mümkün deyildir:

a) baş çoxluq çox böyük ola bilər;

b) ayrılıqda götürülmüş, hətta bir elementin öyrənilməsi böyük çətinliklə qarşılaşa bilər;

c) öyrənilmə prosesində elementlər zərər çəkə bilərlər, bəzən prosesdə onlar məhv olurlar və s.

Bu səbəblərdən də baş çoxluqdan bir neçə elementi seçirlər və onları öyrənirlər. Bu bir neçə *element seçmə* adlanır. Yuxarıda göstərilən səbəbdən seçmə çox da böyük ola bilməz.

Lakin biz istəyirik ki, seçməni öyrənərkən aldığımız nəticələri bütün baş çoxluğa genişləndirək, yəni seçmə baş çoxluğu təmsil edə bilməlidir. Başqa sözlə desək seçmə bizi maraqlandıran xarakteristikaya görə baş çoxluğun modeli olmalıdır. Burada biz modelləşmənin ümumi prinsipial çətinliyi və ziddiyyəti ilə rastlaşırıq – aşğıdakı iki ziddiyyətli tələb arasında kompromis tapmalıyıq: tədqiqatın həcmini azaltmaq üçün seçmə baş çoxluğu təmsil etdiyindən o, böyük olmalıdır. Bu çox çətin problemdir. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika üsulları bu problemi qismən həll etməyə imkan verir. Sonralar bunun üzərində təfsilatı ilə dayanacığıq. Baş çoxluq az və ya çox bircins obyektlərin çox böyük toplusudur, bizi bu obyektlərin hər hansı kəmiyyət əlaməti maraqlandırır. Baş çoxluqdan seçmə isə– bu obyektlərin kiçik sırasıdır ki, həmin obyektlərin əlamətinin qiyməti götürülür və bununla da sadəcə olaraq ədədlər sırası alınır.

İnformasiyanın ilkin statistik işlənməsi böyük olmayan ədədlər sırasının tədqiqinə gətirilir.

Tutaq ki, təsadüfi X kəmiyyəti tədqiq olunur. Biz bir-birinin ardınca sınaqlar apararaq, nəticədə X – in hansı qiymətlərini alarıq. X – in paylanma qanunu bizə məlum deyildir. Onu necə tapaq? Aydındır ki, başqa imkanımız olmadığından biz ardıcıl sınaqlar aparmalıyıq və hər dəfə X – in aldığı qiymətləri qeyd etməliyik və çalışmalıyıq ki, bu qiymətlərə görə X –in paylanma sırasını heç olmazsa təqribi də olsa müəyyən edək. Aparılan sınaqlar nəticəsində təsadüfi X kəmiyyətinin alacağı qiymətlər çoxluğunu fikrən də olsa təsəvvür edək. Bu tədqiq edecəyimiz baş çoxluğudur. Beləliklə, biz təsadüfi kəmiyyətin tədqiqini biz uyğun baş çoxluğun tədqiqinə gətirdik. Digər tərəfdən tutaq ki, hər hansı baş çoxluq var və biz onun elementlərinin hər hansı Y xarakteristikası ilə maraqlanırıq. Baş çoxluğun hər hansı elementinin tədqiqi, aparılan sınaq nəticəsində tədqiq olunan Y xarakteristikası hər hansı qiymətinin tapılması kimi başa düşülə bilər. Deməli, biz baş çoxluğun tədqiqini hər hansı təsadüfi kəmiyyətin öyrənilməsinə gətirdik.

Beləliklə, müəyyən mənada təsadüfi kəmiyyət və baş çoxluq-eyni bir şeydir.

3. Seçmənin xarakteristikaları. Tədqiq etdiyimiz təsadüfi kəmiyyəti X ilə işarə edək. Tutaq ki, $W=\{e_1,...,e_n\}$– seçmədir, $e_1,...,e_n$– onun elementləridir, n–seçmənin həcmidir.

Seçmənin statistik işlənməsi aşağıdakı variantların tərtibindən başlanır:

a) seçmənin $e_1,...,e_n$ elementləri azaltmayan istiqamətdə düzülür və $e_1,...,e_n$–sırası alınır.

b) seçmənin eyni elementləri qruplaşdırılır və $x_1,...,x_\nu$ variantı alınır (beləliklə ν– seçmənin variantlarının sayıdır). Sonrakı işləmə variantların sayından asılıdır. Əgər variantların sayı kiçikdirsə – 20 – 25 –dən çox deyilsə, onda diskret variasiya sırası tərtib olunur.

Diskret variasiya sırası (DVS) belə tərtib edilir:

1) variantların m_i və $\hat{P}_i=\frac{m_i}{n},\ i=1,...,\nu$ tezlikləri hesablanır (aydındır ki, $\sum_i m_i=n$ və $\sum_i P_i=1$) ;

2) aşağıdakı cədvəl qurulur və bu cədvələ DVS-ı deyirlər:

x_i	x_1	...	x_ν

$\hat{P}_i = \dfrac{m_i}{n}$	$\hat{P}_1$	$\cdots$	$\hat{P}_v$

DVS-ə görə tezliklər çoxbucaqlısı qurmaq olar, bunun üçün müstəvi üzərində koordinatları $\left(x_i, \hat{P}_i\right)$ olan nöqtələri birləşdirərək sınaq xətt alarıq.

DVS-ə görə həm də empirik paylanma funksiyasını təyin etmək olar:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0 & z \le x_1, \\ \hat{P}_1 + \ldots + \hat{P}_{i-1} & x_{i-1} < z \le x_i \quad (i = 2, \ldots, v) \\ 1 & z > x_v \end{cases} \qquad (1)$$

Əgər variantların sayı çox olarsa, onda interval variasiya sırası (İVS) tərtib olunur:

1) variantların aşağı sərhədi a və yuxarı sərhədi b elə təyin edilir ki, $[a, b]$ parçası bütün variantları özündə saxlaya bilsin; adətən hesab edirlər ki, $a = \min_i x_i$, $b = \max_i x_i$ bəzən isə a və b – i münasiblik nöqteyi –nəzərindən təyin edirlər, lakin $\min_i x_i$ və $\max_i x_i$ –dən çox uzaq olmamaq şərtilə.

2) Qruplaşma intervalının uzunluğuna bərabər v ədədi tapılır, v ədədi seçmənin həcmindən asılıdır və 8 – 10 – dan kiçik, 20 – 25 – dən isə böyuk olmamalıdır, qruplaşma intervalı $h = \dfrac{(b - a)}{v}$;

3) İntervallar şkalası müəyyən edilir $a_i = a_1, \ldots, a_{i+1} = a_i + h, \quad a_{v+1} = a_v + h = b$ bu intevalların ortası qeyd edilir $y_1, \ldots, y_v$.

4) Hər bir intervala düşən seçmənin elementlri $m_1,...,m_\nu$ hesablanır; bu *ədədlər interval tezlikləri* adlanırlar $\hat{P}_i = \frac{m_i}{n}$.

5) Aşağıdakı cədvəl qurulur:

$[a_i, a_{i+1})$ y_i	$[a_1, a_2)$ y_1	...	$[a_\nu, a_{\nu+1})$ y_ν
$\hat{p}_i$	$\hat{p}_1$	...	$\hat{p}_\nu$

бу ъядвял интервал вариасийа сырасыдыр.

Гейд едяк ки, чох щалларда интервал вариасийа сырасы ъядвялин йалныз ахырынъы ики сятириня дейирляр:

y_i	y_1	...	y_ν
$\hat{p}_i$	$\hat{p}_1$	...	$\hat{p}_\nu$

(2)

İnterval variasiya sırasına görə tezliklər çoxbucaqlısını qurmaq lazımdır, bunun üçün $\left(y_i, \hat{P}_i\right)$ nöqtələrini birləşdirib, müstəvi üzərində sınıq xətt almaq lazımdır. İnterval variasiya sferasından həm də empirik paylanma funksiyası təyin edilir.

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} 0 & z \le a_2, \\ \hat{p}_1 + ... + \hat{p}_{i-1} & a_i < z \le a_{i+1} \quad (i = 2,...,\nu) \\ 1 & z > a_{\nu+1} \end{cases},$$

Qeyd edək ki, empirik paylanma funksiyasını (2) sırasına əsasən də təyin etmək olar:

$$\hat{F}(z)=\begin{cases}0 & z\le y_1,\\ \hat{p}_1+\ldots+\hat{p}_{i-1} & y_{i-1}<z\le y_i \quad (i=2,\ldots,\nu)\\ 1 & z>y_\nu\end{cases}$$

Seçmənin digər xarakteristikalarından onun elementlərinin orta qiymətini və yaxud seçmə ortanı qeyd edək:

$$\overline{X}=\frac{(e_1,\ldots,e_n)}{n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}e_i\right)}{n},$$

Əgər variantlar və onların tezlikləri sırası tərtib edilibsə , onda $\overline{X}=\frac{(x_1m_1,\ldots,x_\nu m_\nu)}{n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_im_i\right)}{n},$

вя йахуд да яэяр ДВС-ы гурулубса, онда

$$\overline{X}=x_1\hat{p}_1+\ldots+x_\nu\hat{p}_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}x_i\hat{p}_i\,.$$

Ахырынъы ики цсул сечмя ортаны дягиг тапмаг имкан верир. Яэяр интервал вариасийа сырасы гуруларса, онда бу сырайа эюря сечмя ортанын тягриби гиймятини тапмаг олар: $\overline{X}\approx y_1\hat{p}_1+\ldots+y_\nu\hat{p}_\nu=\sum_{i=1}^{\nu}y_i\hat{p}_i\,.$

Дисперсийанын аналогу олараг сечмя дисперсийа анлайышындан истифадя едрляр:

$$S^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(e_i-\overline{X}\right)^2\right)}{n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}e_i^{\,2}\right)}{n-\overline{X}^2},$$

və yaxud variantlar və onların təzlikləri sırası qurulubsa, onda

$$S^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{X}\right)^2 m_i\right)}{n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} m_i x_i^{\,2}\right)}{n}-\overline{X^2},$$

və yaxud da, əgər diskret variasiya sırası qurulubsa, onda

$$S^2=\sum_{i=1}^{\nu}\left(x_i-\overline{X}\right)^2 \overset{\Lambda}{P_i}=\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^{\,2}\,\overset{\Lambda}{P_i}\right)-\overline{X^2}$$

Хцсуси щалда, яэяр интервал вариасийа сырасы тяртиб олунарса, онда сечмя дисперсийанын тягриби гиймятини тапмаг олар:

$$S^2\approx\sum_{i=1}^{\nu}\left(y_i-\overline{X}\right)^2 \overset{\Lambda}{P_i}=\left(\sum_{i=1}^{\nu} y_i^{\,2}\,\overset{\Lambda}{P_i}\right)-\overline{X^2}\,.$$

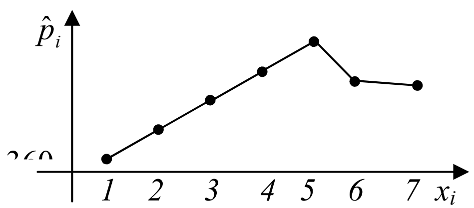
Misal 3. Müşahidələrin nəticələrinə görə: 1, 7, 7, 2, 3, 2, 5, 5, 4, 6, 3, 4, 3, 5, 6, 6, 5, 5, 4, 4 diskret variasiya sırasını qurun, tezliklər çoxbucaqlısını, seçmə paylanma funksiyasının qrafikini çəkin. Seçmə ortanı və seçmə dispersiyanı iki üsulla hesablayın. Doğruya oxşar baş çoxluğu və təsadüfi kəmiyyəti düşünüb tapın.

Həlli. Seçmənin həcmi *p=20*. Seçmənin elementlərini artan istiqamətdə düzək: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7.

İndi isə variantları və onların tezliyini (mötərizədə) yazaq: 1(1), 2(2), 3(3), 4(4), 5(5),6(3), 7(2). Variantlar çox olmadığından diskret variasiya sırasını quraq:

1	2	3	4	5	6	7
1/20	2/20	3/20	4/20	5/20	6/20	7/20

Тезликляр чохбуъаглысыны гураг (шякил 1)



Səkil 1.

Seçmə ortanı tapaq:

$\overline{X}$ =(1+7+7+2+3+2+5+

+5+4+6+3+4+3+5+6+6+
+5+5+4)/20=4,15

Başqa üsul – DVS-nın köməyi ilə:

$\overline{X}$ = (1·1+2·2+3·3+4·4+5·5+3·6+2·7) /20=4,1

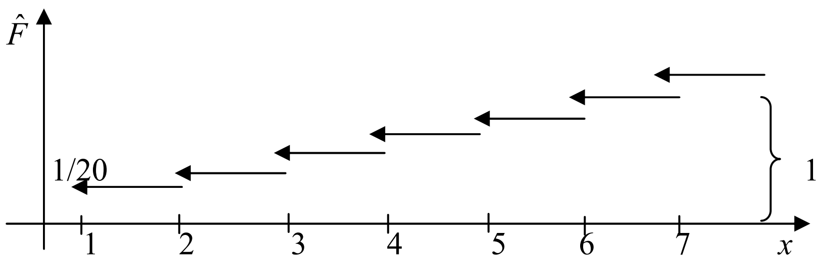
Seçmə dispersiyanı tapaq:

S^2=(1^2+7^2+ ... +4^2) /20 –$(4,1)^2$ = 431/20-16,81=4,74

Başqa üsul – DVS-nın köməyi ilə:

S^2= (1·1^2 +2·2^2 +...+ 2·7^2) /20 - $(4,1)^2$ = 4,74

Seçmə paylanma funksiyasının qrafikini quraq (şəkil 2)



Şəkil 2.

Misal 4. Müşahidələrin nəticələrinə görə:
5, 11, 22, 27, 98, 87, 73, 42, 46, 37, 52, 58, 61, 74, 18, 26, 44, 45, 62, 63, 69, 81, 56, 58, 32, 35, 49, 51, 77, 39 – interval variasiya sırasını, tezliklər çoxbucaqlısını, seçmə paylanma funksiyasının qrafikini qurun. Seçmə ortanı iki üsulla hesablayın. Doğruya oxşar baş çoxluğu və yaxud uyğun təsadufi kəmiyyəti düşünüb tapın.

Həlli. Seçmənin həcmi *n=30*. Seçmənin elementlərini artan istiqamtdə düzək:

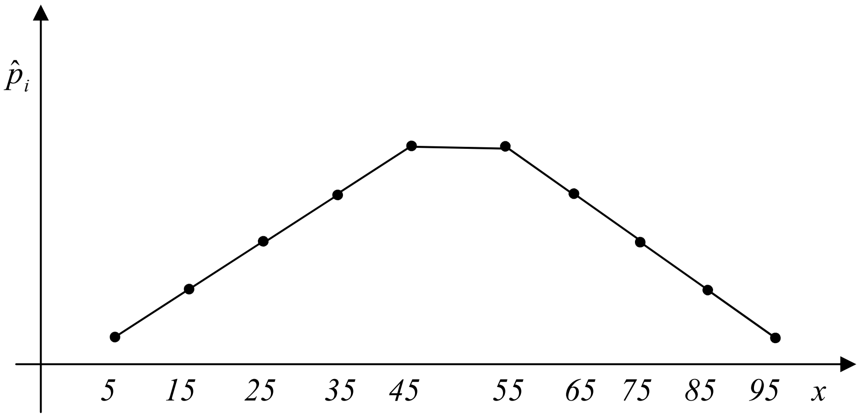
5, 11, 18, 22, 26, 27, 32, 35, 37, 39, 42, 44, 45, 46, 49, 51, 52, 56, 58, 58, 61, 62, 63, 69, 73, 74, 77, 81, 87, 98.

İnterval variasiya sırasını quraq:

$a = 0, b = 100,\ h = 10,\ \nu = 10$ götürmək əlverişlidir. İnterval variasiyası aşağıdakı kimi olar:

[0, 10) 5	[10, 20) 15	[20, 30) 25	[30, 40) 35	[40, 50) 45	[50, 60) 55	[60, 70) 65	[70, 80) 75	[80, 90) 85	[90, 100) 95
1/30	2/30	3/30	4/30	5/30	5/30	4/30	3/30	2/30	1/30

Tezliklər çoxbucaqlısını quraq (şəkil 3)



Şəkil 3.

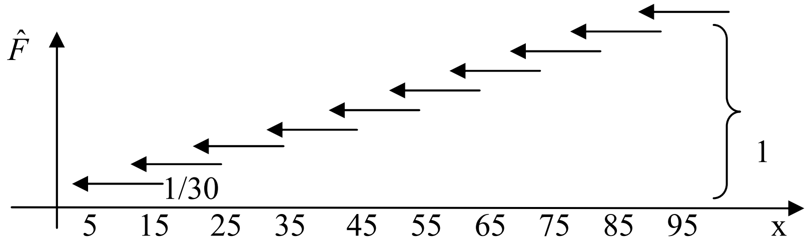
Seçmə ortanı tapaq:

$\overline{X}$ =(5+11+22+27+98+87+73+42+46+37+52+58+61+
74+18+26+44+45+62+63+69+81+56+58+32+35+
+49+51+77+39)/30= 50,4

Başqa üsul – interval variasiya sırasından istifadə etməklə:

$\overline{X}$ =(5·1+15·2+25·3+35·4+45·5+55·5+65·4+75·3+85·2+95·1)/30=
=1520/30=50,6

Seçmə paylanma funksiyasının qrafiki şəkil 4-də göstərilmişdir.



Şəkil 4.

□□□□□□□□□□

1. 1996-□□ □□□□ □□□□□□□□□ 100 □□□□.□□□□□ □□□□□□□ (□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□ 1%), 50 □□□□ (15%), 20 □□□□. (30%), 10 □□□□. (20%), 5 □□□□. (14%) □□ 1 □□□□. (20%) □□□□□□□□□□□ □□□. □□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□ 20 □□□□□ □□□ □□□□: 1 □□□□ (4), 5 □□□□.(5), 10□□□□. (5), 20 □□□□. (5), 50 □□□□ (1), 100□□□□. □□□ □□□.
□□ □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□. □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ 20 □□□□□ □□□ □□□□□□□□□□□ 100 □□□□. □□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□ □□□□?

□□□□□. □□□□□□□□□□ □□□□□□□□:

$$P = (1-1/100)^{20} = (1-1/100)^{100\cdot(1/5)} \approx e^{-1,5} \approx 0,8$$

2. □□□□□□□□□ □□, □□□□□ 2 -□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□□. □□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□ □ □□ □ □□□□ □□□□□ □□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□, □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□,

[illegible]

3. [illegible] 35-[illegible] 50-[illegible] [illegible]?

4. [illegible]?

Mövzu 17.
NORMAL QANUN. LİMİT TEOREMLƏRİ VƏ ONLARIN TƏTBİQLƏRİ

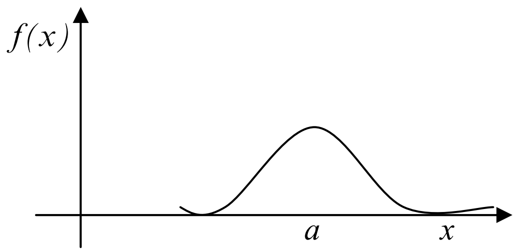
17.1. Normal qanun, böyük ədədlər qanunu, limit teoremləri

1.Normal qanun və onun verilməsi parametrləri.

Бу ганун ещтимал нязяриййяси вя рийази статистика нязяриййясиндя чох мцщцм рол ойнайыр.

Тясядцфи X кямиййятинин ещтималынын сыхлыг функсийасы: $f(x) = \left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})}\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{(2\sigma^2)}}$ шякилиндя оларса,

дейирляр ки, X тясадцфи кямиййяти a вя σ параметрляри иля нормал пайланмышдыр (нормал пайланманын сыхлыг функсийасынын графики шякил 1-дя верилиб).



Şəkil 1.

Göründüyü kimi normal paylanmış təsadüfi kəmiyyət kəsilməzdir. a və σ parametrlərinin mənasını aydınlaşdıraq. Riyazi gözləmənin tərifinə əsasən

$$M[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})}\right)e^{-\frac{(x-a)^2}{(2\sigma^2)}}dx$$

$x - a = u$ əvəzləməsi bu inteqralı aşağıdakı iki inteqralın cəminə gətirir

$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{u}{(\sigma\sqrt{2\pi})}\right)e^{-\frac{u^2}{(2\sigma^2)}}du \quad \text{və} \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{a}{(\sigma\sqrt{2\pi})}\right)e^{-\frac{u^2}{(2\sigma^2)}}du\,.$$

Биринъи интеграл сыфыра бярабярдир. Икинъи интеграл ися $a\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{u^2}{\left(2\sigma^2\right)}}du$ -а бярабяр олар. Нязяря алсаг ки, $\left(\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{\frac{u^2}{\left(2\sigma^2\right)}}$ – нормал пайланманын сыхлыьыдыр вя онун параметрляри 0 вя σ – а бярабярдир, онда $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{u^2}{\left(2\sigma^2\right)}}du$ щямин сыхлыьын интегралыдыр вя демяли ващидя бярабярдир. Демяли рийази эюзлямя a –йа бярабярдир. Ейни гайда иля дисперсийаны щесабласаг, аларыг: $D[x]=\sigma^2$ демяли $\sigma=\sqrt{D[x]}$. Беляликля, σ параметри тясадцфи X кямиййятинин орта квадратик сапмасыдыр.

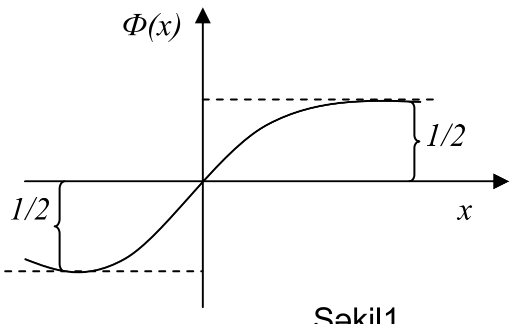
Тясадцфи X кямиййяти a вя σ параметрли нормал пайланмышдырса, ону $X \in N(a,\sigma)$ кими ишаря едирляр.

Ещтималы щесаблайаркян, беля тясадцфи X кямиййяти $Z \in N(0,1)$ – я эятирилир. Доьрудан да, тутаг ки, F_x, F_z уйьун олараг X, Z – ин пайланма функсийасыдыр, онда $F_x(t)=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{(u-a)^2}{\left(2\sigma^2\right)}}du;$ $\frac{(u-a)}{\sigma}=y$ явязлямясині едяряк, аларыг: $F_x(x)=F_z\left(\frac{(t-a)}{\sigma}\right)$. Буна эюря дя ихтийари $\alpha<\beta$ цчцн аларыг:

$$P(\alpha<x<\beta)=F_x(\beta)-F_x(\alpha)=F_z\left(\frac{(\beta-a)}{\sigma}\right)-F_z\left(\frac{(\alpha-a)}{\sigma}\right).$$

Beləliklə, $z \in (0,1)$ təsadüfi kəmiyyətinin F_z paylanma funksiyasını bilərək, başqa normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün ehtimallarını tapmaq olar. F_z –dən daha çox geniş yayılmış funksiya Laplas funksiyasıdır: $\Phi(t)=\int_0^t\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{u^2}{2}}du$. Göründüyü kimi $F_x(0)=\int_{-\infty}^{t}\left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{2}$ olduğundan və inteqralaltı funksiya cüt olduğu üçün, $\Phi(t)=F_x(t)-\frac{1}{2}$ olar. Beləliklə, $X\in N(a,\sigma)$ üçün alarıq: $P(\alpha<x<\beta)=\Phi\left(\frac{(\beta-a)}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{(\alpha-a)}{\sigma}\right)$. Deməli normal paylanmış təsadüfi kəmiyyətin bütün mümkün ehtimallarının tapılması Laplas funksiyasına gətirildi. Laplas funksiyası elementar funksiya deyildir, lakin yaxşı öyrənilmişdir.

Ehtimal nəzəriyyəsinə aid hər bir dərslikdə bu funksiyanın qiymətlər cədvəli vardır. Laplas funksiyası artan və tək funksiyadır, $\Phi(0)=0,\ \Phi(-\infty)=-\frac{1}{2},\ \Phi(\infty)=\frac{1}{2}.$ Şəkil 2-də bu funksiyanın qrafiki verilmişdir. Yadda saxlamaq xeyirlidir ki, $\Phi(3)\approx 0,498$ yəni $\frac{1}{2}$ -ə çox yaxın qiymət. Bu fakt «üç siqma» qaydası gətirir.



Şəkil1.

«Üç siqma» qaydası. Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti a və σ parametrləri ilə normal paylanmışdır, onda
$P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)\approx 1 \quad (\approx 0,997)$.

Doğrudan da

$$P(a-3\sigma < X < a+3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) \approx 1 \quad (\approx 0{,}997).$$

Misal 1. Müəyyən əsaslar var ki, təsadüfi seçilmiş tələbənin boyu normal paylanma qanununa tabe olur, riyazi gözləmə olan a parametri tələbə kontingetinin orta boyuna bərabərdir; tutaq ki, a=174 sm. σ parametri isə təqribi olaraq təyin edək, tutaq ki, bütün tələbələrin boyu 156 sm və 192 sm arasındadır, onda «üç siqma» qaydasına görə alarıq ki, σ=6. Beləliklə, tələbənin boyu $T \in N(174{,}6)$. $P(T > 180)$, $P(T > 190)$, $P(160 < T < 190)$ ehtimallarını tapaq.

Həlli. Axtarılan ehtimalları tapmaq üçün $P(\alpha < T < \beta) = \Phi\left(\frac{(\beta - 174)}{6}\right) - \Phi\left(\frac{(\alpha - 174)}{6}\right)$ düsturunu tətbiq etsək alarıq: $P(180 < T) = P(180 < T < \infty) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{(180-174)}{6}\right) = \frac{1}{2} - 0{,}34 = 0{,}16 \cdot$

$$P(T < 190) = \Phi\left(\frac{(190-174)}{6}\right) - \Phi(-\infty) = \Phi\left(\frac{16}{6}\right) + \frac{1}{2} = 0{,}996 \cdot$$

$$P(160 < T < 190) = \Phi\left(\frac{(190-174)}{6}\right) - \Phi\left(\frac{(160-174)}{6}\right) = \Phi\left(\frac{16}{6}\right) + \Phi\left(\frac{14}{6}\right) = 0{,}985$$

2. Böyük ədədlər qanunu. Dar mənada «*böyük ədədlər qanunu*» dedikdə bir sıra riyazi teoremlər nəzərdə tutulur ki, onlar da təsdiq edir ki, böyük sayda sınaqlar aparıldıqda orta xarakteristikaların müəyyən sabit ədədə yaxınlaşdığını hökm edirlər. Geniş mənada isə bu qanun hökm edir ki, çox böyük sayda təsadüfi hadisələrin orta nəticələri təsadüfliyini itirirlər və böyük dəqiqliklə öncədən müəyyən olunurlar.

Böyük ədədlər qanununun mühüm teoremlərini isbat etmək üçün *Çebışev bərabərsizliyi* ilə tanış olmaq zəruridir.

Çebışev bərabərsizliyi.

Tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyətidir və onun riyazi gözləməsi m_X, dispersiyası isə D_X – dir. Onda, ixtiyari $\varepsilon > 0$

üçün təsadüfi X kəmiyyətinin öz riyazi gözləməsindən ε– dan çox sapmasının ehtimalı yuxarıdan $\frac{D_X}{\varepsilon^2}$ – ilə məhduddur. $P(|x-m_x|>\varepsilon)\leq\frac{D_X}{\varepsilon^2}$

İsbatı. Sadəlik üçün fərz edək ki, təsadüfi X kəmiyyəti diskretdir və onun paylanma sırası aşağıdakı kimidir: $\left|\frac{x_1}{p_1}\right|\ldots\left|\frac{x_i}{p_i}\right|\ldots$

Тярифя ясасян, $D[x]=M\left[(x-m_x)^2\right]=\sum_i (x_i-m_x)^2 p_i$

Бу ъямдя бязи топлананлары атсаг, бярабярсизлик аларыг:

$D_x\geq\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}(x_i-m_x)^2 p_i$ $(x_i-m_x)^2$– ы ε^2–ы иля явяз етсяк бярабярсизлийи даща да эцъляндирярик: $D_x\geq\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}\varepsilon^2 p_i$ вя йа $D_x\geq\varepsilon^2\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}p_i\cdot$ $\sum_{|x_i-m_x|>\varepsilon}p_i$ ифадяси $P(|x-m_x|>\varepsilon)$ ещтималы олдуьундан демяли, $D_x\geq\varepsilon^2 p(|x-m_x|>\varepsilon)$. Ахырынъы бярабярсизлийи щяр ики тяряфини ε^2 – а бюлсяк *Чебышев бярабярсизлийини* аларыг. Айдындыр ки, Чебышев бярабярсизлийини башга шякилдя дя йазмаг олар:
$P(|x-m_x|>\varepsilon)>|-D_x|\varepsilon^2\cdot$

Чебышев бярабярсизлийиндян истифадя едяряк, онун ады иля баьлы теореми дя исбат етмяк олар.

