<u>***Riyaziyyat-2 Fənnindən Kollokvium Suallarının Cavabları (Rus Bölməsi)***</u>

<u>1.</u> Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n + 7}$ применим признак Даламбера:

$$U_n = \frac{2n}{3^n + 7}, \qquad U_{n+1} = \frac{2\left(n+1\right)}{3^{n+1} + 7}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)\cdot\left(3^n + 7\right)}{\left(3^{n+1} + 7\right)2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n + 7}{3^{n+1} + 7}\cdot\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 + \frac{7}{3^n}}{3 + \frac{7}{3^n}}\cdot\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1+0}{3+0}\cdot\left(1+0\right) = \frac{1}{3}$$

О: $l = \frac{1}{3} < 1$ значит данный ряд сходится.

<u>2.</u> Исследовать сходимость ряда по принципу Даламбера:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n\left(n+1\right)}$ применим признак Даламбера:

$$U_n = \frac{n!}{3^n\left(n+1\right)}, \qquad U_{n+1} = \frac{\left(n+1\right)!}{3^{n+1}\left(n+2\right)}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(n+1\right)!\cdot 3^n\left(n+1\right)}{3^{n+1}\cdot\left(n+2\right)\cdot n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(n+1\right)\left(n+1\right)}{3\left(n+2\right)}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n + 6} = \lim_{n\to\infty} \frac{n + 2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{6}{n}} = \infty$$

$l = \infty$ значит данный ряд расходится.

3.Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Решение : $\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\Big|_1^b=$

$=\lim_{b\to\infty}\left(\ln\left|\frac{b}{b+1}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2<\infty$

Данный ряд сходится.

4. Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n^2}$$

Решение:

$$\int_1^{\infty}\frac{2x-1}{x^2}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{b\to\infty}\left(2\ln|x|+\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(2\ln b+\frac{1}{b}-1\right)=\infty$$

Ответ: данный ряд расходится.

5. Исследовать сходимость ряда по интегральному признаку Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-2}}$$

Решение :

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3x-2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{3x-2}}dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_1^b\frac{1}{\sqrt{3x-2}}d(3x-2)=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}\sqrt{3x-2}\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\frac{2}{3}(\sqrt{3b-2}-1)=\infty$$

Ответ: данный ряд расходится.

6. Найти радиус сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n-1}},\quad a_n=\frac{1}{2^{n-1}},\qquad a_{n+1}=\frac{1}{2^n}$$

Решение:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n}{2^{n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}2=2$$

Ответ: R=2

7. Найти радиус сходимости ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}\quad .$$

$$a_n=\frac{1}{3^n(n+1)},\qquad a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}(n+2)}$$

Решение:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}(n+2)}{3^n(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=3$$

Ответ : R=3

8. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n x^n}{n}$

Решение:

$$a_n=\frac{10^n}{n},a_{n+1}=\frac{10^{n+1}}{n+1}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{10^n\cdot(n+1)}{n\cdot 10^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{10}$$

Ответ: $R=\frac{1}{10}$

9. Найти радиус сходимости $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$.

Решение:

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)},a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)=1$$

Ответ : R=1

10. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$

Решение:

$$a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n}}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{2^{n+1}}}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^n\sqrt{2^{n+1}}}{\sqrt{2^n}\cdot 3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ:

$$R = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

11. Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными $xy' - y - 1 = 0$.

Решение:

$$x\frac{dy}{dx} = y+1$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y+1} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + c_1$$

$$\ln|y+1| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln|y+1| = \ln|cx|$$

y+1=cx

y=cx-1

Ответ : y = cx-1.

12. Найти общее решение уравнения с разделяющимися переменными: $x^2y' + y = 0$.

Решение:

$$x^2\frac{dy}{dx}=-y$$

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x^2}$$

$$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x^2}$$

$$\ln y=\frac{1}{x}+c_1$$

$$y=e^{\frac{1}{x}}+c_1=ce^{\frac{1}{x}}$$

$$y=ce^{\frac{1}{x}}$$

Ответ : $y=ce^{\frac{1}{x}}$

13. Найти общее решение уравнения $(x^2+1)y'-xy=0$ с разделяющимися переменными .