Çebışev teoremi.

Tutaq ki, X riyazi gözləməsi a və dispersiyası d olan təsadüfi kəmiyyətdir. n asılı olmayan sınaqlardan ibarət seriya aparaq və bu seriyalarda təsadüfi X

kəmiyyətinin aldığı qiymətlərin ədədi ortasını Y_n hesablayaq. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $n \to \infty$ $P(|Y_n - a| > \varepsilon) \to 0$ olar.

Bu teoremi izah edək. Qeyd edək ki, əgər n sınaqdan ibarət seriyalar keçirilərsə, onda Y_n kəmiyyəti seriyadan seriyaya dəyişər, yəni Y_n təsadüfi kəmiyyətdir. Deməli, Y_n – in qiyməti mütləq deyil ki, X – in riyazi gözləməsi ilə üst-üstə düşsün. Lakin, nə qədər fərqlənəcək və bu hal tez-tezmi baş verəcək? Çebışev teoremi hökm edir ki, təsadüfi X kəmiyyətinin onun riyazi gözləməsindən sapmasının böyük olmasının ehtimalı seriyaların uzunluğu artdıqca sıfıra yaxınlaşır. Deməli, biz arxayın olmaq üçün ki, ədədi orta təqribən riyazi gözləməyə bərabərdir, onda sınaqların sayını artırmalıyıq.

Çebışev teoreminin isbatı.

i –ci sınaqda X –in alacağı qiyməti X_i ilə işarə edək. Onda $Y_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n}$. Riyazi gözləmənin xassəsinə görə alarıq: $M[Y_n] = \left(\frac{1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} M[X_i]$. Lakin bütün təsadüfi X_i kəmiyyətləri $i = 1,...,n$ təsadüfi X kəmiyyəti kimi paylandıqlarından $M[X_i] = M[X] = a$ və deməli $M[Y_n] = a$ olar. Sınaqlar asılı olmadığından, X_i –lər asılı olmayandırlar, onda dispersiyanın xassəsinə əsasən alarıq:

$$D[Y_n] = \left(\frac{1}{n^2}\right)\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{d}{n}$$

İndi Çebışev brabərsizliyini tətbiq edək:

$P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) \le \frac{D[Y_n]}{\varepsilon^2}$ və ya $P(|Y_n - M[Y_n]| > \varepsilon) \le \frac{d}{(n\varepsilon^2)}$.

$\frac{d}{(n\varepsilon^2)} \to 0$ olduğundan $(n \to \infty)$ onda $P(|Y_n - a| > \varepsilon) \to 0$

olar $n \to \infty$ olduqda. Çebışev teoremindən başqa teorem alınır.

Bernulli teoremi. Tutaq ki, A hadisəsinin ehtimalı P– dir. n–asılı olmayan sınaqlardan ibarət seriyalar aparaq, bu seriyalarda A hədisəsinin baş vermə tezliyini γ_n hesablayaq. Onda ixtiyari $\varepsilon > 0$ üçün $P(|\gamma_n - a| > \varepsilon) \to 0$ olar.

İsbatı. A hadisəsinə görə təsadüfi X kəmiyyətini təyin edək. Əgər A baş verərsə, onda X vahidə bərabərdir, baş verməzsə onda sıfıra bərabərdir. Onda $M[x] = p,\ D[x] = pq$. Çebışev teoreminin isbatında təyin etdiyimiz təsadüfi Y_n kəmiyyətini γ_n– tezliyindən başqa bir şey deyildir. Çebışev teoreminə görə alarıq:

$P(|\gamma_n - a| > \varepsilon) \to 0$ əgər $n \to \infty$ olarsa.

Bernulli teoremi ehtimal nəzəriyyəsində mərkəzi teoremlərdən biridir, bu teorem hadisənin tezliyi ilə ehtimalını dəqiq əlaqələndirir. Bu teoremi izah edək. Qeyd edək ki, əgər n sınaqdan ibarət seriyalar aparılırsa, onda seriyalarda tezlik γ_n dəyişəcək, yəni tezlik təsadüfi kəmiyyətdir. Deməli onu qiymət zəruri deyil ki, hadisənin ehtimalı ilə üst – üstə düşsün. Bernulli teoremi hökm edir ki, bu seriyaların uzunluğu artdıqca təsadüfi kəmiyyəti tezliyinin onun ehtimalından sapmasının ehtimalı sıfıra yaxınlaşır. Beləliklə, biz əmin olmaq üçün ki, tezlik təqribi ehtimala bərabərdir onda sınaqların sayını artırmalıyıq.

3. Mərkəzi limit teoremi və onun nəticələri. Bu teorem böyük sayda təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin limit paylanmasını müəyyən edir.

□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□ (□□□):

[illegible], $X_1,...,X_n -$ [illegible], [illegible] $n \to \infty$ – [illegible] $Z_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ [illegible]-[illegible] [illegible].

[illegible], $n \to \infty -$ [illegible] α [illegible] β [illegible]:

$$P\left(\alpha < \frac{(z-na)}{(\sigma\sqrt{n})} < \beta\right) \to \Phi(\beta) - \Phi(\alpha),$$ burada a, σ-riyazi gözləmə və orta kvadratik sapmadır, $\Phi -$ Laplas funksiyasıdır.

[illegible], [illegible] - $\frac{(z-na)}{(\sigma\sqrt{n})}$ [illegible]-[illegible] 0,1 [illegible]. [illegible], [illegible].

Muavr-Laplasın inteqral teoremi. Tutaq ki, A hadisəsinin ehtimalı $P -$ dir. Asılı olmayan n sınaqdan ibarət seriya aparaq və bu seriyalarda A hadisəsinin baş vermə sayı $K -$ ı hesablayaq. Onda n böyük olduqda:

$$P(k_1 \le k_2 \le k_3) \approx \Phi\left(\frac{(k_2 - np)}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{(k_1 - np)}{\sqrt{npq}}\right)$$

[illegible], K [illegible] n [illegible]-[illegible], [illegible].

□□□□□□ **3.** □□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ 20% □□□□□□□ □□□□□□□. □□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□, 0,95 □□□□□□□□□□ □□□□ 50 □□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□?

□□□□□□. □□□□□□-□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□:

$$p=\frac{4}{5},\quad q=1-p=\frac{1}{5},\quad p(50\le k)=0{,}95$$

n asılı olmayandır, onu tapmaq lazımdır. Başqa tərəfdən, $p(50\le k)=\frac{1}{2}-\Phi(u),$ burada $u=\frac{(50-np)}{\left(\sqrt{npq}\right)}$

□□□□□□□, $\Phi(u)=0{,}45$ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□: $u=-1{,}64$. □□□□□□□□□□, $\left(\frac{4n}{5}-50\right)=1{,}64\sqrt{\frac{4n}{25}}$.

□□ □□□□□□□□ □□□□□ □□□□□ □□□□□□□ □□, $n\ge 69$.

□□□□□□□□□□□

1. □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□ «□□ □□□□□□» □□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□□?

□□□□□□. □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□:

$$P\left(\left|X-m_x\right|\le 3\sigma_x\right)>1-D_x/(9\sigma_x^2),$$

□□□□ $P\left(\left|X-m_x\right|\le 3\sigma_x\right)\ge 1-1/9$

□□□□□□□□ □□□□□□□: $P\left(\left|X-m_x\right|\le 3\sigma_x\right)>8/9$

2. □□□□□□□□□□ □ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□ □$=2$ □□ $\sigma=4$ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□.

$P(x>1)$, $P(2<x<5)$, $P(x<2)$, $P(x=3)$

□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□. □□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□

□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□. □□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□ «□□ □□□□□» □□□□□□□ □□□□ □□□□?

3. □□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□ 500 □□□□□□, 100 □□□□□□ □□ 50 □□□□□□ □□□□ □□, □□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ 10%-□, □□□□□□□□□ □□□ 60% □□□□□□ □□□□. □□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□ 100 □□□□ □□□ □□□□□. □□□□□□□□□ □□ □□□□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□, □□□ □□□□□ 0,9 –□□□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□.

4. □□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□ □□□□ 10 □□□□□□□□□ □□□. □□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□□ □□□□ □□□□□□□ 10 □□□. □□□□□□□ □□ 90% □□□□□ 10 □□□.-□□□ □□□□□□ 1□□□.-□□□ □□□ □□□□□. □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□ □) 12 □□□.-□□□ □□□ □□□□□□□□□□□; □) 9 □□□.-□□□ □□ □□□□□□□□□; □) 8 □□ 12 □□□. □□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□.

5. □□□- □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□ $N\ (20\ мм,\ \sigma^{-1}=1мм)$ □□□□□ □□□□□□□. □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□ □□□□? □□□ □□□□□□□□ □□□□□ □□ □□□□□ □□□□?(□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□ 3 □□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□).

17.2. Böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoreminin tətbiqləri

1. Asılı olmayan faktorların təsirinin ortalanması.

□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□ □□, □□□ □□□□□ □□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□ □□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□.

[illegible].

[illegible]. [illegible], $X_1,\dots,X_n-$ [illegible], [illegible] a [illegible] σ [illegible]. Y_n- [illegible]. [illegible]

$M[Y_n]=a,\quad \sigma[Y_n]=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ [illegible].

[illegible].

[illegible] X [illegible], [illegible], [illegible].

[illegible].

[illegible], [illegible], [illegible].

[illegible].

[illegible] *4.* [illegible], [illegible]:

$Q_1=$

-10	0	10	20
0,1	0,1	0,5	0,3

$Q_2=$

-10	0	10	20
0,1	0,2	0,3	0,4

Orta gəliri və riski hesablayaq:

$\overline{Q_1}=10,\ D[Q_1]=80,\ \sigma_1=8{,}9;\ \overline{Q_2}=10,\ D[Q_2]=100,\ \sigma_2=10$.

Bu əməliyyatlardan hər hansı birini aparmaq əvəzinə (hər ikisinə vəsait çatmır), hər əməliyyat pulun yarısını qoyaq, yəni $Q=0{,}5\cdot Q_1+0{,}5\cdot Q_2$ əməliyyatını aparaq. Asanlıqla görmək olar ki,

$$\overline{Q}=10,\ D[Q]=\frac{D[Q_1]}{4}+\frac{D[Q_2]}{4}=\frac{180}{4}=45,$$ deməli,

$\sigma_Q=\sqrt{45}\approx 6{,}4$. Deməli gözlənilən orta gəlir əvvəlki kimi qaldı, risk isə əməliyyatların risqlərinin minimumundan da kiçik oldu.

2. Sığorta haqqında anlayış. Sığortada izahata ehtiyacı olan bir sıra anlayışlar var.

Sığortalı (və ya sığortalanan) – sığortalanan şəxs.

□□□□□□□□□□□□□ – □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□ □□□□.

Sığorta məbləği – əmlakın, həyatın, sağlamlığın və s. sığortalanmasına sərf olunan pul məbləği. Bu məbləğ sığorta halı meydana gəldikdə sığortalayan tərəfindən sığortalıya ödənilir. Sığorta məbləği bir çox amillərdən asılıdır və çox geniş ölçüdə dəyişir. Sığorta məbləğinin verilməsi *sığorta ödənişi* adlanır.

Сыьорта нязяриййяси фактики олараг бир аксиома ясасланыр.

Aksioma. Orta məcmu (yəni bütün sığorta müqavilələrinə görə) sığorta ödənişi yekun sığorta tarifi ilə ödənilən məbləğə bərabər olmalıdır.

Sadəlik üçün fərz edək ki, bağ evlərinin yanğından sığortalanması üçün bir illik kampaniya həyata keçirilir. Sığorta bütün yoldaşlıq bağlarında eyni bir S məbləğinə aparılır. Nəzərdə tutulur ki, sığorta bir neçə onlarla bağ evlərində müqavilə bağlanmaqla nəticələnəcək. Hansı netto – tarifi təyin etmək lazımdır? Yenə sadəlik üçün qəbul edək ki, bütün n sayda bağ evlərində sığorta müqaviləsi bağlanır. Fərz edək ki, bir ildə evlərin birinin yanma ehtimalı p –ə bərabərdir. Təsadüfi $X_i = 1$ və ya $X_i = 0$ kəmiyyətini təyin edək, yəni i - ci ev bir ildə yanacaq ya yox. Onda bütün X_i – lər asılı olmayandır və eyni paylanma sırası ilə paylananlar.

0	1
q	p

$M[X_i] = p$ və $D[X_i] = pq$.

Bu yoldaşlıq bağlarında bir ildə yanan evlərin sayı K təsadüfi kəmiyyətdir. $K = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Asanlıqla görmək olar ki, $M[K] = np,\ D[K] = npq,\ \sigma_K = \sqrt{npq}$. Mərkəzi limit teoreminə əsasən K normal paylanmışdır.

Məcmu sığorta ödənişi $W = KS$, burada S – sığorta məbləğidir, $M[W] = M[K]\cdot S = np\cdot S$. Eyni məbləği sığortalayan bütün sığorta olunanlardan almalıdır, deməli netto – tarif $\frac{(npS)}{(nS)} = P$ olar. Qeyd edk ki, real həyatda sığortalıyan P kəmiyyətini bilmir. O, yalnız müxtəlif illərdə yoldaşlıq bağlarında yanan evlərin statistikasını bilir, yəni $K_1,...,K_i$ sırasını bilir. Ona görə də P əvəzinə onun statistik qiymətini götürür, xüsusi halda P əvəzinə onun tezliyini $\hat{P} = \frac{(K_1 + ... + K_i)}{i}$ – i götürür.

3. Seçmənin reprezentativliyinin təmini. Əgər seçmə baş çoxluğun xassələrini öyrənməyə imkan yaradırsa, onda deyirlər ki, seçmə reprezentativdir və yaxud baş çoxluğu təmsil edir. Seçmənin baş çoxluğu təmsil etməsini necə təmin etmək olar?

Seçmənin reprezentativliyini təmin edən ən sadə üsul təsadüfən seçilmiş elementin tədqiq edilməsindən sonra, yenidən baş çoxluğa qaytarılmasıdır.

Bunu elə təşkil etmək olar ki, baş çoxluğun hər bir elementinin seçməyə düşməsi imkanı eyni olsun. Məsələn, bunu təsadüfi ədədlər cədvəli ilə etmək olar. Bizim zamanda bu işi kompüter vasitəsi ilə edirlər. Fərz edək ki, baş çoxluq *N* sayda elementdən ibarətdir. Onları ardıcıl olaraq natural ədədlərlə nömrələyirlər. Tutaq ki, *N* ədədi 10^m və 10^{m+1} arasındadır. Kompüteri işə salırlar və ondan *x* ədədini alırlar, vergüldən sonra *m* işarə götürürlər və natural *L* ədədini alırlar. Əgər $L \le N$ olarsa, onda *L* nömrəli elementi seçməyə ayırırlar. Bu prosesi lazımi sayda elementlər almaq üçün təkrar edirlər. Əlbəttə, seçmə nə qədər böyük olsa, onun reprezentativlik şansı bir o qədər çox olar. Lakin bir çox səbəblərdən seçmənin kiçik həcmli olması arzu ediləndir. Bu iki ziddiyyətli tələbi necə həyata keçirək?

Tutaq ki, tədqiqatın məqsədi baş çoxluq üzrə orta qiyməti və ya təsadüfən *x* kəmiyyətinin riyazi gözləməsini qiymətləndirməkdən ibarətdir. Mərkəzi limit teoreminə əsasən həcmi *n* olan seçmənin ədədi ortasından $\bar{x}$ onun riyazi gözləməsinin sapmasını qiymətləndirmək olar, yəni $P\left(\left|\bar{x} - m_x\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right)$. Əgər biz γ ehtimalı ilə bu sapmanın ε– da çox olmasını təminat vermək istəyiriksə, onda $2\Phi\left(\dfrac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \gamma$ olmalıdır.

Laplas funksiyasının arqumentinin qiymətini U_S– lə işarə edək. Bu şərtlə ki, arqumentin bu qiymətində funksiyanın qiyməti *S* olsun, onda, alarıq $\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_x} = U_{\frac{\gamma}{2}}$, buradan

$n = U_{\frac{\gamma}{2}}^2 \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$.

Xüsusi halda – γ ehtimalı ilə tezliyin *p* ehtimalından sapmasının ε – dan çox olmamasını təmin edən sınaqların *n* sayından söhbət gedərkən aşağıdakı hərəkət etmək olar: $n = U_{\frac{\gamma}{2}}^2 \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$ düsturunda σ_x məlum deyil. Lakin

$\sigma_x^2 = p(1-p) \le \frac{1}{4}$. Deməli, $n \le \frac{U_{\frac{\gamma}{2}}^2}{(4\varepsilon^2)}$.

Sınaqların zəruri sayı üçün $\frac{U_{\frac{\gamma}{2}}^2}{(4\varepsilon^2)}$ – ifadəsini götürmək olar.

Əgər *p*   *1/2* – dən xeyli fərqlənərsə, onda bu düstur lazım oaln *n*–i artırar. Əgər σ_x– i yuxarıdan qiymətləndirmək olsa, onda bu *n* ədədini azala bilər.

MƏSƏLƏLƏR

1. Ticarətdə, kənd təsərrüfatında və digər sahələrdə diversifikasiya prinsipinin tətbiqinə aid misallar göstərin.

2. Tətbiqi riyaziyyatda çox hallarda yaşama *S(x)* funksiyası ilə deyil, $l_x = l_0 S(x)$ kəmiyyəti ilə işləyirlər, burada l_0 – böyük ədəddir və bir qayda olaraq onu 100 000 – ə bərabər götürürlər. l_x– kəmiyyətinin mənasını izah edin.

Mövzu 18.
İNFORMASİYANIN STATİSTİK İŞLƏNMƏSİ

18.1. Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər. Təsadüfi kəmiyyətli funksiyalar

1. **Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər.** Sınaq nəticəsində bir ədəddən ibarət deyil, ədədlər dəstindən ibarət qiymətlər alan və alacığı qiymətləri əvvəlcədən məlum olmayan kəmiyyətlərə *çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlər* deyilir. Təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi ədədlər dəsti onun mümkün qiymətlər çoxluğunu əmələ gətirirlər.

Beləliklə, konkret ədədlər dəstini əvvəldən bilməsək də, onun mümükün qiymətlər çoxluğundan olduğunu bilirik.

Sadəlik üçün ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətlər üzərində ətraflı dayanaq. Birölçülü təsadüfi kəmiyyətlərdə olduğu kimi burada da həm diskret həm də kəsilməz təsadüfi kəmiyyətlər var. Diskret ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətlərin mümkün qiymətləri hesabı saydadır, kəsilməz ikiölçülü təsadüfi kəmiyyətlərdə isə bu qiymətlər çoxluğu mürəkkəb qurulmuşdur. İkiölçülü $\xi = (X, Y)$ diskret təsadüfi kəmiyyəti paylanma cədvəli ilə verilir, cədvəldə *X, Y* kompanentlərinin mümkün qiymətləri və P_{ij} ehtimalları $P(X = x_j, Y = y_i)$ verilir. Aydındır Ki, bütün bu ehtimalların cəmi vahidə bərabər olar.

$X \diagup Y$	x_1	….	x_j	x_n
Y_1	P_{11}	….	P_{1i}	P_{1n}

…..	….	….	….	….
y_i		…..	P_{ij}	
…..	….	….	….	….
y_m	P_{n1}	….	P_{nj}	P_{nm}

Misal 1. Qızların gözlərinin rənginə və saçlarının rənginə görə paylanmasına baxaq.

Saçlarının rənginə görə	*Gözlərinin rənginə görə*		
	Qonur	*göy*	*yaşıl*
sarı	*0,06*	*0,34*	*0,17*
Qara	*0,36*	*0,04*	*0,03*

Cədvəldə göstərilmiş ədədlərin mənası aydındır: qonur gözlü sarı saçlı qızlar bütün qızların 6% – i, göy gözlü qızlar isə 34% – i təşkil edirlər və s.

Aşağıdakı cədvəl isə qızların saçlarının rənginə görə paylanmasını verir.

Saçların rənginə görə

Sarı	*0,57*
Qara	*0,43*

Gözlərinin rənginə görə paylanma aşağıdakı cədvəldə verilir.

Gözlərin rənginə görə

qonur	*göy*	*yaşıl*
0,42	*0,38*	*0,20*

Şərti paylanma qanununu tərtib edək.

Gözlərinin rənginə sarı qızlar

qonur	*göy*	*yaşıl*
6/57	*34/57*	*17/57*

Saçlarının rənginə görə qonur gözlü qızlar

Sarı	*6/42*
Qara	*36/42*

Ümumi halda da belə hərəkət etmək lazımdır. *(X=a)* hadisəsi aydındır ki, *(X=a, Y=b)* hadisələrinin cəmidir, burada *b* *Y* – in mümkün qiymətlərindən hər hansı biri ola bilər. Bu hadisələr cüt-cüt uyuşmayandırlar, deməli, $P(X=a)=\sum_b P(X=a,Y=b)$, yəni bu ehtimalı taparkən müvafiq sütundakı bütün ehtimalları toplamaq lazımdır.

Misal 3. Tutaq ki, (*X, Y*) aşağıdakı paylanma qanuna malikdir:

y \ x	-1	0	1
0	0	0,1	0,5
1	0,2	0,1	0,1

X, Y komponentlərinin paylanma funksiyalarına və $y=0$ olduqda *X* komponentinin şərti paylanma funksiyasını tapın. *X* -in *Y* - dən kiçik qiymət almasının ehtimalını tapın.

Həlli. Komponentlərin paylanma qanununu tapmaq üçün sütunlara uyğun ehtimalları (*X* üçün) və sətirlərə uyğun ehtimalları (*Y* üçün) toplayaq:

	-1	0	1

	0	1
Y:	0,6	0,4

X :	0,2	0,2	0,2

$y = 0$ olduqda *X* komponentinin şərti paylanma qanunu- *X* –in mümkün qiymətləri dəsti ilə $P(X = a/y = 0)$ şərti ehtimalları olar. Bu ehtimalları hesablamaq üçün şərti ehtimal düsturundan istifadə etmək lazımdır:

$P(X = a/y = 0) = P(x = a.\ \ y = 0)/P(y = 0)$

Onda $y = 0$ şərtində *X* komponentinin paylanma sırasını alarıq:

	-1	0	1
X/(Y=0):	0	1/6	5/6

$P(X < Y)$ -i tapmaq üçün cədvəldə ($X < Y$) şərtini ödəyən (X, Y) cütlərini qeyd edək və uyğun ehtimalları toplayaq, onda alarıq: $P(X < Y) = 0 + 0.2 + 0.1 = 0.3$

2. Korrelyasiya və təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmaması. Yuxarıya biz ikiölçülü təsadüfi $\xi = (H, W) =$ *boy, çəki* kəmiyyətinə baxdıq.

Bu təsadüfi kəmiyyətin kompanentləri özlərini biri – birindən asılı olmayan kimi aparmırlar, lakin onların birinin qiymətinə görə digərinin qiymətini ümumiyyətlə demək olmur, amma deyə bilərik ki, böyük boya böyük çəki uyğundur və tərsinə. Belə təsadüfi kəmiyyətlərə, yəni bir kompanentinin dəyişməsinə görə digərinin duymaq mümkündürsə, onda deyirlər ki, bu təsadüfi kəmiyyətlər *korrelyasiya olunmuşlar* (dəqiq tərif sonra veriləcək). Yada salaq ki, təsadüfi *X,Y* kəmiyyətləri ixtiyari $a,\ b$ üçün $P(X = a, Y = b) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$ şərtini ödəyərsə, onda onlar *asılı olmayan* adlanırlar.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər sisteminin *(X,Y)* paylanma qanunu sadə qurulur – cədvəldə ki, P_{ij} ədədi $P_j=(p=x_j)$ və $q_i=z(Y=y_i)$ ədədlərinin hasilidir. İkiölçülü təsadüfi $\xi=(X,Y)$ kəmiyyəti, həm də iki təsadüfi *X,Y* kəmiyyətlər sistemi kimi başa düşülür və ikiölçülü $f(x,y)$ sıxlıq funksiyası ilə verilir, ehtimalı isə müstəvinin uyğun oblastında $f(x,y)$ sıxlıq funksiyasının inteqrallanması ilə tapılır. Əgər *X, Y* asılı olmayandırsa, onda ikiölçülü sıxlıq kompanentlərin sıxlıqları hasilinə bərabərdir:

$$f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y).$$

Əgər *X,Y* təsadüfi kəmiyyətlərinin korrelyasiya momenti $K_{XY}=M\left[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)\right]$ sıfıra bərabərdirsə, onda onlar *korrelyasiya olunmamış*, əks halda isə *korrelyasiya olunmuş* adlanırlar.

Riyazi gözləmənin tərifinə əsasən

$$M\left[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)\right]=N\left[(XY-m_xY-Xm_y+m_xm_y)\right]=$$
$$=M[XY]-m_xM[Y]-m_yM[X]+m_x\cdot m_y=M[XY]=m_xm_y.$$

Korrelyasiya olunmamaq asılı olmamaqdan zəif şərtdir, bunu aşağıdakı təklif təsdiq edir.

Təklif 1. Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlər korrelyasiya olunmayandır. Doğurdan da, tutaq ki, *X,Y* asılı olmayandır, onda riyazi gözləmənin xassələrinə əsasən $M[XY]=m_xm_y$, deməli, $K_{xy}=M[XY]-m_xm_y=0$.

Əgər korrelyasiya momenti müsbət olarsa, onda təsadüfi kəmiyyətlər *müsbət korrelyasiya olunmuş*, mənfidirsə onda *mənfi korrelyasiya olunmuş* adlanırlar.

Çox hallarda koorelyasiya moaenti əvəzinə korrelyasiya əmsalından $K_{xy}=\dfrac{K_{xy}}{(\sigma_x\sigma_y)}$, istifadə etmək əlverişli olur, burada $\sigma_x\sigma_y-X$ və Y – in orta kvadratik sapmalarıdır.

Təklif 2. Tutaq ki, $Y = eX + d$, burada e,d – sabitlərdir, *X, Y* – in korrelyasiya əmsalı vahidə bərabər olar, işarəsi isə *e* əmsalının işarəsi ilə eyni olar.

İsbatı.

$$K_{xy} = M[XY] - m_x m_y = M[eX^2 + dx] - m_x(em_x + d) =$$

$$= eM[X^2] + dm_x - em_x^2 - dm_x = e(M[X^2] - m_x^2) = eD_x = \sigma_x(e\sigma_x)$$

Digər tərəfdən, $D_y = eD_x$, deməli $\sigma_\gamma = |e|\sigma_x$. Beləliklə,

$$K_{xy} = \frac{K_{xy}}{(\sigma_x \sigma_y)} = \frac{e\sigma_x^2}{|e|\sigma_x^2} = \pm 1.$$

Tərs təklifdə də doğrudur.

Təklif 3. $|K_{xy}| \le 1$ olar.

İsbatı. $Z = \sigma_y X \pm \sigma_x Y$ təsadüfi kəmiyyətinə baxaq. Onun dispersiyasını hesablayaq:

$$D[Z] = \sigma_y^2 D[X] \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} + \sigma_x^2 D[Y] = \sigma_y^2 \sigma_x^2 \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} + \sigma_x^2 \sigma_y^2 =$$

$$= 2\sigma_x^2 \sigma_y^2 \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy}$$

Dispersiya mənfi olmadığından alarıq:

$2\sigma_x^2 \sigma_y^2 \pm 2\sigma_x \sigma_y K_{xy} \ge 0$ və ya $\sigma_x \sigma_y \pm K_{xy} \ge 0$, buradan $|K_{xy}| \le \sigma_x \sigma_y$ və deməli, $|K_{xy}| \le 1$ olar.

3. Təsadüfli kəmiyyətli funksiyalar. Tutaq ki, X – *təsadüfi kəmiyyət*, $y = \varphi(x)$ – isə adi *funksiyadır*, onun təyin oblastı X təsadüfi kəmiyyətinin *mümkün qiymətlər çoxluğudur*. Onda, $y = \varphi(x)$– *təsadüfi kəmiyyətdir*. Bu funksiya öz qiymətlərini belə alır: sınaq aparılır və sınaq nəticəsində təsadüfi X kəmiyyəti hər hənsı x qiymətini alır. φ funksiyasını bilərək $y = \varphi(x)$– i tapırın, bu isə Y təsadüfi kəmiyyətinin qiyməti olur. Burada ümumi problem – təsadüfi X arqumentinin paylanmasını bilərək, $y = \varphi(x)$ funksiyasının paylanma qanununu təyin etməkdən ibarətdir. Əgər X

diskret təsadüfi kəmiyyətdirsə bu sadəliklə həll olunur. X – kəsilməz təsadüfi kəmiyyət olduqda isə məsələ çətinləşir. İsbatsız aşağıdakı teoremlə kifayətlənək.

Teorem. Tutaq ki, X sıxlığı $f(x)$ olan kəsiləməz təsadüfi kəmiyyətdir. $\varphi(x)$- monoton diferensial funksiyadır, onda təsadüfi Y kəmiyyətinin sıxlıq $y=\varphi(x)$ funksiyası belə olar:

$$g(y)=f(\psi(y))|\psi(y)| \qquad (1)$$

burada $\psi(y)$ – φ– nin tərs funksiyasıdır.

Misal 2. Tutaq ki, $X-\lambda$ parametrli üstlü paylanmadır, $Y=cX$, burada c sabitdir. Göstərək ki, Y – də üstlü paylanmışdır. X –in sıxlıq funksiyası $f(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & x>0. \end{cases}$ olar. $\varphi(x)=cX$ olduğundan, onun tərs funksiyası $\psi(y)=\dfrac{y}{c}$ və $\psi'(y)=\dfrac{1}{c}$ (1) düsturunda bunları yazsaq, alarıq: $g(y)=\begin{cases} 0 & y\le 0, \\ \left(\dfrac{\lambda}{c}\right)e^{-\left(\frac{\lambda}{c}\right)y} & y>0. \end{cases}$

Bu isə üstlü paylanmanın sıxlığıdır.

Təklif 4. Tutaq ki, $Y=\varphi(X)$, onda $M[Y]=\sum_i \varphi(X_i)P_i$. Əgər təsadüfi kəmiyyət X diskretdirsə, və $M[Y]=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx$, əgər təsadüfi kəmiyyət kəsilməzdirsə və $f(x)$ onun sıxlıq funksiyasıdırsa.

Misal 8. Plandan artıq hər faiz üçün 50 rub. Mükafat, plandan aşağı hər bir faiz üçün isə əmək haqqı 30 rub.

kəm verilir, lakin 100 rubldan çox olmamaq şərti ilə. Əgər planın yerinə yetirilməsi proqnozu aşağıdakı kimidirsə:

96	97	98	99	100	101	102	103	104	110
0,01	0,22	0,03	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,08	0,04

Gözlənilən mükafatın miqdarını tapın.
Planın yerinə yetməsi məlumdursa, mükafatın miqdarı necə olar?

Həlli. Gözlənilən mükafatın miqdarını tapaq. Mükafatın miqdarı Y -planın yerinə yetməsi faizinin funksiyasıdır.

Planın yerinə yetirilmisə sətirinə aşağıdan Y - in qiymətlərini yazaq:

96	97	98	99	100	101	102	103	104	110
0,01	0,22	0,03	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,08	0,04
-100	-90	-60	-30	0	50	100	150	200	500

İndi Y -in riyazi gözləməsini hesablayaq. Bunun üçün Y -in qiymətlərini uyğun ehtimallara vurub, toplayaq. Onda alarıq:
M[Y]=(-100 -180 –180 –60 + 1000 + 1000 + 1500 + 1600 + +2000) /100=65,80 man

MƏSƏLƏLƏR

1. Asılı olmayan X və Y təsadüfi kəmiyyətləri aşağıdakı paylanma sırasına malikdirlər:

X:

-1	0	2
0,1	0,2	0,7

Y:

-1	1
0,4	0,6

Təsadüfi $Z = X \cdot Y$ və $V = X - Y$ kəmiyyətlərinin paylanma sırasını tərtib edin.

Həlli: Aşağıdakı cədvəli tərtib edək.

$Y \backslash X$	-1	0	2
-1	0,04	0,08	0,28
1	0,06	0,12	0,42

(a,b) xanasında $P(X=a)$ x $P(y-b)$ ehtimalını yazaq; X,Y asılı deyillər.

İndi isə X,Y təsadüfi kəmiyyətlərinin qiymətlərini vuraraq Z təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərini alırıq. Z – in eyni qiymətlərin ehtimallarını toplayaraq aşağıdakı paylanma sırasını alarıq:

Z:	-2	-1	0	1	2
	0,28	0,06	0,2	0,04	0,42

Eyni qayda ilə V təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırası tərtib olunur.

2. Zavodun üç yeni, bir – birindən asılı olmayarq işləyən sex var. Ayın əvvəlində hər sex üçün planın yerinə yetirilməsi ehtimal proqnozu tərtib olunmuşdur.

0,9	1,0	1,1
0,1	0,8	0,1

0,85	1,0	1,05
0,1	0,8	0,1

0,8	1,0	1,1
0,05	0,9	0,05

Bütün sexlərin planı yerinə yetirmə ehtimalı neçə olar? Məlumdur ki, I iki sex planı yerinə yetirib. Bütün zavodun planı yerinə yetirmə ehtimalı neçə olar?

3. Bankın kredit şöbəsi verilmiş kreditləri iki parametrə görə təhlil edir: miqdarına və müddətinə görə. Aşağıdakı cədvəl alınır:

	Qısamüddətli	Uzunmüddətli
Kiçik	0,3	0,2
Orta	0,2	0,05
Böyük	0,2	0,05

Bu parametrlərin asılı olmadığını yoxlayın. Kreditlərin miqdarına görə qısamüddətli və uzunmüddətli kreditlərin paylanma qanununu tapın. Kredit kiçik deyilsə, o uzun-muddətli olması ehtimalını tapın.

4. Müntəzəm paylanmış təsadüfi kəmiyyətdən asılı xətti funksiyanın da müntəzəm paylandığını isbat edin.

18.2. Baş çoxluğun parametrlərinin qiymətləndirilməsi

1. Riyazi statistikanın əsas məsələsi. Ehtimal nəzəriyyəsinin aşağıdakı anlayışlarına – hədisələr və onların ehtimalları, tam ehtimal düsturu, Bayes və Bernulli düsturları, təsadüfi kəmiyyətlər və onların paylanma qanunları, ədədi xarakteristikaları, və s. istinad edərək dəqiq riyazi üsullarla bir hadisənin ehtimalını digərlərinin ehtimallarını bilərək təyin edə bilərik, biz təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu digərlərinin paylanma qanununu bilərək tapa bilərik və s. Belə məsələlər *düz məsələlər* adlanır. Məsələ mərkəzi limit teoremindən çıxır ki, ixtiyari X təsadüfi kəmiyyəti üçün, asılı olmayan sınaqlar keçirsək və X –in alacağı qiymətlərin ədədi ortasını Y_n –i hesablasaq görərik ki, sınaqların sayı n – böyük ədəd olduqda, onda Y_n –orta ədəd qiymət də təqribi olaraq normal qanunla paylanır.

Elmin bütün sahələrində düz məsələ var. Məsələn, elektrik yükünü və paylanmasını bilərək, elektrik sahəsinin paylanmasını bilərək, elektrik sahəsinin gərginliyini hesablanması düz məsələdir. Tərs məsələ isə belədir: elektrik sahəsi məlum olmayan hər hansı elektrik yükləri vasitəsilə yaranıb, sahəni biz ölçə bilərik, tələb olunur ki, bu sahəni yaradan elektrik yükləri hardadır və kəmiyyəti nə qədərdir? İndi isə tərs ehtimal məsələsi göstərək: hadisənin baş vermə tezliyinə görə bu hadisənin ehtimalını tapmaq, heç olmazsa bu ehtimalın yerləşdiyi sərhədləri tapmaq. Belə tərs ehtimal məsələlərini riyazi statistika həll edir. Beləliklə, ehtimal nəzəriyyəsi (EH) və riyazi statistika (RS)– güclü qarşılıqlı əlaqədə olan «qohum» elm sahələridir: bir düz məsələləri həll edir, digəri isə tərs məsələlri. Ehtimal nəzəriyyəsi riyazi statistika üçün fundamentdir. Tərs məsələləri öyrənmək çətin olduğundan riyazi statistikanı ehtimal nəzəriyyəsindən sonra öyrənirlər. Riyazi statistikanın dörd əsas məsələsi mühüm əhmiyyət kəsb edir.

A. Statistik informasiyaları kompakt, aydın, əlverişli formada ifadə etmək.

B. Baş çoxluğun məlum olmayan parametrəlrinin tapılması və ya qiymətləndirilməsi;

Məsələn, baş çoxluğa görə onun orta qiymətinin tapılması və ya qiymətləndirilməsi və yaxud təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinin tapılması.

C. Hipotezlərin yoxlanılması, onların qəbul edilməsi və yaxud rədd edilməsi.

Ç. Tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyətin məlum olmayan paylanma qanununun tapılması.

A. məsələsi bizə artıq tanışdır. B və Ç məsələlərinə bu bölmədə baxacayıq.

2. Baş çoxluğun və ya təsadüfi kəmiyyətin parametrlərinin nöqtəvi qiymətləndirilməsi.

Əvvəlki mövzularda qeyd etdiyimiz kimi baş çoxluq və təsadüfi kəmiyyət qarşılıqlı əvəz olunan aynlayışlardır və onların hansının işlənməsi əlverişlilik nöqteyi – nəzərindən diktə olunur. Çoxölçülü təsadüfi kəmiyyətlərlə tanışlıqdan sonra əmin oluruq ki, təsadüfi kəmiyyət anlayışı daha rahat və əlverişlidir. Beləliklə, tutaq ki, təsadüfi X kəmiyyəti təd-qiq edilir. Onda n həcmli seçmə sadəcə olaraq n ölçülü təsadüfi kəmiyyətin qiymətidir.

$V=(X_1,...,X_n)$, burada $X_i - i$– ci sınaqda təsadüfi X kəmiyyətinin aldığı qiymətdir. Seçmənin ixtiyari funksiyası *statistika* adlanır. Məsələn, ədədi orta $\overline{X_n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{n}$ statistikadır. Tutaq ki, θ – təsadüfi X kəmiyyətinin hər hansı parametridir. Biz heç olmasa təqribi olaraq bu pearametrin qiymətini tapmaq istəyirik. Bu məqsədlə $\overset{\Lambda}{\theta}$ statistikasını seçək, bizim fikrimizə görə bu statistika təqribi olaraq θ parametrini qiymətləndirməlidir. Buna görə də θ paraetrini qiymətləndirən statistikanı $\overset{\Lambda}{\theta}$ kimi işarə edirlər.

Qeyd edək ki, istənilən statistika təsadüfi kəmiyyətdir, belə ki, o seçmə ilə müəyyən olunur. Həcmi n olan seçmə ilə müəyyən olunan statistikanın $\overset{\Lambda}{\theta}_n$ kimi işarə edəcəyik. Aydındır ki, $\overset{\Lambda}{\theta}$ statistikası müəyyən şərtləri ödə-məlidir. Bu şərtlər aşağıdakılardır.

1) Mötəbərlik: $n\to\infty$ – da $\overset{\Lambda}{\theta}_n$ – statistika – qiyməti θ parametrinə yığılmalıdır. Yığılmaq ehtimal mənada başa düşülür: $n\to\infty$– da $P\left(\left|\overset{\Lambda}{\theta}_n-\theta\right|>a\right)\to 0$, ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün. Bu yığılma *ehtimal mənada yığılma* adlanır.

2) Qarışdırılmazlıq: $M\left[\overset{\Lambda}{\theta}\right]=\theta$; bu bərabərlik kafi qədər böyük bütün n -lər üçün doğru olmalıdır.

Əmin olaq ki, ədədi orta riüazi gözləmənin mötəbərli və qarışdırılmayan qiymətidir.

Tutaq ki, X –riyazi gözləməsi a olan tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyətdir. Onda n sınaqda ədədi orta belə olar: $\overline{X_n}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{n}$.

Mötəbərliyi isbat etmək üçün göstərmək lazımdır ki, ixtiyari $\varepsilon>0$ üçün $n\to\infty$ –da $P\left(\left|\overset{\Lambda}{X}-a\right|>\varepsilon\right)\to 0$ olur. Bu isə Çebışev törəmində göstərilmişdir. Qarışdırılmazlığa gəldikdə isə bilirik ki, $M\left[\overline{X}\right]=M\left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)}{n}\right]=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}M[X_i]\right)}{n}=\frac{(na)}{n}=a$.

Buradan həm də alırıq ki, hadisənin baş verməsi tezliyi onun baş verməsi ehtimalının mötəbərli və qarışdırılmaz qiymətidir. Qeyd edək ki, orta qiymət belə desək riyazi gözləməni əvəz etdiyindən, seçmə dispersiyaya $S^2=\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right)}{n}$ D_x – dispersiyanın qiyməti kimi baxmaq olar. $\overline{X}$ – riyazi gözləmənin mötəbərli qiyməti olduğundan, S^2-dispersiyanın mötəbərli qiyməti olar. Bu qiymət qarışdırılmaz deyildir, belə ki, isbat etmək olar ki, $M\left[S^2\right]=\frac{D_x(n-1)}{n}$. Bu səbəbədən S^2– nı $\frac{n}{(n-1)}$ – ə vurub «*düzəldirlər*» . $\overline{S^2} = \frac{nS^2}{(n-1)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2\right)}{n-1}$ Bu qiymət isə dispersiyanın qarışdırılmaz qiyməti olur.

Misal 1. Tutaq ki, X – in paylanma sırası aşağıdakı kimidir:

0	1	2
1/2	1/3	1/6

.

Göründüyü kimi mümükün qiymətlər çoxluğu üç elementdən ibarətdir. $W = \{X_1, ..., X_n\}$ seçməsində təyin olunan statistikalara baxaq: a) $m = \min W$; b) $M = \max W$; v) S «W *-də olan müxtəlif ədədələriin sayı*».

Bu statistikalar X təsadüfi kəmiyyətinin uyğun xarakteristikalarının mötəbərli və qarışdırılmaz qiymətləridirmi?

Həlli. m statistikasının paylanma sırası:

0	1	2
1-(1/2)^n	(1/2)^n - (1/6)^n	(1/6)^n

Doğurdan da $P(m = 0) = 1 - (P(x > 0))^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P(m = 2) = (P(x = 2))^n = \left(\frac{1}{6}\right)^n$. Bütün digər ehtimallar $P(m = 1)$ olar. $P(m = 0) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 1$ ($n \to \infty$ olduqda) olduğundan $m -$ X – in mümükün qiymətlərinin minimumunun, yəni 0 ədədinin mötəbərli qiyməti olar. İxtiyari həcmli seçmə üçün $M[m] > 0$ olduğundan m qarışdırılmaz qiymət deyildir. Qalan iki ətatistika analoji olaraq tədqiq edilir.

3. Maksimum həqiqətə uyğun üsul. Bu üsul qeyri –müəyyən parametrin qiymətləndirilməsi üçün əvvəlcə həqiqətə uyğun funksiya müəyyənləşdirirlər. Tutaq ki, X – tədqiq olunan təsadüfi kəmiyyətdir. X –in paylanma qanunu hər hansı α parametrinə qədər dəqiqliklə məlumdur. n – sayda asıla olmayan sınaqlar aparıldıqda n ölçülü təsadüfi $W=\{X_1,...,X_n\}$ kəmiyyəti alınır, burada X_i – X – in i – ci sınaqda aldığı qiymətdir. Asılı olmayan n sayda sınaqlar aparaq və $W=(a_1,...,a_n)$ seçməsini alaq. Əgər X diskret təsadyfi kəmiyyətdirsə, onda alınan seçmənin ehtimalı, ehtimallar hasilinə bərabər olar $P(X=a_1,\alpha)...P(X=a_n,\alpha)$. Əgər X kəsilməzdirsə və onun sıxlığı $f(x,\alpha)$-dırsa, onda n ölçülü təsadüfi $W=\{X_1,...,X_n\}$ kəmiyyətinin sıxlıq funksiyasının $W=(a_1,...,a_n)$ nöqtəsində qiyməti, sıxlıqların hasilinə bərabər olar $f(a_1,\alpha)...f(a_n,\alpha)$. $\alpha(a_1,...,a_n,\alpha)$, funksiyası *həqiqətə uyğun funksiya* adlanır, X – diskret təsadüfi kəmiyyət olduqda bu funksiya ehtimalların hasilinə, kəsilməz olduqda isə sıxlıq funksiyalarının həsilinə bərabər olar. α –parametrinin elə α_0 – qiymətini tapaq ki, həqiqətə uyğun funksiya maksimum qiymət alsın. Bu α_0 qiyməti α parametrinin əsil həqiqi qiymətidir. Dediklərimizdən aşağıdakı nəticəyə gəlmək olar.

Nəticə. Seriya sınaqlarda hadisənin baş verməsi tezliyi bu hadisənin baş verməsi ehtimalının maksimal həqiqətə uyğun üsulla qiymətləndirilməsidir.

4. İnterval qiymətləndirmə. Təsadüfi kəmiyyət olan ixtiyari θ statistika qiymətləndirilən θ parametrinin yalnız təqribi qiyməti ola bilər. Deməli, o yalnız hər hansı nöqtədəki qiymət ola bilər. Belə bir sual çıxır: elə Δ intervalı göstərmək olarmı ki, əvvəldən verilmiş, vahidə yaxın γ ehtimalla bizə məlum olmayan θ parametrinin həqiqi qiymətini özündə saxlasın? Əvvəlcədən verilmiş γ ehtimalı *etibarlı ehtimal*, Δ–intervalı isə *etibarlı interval* adlanır. Ümumi mülahizələrə görə seçmə vasitəsilə müəyyən olunan etibarlı interval həm uzunluğuna həm də yerinə görə təsadüfi olacaq.

Əgər θ parametrinin hər hansı etibarlı $\hat{\theta}$ qiymtəi varsa, onda seçmənin həcmi artdıqca buna uyğun konstruksiya olunan etibarlı interval çox güman ki, bu qiymətidə örtər. Etibarlı intervalın tapılmasını bir misalla göstərək.

Misal 2. Təsadüfi X kəmiyyətin riyazi gözləməsi üçün konstruksiya olunmuş etibarlı interval, normal qanunla paylanmış, məlum olmayan a riyazi gözləməyə və məlum orta kvadratik σ^2 sapmaya malikdir. Etibarlı γ ehtimalını verək. Mərkəzi limit teoreminə əsasən (bax bölmə 17, 1 b.3) kafi qədər böyük n üçün ədədi orta $\overline{X}$ təqribi olaraq normal qanunla paylanar, onda alarıq:

$P\left(\left|\overline{X}-a\right|<\frac{u\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2\Phi(u)=\gamma$. Laplas funksiyasının qiymətlər cədvəlindən taparıq: elə $u_{\frac{\gamma}{2}}$-ni ki, $\Phi\left(u_{\frac{\gamma}{2}}\right)=\frac{\gamma}{2}$ olsun.

Deməli, $\left|\overline{X}-a\right|<\frac{u_{\frac{\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$. Buradan alarıq ki,

$\overline{X}-\frac{u_{\frac{\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{X}+\frac{u_{\frac{\gamma}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}$, bu isə a üçün etibarlı intervaldır.

MƏSƏLƏLƏR

1. Təsadüfi olaraq bankın verdiyi 400 kredit seçilir və təhlil olunur. Məlum olur ki, 80 kredit qaytarılimayıb. 0,95

inamla bankın verdiyi bütün kredit küllüsünün qaytarılmaması ehtimalının etibarlı intervalını tapın.

2. Təsadüfi kəmiyyət $[0,b]$, (burada $b>0$) parçasında müntəzəm pylanmışdır. Həcmi n olan W seçməsinə görə təyin olunan statistikanın a) $m=\min W$; b) $M=\max W$. Paylanma funksiyasını, sıxlıq funksiyasını tapın və bu funksiyaların təqribi qrafiklərini qurun. Bu statistikalar təsadüfi X kəmiyyətinin uyğun xarakteristikalarının mötəbərli və qarışdırılmaz qiymətləridirmi?

3. Anbarda eyni qutuda ağ, qırmızı və qara telefonlar var; hər bir rəngdən olan telefonlar təqribən bütün telefonların 1/3 – dür. Neçə minimal qutu götürmək lazımdır ki, 0,9 – dan böyük ehtimalla bütün rəngdən olan telefonlar orada olsun? «Müxtəlif rəngli telefonların sayının seçməsinin» paylanma statistikasını tapın. Bu statistika 3 sabitinin mötəbərli və qarışdırılmaz qiyməti ola bilərmi?

4. İsbat edin ki, seriya sınaqlarda təsadüfi X kəmiyyətinin aldığı orta qiymət maksimal həqiqətə oxşar üsulla tapılmış X – in riyazi gözləməsidir. Nəzərdə tutulur ki, X normal və yaxud üstlü qanunla paylanmışdır.

5. Tutaq ki, tədqiq olunan təsadüfi X kəmiyyəti kəsilməzdir, onda onun qiymətləri (seçmə) vasitəsilə interval variasiya sırası tərtib olunur. Məlumudur ki, bu sıra ilə hesablanan orta $\overline{X_n}$ seçmə ortadan ümumiyyətlə fərqlidir.

$\overline{X_n}$ – təsadüfi X kəmiyyətinin riyazi gözləməsinin mötəbərli və qarışdırılmaz qiyməti olarmı?

18.3. Təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılıqlar

1. Təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılıqların növləri. $y=\varphi(x)$, burada φ adi ədəd funksiyası olarsa, onda X,Y təsadüfi kəmiyyətləri *funksional asılı* adlanırlar.

Bir misal göstərək; tutaq ki, pul dəyişmə məntəqəsində növbəti müştəriyə verilən təsadüfi dollar məbləği X – dir, Y – isə alınan rublla pul məbləğidir. Bu halda $Y = kX$, burada k – dolların kursudur. Bu çox sərt asılılıqdır. Başqa tərəfdən, X, Y asılı olmadıqda, onlar arasında heç bir asılılıqdan danışmaq olamz, belə ki, təsadüfi Y kəmiyyətinin şərti paylanması X –in qiymətlərindən asılı olaraq dəyişmir. Deməli, funksional asılılıq və asılı olmamaq – təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı asılılığın iki kənar polyusudur.

Əgər X, Y təsadüfi kəmiyyətləri arasında asılı olmamaq yoxdursa, onda onlar arasında statistik asılılqdan danışmaq olar – bu o zaman olur ki, bir kəmiyyətin qiyməti dəyişdikdə digərinin paylanması dəyişir.

Bölmə 18.1 – b. 2 – də təsadüfi X, Y kəmiyyətləri arasında korrelyasion asılılıqdan danışmışdıq – yəni korrelyasiya momenti K_{XY} və ya korrelyasiya əmsalı K_{XY} sıfıra bərabər deyil. İsbat olunmuşdur ki, $|K_{XY}| \le 1$ və $|K_{XY}| = 1$ bərabərliyi X və Y arasında xətti funksional asılılıq olduğunu göstərir.

Başqa bir növ asılılıqla tanış olaq. Əgər $M\left[\frac{Y}{X} = a\right]$ a – dan asılı olaraq dəyişərsə, onda X və Y arasındakı reqressiv asılılıqdan danışmaq olar, bu halda deyirlər ki, Y X – dən reqressiv asılıdır, asılılığın özü isə Y – *in* X – *ə reqressiyası* adlanır. Bu asılılığı da çox vaxt *korrelyasion* adlandırırlar.

Misal 1. İki halda baxaq: a) tutaq ki, (X, Y)-müstəvi üzərində verilmiş düzbucaqlıda müntəzəm paylanmış, iki ölçülü təsadüfi kəmiyyətdir, onda X, Y asılı deyillər; b) tutaq ki, (X, Y)-müstəvi üzərində verilmiş dairədə müntəzəm paylanmış, iki ölçülü təsadüfi kəmiyyətdir, onda

X, Y asılıdırlar, lakin koorelyasiya olunmayıblar və onlar arasında reqressiv asılılıq yoxdur.

Misal 2. Reqressiv asılılıq belədir: a) insanın boyu və çəkisi arasında – boyu uzun olan insanların orta çəkisi də çoxdur; b) bir hektarın məhsuldarlığı ilə bura verilən kübrə arasında: nə qədər çox kübrə verilərsə, orta məhsuldarlıq bir o qədər çox olar; c) avtomobilin satış qiyməti ilə onun «yaşı» arasında: «yaşı» nə qədər çox olarsa, satış qiyməti bir o qədər az olar.

2. Korrelyasiya nisbəti. Bu nisbət statistik asılılığın göstəricisidir. Tutaq ki, təsadüfi Y kəmiyyəti əsasən X faktorundan və qalıq faktorundan (bir qayda olaraq çox kiçik) asılıdır. Qalıq faktorunu ε ilə işarə edək, bu faktor X – ə təsir etmir, yalnız Y – ə təsir edir. Təsadüfi Y kəmiyyətinin dəyişməsinin xarakteristikası onun dispersiyasıdır $D[Y] = M\left[(Y - m_Y)^2\right]$.

Bu kəmiyyətə həm X faktoru, həm də ε qalığı öz təsirlərini göstərir. Bunların təsiri nə qədər olar? İşarələri mürəkkəbləşdirmək üçün təsadüfi Z kəmiyyətinin orta qiymətini, yəni onun riyazi gözləməsini $\overline{Z}$ – lə işarə edək. X faktorunun qeyd olunmuş qiymətində, məsələn $X = a$ olduqda $D\left[\frac{Y}{X} = a\right] = M\left[\left(\frac{Y}{X} = a - M\left[\frac{Y}{X} = a\right]\right)^2\right]$ $\frac{Y}{X} = a$ –nın şərti paylanması ε qalığının X – in bu qiymətində Y – ə təsirini xarakterizə edir. Onun orta $\overline{D\left[\frac{Y}{X} = a\right]}$ qiyməti isə ümumilikdə ε qalığının Y – ə təsirini xarakterizə edir və $D[Y, qalıq]$ kimi işarə edilir.

Riyazi gözləmə $M\left[\frac{Y}{X}=a\right]-Y$ təsadüfi kəmiyyətinin $X=a$ olduqda qiymətlərinin qruplaşma mərkəzidir. Eyni zamanda $M[Y]-Y$-in ümumi qruplaşma mərkəzidir. Buna görə də qruplaşma mərkəzlərinin ümumi mərkəzə nəzərən səpələnməsi dispersiya $\left(M\left[\frac{Y}{X}=a\right]-M[Y]\right)^2$ müəyyən edir.

Bu kəmiyyət Y– in qiymətlərinin X faktorundan asılı olaraq dəyişməsini müəyyən edir və belə işarə olunur, $D[Y, fak.]$. İsbat etmək olar ki, $D[Y]=D[Y, fak.]+D[Y, qalıq]$. $\frac{D[Y, fak.]}{D[Y]}$ və ya $\frac{1-D[Y, qalıq]}{D[Y]}$ – nı $\rho_{Y/X}^2$ – lə işarə edək.

Aydındır ki, $\rho_{Y/X}^2$ –təsadüfi Y kəmiyyətinin qiymətlərinin variasiyası X faktorunun qiymətlərinin variasiyasındakı payını göstərir. $\rho_{Y/X}^2$ kəmiyyəti *determinasiya əmsalı*, $\rho_{Y/X}=\sqrt{\rho_{Y/X}^2}$ – isə *korrelyasiya nisbəti* adlanır.

1) $0 \le \rho_{Y/X} \le 1$;

2) Y– in X– dən birqiymətli funksional asılılığı üçün zəruri və kafi şərt $\rho_{Y/X}=1$ olar.