Решение:

$$(x^2+1)y'-xy=0$$

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=xy$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\ln|y|=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+c_1$$

$$\ln|y|=\ln\sqrt{x^2+1}+\ln|c|$$

$$\ln|y|=\ln\left|c\sqrt{x^2+1}\right|$$

$$y=c\sqrt{x^2+1}$$

Ответ : $y=c\sqrt{x^2+1}$

14. Найти общее решение уравнения $2(x+1)y'+y=0$ с разделяющимися переменными .

Решение:

$$2(x+1)y' + y = 0$$

$$2(x+1)\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x+1}$$

$$\int\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + c_1$$

: $$\ln|y| = \ln c - \frac{1}{2}\ln|x+1|$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{c}{\sqrt{x+1}}\right|$$

$$y = \frac{c}{\sqrt{x+1}}$$

Ответ . $\dfrac{c}{\sqrt{x+1}}$

15. Найти общее решение линейного уравнения $y' + 2xy = 2xe^{x^2}$

Решение : заменим y = uv , тогда подставляя $y' = u'v + uv'$ получим

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{x^2}$$

$$u'v + (v' + 2xv)u = 2xe^{x^2} \qquad (1)$$

$$v' + 2xv = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -2xv$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx$$

$$\ln v = -x^2$$

$v = e^{-x^2}$ это выражение подставим в равенство (1)

$$u'e^{-x^2} = 2xe^{x^2}$$

$$u' = 2xe^{2x^2}$$

$$u = \int 2xe^{2x^2}dx = \frac{1}{2}e^{2x^2} + c$$

$$y = uv = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2}e^{2x^2} + c\right)$$

Ответ: $$y = \frac{1}{2}e^{x^2} + ce^{-x^2}$$

16. Найти общее решение линейного уравнения $xy' - 3y = x^2$.

Решение : заменим y = uv , тогда $y' = u'v + uv'$. Эти выражения подставим в уравнение.

$$xu'v + xuv' - 3uv = x^2$$

$$xu'v + (xv' - 3v)u = x^2$$

$$xv' - 3v = 0$$

$$xv' = 3v$$

$$x\frac{dv}{dx} = 3v$$

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dv}{v} = 3\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = 3\ln x$$

$v = x^3$ Это выражение учитываем в (1) :

$$xu'x^3 = x^2$$

$$u' = \frac{1}{x^2}$$

$$u = \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + c$$

$$y = uv = x^3\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

Ответ: $$y = x^3\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

17. Найти общее решение линейного уравнения $xy' + y = \sin x$.

Решение: заменим y = uv , тогда $y' = u'v + uv'$.Эти выражения подставим в данное уравнение .

$$x(u'v+uv')+uv=\sin\ x$$
$$xu'v+xuv'+uv=\sin\ x$$
$$xu'v+(xv'+v)u=\sin\ x \qquad (1)$$
$$x'v+v=0$$
$$x\frac{dv}{dx}=-v$$
$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$$
$$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x}$$
$$\ln|v|=-\ln|x|$$
$$\ln|v|=\ln\left|\frac{1}{x}\right|$$
$$v=\frac{1}{x}.$$

Это выражение подставим в (1) получим:

$$xu'\cdot\frac{1}{x}=\sin\ x$$
$$u'=\sin\ x$$
$$u=-\cos x+c$$
$$y=uv=\frac{1}{x}(c-\cos x)$$

Ответ: $y=\frac{1}{x}(c-\cos x)$

18. Найти общее решение уравнения $xy''+y'=0$

Решение: заменим $y'=v(x)$ тогда $y''=v'(x)$. Эти выражения подставим в уравнение

$$xv'(x)+v(x)=0$$
$$x\frac{dv}{dx}=-v$$
$$\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x| + c_0$$
$$\ln|v| = -\ln|x| + \ln|c_1|$$
$$\ln|v| = -\ln\left|\frac{x}{c_1}\right|$$
$$\ln|v| = \ln\left|\frac{c_1}{x}\right|$$
$$v = \frac{c_1}{x}$$
$$y' = \frac{c_1}{x}$$
$$y = c_1 \ln x + c_2$$