Doğurdan da, əgər $\rho_{Y/X}=1$ olarsa, onda $\overline{D\left[\frac{Y}{X}=a\right]}=0$ olar, $D\left[\frac{Y}{X}=a\right]\ge 0$ olduğundan, deməli $D\left[\frac{Y}{X}=a\right]=0$ olar istənilən a üçün. Bu da öz növbəsində o deməkdir ki, X faktorunun istənilən qiymətində Y sabitdir, yəni Y, X– dən asılı funksiyadır. Digər tərəfdən, əgər

Y, X – dən asılı funksiyadırsa, onda $\overline{D\left[\frac{Y}{X}=a\right]}=0$ və deməli $\rho_{Y/X}=1$ olar.

3) Y – in X – dən reqressiv asılılığının olmaması üçün $\rho_{Y/X}=0$ şərti zəruri və kafi olar. Doğurdan da, əgər $\rho_{Y/X}=0$ olarsa, onda $M\left[\frac{Y}{X}=a\right]=M[Y]$ yəni $M\left[\frac{Y}{X}=a\right]$ sabitdir, deməli Y – in X – dən reqressiv asılılığı yoxdur. Asılılıqla tərsin də göstərmək olar;

4) $\rho_{Y/X}$ vahidə nə qədər yaxın olsa, bir o qədər Y – in X –dən statistik asılılığı bir qiymətli funksional asılılığa yaxın olar və tərsinə Y –in X –dən asılılığı birqiymətli funksional asılılığa nə qədər yaxın olsa, bir o qədər $\rho_{Y/X}$ vahidə yaxın olar.

Praktikada bir qayda olaraq X, Y təsadüfi kəmiyyətlərinin birgə paylanması məlum olmur və bütün parametrlər əvəzinə onların seçmə qiymətlərindən istifadə edirlər.

Tutaq ki, ikiölçülü (X,Y) təsadüfi kəmiyyətin n asılı olmayan müşahidəsi var. Bu müşahidələrin nəticələrini yəni (x_i, y_i) ədədlər cütlüyünü ikiölçülü korrelyasiya cədvəlinə yazaq. Cədvəl belə tərtib olunur: X faktorunun müşahidə olunan $x_1,...,x_n$ qiymətlərini V qrupunda qruplaşdıraq, müşahidə olunan $y_1,...,y_n$ qiymətlərini isə q qrupunda qruplaşdıraq. Sonra $m_{ij}\ i=1,...,v,\ j=1,...,q$ ədədlərini hesablayaq.

	v \ *i*	*1*	*2*	…		
J	*X* \ *Y*	x_1	x_2	…	x_v	$m_j=\sum_{ii} m_{ji}$
1	y_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1v}	m_1

2	y_2	m_{21}	m_{22}	…	m_{2v}	m_2
.	.	.	.	…	.	.
.	.	.	.	…	.	.
.	.	.	.	…	.	.
q	y_q	m_{q1}	m_{q2}		m_{qv}	m_q
$n_j = \sum_j m_{ji} - m_i$ $\overline{y^{(i)}}$ S_i^2		m_1 $\overline{y^{(1)}}$ S_1^2	m_2 $\overline{y^{(2)}}$ S_2^2	… … …	m_v $\overline{y^{(v)}}$ S_v^2	$m = \sum_i \sum_j m_{ij} =$ $= \sum_i n_i$

Seçmənin analoqu olan $\hat{\rho}^2_{Y/X}$ determinasiya əmsalını düzəldək. $D[Y]$ – in seçmə analoqu $S_y^2 = \sum_j \frac{\left(y_j - \overline{y}\right)^2 m_j}{n}$ – dir, burada $\overline{y} = \sum_j \frac{m_j}{n}$ – ümumi ortadır. $X = X_i$ olduqda şərti dispersiyanın seçmə analoqu qruplaşmış seçmə dispersiyadır $S_i^2 = \sum_j \frac{\left(y_j - \overline{y^{(i)}}\right) m_{ji}}{n_i}$, olar, burada $\overline{y^{(i)}} = \sum_j \frac{\left(y_j m_{ji}\right)}{n_i}$ – qruplaşmış ortadır, $D[Y, qalıq]$ –ın analoqu isə $S^2_{qalıa} = \overline{S_i^2} = \sum_i \frac{S_i^2 n_i}{n}$ olar. Burada isə $D[Y, fak.]$ – un seçmə analoqunu təyin etmək olar, $S^2_{faktor} = S_y^2 - S^2_{qalIq}$ və nəticədə determinasiya əmsalının və seçmə korrelyasiya nisbətinin seçmə analoqlarını təyin edirik: $\hat{\rho}^2_{Y/X} = \frac{S^2_{faktor}}{S_y^2}$, $\hat{\rho}_{Y/X} = \sqrt{\hat{\rho}^2_{Y/X}}$

$\hat{\rho}_{y/x}$ – nisbi korrelyasiya münasibətinə analoji olan hökm doğrudur (bax yuxarıda «1»-«4»).

Misal 3. (X, Y) təsadüfi kəmiyyətlər sistemi paylanma qanunu ilə verilmişdir. X və Y arasında determinasiya asılılığını tapın.

Həlli.

Y-in paylanma sırasını, onun riyazi gözləməsini və dispersiyasını tapaq:

X \ Y	-1	1
-2	0,4	0
0	0,1	0,1
2	0	0,4

ˋ ˊ	-2	0	2
	0,4	0,2	0,4

$M[Y]=0$, $D[Y]=3{,}2$. İndi şərti paylanma qanununu tapaq:

Y/X= -1	-2	0	2
	0,8	0,2	0

Y/X=-1	-2	0	2
	0	0,2	0,8

Riyazi gözləmə: $M[Y/X=-1]=-1{,}6$, $M[Y/X=1]=1{,}6$ və dispersiya:

$D[Y/X=-1]=0{,}64$, $P(X=-1)+D[Y/X=1]P(X=1)=0{,}64$

Beləliklə, determinasiya əmsalı:

$1-D[Y,\, qaliq]/D[Y]=1-0{,}64/3{,}2=4/5,$ korrelyasiya nisbəti $\rho_{Y/X}$ - in vahidə yaxılığı göstərir ki, Y-in X-dən asılılığı funksionaldır. Doğurdan da cədvəldən görünür ki, X-in verilmiş qiymətində böyük ehtimalla $Y=2X$ bərabərliyi doğrudur.

3. Birfaktorlu xətti reqressiya. İki təsadüfi kəmiyyətlər sisteminə (X,Y) baxaq. $F(a,b)=M\left[(Y-a-bX)^2\right]$ – nı minimumunu təmin edək $y=a+bx=\varphi(x)$ xətti asılılığını seçək.

1 $$F(a,b)=M\left[Y^2-2aY-2bXY+a^2+2abX+b^2X^2\right]=$$
$$=M\left[Y^2\right]-2aM[Y]-2bM[XY]+$$
$$+a^2+2abM[X]+b^2M\left[X^2\right]$$

$F(a,b)$ – ni a və b – ə görə diferensiallayaq və xüsusi törəmələri sıfıra bərabər edək, onda aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq

$$\begin{cases} a + bM[X] = M[X], \\ aM[X] + bM[X^2] = M[XY] \end{cases}$$

Bu sistemi həll edərək, alarıq:

$b = \frac{K_{XY}}{D_X}$, $a = M[Y] - M[X]\frac{K_{XY}}{D_X}$, deməli axtardığımız xətti asılılıq $y = \varphi(x) = \left(M[Y] - M[X]\frac{K_{XY}}{D_X} \right) + \frac{xK_{XY}}{D_X} =$

$= M[Y] + (x - M[x])\frac{K_{XY}}{D_X}$ olar. Nəzərə alsaq ki, korrelyasiya momenti K_{XY}, $k_{XY}\sigma_x\sigma_y$ – ə bərabərdir, bu asılılığı başqa şəkildə də yazmaq olar: $y = m_y + (x - m_x)k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Beləliklə, $\varphi(x) = m_y + (x - m_x)k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$. Bu a, b üçün $F(a,b)$ $\varphi(x)$ yaxınlaşmasının *xətası* adlanır və $M\left[(Y - \varphi(x)^2)\right] == ... = \sigma_y^2(1 - K_{XY})$–ə bərabərdir. Eləcə də reqressiyanın xətasını tapmaq olar: $M\left[(M[(Y - \varphi(x))])^2\right] = ... = \sigma_y^2\left(\rho_{Y/X}^2 - K^2{}_{X/Y}\right)$. Buradan iki nəticə çıxır:

1) $|K_{XY}|$ – in vahidə yaxınlaşması ilə yaxınlaşmasının xətası azalır, və ya ikiölçülü təsadüfi (X, Y) kəmiyyətinin qiymtləri $y = m_y + (x - m_x)k_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ tənliyi ilə verilmiş düz xətt ətrafında daha sıx konsentrasiya olunur.

Bu hökmün tərsi də doğrudur. Bu o deməkdir ki, K_{XY} təsadüfi kəmiyyətlər arasındakı xətti funksional asılılığın səviyyəsini göstərir.

2) $\left|K_{XY}\right|$ – in $\rho_{Y/X}$ –ə yaxınlaşması ilə reqressiya xətası azalır, yəni məlum olmayan reqressiya funksiyası xətti funksiyaya yaxınlaşır. Bunun tərsi də doğrudur. Bu imkan verir ki, $\left(\rho_{Y/X}^{2}-K_{X/Y}^{2}\right)$ fərqinə reqressiya funksiyasının xətti funksiyadan nə qədər sapmasının ölçüsü kimi baxaq. Praktikada təsadüfi (X, Y) kəmiyyətlərinin birlikdə paylanması məlum olmur, yalnız müşahidələrin nəticələri məlum olur, yəni (X, Y) təsadüfi kəmiyyətlərinin seçmə cüt qiymətləri (x, y) məlum olur. Bütün baxılan xarakteristikalar onların seçmə analoqları ilə əvəz olunur. Belə ki, $a, b-$i təyin etmək üçün tənliklər sistemini alarıq:

$$\begin{cases} a+b\overline{X}=\overline{Y}, \\ a\overline{X}+b\overline{X^{2}}=\overline{XY} \end{cases} \tag{1}$$

Bu sistemi həll edərək, alarıq:

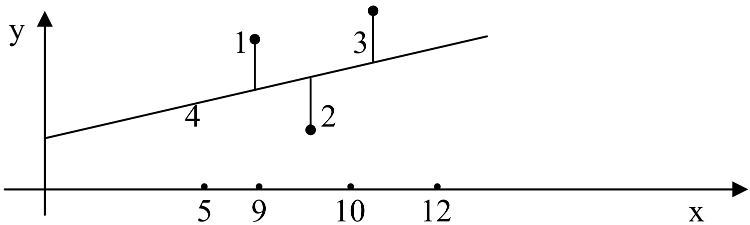
$b=\dfrac{\left(\overline{XY}-\overline{X}\,\overline{Y}\right)}{\left(\overline{X^{2}}-\left(\overline{X}\right)^{2}\right)}+\dfrac{\hat{K}_{XY}}{S_{X}^{2}}=\overline{Y}-\overline{X}\dfrac{\hat{K}_{XY}}{S_{X}^{2}}$, deməli reqressiya düz xəttinin tənliyi

$y=\overline{Y}+(x-\overline{X})\,\hat{K}_{xy}\big/S_{x}^{2}$ olar.

Burada $\hat{K}_{xy}$, S_{x}^{2} ilə korrelyasiya momentinin və X-in dispersiyasının seçmə analoqları işarə edilmişdir. Nəzərə alsaq ki, $\hat{K}_{xy}$ korrelyasiya momentinin seçmə analoqu $\hat{K}_{xy}\,S_{x}\,S_{y}$ -ə bərabərdir, burada $\hat{K}_{xy}$-korrelyasiya əmsalının seçmə analoqudur, onda bu asılılığı baş formada da yaza bilərik:

$$y=\overline{Y}+(x-\overline{X})\hat{K}_{xy}\,S_{y}\big/S_{x}$$

□□□□□□ **4.** (9,6), (10,4), (12,7), (5,3) □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□. □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□ □□ □□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□□□□ □□□□□. □□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□ (*X*, *Y*) □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□? □□□□□□□□□ $(y_i - \varphi(x_i))$ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ $(i = 1, 2, 3, 4)$ □□ □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□?



□□□□□. $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{X^2}$, $\overline{XY}$ -□ □□□□□□.

$\overline{X} = (9+10+12+5)/4 = 9$, $\overline{Y} = 5$, $\overline{X^2} = 350/4$, $\overline{XY} = 193/4$

□□□□□□□, $b = 1/2$; $a = 1/2$ □□□□. □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ $y = (x+1)/2$ □□□□. □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□. □□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□: □□□□, □□□□□□□□□□□ □□□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□□□; □□□□, □□ □□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□ □□□□.

□□□□□□□□□□

1. (*X*,*Y*) □□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□□□ $(2,\ 1 \pm 1/4)$ □□ $(4,\ 2 \pm 1/4)$

[illegible]. X [illegible] Y [illegible].

[illegible]. [illegible] $Y = x/2 + \nu$ [illegible], [illegible], X, ν [illegible] $X - (2,4)$ [illegible], ν [illegible] $(-1/4\ ,1/4)$ [illegible].

2. [illegible]. [illegible] 4-[illegible].

Mövzu 19.
MALİYYƏ BAZARININ TƏHLİLİNİN STATİSTİK ÜSULLARI

19.1. Maliyyə bazarının və onun tərkib hissələrinin ümumi xarakteristikası

1.Maliyyə bazarı haqqında saziş. Maliyyə bazarında onun iştirakçıları maliyyə vasitələrinin köməyi ilə maliyyə əməliyyatları aparırlar. Başlanğıc və son vəziyyətdə pulla qiymətləndirilən əməliyyatlar *maliyyə əməliyyatları* adlanır, bu əməliyyatların keçirilməsində məqsəd gəliri maksimallaşdırmaqdan ibarətdir. Gələcəkdə əməliyyat dedikdə, yalnız maliyyə əməliyyatı nəzərdə tutacağıq. Maliyyə vasitələri–maliyyə öhdəciliyi ilə bağlı olan ixtiyari sənəd və ya toplusu.

Bir çox əməliyyatların nəticələrini əvvəldən həmçinin əməliyyatların digər xarakteristikalarını demək olmur, məsələn gəlir və gəlirlilik. Lakin praktiki iş bunu tələb edir. Bu vəziyyətdən çıxış üçün bazar haqqında müəyyən müqavilələr bağlayırlar ki, bu da heç olmasa müəyyən elmi təhlillərə şərait yaradır. Əsasən üç fərziyyə üzərində dayanırlar.

Fərziyyə 1. «Gizli» parametrləri (psixoloji motivləri) nəzərə almırlar. Bazarın ixtiyarı iştirakçısı özü üçün ən böyük gəlir əldə etməyə çalışır. Hər bazar iştirakçısı öz rəqibinin acığına fəaliyyət göstərmir, bununla da obyektivlik nöqteyi-nəzərindən uzaq olur. Bu fərziyyə elmi üsullarla bazarı təhlil etmək üçün prinispial əsas təşkil edir.

Fərziyyə 2. Dəqiq abstrak nöqteyi-nəzərindən bazarın vəziyyəti sonsuz sayda çoxdur və onlar bütün detalları ilə təkrar olunmazdır, lakin bugünki, tədqiq olunan vəziyyət üçün yaxın analoji vəziyyət tapmaq olur, istər keçmişdə və istərsə də başqa yerdə. Bu ümid etməyə şərait yaradır ki, vəziyyətin axını tapılmış analoji vəziyyətə uyğun olsun. Bu çür təhlil üsulu analoq axtarmaq adlanır. Bu fərziyyə əsas verir ki, bazarın müxtəlif göstəricilərini təsadüfi kəmiyyət kimi modelləşdirək. Bu fərziyyə həm də nəzəri-ehtimal üsullarından istifadə etməyə yol açır.

Fərziyyə 3. Təhlil olunan maliyyə vasitələri haqqında müəyyən informasiyaların toplanması zəruridir. İndiki zamanda bunu etmək elə də çətin deyildir. Hazırda bütün dünyada məlumatlar bazası çox geniş yayılıb və yaxşı tərtib olunmuş tələbə çox sayda lazımlı informasiyanı əldə etmək olar. Bu informasiyalar bizi maraqlandıran göstəricilərin lazımlı dəqiqliklə qiymətlərini almaq üçün statistik işləmələrə kifayət edir.

2. Etibarlılıq, əməliyyətların və vasitələrin riskliliyi. Bu terminlər çoxmənalıdır. Onların izahına aid misallar göstərək.

Əməliyyatın etibarlılığı onun uğurla qurtarmasını ehtimalı kimi.

Əgər məlum olsa ki, əməliyyat keçirilə bilməz və ya axıra çatdırıla bilməz, onda onun etibarlılığı haqqında yəni onun keçirilməsinin şansı haqqında sual çıxır. Əgər əməliyyat özünün əsas xassələrinə görə tipik, təkrarlanandırsa, onda dəqiq sual meydana çıxır: əməliyyatın etibarlılığı nə qədərdir, yəni onun keçirilməsinin ehtimalı nə qədərdir?

Məsələn müqavilə bağlamağın ehtimalı necədir? Burada da etibarlıq dedik də ayırmaq lazımdır tarixi və proqnozlaşdırılan etibarlıqları. Birincisi artıq həyata keçirilmiş əməliyyatlar haqqında informasiya verir, ikincisi isə dəyişilmiş şəraitdə ekspertlərin rəyinə əsaslanır.

Misal 1. Bağ sahələrinin, kottejlərin alqı-satqısı ilə məşğul olan firma bazarda artıq 10 ildir işləyir. Bu firmada müştərinin müraciətindən başlayaraq yekun nəticəyə qədər bütün mərhələlər qeydə alınır. Alqı-satqı tipikləşdirilir. Alqı-satqı mərhələlri dəqiq qeyd olunur və hər mərhələdən sonra agent borcludur ki, məlumatlar bazasına müraciət etsin və səhvlərdən ozünü sığortalasın. Belə təhlil zamanı o, məlumatlar bazasından faydalı məlumatlar əldə edə bilər. Qeyd edək ki, oxşar problemlər sığorta agentliklərində, mənzil dəyişmə bürolarında və digər sahələrdə də var.

Qabaqcadan görünən əməliyyatların etibarlılığı.

Etibarlılığın belə başa düşülməsi, onun müəyyən aspektlərinin intuitiv, qeyri-formal anlamı ilə əlaqədardır. Determinasiya olunmuş proseslər sozsüz istənilən mənada etibarlıdır, bu isə ən yüksək tərtibli etibarlılıqdır. Digər tərəfdən istənilən təsadüfi proses özündə etibarsızlıq elementləri saxlayır. Lakin təsadüfi prosesin bizə maraqlı xarakteristikaları, məsələn gəlir əvvəlcədən dəqiq deyilə bilərsə bu bizi tamamilə kifayətləndirir. Belə mülahizə sığorta işində geniş istifadə olunur, belə ki, burada böyük ədədlər qanunu tətbiq oluna bilir. Məsələn, konret avtomobilin taleyini əvvəlcədən demək mümkün olmasa da, çox sayda avtomobillərin nəçəsinin dağılmasını böyük dəqiqliklə demək olur, bu isə öz növbəsində sığorta şirkətlərinin fəaliyyətinin planlaşmasına imkan yaradır.

Əməliyyatların və vasitələrin risqliliyi. Bir qayda olaraq maliyyə əməliyytları risqli olur, yəni bu əməliyyatlardan gələn gəliri əvvəlcədən demək olmur. Qeyd edək ki, risq o zaman baş verir ki, qərar qəbul ediləcək şərait tam aydın olmur və yaxud hadisələrin gələcək inkişafı məlum olmur. Riskin iki faktordan-təsədüflikdən və şəraiti bilməməkdən asılılığı aşağıdakı şəkildə qrafiki olaraq göstərilmişdir.

Bilməməyi aradan qaldırmaq üçün böyük vəsait sərf olunur və bu böyük əmək tələb edir. Deyək ki, bank sferasında işləyənlər çoxsaylı informasiyasız, proqnozsuz normal işləyə bilmirlər. Bilməməyi aradan qaldırmaq bazarı, iqtisadiyyatı daha stabil edir ki, bu da bütün dünyada yüksək qiymətləndirilir. Bütün maliyyə əməliyyatlarının nəticələri təsadüfidir. Qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırmaq iştirakçıların özlərini necə aparmasını proqnozlaşdırmağa imkan yaradır, onların hərəkətlərini şərtləşdirir, şəxsi motivləri aradan qaldırır. Qeyri-müəyyənlikləri aradan qaldırmaqla bazarı daha stabil edir, bu isə hazırda bütün dünyada çox qiymətləndirilir. Beləliklə, müasir tendensiya qeyri-müəyyənlikləri yox etməkdən ibarətdir, bunun üçün qərar qəbul edən şəxs bütün informasiya sistemini, bu sistemini işlənməsini və qərar qəbul etməyi əldə edir. Qeyri-müəyyənlikdən yaranan risk bütün hallarda azalır və çox hallarda onları nəzərə almamaq olar. Lakin təsadüflük qalır. Maliyyə əməliyyatları üçün demək olar ki, bütün hallarda təsadüflük qalır (kifayətdir deyək ki, gəlirin real ölçüsü infilyasiyadan asılıdır, bunu isə əvvəldən demək olmur, belə ki, infilyasiya bir çox təsadüfi faktorlardan asılıdır). Bu səbəbdən də bir çox mühüm suallar meydana çıxır: 1) gözlənilən orta gəlir nə qədərdir? 2) veriləndən az olmayan gəlir götürməyin ehtimalı nə qədərdir? 3) verilmiş əməliyyatın risqi necədir? 4) Bir neçə müxtəlif gəliri və risq olan əməliyyatlardan hansını seçək? 5)verilmiş ədəddən kiçik olmayan ehtimalla hər hansı gəlir əldə etmək üçün nə etmək lazımdır? Maliyyə əməliyyatlar keçirən zaman belə suallar diqqət mərkəzində olurlar. Nəzəri olaraq təsadüfi Q gəlirinin paylanmasını bilərək, bu suallara cavab vermək elə də mürəkkəb deyildir.

Misal 2. Tutaq ki, təsadüfi Q gəlirinin paylanması belədir:

-10	10	20	30	40
0,1	0,3	0,1	0,4	0,1

Bu halda qoyulan sualların cavabları belə olar: 1) riyazi gözləməni hesablamaq lazımdır, o 20-ə bərabərdir; 2) paylanma F funksiyasını quraq və onda gəlirin verilmiş ədəddən kiçik olmamasının ehtimalı $P(Q \geq b) = 1 - F(b)$ olar; 3) bu sualın cavabı bu şəraitdə bizim risqi necə başa düşməyimizdən asılıdır, təbii olaraq risqi orta kvadratik sapma kimi götürmək olar: $\sigma_Q \approx 14$; 4) bu suala cavab vermək üçün şəraiti daha geniş izah etməliyik (burada bayes düsturları kömək edə bilər).

3. Qiymətli kağızların statistik xarakteristikaları. Maliyyə bazarında çox sayda qiymətli kağızlar tədavüldə olur. Qiymətli kağız hər hansı Q_0 gəlirin qazanılmasına imkan yaradır. Ümumi halda qiymətli kağız sahibi hər hansı təsadüfi Q gəlirini qazanır. Qiymətli kağızların ən mühüm iki xarakteristikası var: səmərəlilik (və ya gözlənilən orta səmərəlilik) E və risqlilik r.

Səmərəlilik hər hansı gəlirin, mənfəətin və ya gəlirliliyin ümumiləşmiş göstəricisidir. Səmərəlilik o zaman tətbiq edilir ki, onun konkretliyini dəqiqləşdirməyə ehtiyac olmur. Adətən səmərəlilik təsadüfi kəmiyyət hesab olunur və E ilə işarə edilir. Onun gözlənilən orta qiyməti riyazi gözləmədir $M[E]=m_E$.

Maliyyə bazarını tədqiq edərkən adətən dispersiyanı *V* variasiyası adlandırırlar və *r* risqliliyini adətən mümkün qiymətlərin orta qiymət ətrafında səpələnmə ölçüsü ilə eyniləşdirirlər. Çox hallarda risqliliyi orta kvadratik sapma ilə eyniləşdirirlər. Beləliklə:

$$V=D[E]=M\left[(E-m_E)^2\right],\quad r=\sqrt{V}=\sqrt{M\left[(E-m_E)^2\right]}.$$

Əgər qiymətli kağızların qiymətlərinin səmərəliliyinin $w=(e_1,\cdots,e_n)$ seçməsi verilərsə, onda $E=\left(\sum_{i=1}^{n}e_i\right)\Big/n$ - gözlənilən orta səmərəliliyin etibarlı və qarışdırılmaz qiyməti olar. Dispersiyanın və risqliliyin etibarlı və qarışdırılmaz qiymətə aşağıdakı kimi olar:

$$\widetilde{V}=\left(\sum_{i=1}^{n}(e_i-\overline{E})^2\right)\Big/(n-1),$$

$$\widetilde{r}=\sqrt{\widetilde{V}}=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(e_i-\overline{E})^2\right)\Big/(n-1)}$$

Hökm edəndə ki, səmərəlilik təsadüfi kəmiyyətdir, başa düşülür ki, onun paylanması demək olar ki, heç vaxt məlum olmur. Ona görə də onun lazım olan paylanmasının parametrlərini hesablamaq olmur.

Misal 3. Səmərələliyin qiymətlər sırası məlumdur: (0, 5, 6, 7, 4, 8, 3, 4, 6, 1, 2, 5, 6, 9, 6, 7, 3, 5, 7, 6). Risqliliyin orta qiymətini tapın.

Həlli. Yuxarıdakı düsturlardan istifadə edərək alarıq:

$$\overline{E}=(0+5+\cdots+7+6)/20=5.$$

$$\widetilde{V}=\left((-5)^2+0+1+2^2+\cdots\right)/19=102/19,\ \overline{r}=\sqrt{\widetilde{V}}\approx 2{,}4.$$

Qayda. Səmərəlilik və risqlilik arasında düz reqressiv asılılıq var–böyük səmərəli əməliyyatların (gəliri çox olan) bir qayda olaraq böyük risqi olur.

[illegible]

1. [illegible]:

[illegible]) [illegible]-[illegible];

[illegible]) [illegible];

[illegible]) [illegible] ([illegible]-[illegible]);

[illegible]) [illegible], [illegible], [illegible];

[illegible]) [illegible]: [illegible] – [illegible];

[illegible]) [illegible], [illegible]; [illegible];

[illegible]) [illegible], [illegible].

19.2. Qiymətli kağızlar portfeli

və onun xarakteristikaları

1. Portfel yanaşmasının mahiyyəti. Maliyyə bazarında bir qayda olaraq çox sayda qiymətli kağızlar tədavüldə olur: dövlət qiymətli kağızları, xüsusi firmaların aksiyaları, veksellər və s. Yuxarıda göstərmişdik ki, səmərəlilik və risqlilik müxtəlif olur. Dövlət qiymətli kağızları ən etibarlı olur, lakin onlar da riskli olur, belə ki, dövlət siyasəti dəyişə bilər. Əgər bazarın iştirakçılarının sərbəst pulları varsa, onları «corabda» saxlamaq məqsədə uyğun deyildir, onları banka aparıb əlavə faizlər almaq və yaxud qiymətli kağızlar alıb əlavə gəlir götürmək lazımdır.

Hansı banka aparmaq lazımdır? Hansı qiymətli kağızları almaq? Böyük gəlirli qiymətli kağızlar adətən böyük riskli olurlar. Bu məsələnin həlli bazar iştirakçısının risqə münasibətindən asılıdır. Lakin iqtisad elmi müəyyən bu məsələnin həlli üçün müəyyən zəmanətlər verə bilər. Bazar iştirakçısının qiymətli kağızların alınmasına sərf edəcəyi kapitalın paylanmasının ümumi məsələsinə baxaq.

Tutaq ki, X_i qiymətli kağızlar almaq üçün ayrılan kapitalın i - ci növ qiymətli kağıza sərf olunan hissəsidir. E_i - i-ci qiyməti kağızın təsadüfi səmərəliliyidir.