Ответ: $y = c_1 \ln x + c_2$

19. Найти общее решение уравнения $y'' + \dfrac{y'}{x-1} = 0$

Решение: заменим $y' = v(x)$ тогда $y'' = v'(x)$. Эти выражения подставим в уравнение

$$v'(x) + \frac{v(x)}{x-1} = 0$$
$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x-1}$$
$$\int \frac{dv}{dv} = -\int \frac{dx}{x-1}$$
$$\ln v = -\ln|x-1| + C_0$$
$$\ln v = -\ln|x-1| + \ln|C_1|$$
$$\ln v = -\ln\left|\frac{x-1}{C_1}\right|$$
$$\ln v = \ln\left|\frac{C_1}{x-1}\right|$$
$$v = \frac{C_1}{x-1}$$
$$y' = \frac{C_1}{x-1}$$

$$y = C_1 \int \frac{dx}{x-1} = C_1 \ln|x-1| + C_2$$

Ответ: $y = C_1 \ln|x-1| + C_2$

20. Найти общее решение уравнения: $y'' = y' Ctgx$

Решение: заменим $y' = v(x)$ тогда $y'' = v'(x)$. Эти выражения подставим в уравнение:

$$v'(x) = v(x) ctgx$$

$$\frac{dv}{dx} = v\, ctgx$$

$$\frac{dv}{v} = ctgx\, dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int ctgx\, dx$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x| + C_0$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|$$

$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x|$$

$$v = C_1 \sin x$$

$$y' = C_1 \sin x$$

$$y = -C_1 \cos x + C_2$$

Ответ: $y = -C_1 \cos x + C_2$

21. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

Решение: запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 3 = 0$$

Корни характеристического уравнения

$k_1 = 1$ и $k_2 = 3$

Система фундаментальных решений:

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{3x}$

Общее решение данного уравнения:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$$

Ответ: $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$

22. Найти общее решение уравнения:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

Решение: Запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0$$

Корни характеристического уравнения

$$k_1 = k_2 = 3$$

Система фундаментальных решений:

$$y_1 = e^{3x} \quad \text{и} \quad y_2 = xe^{3x}$$

Общее решение данного уравнения:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

Ответ: $y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$

23. Найти общее решение уравнения:

$$y'' + 6y' + 8y = 0$$

Решение: запишем характеристическое уравнение:

$$k^2 + 6k + 8 = 0$$

Корни характеристического уравнения:

$$k_1 = -2, \quad k_2 = -4$$

Система фундаментальных решений:

$$y_1 = e^{-2x} \quad \text{и} \quad y_2 = e^{-4x}$$

Общее решение данного уравнения:

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}$$

Ответ: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}$

24) Признаки сходимости положительных рядов (признак Даламбера и Коши)

Если для ряда с положительными членами

$$U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n + \ldots\ldots$$

существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell,$ то ряд :

1) сходится при $\ell < 1$
2) расходится при $\ell > 1$
3) требует дополнительного исследования при $\ell = 1$

ПРИЗНАК КОШИ.

Если для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n \ (U_n > 0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{U_n} = C,$ то этот ряд

1) сходится при $C < 1$;
2) расходится при $C > 1$;
3) ничего сказать нельзя при $C = 1$

25) Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \cdot (-1)^{n-1} = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \ldots + (-1)^{n-1} U_n + \ldots \qquad (1)$$

Или

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}U_n = -U_1 + U_2 - U_3 + \ldots + (-1)^n U_n + \ldots \qquad (1')$$

Где $U_k > 0 \quad (k = 1,2,3,\ldots)$ называется знакочередующимся.

ПРИЗНАК ЛЕЙБНИЦА. Если члены знакочередующегося ряда (1) по абсолютной величине монотонно убывают, при возрастании их номера, т.е.

$U_1 > U_2 > U_3 > \ldots > U_n < \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$, то такой ряд сходится, сумма его положительна и не превышает первый член.