Tutaq ki, $m_i \sigma_i$ - gözlənilən səmərələlik və bu səmərəliliyin orta kvadratik sapmasıdır, yəni m_i-səmərəliliyin riyazi gözləməsi və $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ burada V_{ii} -variasiya və ya dispersiyadır. V_{ii} ilə i-ci və j - ci növ qiymətli kağızın korrelyasiya momentidir (K_{ij}). i -ci növ qiymətli kağızın riskliliyini orta kvadratik $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ sapması ilə eyniləşdirəcəyik. Bazarın iştirakçısının sərəncamında olan qiymətli kağızların dəstinə onun portfeli deyilir. Portfelin səmərəliliyi ümumiyyətlə desək təsadüfi kəmiyyətdir. Onu E_r - ilə işarə edək, onda bu səmərəliliyin gözlənilən qiyməti

$m_p = M[E_p]\sum_i x_i m_i$, portfelin dispersiyası $D[E_p] = \sum_{i,j} x_i x_i V_{ij}$

olar. $\sigma_i = \sqrt{V_{ii}}$ *i* - ci qiymətli kağızın riskinin qiyməti olduğundan , onda $\sigma_p = \sqrt{D[E_p]}$ - i portfelin risqi adlandırmaq olar. Adətən $D[E_p]$ -i V_p ilə işarə edirlər. Beləliklə, biz portfelin səmərəliliyini və riskliyini onun təşkil edən qiymətli kağızların səmərəliliyi və onların korrelyasiya momentləri vasitəsilə ifadə etdik.

2. Müxtəlif qiymətli kağızların korrelyasının təsiri. Fərz edək ki, müxtəlif növ qiymətli kağızlar özlərini asılı olmayan aparırlar, daha dəqiq desək, onlar korrelyasiya olunmayandırlar, yəni $V_{ij} = 0$, əgər $i \neq j$ Onda $V_p = \sum_i x_i V_{ij}$

və $\sigma_p = \sqrt{\sum_i x_i V_{ij}}$.·

Tutaq ki, bu qiymətli kağızlara eyni miqdarda pul qoyulub, yəni bütün *i=1,...,* *p* üçün $x_i = 1/n$, onda $m_p = \left(\sum_i m_i\right)/n$ - portfelin risqi $\sigma_p = \sqrt{V_p} = \sqrt{\sum_i V_{ii}/n}$. Tutaq ki, $\overline{\sigma} = \max \sigma_i$ onda $\sigma_p \leq \overline{\sigma}/\sqrt{n}$. Buradan belə bir nəticə alınır.

Nəticə. Korrelyasiya olunmuş qiymətli kağızlarda onların portfeldəki növlərinin sayı *p* artdıqca, portfelin riski məhdud olur və $n \to \infty$ sıfıra yaxınlaşır. Bu nəticə portfelin diversifikasiya (müxtəliflik) effekti adlanır və maliyyə bazarında ən əsas qayda adlanır. Bu qayda aşağıdakı atalar sözündə də öz əksini tapıb: «bütün yumurtaları bir cəvərənə yığma».

Misal 1. Fərz edək ki, investor dörd növ korreksiya olunmamış qiymətli kağızlarla portfelini qurmaq imkanına malikdir. Səmərəlilik və risklilik aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.

i	1	2	3	4

E_i	3	5	8	10
σ_i	2	4	6	8

Bu kağızlardan eyni pay olmaqla bir neçə variantda portfel düzəldək:

a) portfel yalnız 1-ci və 2-ci növ kağızlardan düzəlib: onda

$$m_p = (3+5)/2 = 4\ ;\ \sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2/2} \approx 2{,}23\ ;$$

b) portfel yalnız 1-ci, 2-ci və 3-cü növ kağızlardan düzəlib; onda

$$m_p = (3+5+8)/3 \approx 5{,}3\ ;\quad \sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2/3} \approx 2{,}5\ ;$$

c) portfel bütün dörd növ kağızlardan düzəlib; onda

$$m_p = (3+5+8+10)/4 = 6{,}5\ ;\ \sigma_p = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2/4} \approx 2{,}73\ .$$

Göründüyü kimi böyük sayda qiymətli kağızlardan ibarət portfelin risqi çox kiçik olur, səmərəliliyi isə artır. Qiymətli kağızların növləri arasındakı korrelyasiya asılılığının portfelin xarakteristikalarına necə təsir etdiyinə baxaq. Korrelyasiya portfelin səmərəliliyinə təsir etmir, lakin korrelyasiya portfelin variasiyasına, dispersiyasına və ya riskinə təsir edir, belə ki, $V_p = \sum\limits_{i,j} x_{ij} V_{ij}$.

$k_{ij} = V/(\sigma_i \sigma_j)$ - korrelyasiya əmsalına baxaq. Onda $V_p = \sum\limits_{i,j} (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) k_{ij}$ olar. Korrelyasiyanın təsirini başa düşmək üçün aşağıdakı iki hala baxaq.

Birinci hal - tam düz korrelyasiya, yəni $k_{ij} = 1$ bu o deməkdir ki, *i*-ci faktor dəyişdikdə *j*-ci faktor da dəyişər və bu dəyişmə mütənasib olur. Onda $V_p = \sum\limits_{i,j} (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) = \sum\limits_{i} (\sigma_i x_i)^2$. Əgər pulları bərabər paylarla sərf etsək, yəni $x_i = 1/n$ onda $V_p = \left(\sum\limits_{i} \sigma_i \right) \Big/ n^2$ və portfelin riski $\sigma_p = \left(\sum_i \sigma_i\right)\Big/ n$ olar. Əgər $\underline{\sigma} \le \sigma_i \le \overline{\sigma}$ olarsa, onda $\underline{\sigma} \le \sigma_p \le \overline{\sigma}$ olar.

Beləliklə, tam düz korrelyasiya zamanı portfelin diversifaksiyası heç bir səmərə vermir-bu halda portfelin risqi portfeli təşkil edən qiymətli kağızların ədədi ortasına bərabər olar və qiymətli kağızların sayı artıqda sıfıra yaxınlaşmaz.İndi isə tam tərs korrelyasiya şəraitinə baxaq, yəni $k_{ij} = -1$, əgər $i \ne j$ olarsa.

Vəziyyəti aydın hiss etmək üçün iki növ qiymətli kağızdan təşkil edilmiş portfelə baxmaq kifayətdir – $n = 2$. Onda, $V_p = \sigma_1^2 x_1^2 + \sigma_2^2 x_2^2 - 2\sigma_1 x_1 x_2 \sigma_2 = \left(\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2\right)^2$ olar və əgər $x_2 = x_1 \sigma_1 / \sigma_2$ olarsa, onda $V_p = 0$ olar. Buradan maraqlı nəticə almaq olur.

Nəticə. Tam tərs korrelyasiya zamanı müxtəlif növ qiymətli kağızlara sərf olunan vəsaitin elə paylanması varki, risq tamamilə sıfıra bərabərdir

3.Optimal portfel. Hər bir qiymətli kağızlar portfelinin sahibi sual qarşısında qalır: nə edək ki, səmərəlilik çox, risq isə az olsun. Lakin «iki dovşanı birdən tutmaq mümkün olmadığından» səmərəliliklə risq arasında müəyyən seçim etmək zərurəti meydana çıxır. Bu seçim sonra qərar qəbul edən şəxsin səmərəliliyə və risqə münasibətindən asılı olur. Optimal portfelin riyazi formalaşmasına keçək. Bu formalaşmanı 1951-ci ilə N. Markovitz təklif etmiş və sonralar bu işə görə Nobel mükafatı almışdır.

Tutaq ki, x_i *i* – ci növ qiymətli kağıza sərf olunan kapitalın payıdır. Onda aşağıdakı məsələni alarıq.

Məsələ: Portfelin verilmiş qiymətə bərabər m_p səmərəliliyini təmin edən , yəni $\sum_i x_i m_i = mp$ portfelin səmərəlilik variasiyasını $V_p = \sum_{i,j} x_i x_i V_{ij}$ minimumlaşdıran x_i - ni tapın. x_i - pay olduğundan onların cəmi vahidə bərabər olar: $\sum_i x_i = 1$.

Bu məsələnin həllini (optimal) x^* - la işarə edək. Əgər $x^*>0$ olarsa, onda bu o deməkdir ki, nağd kapitalın x_i^* hissəsini i - ci növ qiymətli kağıza sərf etmək lazımdır. Əgər $x^*<0$ olarsa, onda bu o deməkdir ki, «short sale» (aşağıda izah olunacaq) əməliyatını keçirmək lazımdır. Əgər belə əməliyyatı keçirmək mümkün deyilsə, onda $x_i \geq 0$ məhdudiyyətini qoymaq lazımdır. Qiymətli kağızların növlərinin sayından asılı olaraq iki hala baxaq.

1) İki nov qiymətli kağız olduqda yuxarıdakı məsələ belə olur:

$$x_1^2 V_{11} + 2x_1 x_2 V_{12} + x_2^2 V_{22}^2 \to \min,$$

$$x_1 m_1 + x_2 m_2 = mp,$$

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Müəyyənlik üçün, tutaq ki, $m_1 > m_2$. Axırıncı iki tənlikdən x_1, x_2 - i təyin edərik:

$$x_1^* = (m_p - m_2)/(m_1 - m_2)\ ,\ x_2^* = (m_p - m_1)/(m_2 - m_1).$$

Görürük ki, əgər portfelin tələb olunan səmərəliliyi qiymətli kağız növlərinin səmərəliliyi arasında olarsa, onda hər iki pay x_1^*, x_2^* müsbət olar. Əgər $m_p > m_1$ olarsa, onda $x_2^* < 0$ olar. Deməli bu halda «short sale» əməliyyatı aparmaq lazımdır. Bu əməliyyat nədir?

Portfeli formalaşdıran investor bir neçə vaxtdan sonra 2-ci növ qiymətli kağızı bazara çıxarmağı öhdəsinə götürür. Buna görə o, indidən onların pul ekvivalentini alır. Bu pula o, birinci növ qiymətli kağız alır və gəlir əldə edir. Birinci növ qiymətli kağız daha səmərəli olduğundan investor uduşda olur. Beləliklə, o, heç bir şeydən pul qazanır.

2) Qiymətli kağızların növləri üç olduqda məsələ mürəkkəbləşir. Ona görə də ümumi xarakterli nəticələrlə kifayətlənək.

a) tələb olunan səmərəlilik artdıqca hər növ qiymətli kağıza qoyulan vəsait xətti olaraq dəyişir əgər «short sale» əməliyyatını mümkündürsə belə əməliyyat mümkün olmazsa, onda vəsait hissə-hissə xətti dəyişir. Daha səmərəli vəsaitlər artır və bunlar daha risqli qiymətli kağızlardır, az səmərəli vəsaitlər və daha az risqli vəsaitlər azalır.

b) optimal portfelin risqlilik ölçüsü tələb olunan səmərəliliyin artması ilə artır. Borc götürülmüş kapitalla formalaşan portfeldən istifadə etmək imkanı varsa, onda istənilən səmərəlilik tələb etmək olar, lakin bu halda risq qeyrimәhdud artacıq. Əgər borc götürmək mümkün deyilsə, onda portfelin limit səmərəliliyi bütün qiymətli kağızların ən böyük səmərəliliyi ilə üst-üstə düşər.

4. [illegible]. [illegible] ([illegible], [illegible]) [illegible], [illegible], [illegible].

[illegible], m_0 - [illegible], x_0 - [illegible]. [illegible], m_r - [illegible] ν_r, σ_r - [illegible]. [illegible]-[illegible], [illegible] $(1-x_0)$ [illegible]. [illegible]

□□□□□□□□□□□□□□ $m_p = x_0 m_0 + (1-x_0)m_t$, □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□ $\nu_p = (1-x_0)^2 \nu_r$ □□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ $\sigma_p = (1-x_0)\sigma_r$ □□□□. x_0-□ □□□ □□□□□□□ □□□□□□□: $m_p = m_0 + \sigma_p (m_r - m_\sigma) / \sigma_r$, □□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□ □□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□. □□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□. □□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ 1-□□□ n -□ □□□□□□ □□□□□□□□□□□.

$$x_0 + \sum_{i,=1}^{n} x_i = 1$$

□.□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□ □□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□□. □□□□□ □□, □- □□□□□□ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□, $X = (x_i)$ $M = (m_i)$ i -□□ □□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□ □□□□□□□□□ x □□□□ □□ □□ □□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□□□□□□□□□□□□, $i = 1, \cdots, n$. □□□□□ □□, I □□□□□□ □□□□□-□□□□□□□□□□□□□, □□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□□, □□□□ x_i^* -□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{(M - m_0 I)^T \cdot V^{-1}(M - m_0 I)} V^{-1}(M - m_0 I) \qquad (2)$$

□□□□□□ $V^{-1} - V$ □□□□□□□□□□□ □□□□□□□□. □□□□□□ □□□□□□□□□ □□□□ □□□□□, □□□□ □□□□□ □□□□□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□□□ □□ □□□□□ □□□□ □□□□□□, □□ □□□□□ □□□□□ □□□□□□□ □□□□ □□ □□□□□□□□□□□ □□□□□ □□□□□□□□.

$V^{-1}(M - m_0 I)$ -□□□□□□ n □□□□ □□□□□ □□□□□□□□□. □□□□□□□□□ □□□□ □□ □□□□□□

[illegible] m_p [illegible]-[illegible].

[illegible] m_p -[illegible]. [illegible] X^* [illegible] m_p -[illegible], [illegible] X^* [illegible]-[illegible] m_p - [illegible], [illegible].

[illegible] *2.* [illegible]: [illegible] 2 [illegible] 4 [illegible] 10 [illegible] $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 4$ [illegible].

[illegible]?

[illegible]. $m_0 = 2$, $M = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$

[illegible] m_p [illegible]. V [illegible] ([illegible] [illegible].5 [illegible] 1.3.)

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$V^{-1}(M - m_0 I) = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} ,$$

$$(M - m_0 I)V^{-1}(M - m_0 I) = (2,8)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 5 .$$

[illegible], [illegible] [illegible]

$$X^* = \left((m_p - 2)/5\right)\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

[illegible] $(m_p - 2)/10$ - [illegible].

[illegible], $x_0 = 1 - (m_p - 2)/5$ [illegible].

[illegible]

1. [illegible]: [illegible] 2 [illegible] 10, [illegible] 5 [illegible]. [illegible].

[illegible]. [illegible] (1) [illegible]:

$$\sigma_p = 5x_1 \to \min,$$
$$2x_0 + 10x_1 = m_p,$$
$$x_0 + x_1 = 1$$

[illegible], $x_0 = (10 - m_p)/8$, $x_1 = (m_p - 2)/8$

[illegible], $m_p = 2 + 8x_1 = 2 + 8\sigma_p/5$

2. [illegible].

[illegible]. (2) [illegible]. [illegible]

□□□□□□ □□□□, □□□□ □□□□□ □□ □□□□□□□□ □□□□□□ □□□□:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

□□□□□□ □□□□□□□□□□□□ □□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ □□□□□□ :

$$X^* = \frac{m_p - m_0}{\sum_{i=1}^{n} (m_i - m_0)^2 \big/ \sigma_i^2} \cdot \begin{pmatrix} (m_1 - m_0)\big/\sigma_1^2 \\ \vdots \\ (m_n - m_0)\big/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

19.3. Maliyyə bazarının aparıcı faktorlar üsulu

1. Aparıcı faktorların maliyyə bazarının tərkibinə təsiri. Maliyyə bazarının təhlilinin məqsədi-investorlar üçün təkliflər hazırlamaqdan ibarətdir: hansı növ qiymətli kağızlara kapital qoymaq olar və hansı miqdarda. Yuxarıda biz qiymətli kağızlar portfelinin optimallığı üçün məsələnin həllinə baxmışdıq, lakin bu formal xarakter daşıyırdı, belə ki, fərz etmişdik ki, kapital qoyuluşunun səmərəliliyi ehtimal xarakteristikalı təsadüfi kəmiyyətdir.

Faktiki olaraq tələb olunur ki, riyazi gözləmə vektorunu və səmərəlilik matrisini bilmək lazımdır. Bu kəmiyyətləri haradan götürək? Onları necə tapaq? İnkişaf etmiş ölkələrdə qiymətli kağızların birja kursları haqqında məlumatlar requlyar olaraq çap olunur, hər şeydən əvvəl aparıcı şirkətlərin aksiyaları. Beləliklə, kafi qədər uzun müddət üçün kursların tarixini və ödənilən dividentləri ardıcıl olaraq təhlil etmək olar. Tutaq ki, *E* səmərəliliyinin qiymətləri $(e_1, \cdots, e_n)$ ədədi sırasını təşkil edir. Riyazi statistika üsullarını tədbiq edib *E* ortanı taparıq: $\overline{E} = \sum_i e_i / n$. İndi dispersiyanın və ya variasiyanın qarışdırılmayan qiymətini tapmaq olar.

$\widetilde{V} = \sum_i (e_i - \overline{E})^2 / (n-1)$, , sonra isə onları riyazi gözləmənin və dispersiya və ya variasiyanın təqribi qiymətləri kimi istifadə edə bilərik.

Real rəqəmlər belədir. ABŞ birjalarında aksiyaları yüksək olan aparıcı şirkətlərin sayı n=500 -dür və bu şirkətlər bazarın əsas hissəsini təşkil edirlər.

Statistik təhlil üçün mənası olan hər rüblük müvəqqəti sıranın uzunluğu T=100 rübdür. Beləliklə, nT=5000, lakin n=500 - ü qiymətləndirmək lazımdır və *n(n-1)/2>100000*, yəni məlumatımız olduğundan daha çox sayda kəmiyyətləri qiymətləndirmək lazımdır, buna görə də qiymətləndirmənin dəqiqliyi yaxşı ola bilməz.

Bu səbəbdən də orta qiyməti və variasiyanı qiymətləndirmək üçün statistik üsul yaramır. Çıxış yolu kürsların və qiymətli kağızların başqa xarakteristikalarının maliyyə bazarının aparıcı faktorlarından asılılığının təhlilindən ibarətdir. Aparıcı faktor nədir? Qeyd etdiyimiz kimi iqtisadi həyatda hər şey qarşılıqlı əlaqədədir, bunlar isə praktiki olaraq bütün göstəricilərə təsir edir. Məsələn, yaxın şərq neftinin qiymətiin səviyyəsi ABŞ-ın bütün böyük şirkətlərinin aksiyalarının katirovkalarına təsir edir, belə ki, bu neft ABŞ-n enerji tələbatının tam yarısını təmin edir. Əgər neftin qiyməti artarsa, onda avtomobillər üçün benzin bahalaşacaq, benzinə tələb azalacaq, belə ki, yanacağa olan sərfiyyat onların maya dəyərinin əsas komponentidir. Təbiətini müəyyən etmədən belə aparıcı faktorlardan birinə baxaq. Onu *F* ilə işarə edək və hesab edək ki, bütün kapital qoyuluşu ondan asılıdır. Ən sadə asılılıq xətti olduğundan hepotezə qəbul edək ki, qeyd etdiyimiz qiymətli kağızın smərəliliyi *E* aparıcı faktorlar dan xətti asılıdır: $E = a + bF$. a, b sabitlərini necə tapaq?

Bu məsələyə artıq bölmə 18.3 b.3-də baxılmışdır. Nəzəri nöqteyi-nəzərdən *E* - in *F* - dən asılılığı belə görünür: $b = V_{FE} / V_{EE}$, $a = m_E - bm_F$.

Praktikada isə uyğun qiymətləndirmədən istifadə etmək lazım gəlir və onda alarıq: $b = \hat{V}_{FE} / \hat{V}_{EE}$, $a = \overline{E} - b\overline{F}$, burada $\hat{V}_{FE} = \overline{EF} - \overline{EF}$ və $\hat{V}_{EE} = \overline{E^2} - \overline{E}^2$ (bax p.3, bölmə 18.3)

Əgər aparıcı faktorun verilmiş qiymətli kağıza təsiri haqqında hipotez doğrudursa, onda $E = a + bF$ düz xəttindən bütün yuxarı və aşağı sapmalar doğrudan da təsadüfidir və əgər gələcəkdə yeni şərait yaranarsa, *EF* cütlüyünün yeni qiyməti olarsa, onda uyğun nöqtə göstərilən düz xəttin ətrafında yerləşər.

Əgər aparıcı *F* faktoru uğurlu seçilibsə, onda onun təsiri ilə səmərəliliyin bütün təsadüfi enib-qalxması E_i təyin oluna bilir. Əgər hər bir qiymətli kağız üçün onun E_i səmərəliliyi ilə aparıcı *F* faktorları arasındakı asılılıq tapılarsa, onda optimal portfelin formalaşması üçün bütün lazım olan kəmiyyətləri asanlıqla tapmaq olar. Doğrudan da $m_i = a_i + b_i m_i$, $V_{ii} = b_i^2 V_{FF} + V_{ii}$, $V_{ij} = b_i b_j V_{FF}$.

2. Bazarın səmərəliliyi aparıcı faktor kimi. Aparıcı *F* faktoru olaraq maliyyə bazarının özünün səmərəliliyini götürmək ən məqsədəuyğundur. Bu bazarda tədavüldə olan bütün qiymətli kağızların səmərəliliklərinin ölçülmüş cəmidir. Beləliklə, bütün qiymətli kağızların səmərəliliyi asılıdır $F : E_i = a_i + b_i F + e_i$. Adətən b_i hərifi əvəzinə β-dən istifadə edirlər və bu əmsal belə də adlanır «bazara nisbətən *i* –növ beta qiymətli kağızı», və ya qıssa olaraq «*i*-ci əmanətin beması». Bu kəmiyyət verilmiş qiymətli kağızın taleinə bazarın təsirini müəyyən edir: əgər $\beta_i > 0$ olarsa, onda *i* - ci növ kağızın səmərəliliyi bazara uyğun dəyişər, $\beta < 0$ olarsa onda kağızın səmərəliliyi bazarın bütövlükdə səmərəliliyinin tam əksinə olur. İndi qeyd edək ki, hər bir qiymətli kağızın səmərəliliyinin V_{ij} variasiyası $\beta_i^2 V_{FF} + \nu_{ii}$ - ə bərabər olar, yəni iki toplanandan ibarətdir: bazardan asılı olmayan ν_{ii} və variasiyanın «bazar» hissəsindən $\beta_i^2 V_{FE}$ - dən. Onların nisbəti $\beta_i^2 V_{FE} / \nu_{ii} - R^2$ ilə işarə olunur və *R - sguared* adlanır. Bu nisbət bazara çıxarılan qiymətli kağızın riskini xarakterizə edir.

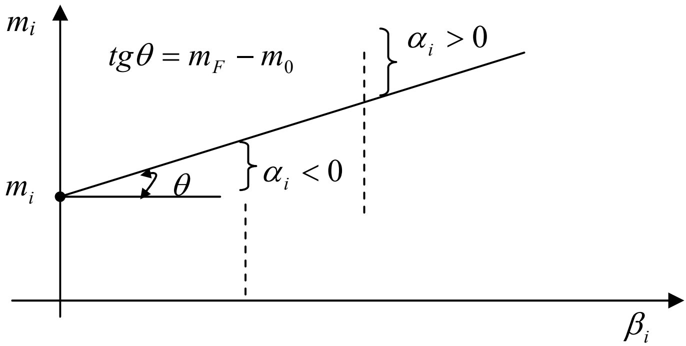
R- sguared – i böyük olan kağızlar müəyyən mənada daha yaxşı sayılır belə ki, onların hərəkətini əvvəlcədən bilmək olur. Qiymətli kağızların səmərəliliyini risqsiz əmanətin səmərəliliyindən m_0 - dan istifadə edərək hesablamaq əlverişli olur. Beləliklə,

$m_i - m_0 = \beta_i (m_F - m_0) + \alpha_i$, burada $\alpha_i = a_i + \beta_i m_0 - m_0$.

Qiymətli kağızın orta səmərəliliyinin risqsiz səmərəlilikdən m_0 artımı risq üçün mükafat adlanır. Beləliklə, risq üçün mükafat bütün bazar üçün risqlərin mükafatları cəmi ilə xətti asılıdır.

3. İdeal rəqabətli bazarda optimal portfel. Belə maliyyə bazarı dedikdə başa düşülür ki, bütün iştirakçılar eyni informasiyaya malikdirlər və onun əsasənda ən yaxşı optimal qərarlar qəbul edirlər. Xüsusi halda hər bir iştirakçı öz qiymətli kağızlarının optimal portfelini düzəltməyə çalışır. Tobin nəzəriyyəsinə əsasən optimal portfelin risqli hissəsinin strukturu eynidir və investorun risqə münasibətindən asılı deyil.

Ona görə də hamı istəyir ki, öz riskinə görə portfelini formalaşdırsın. Lakin satılan qiymətli kağızların strukturu belə olmaya da bilər. Onda tələb böyük olan qiymətli kağızların qiymətləri artacaq və az tələb olan kağızların qiymətləri isə azalağaq. Sonda tarazlıq yaranacaq, yəni optimal portfelin risqli hissəsi bütün bazarın risqli hissəsi kimi olacaq. Beləliklə, bütün bazar üçün aşağıdakı münasibət doğru olacaq: $m_i = m_0 + \beta_i (m_F - m_0)$ burada m_F - bütün bazarın orta səmərəliliyidir. Deməli verilmiş qiymətli kağızla əlaqədar riskin mükafatı, bütün bazarın risqi ilə əlaqədar mükafatla mütənasibdir və mütənasiblik əmsalı verilmiş qiymətli kağızın «beta»-sıdır. Bu münasibəti tarazlı bazarın əsas tənliyi adlandırmaq qəbul edilmişdir. Onu qrafiki şəkildə istifadə etmək də əlverişlidir.



Şəkildə üfuqi oxda «beta» kəmiyyətinin qiymətləri, şaquli oxda isə qiymətli kağızların gözlənilən orta səmərəliliyi qeyd edilmişdir. Düz xətt qiymətli kağızlar bazarının xətti adlanır. Nəzəriyyəyə görə istənilən qiymətli kağızın nöqtəsi (səmərəlilik, beta) bu düz xəttin üzərində yerləşməlidir. Reallıqda isə qiymətli kağızlar tənliyinə daha bir toplanan α əlavə olunur. Əgər $\alpha_i > 0$ olarsa, onda hesab olunur ki, bazar bu növ qiymətli kağızı qiymətləndirmir, əgər $\alpha_i > 0$ olarsa onda həmin kağıza olduğundan artıq qiymətləndirir. Bu səbəbdən də maliyyə təhlilinin nəticəsi olaraq praktiki təklif qəbul edilir: investor öz portfelini hər şeydən əvvəl qiymətləndirilməmiş kağızlarla formalaşdırmalıdır.

Misal 1. Cədvəldə bir neçə kvartal üçün aksiyaların kursu *E* və bazarın səmərəliliyi göstərilmişdir. Aksiyaların kursunun bazarın səmərəliliyindən asılılığını tapın. Aksiyaların xarakteristikalarını: ν, α, β, R^2

Həlli. Riyazi gözləmə, dispersiya *E, F* və s. qiymətlərini tapaq:

$$\overline{E}=15,\ \overline{F}=10,\ \hat{V}_{EE}=\sum_{i=1}^{10}(e_i-15)^2\Big/10=12/10,$$

$$\hat{V}_{EF}=\sum_{i=1}^{10}(f_i-10)^2\Big/10=8/10,$$

$$\hat{K}_{EE}=\sum_{i=1}^{10}(e_i-15)(f_i-10)\Big/10=8/10.$$

Deməli, $b=\hat{K}_{EF}\Big/\hat{V}_{EE}=(8/10)\big/(8/10)=1$

Beləliklə, *E* – nin *F* – dən xətti asılılıq tənliyi belə olar: *E=%+F*. Beləliklə, qalıq enib-qalması təsadüfi kəmiyyəti *e* belə olar: *E-(5+F). e* - üçün qiymətlər sırası düzəldərək bu qalığın variasiyasını tapmaq çox sadədir:

0	-1	0	0	1	1	-1	0	0	0

Təbii ki, orta qiymət sıfıra bərabərdir və ona görə də

$\hat{V}_{ee}=4/10$, $\beta=b=1$, $\alpha=a-m_0+m\beta_0=5-4+4=5$,

$R^2=\beta^2\,\hat{V}_{FE}\Big/\hat{V}_{ee}=(8/10)\big/(4/10)=2$.

$\alpha>0$ olduğundan bu qiymətli kağız bazar tərəfindən qiymətləndirilməmişdir. Beləliklə, ideal rəqabətli bazarda optimal portfelin risqli kağızlarının strukturu, bütün bazarın strukturu ilə eynidir. Deməli bazara inanmaq lazımdır və portfelin risqli hissəsini bazarınkı kimi formalaşdırmaq lazımdır. Deyək ki, bazardakı bütün risqli kağızların içərisində İBM şirkətinin aksiyaları 1,5% təşkil edirsə, onda investor öz kapitalının risqli kağızlara ayrılmış hissəsinin 1,5%-i İBM şirkətinin aksiyalarına sərf etməlidir. Lakin kapitalı risqli və risksiz hissələrə necə bölməyi nəzəriyyə deyə bilmir, bu bölüm investorun risqə meyilli olmasından asılıdır. Öz portfelinin səmərəliliyini artırmaq üçün investor risqli kağızların sayını artırmalıdır və onlar arasında optimal mütənasibliyi saxlamalıdır.

Ə l a v ə 1 .

1№-Li NƏZARƏT İŞİ (1-3 mövzularına aid)

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da vergüldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1.BİR VARİANT ÜÇÜN VERİLƏNLƏR VƏ TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Tapşırıq 1. Üç əmtəə fəzasında qiymətlər vektoru *P* və gəliri *Q* olan büdcə çoxluğuna baxın. Bu çoxluğu və onun sərhədini adi və vektor bərabərsizlikləri və bərabərlikləri vasitəsilə təsvir edin, budcə çoxluğunu və onun sərhədini qrafiki olaraq göstərin. Cavabda büdcə çoxluğunun həcmini ədədlə alın.

Verilənlər: *P=(2, 5, 6), Q=30*.

Tapşırıq 2. Xərc normaları matrisi *A* mənfəətin xüsusi çəki vektorları *C* və resurs ehtiyatları *B* olan optimal planlaşdırma məsələsinə baxın.

Verilənlər: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$

1. Bu məsələni qrafiki üsulla həll edin, optimal planı, maksimal mənfəəti, resurs qalığını tapın. Hansı resurslar istehsalın «zəif yerini» təşkil edir?

2. İkili məsələni tərtib edin və onu həll edin, bunun üçün II ikili teoremdən istifadə edin və nəzərə alın ki, p.1.-dəki ilkin məsələnin cavabını bilirsiniz.

3. Aşağıdakı vektorların və matrislərin hasillərini tapın (bu hasillərdə iqtisadi məna axtarmayın!); $CA,\ AB,\ CB,\ BC,\ AC^T, B^T A,\ B^T C^T, C^T B^T$ (burada *T* simvolu transponirə əməliyyatını göstərir).

Tapşırıq 3. *D* tələbinin və *S* təklifinin *P* qiymətindən asılılığı verilmişdir. Tarazlı qiymət şəraitində gəlirin tarazlı qiymətini tapın.

Maksimal gəliri və bu gəliri təmin edən qiyməti tapın.

Verilənlər: $D=400-5p,\ S=100+5p.$

Tapşırıq 4. (Leontev modeli). Qeyri istehsal istehlakının *C* vektoru və sahələrarası *A* balans matrisi verilmişdir. Bu istehlak vektorunu təmin edən buraxılış vektorunu tapın.

Verilənlər: $C=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$

Tapşırıq 5. (Neyman modeli). Texnoloji prosesin *A,B* matrisləri, *P* qiymət vektoru və *S* ilkin ehtiyatlar vektoru verilmişdir: texnoloji prosesin elə z_1, z_2 intensivliyini tapın ki, bir istehsal tsiklində məhsul buraxılışının mənfəətini maksimumlaşdırsın və həmin maksimum mənfəəti tapın.

Verilənlər:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\4 & 10\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 5\\5 & 15\end{pmatrix},\ P=\begin{pmatrix}1 & 5\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}14\\28\end{pmatrix}.$$

2. NƏZARƏT İŞLƏRİNİN MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİ

Tapşırıq 1. Qiymətlər vektoru $P=(p_1, p_2, p_3)$ əmtəələr dəsti $X=(x_1, x_2, x_3)$. Büdcə çoxluğu *B* bu çoxluq istehlakçının *P* qiyməti ilə *Q* miqdar pula ala biləcəyi bütün X əmtəə dəstlərinin çoxluğudur (nəzərdə tutulur ki, bütün pulların xərclənməsi zəruri deyildir). Büdcə çoxluğunu belə təvir etmək olar (əmtəələr dəsti - bu sütun vektorudur, lakin tipoqrafik nöqteyi-nəzərindən onu sətir vektoru kimi yazırıq):

a) adi bərabərsizliklərlə

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \le Q,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0;$$

b) vektor bərabərsizliklərlə

$$P \cdot X \le Q,$$

$$X \ge 0.$$

Büdcə çoxluğunun sərhədi - bu onun hissəsidir, Q dəqiqlikli əmtəələr dəstinin çoxluğudur. Büdcə çoxluğunun sərhədini belə təsvir olunur:

a) adi bərabərliklə

$$p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = Q,$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0;$$

b) vektor bərabərlikləri ilə

$$P \cdot X = Q,$$

$$X \ge 0.$$

Üç əmtəə halında büdcə çoxluğu üç üzlü piramida şəklində olur, onun bir təpəsi koordinat başlanğıcı, üçü isə $\frac{Q}{p_1}, \frac{Q}{p_2}, \frac{Q}{p_3}$ nöqtələri olar. Büdcə çoxluğunun sərhədi isə bu piramidanın oturacağı olar, nəzərdə tutulur ki, piramidanın təpəsi koordinat başlanğıcındadır. Büdcə çoxluğunun həcmi isə $\left(\frac{1}{3}\right), \left(\frac{Q}{p_1}\right), \left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{Q}{p_2}\right), \left(\frac{Q}{p_3}\right)$ olar ki, bizim halda *V=75* olar.

Tapşırıq 2. 1. Bu məsələnin qrafiki həlli p.3. bölmə 3.1.- də verilmişdir; 2. İkili məsələni p.2. bölmə 3.2.- də olan qayda ilə tərtib edək:

$$S(x_1, x_2) = 2x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$3x_1 + x_2 \le 6, \quad \left| y_1 \ge 0 \right.$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6, \quad \left| y_2 \ge 0 \right.$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$N(y_1, y_2) = 6y_1 + 6y_2 \to \min,$$
$$3y_1 + y_2 \geq 2,$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 2,$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

2. ikili teoremdən istifadə etməklə, ikili məsələnin həllinə və başlanğıc məsələnin cavabına p.3., bölmə 3.2.-də baxmaq olar. Biz yalnız cavabları veririk:

$$y_1 = \frac{2}{5}, y_2 = \frac{4}{5}, \ N_{\min} = \frac{36}{5}.$$

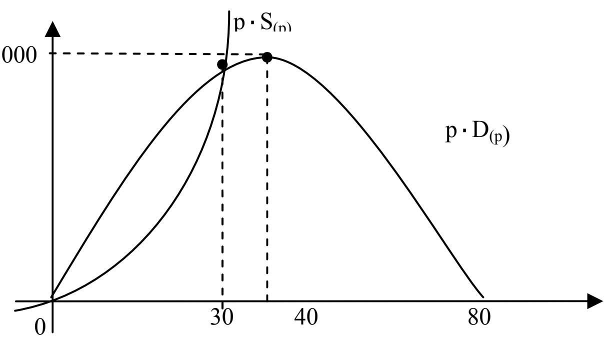
3. Yalnız cavabları göstərək:

$$CA = (8,6), \ AB = \begin{pmatrix} 24 \\ 18 \end{pmatrix}, \ CB = (24), \ BC = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}, \ B^T A = (24,18),$$

$$B^T C^T = (24), \ AC^T = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \ C^T B^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Tapşırıq 3. Tarazlıq nöqtəsi tələb və təklifin bərabərliyi ilə xarakterizə olunur: *D(p)=S(p)*, yəni $400 - 5p = 100 + 5p \to p = 30$. Tarazlıq qiymətində mədaxil $R(50) = D(30) \times 30 = 7500$ olar.

P qiymətində isə mədaxil $R(p) = \min\{p \cdot D(p), P \times S(p)\}$ olar. Aşağıdakı şəkildə *P*-dən asılı olaraq mədaxilin qrafiki göstərilmişdir. Göründüyü kimi maksimum *p=40* olduqda olur və 8000- ə bərabərdir.



Tapşırıq 4,5. Bu məsələlərin həllinə p.1. bölmə 3.3.- də (Leontev modeli) və p.3. bölmə 3.3. - də (Neyman modeli) həmçinin məsələ 1 və 2 p.3., bölmə 3.3.- də baxın.

3. Nəzarət işləri üçün tapşırıqların yeddi variantı

var-tın №-si	Tapşırıqlar üçün verilənlər				
	I	II	III	IV	V
1.	$P=(7,3,2)$ $Q=42$	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $C=(4,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}11\\ 7\\ 10\end{pmatrix}$	$D=100-10p$ $S=100+10p$	$C=\begin{pmatrix}1\\ 0{,}5\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2/5 & 1/5\\ 1/8 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 10\end{pmatrix}$ $P=(1,\ 1)$ $S=\begin{pmatrix}20\\ 20\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 10 & 15\end{pmatrix}$
2.	$P=(1,3,4)$ $Q=24$	$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $C=(5,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}12\\ 12\\ 20\end{pmatrix}$	$D=800-10p$ $S=200+10p$	$C=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1/3 & 1/4\\ 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 10\end{pmatrix}$ $P=(1,\ 5)$ $S=\begin{pmatrix}14\\ 28\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 15\end{pmatrix}$

3.	$P=(5,2,4)$ $Q=60$	$A=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\\3&3\end{pmatrix}$ $C=(1,\ 6)$ $B=\begin{pmatrix}16\\8\\15\end{pmatrix}$	$D=900-20p$ $S=100+10p$	$C=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1/3&1/6\\1/3&1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}7&5\\12&12\end{pmatrix}$ $P=(1,\ 2)$ $S=\begin{pmatrix}22\\18\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}10&6\\20&20\end{pmatrix}$
4.	$P=(2,3,4)$ $Q=60$	$A=\begin{pmatrix}2&1\\2&3\\1&4\end{pmatrix}$ $C=(5,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}12\\7\\10\end{pmatrix}$	$D=400-20p$ $S=70+10p$	$C=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1/2&1/4\\1/4&1/4\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ $P=(2,\ 6)$ $S=\begin{pmatrix}30\\30\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$
5.	$P=(5,8,4)$ $Q=120$	$A=\begin{pmatrix}1&1\\3&2\\2&1\end{pmatrix}$ $C=(5,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}11\\7\\10\end{pmatrix}$	$D=600-8p$ $S=120+8p$	$C=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2/5&1/5\\1/3&1/3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$ $P=(2,\ 3)$ $S=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&3\\3&4\end{pmatrix}$
6.	$P=(4,9,6)$ $Q=36$	$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\3&2\end{pmatrix}$ $C=(3,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}8\\16\\20\end{pmatrix}$	$D=400-5p$ $S=100+5p$	$C=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1/4&1/8\\1/5&2/5\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$ $P=(2,\ 3)$ $S=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}3&2\\4&4\end{pmatrix}$

7.	$P=(3,8,5)$ $Q=120$	$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ $C=(3,\ 1)$ $B=\begin{pmatrix}6\\ 18\\ 20\end{pmatrix}$	$D=500-5p$ $S=50+5p$	$C=\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}1/4 & 1/8\\ 1/4 & 1/3\end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 10 & 4\end{pmatrix}$ $P=(1,\ 1)$ $S=\begin{pmatrix}20\\ 20\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 15 & 10\end{pmatrix}$

Ə l a v ə 2 .

2№-Lİ NƏZARƏT İŞİ (4-6 mövzularına aid)

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da vergüldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1.BİR VARİANT ÜÇÜN VERİLƏNLƏR VƏ TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Tapşırıq 1. Funksiya öz qrafikinin bir neçə nöqtələri ilə verilib, qrafikn qonşu nöqtələri düz xətt parçaları ilə birləşdirilib.

Tapşırığın məzmunu:

1) bu funksiyanın qrafikini çəkin;
2) qonşu nöqtələr arasında bu funksiyanı düsturlarla verərək, onu təsvir edin;
3) funksiyanın təyin oblastını və qiymətlər çoxluğunu tapın;
4) bu funksiya artandırmı,monotondurmu, məhduddurmu, cütdürmü, dövrüdürmü, qabarıqdırmı?
5) bu funksiyanın törəməsini tapın və törəmənin qrafikini çəkin;
6) funksiyanın kritik nöqtələrini, ekstremumlarını, sıralarını, ən böyük və ən kiçik qiymətlərini tapın.

Verilənlər: $(0,0),(2,2),(5,-1),(7,1)$.

Tapşırıq 2. $y = x^2 - x$ parabolası verilmişdir. Elə yeni parabola seçin ki, verilmiş paraboladan sağda olsun və qolları aşağıya yönəlmiş olsun və absisi *d>1* nöqtələrində hamar (törəməsi kəsilməz olan) şəkildə digər nöqtələr keçsin. Bu iki parabolanın hissələri yeni funksiya təşkil edir. Bu yeni funksiyanın törəməsini tapın və qrafikini qurun.

Verilənlər: *d=2.*

Tapşırıq 3. Tutaq ki, firmanın istehsal funksiyası $y = f(x)$-dir (əsas fondların həcmi *x* və məhsul buraxılışı *y* dəyər qiyməti ilə verilib). Əsas fondların həcmi *b*-yə bərabərdir. Fond verimini orta və limit qiymətlərini, məhsul buraxılışının fondlara görə elastikliyini tapın.

Məsələni həll edərək firmanın optimal ölçülərini tapın, resurslara tələb funksiyasını və məhsula təklif funksiyasını tapın. Baxdığımız momentdə məhsulun qiymətinin resursların qiymətindən iki dəfə çox olduğunu hesab edin.

Verilənlər: $F(x) = 50\sqrt{x}, b = 64.$

Tapşırıq 4. Ambara sementi *Q* tonluq barja ilə gətirirlər. Faktura xərcləri *K* - ya bərabərdir. Saxlama xərcləri bir sutkada bir ton üçün *h* sentdir. Hər sutka ambar *M* t sement buraxılır. Ambarda qalan sement ehtiyatının zamandan asılı dəyişməsinin qrafikini çəkin. Vahid zamanda orta faktura xərcini, saxlama xərcini və xərclərin cəmini tapın.

Uilson düsturuna əsasən optimal sement partiyasının ölçüsünü tapın.

Verilənlər: *Q=2000, K=3000, h=20, M=100.*

Tapşırıq 5. Funksiyanın tədqiqi planına əməl edərək, aşağıdakı funksiyaların qrafikini qurun: $y = f(x),\ z = F(x)$.

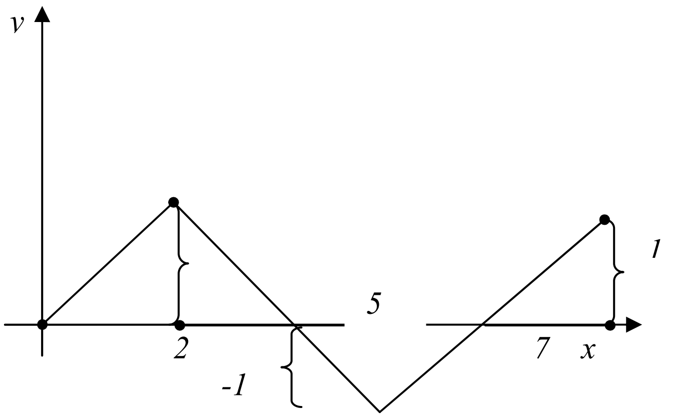
Verilənlər: $f(x) = -x^2 + 9x - 8;\ F(x) = \dfrac{6x}{(1 - x^2)}.$

2. NƏZARƏT İŞİ MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİ

Tapşırıq 1. Tədqiq olunan funksiyanı $y = f(x)$ ilə işarə edək.

1) $f(x)$-in qrafiki şəkil 1- də verilmişdir;

2) (x_0, y_0) və (x_1, y_1) nöqtələrindən keçən düz xəttin tənliyi $\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(y - y_0)}{(y_1 - y_0)}$ olar (bax p.1, bölmə 2.1).



Şəkil 1.

Ona görə də $y = f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 2, \\ -x + 4 & 2 \le x \le 5, \\ x - 6 & 5 \le x \le 7; \end{cases}$

3) $D(f) = [0,7]$, $R(f) = [-1,2]$;

4) Funksiya artan, monoton, cüt, dövrü, qabarıq deyildir; məhdud funksiyadır;

5) Funksiyanın törəməsi hissə-hissə sabitdir, 0 və 7 sərhəd nöqtələrində bir tərəfli törəməsi var, 2,5 nöqtələrində törəmə yoxdur, bu nöqtələr **II** növ kəsilmə nöqtə-

ləridir-bir tərəfli törəmələr bərabər deyillər. $f'(x)$-in qrafiki şəkil 2- də verilmişdir;

6) Böhran nöqtələri-2,5-dir; İki maksimumu var; bir 2 nöqtəsində 2-ə bərabərdir, ikinci 7 nöqtəsində 1-ə bərabərdir; minimumu 5 nöqtəsində -1-ə bərabərdir; üç sıfırı var - biri 0 nöqtəsində, digəri 4 nöqtəsində, üçüncü isə 6 nöqtəsindədir. Ən böyük qiymətini 2 nöqtəsində alır və 2-ə bərabərdir, ən kiçik qiymətini isə 5 nöqtəsində alır və -1-ə bərabərdir.

Tapşırıq 2. Əgər *d>1* olarsa, onda ikinci parabolanı $y=-x^2+bx+c$ şəklində axtarmaq olar. İki tənlikdən ibarət sistem alarıq:

$$\begin{cases} d^2-d=-d^2+bd+c, \\ 2d-1=-2d+b. \end{cases}$$

Bu sistemi həll edərək alarıq: $b=4d-1,\ c=-2d^2,$ yəni bizim halda verilənləri nəzərə alsaq taparıq:

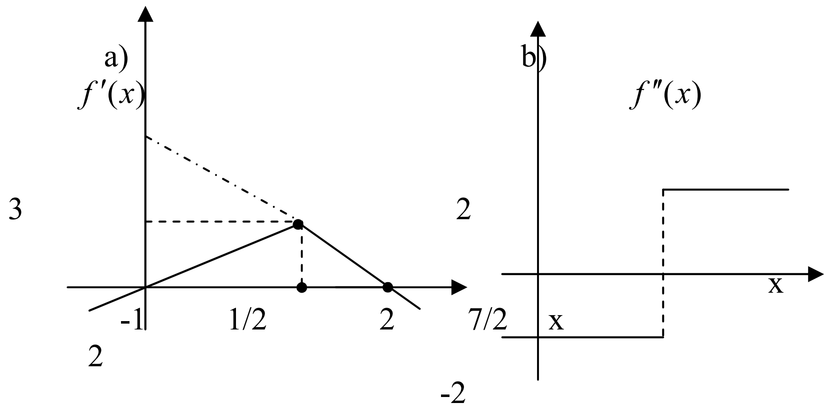
b=7, c=˜ *8.* Beləliklə, iki paraboladan alarıq:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & x\le 2, \\ -x^2+7x-8 & x\ge 2. \end{cases}$$

Bu funksiyanın törəməsi $f'(x)=\begin{cases} 2x-1 & x\le 2, \\ -2x+7 & x\ge 2. \end{cases}$ olar.

İkinci törəməsi isə $f''(x)=\begin{cases} 2 & x\le 2, \\ -2 & x\ge 2. \end{cases}$ olar.

Onların qrafiki şəkil 3-də uyğun olaraq *a, b* - də göstərilmişdir.



Şəkil 3.

Tapşırıq 3. Orta fond verilən $\frac{y(b)}{b}=6,25$ - ə bərabərdir. Limit fond verimi isə $F'(b)=\frac{50}{\left(2\sqrt{b}\right)}=3,125$ bərabərdir. Fondlara görə buraxılışın elastikliyi

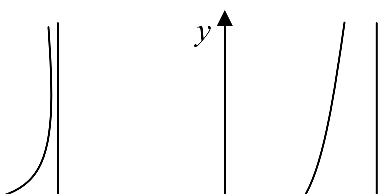
$F'(b) \Big/ \left(\frac{y(b)}{b}\right) = \frac{3,125}{6,25} = \frac{1}{2}$ olar. Firmanın məsələsini həll edək (bax p.3, bölmə 6.1): $F'(x) = \frac{p}{v}$ və ya $\frac{50}{\left(2\sqrt{x}\right)} = \frac{p}{v}$.

Beləliklə, ümumi halda tələb funksiyası $a^* = 625\frac{v^2}{p^2}$ olar və göstərilən nisbətdə $a^* = 2500$ olar. Nəhayət təklif funksiyası ümumi halda $y^* = 50\sqrt{a^*} = 1250\frac{v}{p}$ olar və göstərilən nisbətdə $y^* = 2500$ olar.

Tapşırıq 4. Oxşar məsələ p.2 bölmə 6.1- də ətraflı baxılmışdır.

Tapşırıq 5. Yalnız ikinci funksiyanı *F(x)* funksiyasını tədqiq edək və qrafikini quraq:

1) funksiyanın təyin oblastı; $x \neq \pm 1$;
2) funksiya ümumi şəkildədir;
3) iki kəsilmə nöqtəsi var: $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ və hər ikisi ikinci növdür;
4) iki şaquli asimptotu var: $x = -1,\ x = 1$ və iki maili asimptotu var soltərəfli $y = 0$ və sağ tərəfli $y = 0$;
5) *Ox* oxu ilə bir kəsişmə nöqtəsi var $x = 0$;
6) $x = \pm 1$- dən fərqli nöqtələrdə $F'(x) = \frac{\left(6x^2 + 6\right)}{\left(1 - x^2\right)^2} > 0$ olar, deməli üç artma inteqrvalı var: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \infty)$ ekstremumları yoxdur;
7) birinci törəmə ciddi müsbət olduğundan, əyilmə nöqtəsi yoxdur. Funksiyanın qrafikini quraq (şəkil 4).



Şəkil 4.

3.Nəzarət işlərinin yeddi variantı

var-tın №-si	Tapşırıqlar üçün verilənlər				
	I	II	III	IV	V
1.	$(0,1)$, $(2,-1)$ $(4,6)$, $(6,0)$	2	$10\sqrt[3]{x}$ 27	$Q=1000$ $K=1000$ $h=10$ $M=50$	$f(x)=2x^2-x$ $F(x)=2/(x+1)^2$
2.	$(0,0)$, $(1,2)$ $(3,-1)$, $(5,1)$	3	$50\sqrt{x}$ 100	$Q=2000$ $K=2000$ $h=10$ $M=50$	$f(x)=x^2-x+1$ $F(x)=4/(x^2+1)$
3.	$(0,-1)$, $(2,0)$ $(4,0)$, $(5,2)$	4	$30\sqrt[4]{x}$ 81	$Q=4000$ $K=3000$ $h=20$ $M=100$	$f(x)=-x^2+2x$ $F(x)=x/(x^2+1)$

4.	$(0,-2)$, $(2,0)$ $(4,3)$, $(6,0)$	5	$40x^{2/3}$ 8	$Q=4000$ $K=3000$ $h=10$ $M=40$	$f(x)=2x^2-5$ $F(x)=x^2/(x-1)$
5	$(0,3)$, $(2,4)$ $(4,-1)$, $(6,-2)$	6	$40x^{3/4}$ 16	$Q=5000$ $K=500$ $h=10$ $M=50$	$f(x)=-x^2+x+6$ $F(x)=4/x(x-1)$

6	$(1,4)$, $(2,4)$ $(4,6)$, $(6,0)$	7	$64x^{3/5}$ 32	$Q=500$ $K=1000$ $h=20$ $M=50$	$f(x)=-x^2+2x+4$ $F(x)=2(x^2-1)/x$
7	$(0,2)$, $(1,4)$ $(3,0)$, $(5,-1)$	8	$96x^{2/5}$ 32	$Q=1000$ $K=1200$ $h=15$ $M=100$	$f(x)=x^2-2x+4$ $F(x)=2(1-x)/x^2$

Ə l a v ə 3 .

3№-Lİ NƏZARƏT İŞİ (7-9 mövzularına aid)

İşdə variant №1 göstərişlərlə (başqa variantlar üçün də) və həlləri ilə verilmişdir və həmçinin №2-5 variantları üçün də.

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da verguldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1. VARİANT №1 ÜÇÜN TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Variant №1

Tapşırıq 1. $z=\left(x^2\cdot y+1\right)^2$ funksiyası üçün:

a) bir neçə səviyyə xətlərini qurun;
b) 1-ci və 2-ci tərtib xüsusi törəmələri ümumi şəkildə və (1,1) nöqtəsində tapın (qarışıq törəmələrin bərabərliyinə əmin olun);
c) ümumi şəkildə və *(2,3)* nöqtəsində qradiyenti tapın;
ç) ümumi şəkildə və *(3,5)* nöqtəsində diferensialı tapın;
d) (0,0) nöqtəsində *(1,4)* vektoru istiqamətində törəməni tapın;
e) tutaq ki, $x=2t,\ \ y=t^2-1$; ümumi şəkildə və *t=1* olduqda z_t' - i tapın.

Tapşırıq 2. $U=\sqrt{x_1,x_2}$ faydalılıq funksiyası üçün:

a) bir neçə etinasızlıq əyrisini qurun;
b) ümumi şəkildə və *(1,1)* nöqtəsində faydalılıq limitini tapın;
c) əmtəələrə görə ümumi şəkildə və *(2,3)* nöqtəsində faydalılıq elastikliyini tapın;
ç) ümumi şəkildə və *40* gəlirlə, *(4,1)* qiymətlərlə tələb nöqtəsini tapın.

Tapşırıq 3. Tutaq ki, istehsal funksiyası Kobba-Duqlas funksiyasıdır. Məhsul istehsalını *a* faiz artırmaq üçün fondları *b* faiz artırmaq lazımdır və ya işçilərin sayını *c* faiz artırmaq lazımdır. Hazırkı zamanda bir işçi bir ayda *M* rublluq məhsul istehsal edir, bütün işçilərin sayı isə *L*- dir. Əsas fondların qiyməti *K* rubldur. İstehsal funksiyasını yazın, orta və limit əmək məhsuldarlığını tapın, məhsul buraxılışının əməyə və fondlara görə elastikliyini tapın.

Verilənlər: *a=3, b=6, c=9,* $M=10^6$*, L=1000,* $K=10^{10}$.

Tapşırıq 4. $z=x^2+y^2+2x+4y$ funksiyasının ekstremumunu tapın və onun maksimum və ya minimum olduğunu göstərin.

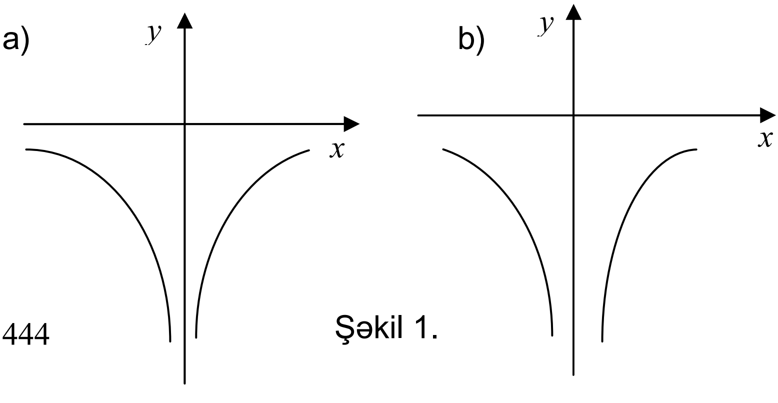
Tapşırıq 5. İki kriteriyalı məsələ üçün birinci kriteriyaya görə optimal həllini tapın:

$$x_1 + bx_2 \to \max,$$
$$ax_1 + x_2 \to \max,$$
$$x_1 + ax_2 \le 8, \qquad \text{Verilənlər: } a=2,\ b=3.$$
$$8x_1 + bx_2 \le 24,$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2. 1№-li variantın göstərişləri, həlli və cavabları

Tapşırıq 1. Həlli: a) p.2, bölmə 7.1.-ə bax; *f(x)* funksiyasının *c* səviyyə xətti $U_x = \{X : f(x) = c\}$ nöqtələri çoxluğudur. $z = (x^2y+1)^2$ funksiyası üçün *0* və *1* səviyyə xətlərini tapaq. Bilirik ki, $x^2y+1=0$, yəni $y = -\dfrac{1}{x^2}$ (bu funksiyanın qrafiki şəkil 1, a- da göstərilmişdir).

1 səviyyə xətti $(x^2y+1)^2$ çoxluğudur, yəni iki çoxluğun cəmidir: $V(x^2y=0)$ və $W(x^2y=-2)$. *V* çoxluğu *Ox* və *Oy* koordinat oxlarının cəmidir; *W* çoxluğu isə $y = -\dfrac{2}{x^2}$ (şəkil 1,b) funksiyasının qrafikidir;



Şəkil 1.

.

b) Xüsusi törəmələri tapaq:

$z'_x = 2\left(x^2y+1\right)2xy = 4x^2y^2+4xy,\ z'_y = 2\left(x^2y+1\right)x^2 = 2x^4y+2x^2;$

(1,1) nöqtəsində onlar uyğun olaraq *8* və *4*-ə bərabərdir; ikinci tərtib xüsusi törəmələri tapaq: $z''_{xx} = 12x^2y^2+4y,$

$z''_{xy} = 8x^3y+4x, z''_{yx} = 8x^3y+4x, z''_{yy} = 2x^4$ (qarışıq törəmələr doğurdan da bərabərdir);

(1,1) nöqtəsində 2- ci törəmələr belə olar: $z''_{xx} = 16,\ z''_{xy} = 12, z''_{yy} = 2$;

c) qradiyent haqqında p.3, bölmə 8.2-yə baxın; qradiyent $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, yəni $\left(4xy\left(x^2y+1\right), 2x^2\left(x^2y+1\right)\right)$; *(2,3)* nöqtəsində $z = \left(312,104\right)$ olar;

ç) funksiyanın diferensialı $dz = z'_x dx + z'_y dy$; xüsusi törəmələri yazsaq alarıq: $dz = \left(4xy\left(x^2y+1\right)\right)dx + \left(2x^2\left(x^2y+1\right)\right)dy$; *(3,5)* nöqtəsində $dz = 2760dx + 828dy$ olar;

d) İstiqamətə görə törəməyə p.3, bölmə 8.2- ə baxın;

$x = 0+t, y = 0+4t,\ z'_t = z'_x x'_t + z'_y y'_t,$ əvvəl hesabladığımız z'_x, z'_y xüsusi törəmələri yazsaq və $x'_t = 1, y'_t = 4$ əlavə etsək alarıq

$z'_t = \left(4xy\left(x^2y+1\right)\right)\cdot 1 + \left(2x^2\left(x^2y+1\right)\right)\cdot 4 = 4x\left(y+2x\right)\left(x^2y+1\right);$

(0,0) nöqtəsində göstərilən istiqamətdə törəmə sıfıra bərabər olar;

e) parametrə görə diferensiallamaya p.3, bölmə 8.1- ə baxın;

$z'_t = z'_x \cdot x'_t + z'_y \cdot y'_t$; Əvvəl hesabladığımız z'_x, z'_y xüsusi törəmələri yazsaq və $x'_t = 2, y'_t = 2t$ əlavə etsək alarıq: $z'_t = \left(4xy\left(x^2y+1\right)\right)\cdot 2 + \left(2x^2\left(x^2y+1\right)\right)\cdot 2t$; $t=1$ olduqda $x(1)=2, y(1)=0$ olar və alarıq ki, $z=8$.

Tapşırıq 2. Həlli: *«a» - «b»* punktlarının həlli bölmə 8.2- də misal 3-də verilmişdir;

c) birinci əmtəə üçün faydalılıq elastikliyi $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) \Big/ \left(\frac{U}{x_1}\right) = \frac{1}{2}$, ikinci əmtəəyə görə isə elastiklik sabitdir;

ç) bölmə 9.1 misal 2-ə baxın.

Cavab: $x_1^* = \frac{Q}{(2p_1)}, \ x_2^* = \frac{Q}{(2p_2)}$.

Konkret verilənlər üçün alarıq:

$$x_1^* = \frac{40}{8} = 5, \ x_2^* = \frac{40}{2} = 20$$

Tapşırıq 3. Bölmə 8.1 misal 6-a baxın.

Tapşırıq 4. Həlli: Xüsusi törəmələri tapaq və onları sıfıra bərabərləşdirək:

$$u'_x = 2x+2=0 \rightarrow x=-1; \ u'_y = 2y+4=0 \rightarrow y=-2.$$

Stasionar *(-1,-2)* nöqtəsini taplıq. Bu nöqtədə ekstremumun növünü tapmaq üçün 2-ci xüsusi törəmələri tapaq: $A=u''_{xx}=2, B=u''_{xy}=0, C=u''_{yy}=2. \ D=AC-B^2=4>0$ və $A=2>0$ olduğundan *(-1,-2)* nöqtəsi maksimum nöqtədir (bax p.2, bölmə 9.1).

Tapşırıq 5. Həlli 2-ci məqsəd funksiyasının maksimumunu bilmək üçün aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsini həll edək:

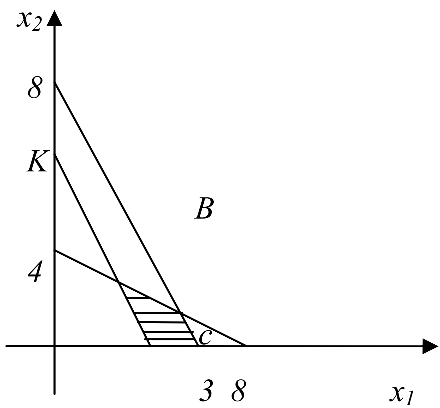
$$2x_1 + x_2 \to \max;$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8;$$
$$8x_1 + 3x_2 \le 24;$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Bu məsələ iki dəyişənli olduğundan onu qrafiki üsulla həll edək (şəkil2). Tutaq ki, çoxluq *OKBC* dördbucaqlısıdır. Koordinat başlanğıcından məqsəd funksiyasının vektor-qradiyent ayıraq, yəni *(2,1)* vektorunu və məqsəd funksiyasının səviyyə xəttini bu vektora perpendikulyar onun istiqamətində hərəkət etdirək. Səviyyə xətti mümkün çoxluqla kəsişdiyi sonuncu nöqtə *B* nöqtəsidir. Onun koordinatlarını tapmaq üçün sistem tənliyi həll edək:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8; \\ 8x_1 + 3x_2 = 24. \end{cases}$$

Onda alarıq $x_1 = \frac{24}{13}, x_2 = \frac{40}{13}$. 2-ci məqsəd funksiyasının maksimumunu hesablayaq: $2 \cdot \frac{24}{13} + \frac{40}{13} = \frac{88}{13}$. Bu maksimumun $\frac{7}{10}$-ni hesablayaq:

$$\left(\frac{7}{10}\right) \cdot \frac{88}{13} = \frac{308}{65}.$$



Şəkil 2.

İndi yeni XP məsələsinə baxaq:

$$x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + x_2 \geq \frac{308}{65};$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 8;$$
$$8x_1 + 3x_2 \leq 24;$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Yenə də bunu qrafiki üsulla həll edək, (şəkil 2-ə bax).

İki kriteriyalı məsələnin 1-ci məqsəd funksiyası maksimumuna *A(32/65,244/65)* nöqtəsində çatır və 764/65-ə bərabərdir (mümkün çoxluq ştrixlənmişdir). Bu isə yekun cavabdır.

3. 2-5 №-li variantların verilənləri

var-t	Tapşırıqlar üçün verilənlər				
	I	II	III	IV	V
2	$z=(y-1)x^2$	$u=x_1^{1/2}x_2^{1/3}$	$a=1, b=3, c=3,$ $K=10^9, L=10^3,$ $M=10^7$	$z=x^2-(y-1)^2$	$a=8$ $b=2$
3	$z=(y-1)x^2$	$u=\sqrt[3]{x_1x_2^2}$	$a=1, b=2, c=4,$ $K=10^8, L=5^4,$ $M=10^7$	$z=x^4+y^4-x^2-$ $-y^2-2xy$	$a=2$ $b=8$
4	$z=(x^2+1)\times$ $\times(y+1)$	$u=2x_1+3x$	$a=2, b=5, c=5,$ $K=10^{10}, L=2^5,$ $M=10^6$	$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$	$a=4$ $b=0$

5	$z = xy + y^2$	$\min\{2x_1, x_2\}$	$a=2, b=5, c=4,$ $K=10^{10}, L=10^4,$ $M=10^6$	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	$a=2$ $b=2$

Ə l a v ə 4.

4№-Lİ NƏZARƏT İŞİ (10-14 mövzularına aid)

Burada variant №1 göstərişlərlə və həlləri ilə, həmçinin 2-5№-li variantlar müstəqil həll etmək üçün verilmişdir.

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da verguldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1. 1№-li VARİANT ÜÇÜN TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Variant №1

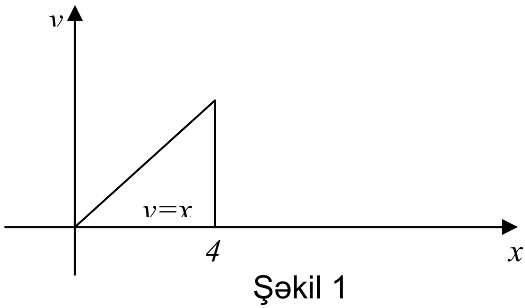
Tapşırıq 1. *A.* Müəyyən inteqralları hesablayın:

$$\int_1^2 \left(2x - 3x^2\right)dx, \quad \int_1^9 \frac{2dx}{\sqrt{x}}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{10}} 2Sin5xdx, \quad \int_0^{\pi} xSinxdx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$$

B. Qeyri-məxsusi inteqralları hesablayın: $\int_0^1 \ln xdx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)}$

V. Çoxqat inteqralları hesablayın.

Hamar oblastı (şəkil 1) və üst örtüyünün tənliyi $Z = 2X + Y$ olan silindirin həcmini tapın. Sıxlığı *f(M)=x+y+2z* olan və yuxarıda təsvir olunmuş silindirin kütləsini tapın.



Şəkil 1

.

Tapşırıq 2. A. Aşağıdakı tənliklərin *x=0* olduqda *y=1* olan xüsusi həllini tapın: $y' = 2x + x^2,\ y' = e^{4x},\ y' = SinxCosx.$

B. $y' = 3x - y,\ y' - \frac{y}{x} = x^3$ tənliklərinin ümumi həllini tapın.

Tapşırıq 3. A. Aşağıdakı sıraların yığılan və ya dağılan olduğunu göstərin:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\sqrt{n+1}\right)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2+(-1)^n\right)}{2^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n^2-4n+5\right)}$$

B. Qüvvət sırasının yığılma radiusunu tapın: $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

2. 1№-li variantın göstərişləri, həlləri və cavabları

Tapşırıq 1. Həlli: A. Birinci üç inteqral bilavasitə hesablanır, yalnız cavabları verək: 1) - 4; 2) 8; 3) 2/5.

Dördüncü inteqral hissə-hissə inteqrallama düsturu ilə hesablanır.

$x = u,\ Sinxdx = dv$ və

$$\int_o^{\pi} Sinxdx = (x - Cosx)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-Cosx)\,dx = -\pi\cdot Cos\pi + \int_0^{\pi} Cosxdx =$$

$$= \pi + Sinx\Big|_o^{\pi} = \pi$$

Beşinci inteqralı hesablamaq üçün $5 - 4x = z^2$ əvəzləməsindən istifadə edək, onda alarıq:

$$x=\frac{\left(5-4z^2\right)}{4},\ dx=-z\cdot\frac{dz}{2} \quad \text{və} \quad \int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}=\int_{3}^{1}\frac{\left(5-z^2\right)}{4}\left(-\frac{zdz}{(2z)}\right)=.$$

$$=\int_{3}^{1}\frac{\left(z^2-5\right)dz}{8}=\left(\frac{z^3}{24}-\frac{5z}{8}\right)\Bigg|_3^1=\left(\frac{1}{24}-\frac{5}{8}\right)-\left(\frac{27}{24}-\frac{15}{8}\right)=\frac{1}{6}$$

B. Qeyri-məxsusi inteqral limit olduğundan $\int_0^1 \ln xdx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\ln xdx$. Bu inteqralı hissə-hissə inteqrallasaq $0,\ x\left(\ln x-1\right)$-ə bərabər olar. Deməli,

$\int_{\varepsilon}^{1}\ln xdx=x\left(\ln x-1\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}=-1-\varepsilon\left(\ln\varepsilon-1\right)$. Aydındır ki, $\varepsilon\to 0$ -da bu ifadə -1- ə yaxınlaşır. Ona görə də baxdığımız inteqral -1- ə bərabər olar. İkinci inteqral üçün yalnız cavabı verək: π .

V. Bölmə 11.1- də misal 3- ə baxın.

Cavab: *160/3*.

Cismin kütləsinin hesablanması üçün bölmə 11.1 misal 4-ə baxın.

Cavab: $\frac{1952}{3}\approx 650,6$.

Tapşırıq 2. A. Tənliklər bilavasitə həll olunduğundan yalnız cavabları veririk: $1)\,y=x^2+x^3/3+1$; $2)\,y=e^{4x}/4+3/4$; $y=-\cos 2x/4+5/4$

B. Hər iki tənlik xətti tənlikdir və **s**abitin variasiyası üsulu ilə həll olunur. Yalnız birinci tənliyin həllinə baxaq. Əvvəlcə bircins $y'+y=0$ tənliyi həll edək. Onun ümumi həlli $y=ce^{-x}$ olar. İndii fərz edək ki, *c* *x* - dən asılı funksiyadır, diferensiallayaq və başlanğıc tənlikdə yerinə yazaq. Alarıq ki, $c'=3xe^{x}$, buradan $c=\int 3xe^{x}dx$ olar. Bu inteqralı hissə-hissə inteqrallama üsulu ilə hesablasaq alarıq.

$c=3(x-1)e^{x}$ nəticədə $y=3(x-1)+c_1e^{-x}$ alarıq.

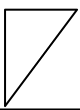
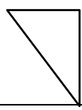
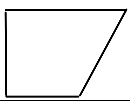
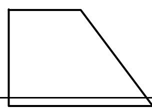
Tapşırıq 3. Həlli A. 1) sıranın ümumi həddi sıfıra deyil $\frac{1}{2}$- ə yaxınlaşdığından, sıra dağılandır (bölmə 14.1 p. «v»- ə baxın); 2) bölmə 14.1 misal 3- ə baxın; 3) sıra yığılır, bu ortaq vuruğu $\frac{1}{2}$ olan azalan həndəsi sıranın müqayisəsi ilə isbat olur; 4) sıra yığılır, belə ki, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{\left(n^2-4n+5\right)}\right)}{\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}=1$ (bax p.3, bölmə 14.1, teorem 2).

B. Bölmə 14.1 teorem 5-dən istifadə edək. Baxdığımız sıra üçün $S_n=\sqrt[n]{n}\to 1$; Deməli, bu sıranın yığılma radiusu vahidə bərabərdir.

3. 2-5№-li variant üçün verilənlər.

Tap-	Variant			
	2	3	4	5

I.				
A	$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$ $\int_0^2 (x^2-3)dx$ $\int_0^\pi \cos x dx$ $\int_4^9 \sqrt{x}dx/(\sqrt{x}-1)$ $\int_0^1 xe^{-x} dx$	$\int_{-2}^{-1} dx/(11+5x)^3$ $\int_0^7 (7+\sqrt{x})dx$ $\int_0^{\pi/6} \sin 3x dx$ $\int_0^1 \sqrt{x}\, dx/(1+x)$ $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$	$\int_2^{-13} dx/\sqrt[5]{(3-x)^4}$ $\int_0^4 (x^2+\sqrt{x})dx$ $\int_0^\pi \cos(x/2)dx$ $\int_3^8 xdx/\sqrt{1+x}$ $\int_{\pi/4}^{\pi/3} xdx/\sin^2 x$	$\int_4^9 (9-1)^2 dy$ $\int_1^4 (x^{3/2}-2x)dx$ $\int_{-\pi}^0 2\sin^2 x dx$ $\int_0^1 x^2 dx/(1+x^2)^3$ $\int_0^\pi x^3 \sin x dx$
B	$\int_0^1 3dx/\sqrt{1-x^2}$ $\int_1^\infty dx/x^4$	$\int_1^2 2xdx/\sqrt{x-1}$ $\int_1^\infty e^{-2x} dx$	$\int_{-1}^1 (x+1)dx/x^{2/3}$ $\int_{-\infty}^\infty dx/(x^2+2x+2)$	$\int_{-1}^1 dx/(x\ln^2 x)$ $\int_2^\infty \ln x dx/x$

Tap-q	Variant			
	2	3	4	5
C	$z = x + 2y$ 	$z = x + 2y$ 	$z = x + 4y$ 	$z = 4x + y$ 

	$2x+y+2z$	$x+2y$	$2x+2y+2z$	$x+6z$
II, A B	$y'=4-x^3$ $y'=2^x$ $y'=\sin 7x$ $y'=(y+1)/x$ $y^2+x^2y'=xyy'$	$y'=2+\sqrt{x}$ $y'=5^{x-1}$ $y'=\cos 5x$ $y'=2x+4y$ $xdy-ydx=ydy$	$y'=\sqrt{x}-x$ $y'=e^{x+3}$ $y'=\sin 2x\cdot\cos 2x$ $y'-y=\sqrt{x}$ $y'=1/(2x-y^2)$	$y'=2x^2+7$ $y'=2e^{-x}$ $y'=\sin^2 x$ $y'=e^{2x}-e^x y$ $y'+2y=x$
III, A B	$\sum_{n=1}^{\infty} n/(7n+1)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n^2\sqrt{n})$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/\sqrt{n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} 4/(n^2+n+2)$ $\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} n^2/(3n^2+2n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}/n^3$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^n/(4n+7)$ $\sum_{n=3}^{\infty} (n-1)/(n^3-1)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n}+2)x^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}/(7+n^{1/3})$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2n/(n^3+3)$ $\sum_{n=1}^{\infty} (7+2^n)/(-5)^n$ $\sum_{n=10}^{\infty} (n+2)/(n^3+8)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$	$\sum_{n=1}^{\infty} (n-3)/(100n)$ $\sum_{n=1}^{\infty} 7\sin n/n^2$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-3}/(1/2)^n$ $\sum_{n=0}^{\infty} 7^n/(8^n+16)$ $\sum_{n=0}^{\infty} (x/17)^n$

Ə l a v ə 5.

5 №-li NƏZARƏT İŞİ (15-16 mövzularına aid)

Burada 1№-li variantın göstərişləri və həlləri, həmçinin müstəqil həll etmək üçün oxşar 2-5№-li variantlar verilmişdir.

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da vergüldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1. 1№-li VARİANT ÜÇÜN TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Variant №1

Tapşırıq 1. Hesablayın $A_8^2, A_6^4, C_8^2, C_7^3, P_4, P_6$.

Tapşırıq 2. Verilib
$P\left(A \cup B\right) = 0,6; P\left(A \cap B\right) = 0,3;\ P_B\left(A\right) = 0,6$.

Tapın: *P(A), P(B),* $P_A(B)$ və *A,B* hadisələrinin asılı olub, olmadığını araşdırın.

Tapşırıq 3. Sexdə səkkiz kişi və üç qadın işləyir. Tabel nömrələrinə uyğun təsadüfən yeddi adam seçilir. Seçilənlərin içərisində a) yalnız iki qadının; b) heç olmasa bir qadının olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq 4. Yük sifarişçiyə təyyarə ilə, qatarla və ya avtomobillə göndərilə bilər. Bütün bu variantlar eyni imkanlıdırlar. Nəzərdə tutulan vaxtda yükün çatması ehtimalı uyğun olaraq 0,99; 0,98 və 0,90-a bərabərdir. Yükün nəzərdə tutulan vaxtda çatması ehtimalını tapın.

Tapşırıq 5. Suvenir şöbəsinə girən alıcı $\frac{1}{4}$ ehtimalla bazarlıq edir. Dörd alıcıdan a) hes olmasa birinin bazarlıq etməsini; b) düz ikisinin bazarlıq etməsi ehtimalını tapın.

Tapşırıq 6. Kredit kartlarının sahibləri onları qiymətləndirirlər və çox az hallarda itirirlər. İxtiyari kredit kartının sahibinin bir həftə ərzində onu itirməsi ehtimalı 0,001-ə bərabərdir. Bank cəmi 2000 müştəriyə kart verib. Bir həftə ərzində a) heç olmasa bir kartın; b) düz bir kartın itməsi ehtimalının tapın. Bir ayda orta hesabla neçə kart itər?

Tapşırıq 7. Diskret təsadüfi *X* kəmiyyəti paylanma sırası ilə verilib.

-1	0	1	6
0,1	0,1	0,1	0,7

a) $P(x<3), P(0<x<5), P(x>0), P(x<5), P_{x>0}(x=6)$ ehtimallarını tapın; b) paylanma funksiyasının qrafikini qurun.

Tapşırıq 8. 200 km uzunluğundaqaz turbasında *A* və *B* kompressor stansiyaları arasında qaz itkisi baş verir. Trubanın istənilən nöqtəsində qaz itkisi eyni imkanlıdır. Aşağıdakı ehtimalları tapın: a) qaz itkisi *A,B* kompressor stansiyalarından 20 km-dən uzaqda olmasın; b) *A* - ya *B*-dən yaxın olsun.

Tapşırıq 9. Təsadüfi gəlirlə bir neçə müxtəlif *(Q_1,Q_2,Q_3)* əməliyyatlara baxaq. Bütün əməliyyatlar üçün gözlənilən $\overline{Q}$ gəlirini və orta kvadratik sapmanı tapın. $E(\overline{Q},r)=\overline{Q}-r$ düsturu vasitəsilə ən yaxşı və ən pis əməliyyatı tapın.

Q_1:

-10	0	10	20
0,1	0,2	0,5	0,2

Q_2:

-10	0	10	20
0,3	0,2	0,1	0,4

Q_3:

-10	0	10	20
0,3	0,1	0,2	0,4

2. 1№-li variant üçün göstərişlər, həllər və cavablar

Tapşırıq 1. p.4 bölmə 15.1- də olan düsturlara baxın (56, 360, 28, 35, 24, 720).

Tapşırıq 2. Bölmə 15.2 -də I məsələyə baxın (*0,4; 0,5; 3/4*; asılıdırlar).

Tapşırıq 3. Ehtimalın tapılması üçün klassik düsturdan istifadə edin, bölmə 15.1- də məsələ 3- ə baxın (*28/55; 161/165*).

Tapşırıq 4. Tam ehtimal düsturunu (və ya Bayes düsturunu) tətbiq edin, bölmə 15.3- də 1-ci misala baxın (0,956).

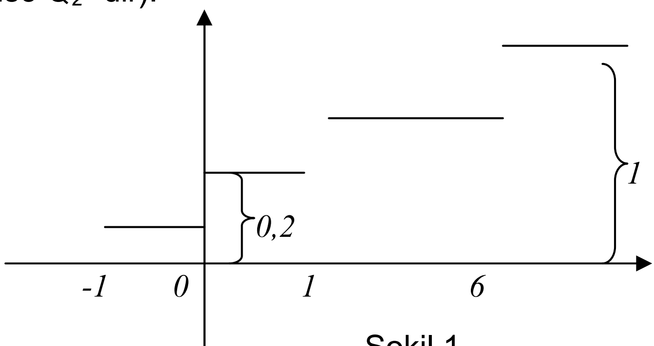
Tapşırıq 5. Bernulli düsturunu tətbiq edin, bölmə 15.3- də misal 3- ə baxın (175/256, 27/128).

Tapşırıq 6. Puassonun binomial paylanma (və ya hər hansı kanonik diskret paylanma qanununu) tətbiq edin, bölmə 16.1- də, misal 8- ə baxın (6/7, 2/7, 2, 8).

Tapşırıq 7. Bölmə 16.1- də p.3- ə baxın (0,3; 0,1; 0,8; 0,3; 7/8; $M[x]=4,2$; $D(x)=7,7$). Paylanma funksiyasının qrafiki şəkil 1- də verilmişdir.

Tapşırıq 8. Müntəzəm (və ya üstlü) paylanma qanununu tətbmq etməli, bölmə 16.3- də p.5,6- ya baxın (1/5; 1/2).

Tapşırıq 9. Bölmə 16.2- də p.3- ə baxın (Q_1-*8* üçün *8,7*; Q_2-*6* üçün *12,8*; Q_3-*7* üçün *12,7*; ən yaxşı əməliyyat - Q_1, ən pisi isə Q_2- dir).



Şəkil 1.

3. Əlavə variantlar

Variant №2

Tapşırıq I. Aşağıdakıları hesablayın:

$A_7^3, A_{10}^2, C_8^4, C_9^4, P_3, P_7$.

Tapşırıq II. Verilmişdir: $P(A \cap B) = 0,5;\ P_B(A) = 0,8.$

$P(A \cup B), P(A), P_A(B)$ ehtimallarını tapın, *A* və *B* -nin asılı olub olmadığını araşdırın.

Tapşırıq III. Qutuda üç ağ, üç qırmızı və üç qara şarlar var. Qutdan üç şar götürülür. a) hər üç şarın eyni rəngdə olması ehtimalını; b) onların arasında yalnız bir ağ şarın olması ehtimallarını tapın.

Tapşırıq IV. Tələbələrin *30%* yoxlama işini uğurla yazdı. İmtahan zamanı bu tələbələrin məsələni düzgün həll etmələri ehtimalı *0,8*-ə, qalan tələbələrin isə məsələni düzgün həll etmə ehtimalları *0,4*-ə bərabərdir. Tələbə imtahan zamanı məsələni həll edə bilmədi. Bu tələbənin yoxlama işini pis yazması ehtimalını tapın.

Tapşırıq V. *2000* saat işləyəndən sonra lampanın saz qalması ehtimalı *0,2*-ə bərabərdir. *2000* saat işlədikdən sonra beş lampadan: a) düz iki lampanın; b) birdən az olmayan lampalarınsaz qalması ehtimalını tapın.

Tapşırıq VI. Avtomat-dəzgah detallar ştamplayır. Detalın zay ştamplanması ehtimalı *0,01*-ə bərabərdir. Ştamplanmış *200* detallardan a) yalnız bir zay detalın olması; b) heç olmasa bir zay detalın olması ehtimalını tapın. *200* detal içərisində zay detalların ən ehtimallı sayı nə qədər olar?

Tapşırıq VII. Diskret təsadüfi kəmiyyəti *X* paylanma sırası ilə verilirb:

-3	-1	0	1	2	6
0,1	0,1	0,2	0,2	0,3	0,1

a) $P(x > 0), P(x < 20), P(-1 < x < 10), P(x = 3), P_{x=0}(x = 2)$

ehtimallarını tapın; b) riyazi gözləmə və dispersiyanı hesablayın; c) paylanma funksiyasının qrafikini qurun.

Tapşırıq VIII. Ağac emalı zavodunda ağacları emal edərkən ölçüsü 1m - ə qədər olan tullantı alınır. Tullantıların ölçüləri eyni imkanlıdırlar. Növbəti ağacı emal edərkən; a) tullantının *50sm*- dən az olmamasının; b) *70sm*-dən çox olmamasının ehtimalını tapın.

Tapşırıq IX. Təsadüfi gəlirli bir neçə müxtəlif əməliyyatlara (Q_1, Q_2, Q_3) baxaq. Bütün əməliyyatlar üçün gözlənilən $\overline{Q}$ gəliri, orta kvadratik sapmanı *r* hesablayın. Bu xarakteristikaları vahid qrafikdə qeyd edin və əməliyyatların qrafiki təsvirini alın. $E\left(\overline{Q}, r\right) = 2\overline{Q} - r$ düsturunun köməyilə ən yaxşı və ən pis əməliyyatı tapın.

Q_1:

-20	0	20	40
0,1	0,2	0,5	0,2

Q_3:

-10	0	10	20
0,3	0,1	0,2	0,4

Q_2:

-20	0	20	40
0,3	0,2	0,1	0,4

Variant №3.

Tapşırıq I. Aşağıdakıları hesablayın:

$A_{10}^3, A_9^7, C_{10}^3, C_9^7, P_7, P_2$

Tapşırıq II. Verilmişdir:

$$P(A \cup B) = 0,6;\; P(A \cap B) = 0,3;\; P_B(A) = 0,6.$$

Tapın: $P(A), P(B), P_A(B)$, A və B hadisələrəinin asılı olub-olmamasını araşdırın.

Tapşırıq III. Axşam qonaqlığında dairəvi stolun ətrafında *11* adam təsadüfən otururlar. İki konkret adamın a) yan-yana oturmamasının; b) bir adamdan sonra oturmalarının ehtimalını tapın.

Tapşırıq IV. Məhsul hazırlamaq üçün götürülən materialların xarakteristikaları *0,1; 0,2; 0,2; 0,2; 0,3* ehtimallarla beş müxtəlif intervallarda ola bilirlər. Bu xarakteristikalardan asılı olaraq birinci növ məhsulun alınması ehtimalı *0,6; 0,8; 0,8; 0,7; 0,9*- dur. Birinci növ məhsulun alınması ehtimalını tapın.

Tapşırıq V. Maqnitafonun zəmanət müddəti təmirə ehtiyacı olması ehtimalı *0,2*-yə bərabərdir. Dörd maqnitafondan zəmanıt müddətində a)yalnız birinin; b) ikidən az olmayan saydasının təmirə ehtiyacı olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq VI. Zavod bazaya *500* məmulat göndərir. Yolda məmulatın korlanması ehtimalı *0,002*- yə bərabərdir. Yolda a) heç olmasa bir məmulatın; b) ikidən az məmulatın xarab olması ehtimalını tapın. Xarab olan məmulatın ən ehtimallı sayı neçə ola bilər?

Tapşırıq VII. Diskret təsadüfi *X* kəmiyyəti paylanma sırası ilə verilmişdir:

-4	-1	1	3	4	6
0,1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1

a) $Y = 2X$ və $Z = X^2$ təsadüfi kəmiyyətlərinin paylanma sırasını tərtib edin; b) Y təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayın; Z təsadüfi kəmiyyətinin paylanma qrafikini qurun.

Tapşırıq VIII. Bağ sahəsində bəzən elektrik işığını təsadüfi vaxtlarda orta hesabla 3 saat müddətinə kəsirlər.

İndiki halda elektrik işığı artıq 2 saatdır ki, yoxdur; a) elektrik işığının yaxın yarım saatda verilməsi; b) onun hələ bir saat verilməsi ehtimalı neçə olar?

Tapşırıq IX. Təsadüfi

gəlirli bir neçə

(Q_1, Q_2, Q_3)

əməliyyatlarla baxaq.

Bütün əməliyyatlar üçün gözlənilən

$\overline{Q}$ gəliri, r orta

kvadratik sapmanı hesablayın.

Bu xarakteristikaları qrafikdə qeyd edib əməliyyatların qrafiki təsvirini alın. $E\left(\overline{Q}, r\right) = 6\overline{Q} - r$ düsturunun köməyilə ən yaxşı və ən pis əməliyyatı tapın.

Variant №4.

Tapşırıq I. Hesablayın $A_{12}^2, A_{12}^4, C_7^6, C_6^2, P_3, P_8$

Tapşırıq II. Verilib:

$$P(A \cap B) = 0,4;\ P_B(A) = \frac{2}{3};\ P_A(B) = \frac{3}{4}$$ Tapın:

$P(A), P(B), P(A \cup B)$ və A, B hadisələrinin asılı olub, olmamasını araşdırın.

Tapşırıq III. Beş maşın təsadüfi olaraq sıraya düzülürlər; a) iki konkret maşını yan-yana durması; b) sıranın əvvəlində durması ehtimalını tapın.

Q_1:	-30	0	30	60
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2:	-30	0	30	60
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3:	-30	0	30	60
	0,3	0,1	0,2	0,4

Tapşırıq IV. Tirdə beş tüfəng var, onların hədəfə dəyməsi ehtimalı üçün olaraq

0,5; 0,6; 0,7; 0,8 və *0,9*- dur. Təsadüfən götürülmüş bir tüfənglə birinci dəfə atıcının hədəfi vurması ehtimalını tapın.

Tapşırıq V. Ailədə dörd uşaq var. Hesab edərək ki, oğlan uşağının doğulması ehtimalı *0,5*- ə bərabərdir, bu uşaqların içərisində a) heç olmasa bir oğlanın olması; b) ikidən az olmayan sayda oğlanın olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq VI. Abonentin bir saat müddətində ATS - ə zəng vurması ehtimalı *0,01*-ə bərabərdir və bütün abonentlər üçün eynidir. ATS *200* abonentə xidmət edir. Bir saat müddətində ATS- ə gələn zənglərin a) ikidən az olmaması; b) heç olmasa bir zəngin olması ehtimalını tapın.

Bir saat müddətində ATS- ə olan zənglərin ən ehtimallı sayı neçə olar?

Tapşırıq VII. Diskret təsadüfi *X* paylanma sırası ilə verilib:

-4	-1	1	3	4	6
0,1	0,2	0,1	0,1	0,4	0,1

a) $Y = X - 1$ və $Z = \max\{X, 0\}$ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma sırasını tərtib edin; b) Z təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayın; c) paylanma funksiyasının qrafikni qurun.

Tapşırıq VIII. Beynəlxalq telefon danışıqlarının müddəti təxminən üstlü qanunla paylanır və orta hesabla danışıq *3 dəq*. davam edir. Növbəti danışığın *3 dəq*.- dən çox olması ehtimalı neçə olar? Bütün danışıqların hansı hissəsi bir dəqiqədən az olar?

Tapşırıq IX. Təsadüfi gəlirli bir neçə əməliyyatlara baxaq (Q_1, Q_2, Q_3). Bütün əməliyyatlar üçün gözlənilən $\overline{Q}$ gəliri, orta kvadratik *r* sapmanı hesablayın. Bu xarakteristikaları qrafikdə qeyd edin və əməliyyatların qrafiki təsvirini alın. $E\left(\overline{Q},r\right)=4\overline{Q}-r$ düsturunun köməyi ilə ən yaxşı və ən pis əməliyyatı tapın.

:

Q_1	-10	0	10	30
	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2:	-10	0	10	30
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3:	-10	0	10	30
	0,3	0,1	0,2	0,4

Variant №5

Tapşırıq I. Hesablayın: $A_8^3, A_9^3, C_7^5, C_{12}^3, P_4, P_6$

Tapşırıq II. Verilib:

$P\left(A\cup B\right)=0,8;\ P\left(A\cap B\right)=0,4;\ P_B\left(A\right)=0,6$. Tapın:

$P\left(A\right), P\left(B\right), P_A\left(B\right)$ və A,B hadisələrinin asılı olub-olmamasını araşdırın.

Tapşırıq III. Xarici görnüşcə eyni olan *20* dəftərdən *16*-sı dama-damadır. *4* dəftər götürülür. Onlardan a) düz ikisinin dama-dama olması; b) heç olmasa birinin dama-dama olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq IV. Zavodun yığma sexinə detallar üç avtomatdan daxil olur. Birinci avtomat *3%*, ikinci *1%*, üçüncü *2%* zay işləyir. Avtomatlardan sexə uyğun olaraq *500, 200* və *300* detalın daxil olduğunu bilərək, sexə zay detalın daxil olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq V. Dükana daxil olan telefonlardan üçdə bir hissəsi ağ rəngdədir, lakin bu bağlama açıldıqdan sonra görünür. Altı açılmamış telefondan a) düz iki ağ telefonun; b) heç olmasa bir ağ telefonun olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq VI. Texniki nəzarət şöbəsinə daxil olan inteqral sxemlərin *10%*- i zaydır. Nəzarəti həyata keçirən avtomat növbəti sxemin standart olduğunu təsdiq edənə qədər sxemlər bir-birinin ardınca yoxlanılır. Təsadüfən kəmiyyətin-avtomatın standart sxemi təsdiq edənə qədər yoxladığı sxemləri sayının paylanma sırasını tərtib edin. Bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi neçə olar?

Tapşırıq VII. Diskret təsadüfi X kəmiyyəti paylanma sırası ilə verilib:

-1	0	1	8
0,2	0,1	P_1	P_2

a) P_1 və P_2-in elə tapın ki, $M[x]=0,5$ olsun; b) X-in riyazi gözləməsini və dispersiyasını hesablayın və onun paylanma funksiyasının qrafikini qurun.

Tapşırıq VIII. Kassir *100* rubldan az olan qalığı dəmir pullarla verir və intervalda istənilən məbləğ eyni imkanlıdır. İki ardıcıl verilən məbləğin cəminin a) *100* rubldan çox olmasının; b) *120* rubldan az olmasının ehtimalı neçə olar?

Tapşırıq IX. Təsadüfi gəliri olan bir neçə (Q_1, Q_2, Q_3) əməliyyatlarına baxın. Bütün əməliyyatlar üçün gözlənilən $\overline{Q}$ gəliri, orta kvadratik r sapmasını hesablayın. Bu xarakteristikaları qeyd edib, əməliyyatların qrafikitəsvirini alın. $E(\overline{Q}, r) = 5\overline{Q} - r$ düsturundan istifadə edib, ən yaxşı və ən pis əməliyyatı tapın

	-10	0	20	50

Q_1:	0,1	0,2	0,5	0,2
Q_2:	-10	0	20	50
	0,3	0,2	0,1	0,4
Q_3:	-10	0	20	50
	0,3	0,1	*0,2*	*0,4*

Əlavə 6.

6 №-li NƏZARƏT İŞİ (bölmə 16.4, 17-19-cu mövzularına aid)

Burada 1№-li variantın göstərişləri və cavabları, həmçinin müstəqil işləmək etmək üçün oxşar 2-5№-li variantlar verilmişdir.

Diqqət! Hesablamaları ya adi kəsrlərlə, ya da vergüldən sonra bir rəqəm dəqiqliklə aparmalı.

1. 1№-li VARİANT ÜÇÜN TAPŞIRIQLARIN MƏTNİ

Variant №1

Tapşırıq I. Normal paylanmış Y təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsi vahidə və orta kvadratik sapması *2*-yə bərabərdir. Tutaq ki,

$$X = 3Y, P(x>1), P(2<x<5), P(x<2), P(x=3)$$

ehtimallarını tapın. X-in paylanma və sıxlıq funksiyalarını tapın və onların təxmini qrafiklərini qurun. Təsadüfi X kəmiyyəti üçün «üç siqma» qaydası necə olar?

Tapşırıq II. Detalın texniki nəzarət şöbəsində yoxlanılmamasının ehtimalı $p=0,2$-dir. Təsadüfi seçilmiş *400* detal içərisində yoxlanmamış detalların sayını *70*-lə *100* arasında olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq III. Müşahidələrin nəticələrinə görə: *11, 17, 17, 12, 13, 12, 15, 15, 14, 16, 13, 14, 13, 15, 16, 16, 15, 15, 14, 14*- diskret variasiyasını tezliklər çoxbucaqlısını seçmə, paylanma funksiyasını qrafikini qurun.

Hesablayın: a) seçmə ortanın və seçmə dispersiyasını iki üsulla; b)dispersiyasını qarşıq olmayan S^2 qiymətini.

Tapşırıq IV. (X,Y) təsadüfi kəmiyyətlər sistemi aşağıdakı paylanma cədvəlinə malikdir.

X / Y	0	1	2
0	0,2	0,1	0,1
2	0	0,2	0,4

Tamalı: a) X və Y kompanentlərinin paylanma qanunlarını və $Y=0$ olduqda X-in şərti paylanma qanununu tapın; b) X-in Y-dən kiçik qiymət almasını ehtimalını; c) K_{XY}-korrelyasiya momentini və K_{XY}-korrellyasiya əmsalını.

Tapşırıq V. İnvestorun imkanı var ki, öz portfelini üç növ korrelyasiyalaşdırılmayan və səmərəliliyi E_i, risqi σ_i olan aşağıdakı cədvəllə verilən kağızlarla tərtib etsin.

i	1	2	3
E_i	2	4	6
σ_i	1	3	5

Portfelin tərtibini bu kağızlarla bərabər tərtibini bütün variantlarına baxın. Qrafiki təsviri göstərin (koordinat oxları-səmərəlilik, risk). Pareto mənada optimal nöqtələr varmı?

Tapşırıq VI. Üç növ qiymətli kağızda verilmiş səmərəliliklə optimal portfel formalaşdırın: Dördə bərabər risksiz səmərəliliklə və korrelyalaşdırılmayan riskli gözlənilən səmərəliliklə *8* və *20* və *4, 10* riski ilə optimal portfelin riskli hissəsi necə qurulmuşdur?

Tapşırıq VII. Aşağıdakı cədvəldə aksiyaların E kursu, bazarın F səmərəliliyi göstərilmişdir:

E	25	23	24	25	26	27	26	25	24	25
F	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

Aksiyaların kursunu bazarın səmərəliliyindən reqresiyasını, həmçinin aksiyaların xarakteristikalarının qiymətlərini: «məxsusi» variasiyanın v və α, β, R^2 -nı tapın. (Risksiz kapital qoyuluşunun səmərəliliyi 6-ya bərabərdir).

2. 1№-li variantın göstərişləri, həlli və cavabları

Tapşırıq I. Həlli. Normal qanunu tətbiq edək (bax p.1, bölmə 17.1). Riyazi gözləmənin və dispersiyanın xassələrindən istifadə edərək alarıq ki, X normal paylanmışdır. Onun parametrləri: riyazi gözləməsi $a = 3 \cdot 1 = 3$ və orta kvadratik sapması $\sigma = 3 \cdot 2 = 6$ göstərilən ehtimalları hesablamaq üçün aşağıdakı düsturu tətbiq edək:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{(\beta - a)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{(\alpha - a)}{\sigma}\right) \quad \text{yəni}$$

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{(\beta - 3)}{6}\right) - \Phi\left(\frac{(\alpha - 3)}{6}\right) \quad \text{və nəticədə}$$

alarıq:

$$P(1 < x) = P(1 < x < \infty) = \frac{1}{2} - \Phi\left(\frac{(1-3)}{6}\right) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0,63;$$

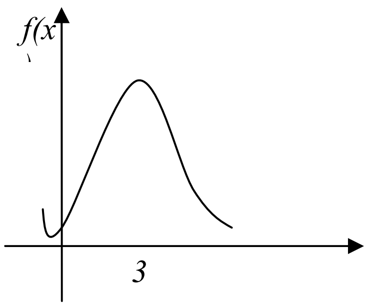
$$P(2<x<5)=\Phi\left(\frac{(5-3)}{6}\right)-\Phi\left(\frac{(2-3)}{3}\right)=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)+\Phi\left(\frac{1}{6}\right)\approx 0{,}13+0{,}06=0{,}19$$

;

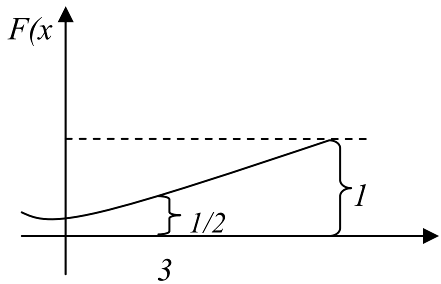
$$P(x<2)=P(-\infty<x<2)=\Phi\left(\frac{(2-3)}{6}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{1}{6}\right)\approx 0{,}44.$$

$f(x)$ sıxlıq və $F(x)$ paylanma funksiyalarının təxmni qrafiki şəkil 1 və 2- də göstərilmişdir.

$$f(x)=\left(\frac{1}{\left(6\sqrt{2\pi}\right)}\right)\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-3)^2}{72}}dt;\ F(x)=\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{1}{\left(6\sqrt{2\pi}\right)}\right)e^{-\frac{(t-3)^2}{72}}dt$$



Şəkil 1.



Şəkil 2.

«Üç siqma» qaydası:

$$P(a-3\sigma<X<a+3\sigma)=P(-15<x<21)\approx 0{,}997.$$

Tapşırıq II. Muavr-Laplasın inteqral teoremindən istifadə edək. $P(k_1<k<k_2)=\Phi\left(\frac{(k_2-np)}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{(k_1-np)}{\sqrt{npq}}\right)$. Burada $n=400, p=0{,}2, q=0{,}8$. Bu qiymətləri yerinə yazsaq, alarıq:

$$P(70 < k < 100) = \Phi\left(\frac{(100-80)}{8}\right) - \Phi\left(\frac{(70-80)}{8}\right) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25) \approx 0,88$$

Tapşırıq III. Bölmə 16.4- də olan 3, 4 misallarına baxın (14,3; 2,63; 2,76).

Tapşırıq IV. Bölmə 18.1- də olan 3,5 misallarına baxın.

$$\left(P(X < Y) = 0,2;\ K_{XY} = 0,44;\ K_{XY} \approx 0,57\right)$$

Tapşırıq V. bölmə 19.2-də misal 1-ə baxın. Müxtəlif portfellərin ümumi sayı *7* olar- üç portfel bir kağızdan ibarət (onların xarakteristikaları cədvəldə verilib), üç portfel iki kağızdan ibarət və bir portfel isə bütün üç kağızdan ibarət. Üç kağızdan ibarət olan halda cavab belə olar:

$m_p = 4, \sigma_p \approx 1,97$.

Pareto mənada optimal nöqtəni tapmaq üçün bölmə 16.2- də p.4- ə baxın.

Tapşırıq VI. Bölmə 19.2- də misal 2- ə baxın:

$$x^* = \frac{(m_p - 4)}{89}\begin{pmatrix} 1/4 \\ 6/25 \end{pmatrix}$$

Tapşırıq VII. Bölmə 19.3- də misal 1- ə baxın:

$$\left(E = 15 + F, \tilde{v} = 0,4, \beta = 1\right)$$

3.Əlavə variantlar

Variant №2

Tapşırıq I. Təsadüfi Y kəmiyyəti normal paylanmışdır, onun riyazi gözləməsi vahidə, orta kvadratik sapmsı isə ikiyə bərabərdir. Tutaq ki,

$$X = 2Y + 3. \quad P(X > 1),\ P(2 < X < 5), P(X = 3)$$

ehtimallarını tapın. X-in sıxlıq və paylanma funksiyalarını yazın və onların təxmini qrafikini qurun. Təsadüfi X kəmiyyəti üçün «üç siqma» qaydası necə olar?

Tapşırıq II. Yolda hər səkkizinci məmulat zədələnir. *700* məmulatdan ibarət partiyada zədələnənlərin sayı *80* ilə *120* arasında olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq III. Müşahidələrin nəticəsi: *21, 27, 27, 22, 23, 22, 25, 25, 24, 26, 23, 24, 23, 25, 26, 26, 25, 25, 24, 24*-diskret variasiya sırasını, tezliklərin çoxbucaqlısını, seçmə paylanma funksiyasının qrafikini qurun.

Hesablayın: a)seçmə ortanı və seçmə dispersiyasını iki üsulla; b)dispersiyanın qarışdırılmayan $\tilde{S}^2$ qiymətini.

Tapşırıq IV. (X, Y) təsadüfi kəmiyyətlər sistemi aşağıdakı paylanma cədvəlinə malikdir:

X / *Y*	-1	0	1
0	0	0,1	0,2
3	0,2	0,2	0,3

X, Y kompanentlərin paylanma qanunlarını və $Y = 0$ olduqda X-in şərti paylanma qanununu tapın. a) X-in Y-dən kiçik qiymət almasının; b) X və Y arasında korrelyasion əlaqəni tapın.

Tapşırıq V. İnvestor səmərəliliyi E_i və risqi σ_i olan (cədvəldə verilmişdir) üç növ kağızdan portfel formalaşdırmaq imkanına malikdir.

i	1	2	3
E_i	20	30	40
σ_i	6	8	10

Bu kağızlardan bərabər miqdarda olmaqla portfel formalaşdırılmasının bütün variantlarına baxın. Bütün portfellərin qrafiki təsvirini verin (koordinat oxları səmərəlilik, risq). Pareto mənada optimal nöqtə varmı?

Tapşırıq VI. Verilmiş səmərəliliklə üç qiymətli kağızdan ibarət optimal portfel formalaşdırın: səmərəliliyi vahid olan risqsiz, risqli gözlənilən səmərəliliyi *3* və *5*, risqləri uyğun olaraq *2* və *4*. Optimal portfelin risqli hissəsi necə qurulmuşdur?

Tapşırıq VII. Bir neçə kvartal üçün E aksiyaların kursu və bazarın F səmərəliliyi cədvəldə göstərilmişdir:

E:	35	33	34	35	36	37	36	35	34	35
F:	10	9	9	10	10	11	12	10	9	10

Bazarın səmərəliliyinə görə aksiyanın kursunun reqresiyasını və həmçinin aksiyanın xarakteristikalarının qiymətini: v variasiyanı və α, β, R^2-ı tapın (risksiz qoyuluşun səmərəliliyi 6-ya bərabərdir).

Variant №3.

Tapşırıq I. Y təsadüfi kəmiyyəti normal paylanmışdır. Onun riyazi gözləməsi 2-ə, orta kvadratik sapması 3-ə bərabərdir. Tutaq ki,

$X = 3Y.\ \ P(X > 1),\ P(2 < X < 5), P(X < 20), P(X = 3)$

ehtimallarını tapın. X - in sıxlıq və paylanma funksiyalarını yazın və onların təxmini qrafiklərini qurun. X təsadüfi kəmiyyəti üçün «üç siqma» qaydası necə olar?

Tapşırıq II. Hər onuncu kişinin soyadı M hərfi ilə başlanır. Polkun *900* əsgəri içərisində soyadı M ilə başlayanların sayının *80* ilə *120* arasında olması ehtimalını tapın.

Tapşırıq III. Müşahidlərin nəticələri: *31, 37, 37, 32, 33, 32, 35, 35, 34, 36, 33, 34, 33, 34, 35, 36, 36, 35, 35, 34, 34;* diskret variasiya sırasını, tezliklərin çoxbucaqlısını, seçmə paylanma funksiyasının qrafikini qurun. Hesablayın: a)seçmə ortanı və seçmə dispersiyanı iki üsulla; b)dispersiyanın S^2 qiymətini.

Tapşırıq IV. (X,Y) təsadüfi kəmiyyətlər sistemi aşağıdakı paylanma cədvəlinə malikdir:

X / Y	-2	0	2
0	0,1	0,1	0
3	0,6	0	0,2

Tapın: a) X və Y kompanentlərinin paylanma qanunlarını və $Y = 0$ olduqda X kompanentinin şərti paylanma qanununu; b) K_{XY}-korelyasiya momentini və K_{XY}-korrelyasiya əmsalını.

Tapşırıq V. İnvestor səmərəliliyi E_i və risqi σ_i olan (qiymətlər cədvəldə verilmişdir) üç növ korrelyasiyalanmamış kağızdan portfel formalaşdırmaq imkanına malikdir.

i	1	2	3
E_i	4	6	18
σ_i	5	8	12

Bərabər miqdarda kağızlardan istifadə etməklə portfelin formalaşdırılmasının bütün variantlarına baxın. Bütün portfellərin qrafiki təsvirini nöqtələrlə göstərin (koordinat oxları-səmərəlilik, risq). Pareto mənada optimal nöqtə varmı?

Tapşırıq VI. Verilmiş səmərəlilikli optimal portfeli üç növ qiymətli kağızdan formalaşdırın: səmərəliliyi *40*-a bərabər olan risqsiz, gözlənilən səmərəliliyi *80* və *200* olan, risqləri uyğun olaraq *2* və *6* olan risqli.

Optimal portfelin risqli hissəsi necə qurulub?

Tapşırıq VII. Aşağıdakı cədvəldə aksiyaların E kursu və bazarın səmərəliliyi bir neçə kvartal üçün göstərilmişdir.

E	25	23	24	25	26	27	26	25	24	25
F	20	19	19	20	20	21	22	20	19	20

Bazarın səmərəliliyinə nəzərən aksiya kursunun reqresiyasını, həmçinin aksiyanın xarakteristikalarının qiymətini tapın: v variasiyanı və α, β, R^2-nı (risqsiz qoyuluşun səmərəliliyi 8- əbərabərdir).

Variant №4

Tapşırıq I. Y təsadüfi kəmiyyəti normal paylanmışdır, onun riyazi gözləməsi ikiyə, orta kvadratik sapması vahidə bərabərdir. Tutaq ki,

$X = 2Y + 5.$ $P(X > 10),\ P(2 < X < 5), P(X < 2), P(X = 3)$

ehtimallarını tapın. X üçün sıxlıq və paylanma funksiyalarını tapın, onların təxmini qrafiklərini qurun. X təsadüfi kəmiyyət üçün «üç siqma» qaydası necə olar?

Tapşırıq II. Hər bir iyirminci kredit vaxtında qaytarılmır. Bu il bank *300* kredit verməyi planlaşdırır. Yalnız *10* kreditin vaxtında qaytarılmaması ehtimalını tapın.

Tapşırıq III. Müşahidələrin nəticələri: *13, 19, 19, 14, 15, 14, 17, 17, 18, 19, 15, 16, 15, 17, 18, 18, 17, 17, 16, 16;* diskret variasiya sırasını, tezliklərin çoxbucaqlısını, seçmə paylanma funksiyasının qrafikini qurun. Hesablayın: a) seçmə ortanı və seçmə dispersiyanı iki üsulla; b) dispersiyanın S^2 qiymətini.

Tapşırıq IV. Təsadüfi (X,Y) kəmiyyətlər sistemi aşağıdakı paylanma cədvəlinə malikdir:

X / Y	-1	0	1
0	0,1	0,1	0,2
1	0	0,1	0,5

Tapın: a) X, Y kompanentlərinin paylanma qanununu, $Y = 0$ olduqda X kompanentinin şərti paylanma qanununu tapın; b) X -in Y -dən birdən az fərqli qiymətlər almasını ehtimalını; v) K_{XY} korrelyasiya momentini və K_{XY} - korellyasiya əmsalını;

Tapşırıq V. İnvestor portfelini üç növ kağızdan formalaşdırmaq imkanına malikdir, bu kağızların səmərəliliyi E_i və risqi σ_i -dir (onların qiymətləri cədvəldə verilmişdir).

i	1	2	3

E_i	4	6	18
σ_i	5	8	12

Bu kağızlardan bərabər miqdarda istifadə etməklə portfelin formalaşmasının bütün variantlarına baxın. Bütün portfellərin qrafiki təsvirini nöqtələrlə göstərin (koordinat oxları-səmərəlilik, risq).

Pareto mənada optimal nöqtə varmı?

Tapşırıq VI. Verilmiş səmərəlilikli optimal portfeli üç növ qiymətli kağızdan formalaşdırın: səmərəliliyi ikiyə bərabər risqsiz və gözlənilən səmərəliliyi *6* və *12*- yə bərabər olan, *2* və *8* risqli kağızlardan; optimal portfelin risqli hissəsi necə qurulmuşdur?

Tapşırıq VII. Aşağıdakı cədvəldə aksiyaların E kursu və bazarın F səmərəliliyi göstərilmişdir. Aksiyaların kursunun bazarın səmərəliliyinə nəzərən reqressiyasını, həmçinin aksiyaların xarakteristikalarının qiymətlərini v variasiyanı və α, β, R^2 tapın (risqsiz qoyuluşun səmərəliliyi 6-ya bərabərdir).

Ədəbiyyat

1. *Ашманов С.А.* Математические модели и методы в экономике. – М., 1980.
2. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980.
3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей.– М.: Наука, 1969.
5. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1977.
6. *Кирюшенков В.Н.* Лекции по высщей математике (рукопись).
7. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волощенко А.Б.* Математическое программирование. М., 1980.
8. *Первозванский А.Т., Первозванская Т.Н.* Финансовый рынок: расчет и риск. – М.:ИНФРА– М., 1994.
9. *Фалин Г.И., Фалин А.И.* Введение в актуарную математику. – М.: Изд-во МГУ, 1994.
10. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969.

M Ü N D Ə R İ C A T

HİSSƏ 2
Riyazi analiz iqtisadi əlavələrlə

HİSSƏ 3

Ehtimal nəzəriyyəsi və iqtisadiyyatda statistik üsullar

В.И.Малыхин

Математика в экономике

Учебное пособие

--

Azərbaycan dilində

Çapa imzalanıb 07. 04. 2008. Kağız formatı 60x84 1/16.
Həcmi 29,8 ç.v. Sifariş 42. Sayı 500.

" İqtisad Universiteti " nəşriyyatı.
AZ 1001, Bakı, İstiqlaliyyət küçəsi, 6

Qrant layihəsi əsasında qeyri-kommersiya xarakterli nəşr.